NOTA

SULL' ESPRESSIONE DEL VOLUME TERMINATO DALLA SUPERFICIE DI QUARTO ORDINE, LUOGO GEOMETRICO DELLA PROJEZIONE ORTOGONALE DEL CENTRO DELL' IPERBOLOIDE A DUE FALDE SU I PIANI TANGENTI

DI BARNABA TORTOLINI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME NELL' UNIVERSITÀ DI ROMA

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 7 Dicembre 1847.

1°. In una mia Memoria pubblicata nel Tomo 31° del Giornale del Signor Crelle di Berlino, ho espresso il volume del solido terminato dalla superficie di quarto Ordine, luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' Iperboloide a due falde su i piani tangenti, per mezzo di un Integrale definito semplice senza avvertire, che questo integrale può ridursi ai trascendenti ellittici. Mostrare come possa effettuarsi una tal riduzione è il principal oggetto di questa Nota. Prima per altro accennerò per maggior chiarezza alcune cose esposte in detta Memoria.

2°. L' equazione dell' iperboloide a due falde con l'origine al centro, e riferita agli assi principali $2a$, $2b$, $2c$ nella direzione delle coordinate x, y, z, sarà

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ove $2c$ rappresenta l' asse trasverso. Combinando convenientemente l' equazione del piano tangente, e della perpendicolare abbassata dal centro su questo piano, otteremo, come ho fatto vedere nella citata Memoria, l' equazione della nuova superficie projezione del centro su i piani tangenti: questa sarà

$$(x^2+y^2+z^2)^2=c^2z^2-a^2x^2-b^2y^2.$$

Una tal superficie dotata di centro, e limitata in tutte lé direzioni è somigliante a quelle, che nelle figure curvilinee ha la *lemniscata*, ed il centro sarà un punto doppio della superficie ove passeranno due piani tangenti. Per le sezioni principali nei piani xz, yz otteniamo due curve di quarto ordine

$$(x^2+z^2)^2=c^2z^2-a^2x^2,\quad (y^2+z^2)^2=c^2z^2-b^2y^2$$

le quali sono il luogo geometrico della projezione ortogonale del centro di due iperbole sulle sue tangenti: queste iperbole sono evidentemente due sezioni principali dell' iperboloide a due falde. Per la sezione principale nel piano xy si avrà la curva imaginaria

$$(x^2+y^2)^2=-a^2x^2-b^2y^2$$

il che prova essere il centro un punto dal quale partono le due superficie chiuse eguali, e simili fra di loro. È facile dimostrare che gli angoli α, β, γ formati dal piano tangente la superficie nel centro con i tre piani yz, xz, xy sono determinati pel doppio sistema di valori

$$\cos\alpha=\pm\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad \cos\beta=\pm\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

quindi il centro è un punto doppio. Se alle coordinate ortogonali x, y, z si sostituiscano le polari r, p, q; ponendo

$$z=r\cos p,\quad x=r\,\mathrm{sen}\,p\cos q,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,p\,\mathrm{sen}\,q$$

avremo per l' equazione polare della superficie

$$r^2=c^2\cos^2p-a^2\,\mathrm{sen}^2p\cos^2q-b^2\,\mathrm{sen}^2p\,\mathrm{sen}^2q$$

della quale faremo uso per la risoluzione del problema propostoci.

3°. La formola per la cubatura dei solidi in coordinate polari è

$$\mathrm{V}=\tfrac{1}{3}\int\int r^3\,\mathrm{sen}\,p\,dp\,dq.$$

In essa sostituendo il trovato valore di r, si ha

$$V = \tfrac{1}{3}\int\int \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(c^2\cos^2 p - a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q)^3}.$$

Per estendere l' integrale all' intera superficie dovremo cercare la condizione, a cui è soggetto il valore di r^2, il che porge evidentemente

$$c^2 \cos^2 p > (a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q) \operatorname{sen}^2 p$$

ossia

$$\cot p > \frac{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}{c},$$

e perciò eseguendo una prima integrazione relativamente all' angolo p, i limiti delle coordinate positive, saranno

$$p = 0, \quad p = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}\right)$$

e quindi q compreso fra i limiti $q = 0$, $q = \frac{1}{2}\pi$, d' onde moltiplicando l' integrale per 8, si otterrà l' intero volume V terminato dalla superficie in questione: pongasi adunque

$$p_1 = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}\right)$$

si avrà

$$V = \tfrac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{p_1} \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(c^2\cos^2 p - a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q)^3}.$$

Per eseguire una prima integrazione relativa alla variabile p, facciamo per brevità

$$A = c^2, \quad B = a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q, \quad P = \sqrt{(A \cos^2 p - B \operatorname{sen}^2 p)}$$

$$W = \int \operatorname{sen} p\, dp \sqrt{(A \cos^2 p - B \operatorname{sen}^2 p)^3} = \int P^3 \operatorname{sen} p\, dp$$

avremo dai noti metodi d' integrazione

$$W = -\frac{P^3 \cos p}{4} + \frac{3 B P \cos p}{8} - \frac{3 B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log\left[P + \cos p \sqrt{(A+B)}\right]$$

l' angolo p_1 soddisfa alla condizione

$$\operatorname{sen} p_1 = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(A+B)}}, \quad \cos p_1 = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(A+B)}};$$

quindi facendo $p = p_1$ il valore di W diviene

$$W_{,} = \frac{-3B^2 \log(\sqrt{B})}{8\sqrt{(A+B)}}$$

così per $p = 0$ sarà

$$W_{0} = \frac{-A\sqrt{A}}{4} + \frac{3B\sqrt{A}}{8} - \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log\left[\sqrt{A} + \sqrt{(A+B)}\right].$$

Dalla differenza dei due integrali si ha l' integrale definito

$$W = \frac{A\sqrt{A}}{4} - \frac{3B\sqrt{A}}{8} + \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A+B)}}{\sqrt{B}}\right),$$

d' onde per la sostituzione dei valori di A, B, si ha

$$W = \frac{c^3}{4} - \frac{3c(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}{8}$$

$$+ \frac{3(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)^2}{8\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}} \log\left(\frac{c + \sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}\right).$$

Moltiplicando il primo e secondo membro per dq, ed integrando entro i limiti, $q = 0$, $q = \frac{1}{2}\pi$, si avrà

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} W\,dq.$$

Eseguendo le integrazioni nei termini di forma razionale, e ponendo per brevità

$$Q_{,} = \frac{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)^2}{\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}, \quad Q = \frac{c + \sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}$$

otterremo facilmente

$$V = \frac{\pi c^3}{3} - \frac{\pi c(a^2 + b^2)}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_{,} \log(Q)\,dq.$$

Questa espressione alla quale giunsi nel paragrafo 17° della mia citata Memoria si può ridurre ai trascendenti ellittici nel modo seguente:

4°. Supponiamo $a > b$, e si prenda

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}$$

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad \Delta = \sqrt{(1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 q)}$$

avremo

*

$$\sqrt{(c^2 + a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)} = \Delta \sqrt{(a^2+c^2)}$$

d' onde elevando al quadrato

$$a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q = (a^2 + c^2)\,\Delta^2 - c^2;$$

quindi facendo la sostituzione completa nel solo valore di Q, si ha

$$Q_{,} = \frac{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2}{\Delta \sqrt{(a^2 + c^2)}}, \quad Q = \frac{c + \Delta \sqrt{(a^2 + c^2)}}{\sqrt{[(a^2 + c^2)\,\Delta^2 - c^2]}}.$$

Osservando poi che

$$(a^2+c^2)\,\Delta^2 - c^2 = (\Delta\sqrt{(a^2+c^2)} + c)(\Delta\sqrt{(a^2+c^2)} - c)$$

ne segue che fatto per brevità

$$\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{c} = m$$

sarà

$$Q_{,} = \sqrt{\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right)}, \quad \log(Q) = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right).$$

La sostituzione dei valori di $Q_{,}$, $\log(Q)$ darà

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_{,} \log(Q)\, dq = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2}{2\sqrt{(a^2 + c^2)}} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right) \frac{dq}{\Delta}.$$

Infine se a $\cos^2 q$ si sostituisca $1 - \operatorname{sen}^2 q$ e si ponga

$$U_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^{2n} q}{\Delta} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right) dq$$

otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_{,} \log(Q)\, dq = \frac{1}{2\sqrt{(a^2 + c^2)}} \left[a^4 U_0 - 2a^2(a^2 - b^2)\, U_2 + (a^2 - b^2)^2 U_4\right].$$

Così il problema riducesi a calcolare integrali di forma U_{2n}.

5°. Infatti se si prende l' integrale

$$U_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{m\Delta + 1}{m\Delta - 1}\right) dq$$

e si differenzi relativamente al parametro m, come in un integrale somigliante ha fatto il Sig. *William Roberts* di Dublino, si avrà (*)

$$\frac{dU_0}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{1-m^2\Delta^2} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{1-m^2+m^2k^2\operatorname{sen}^2 q}$$

ove sostituendo

$$1-m^2 = (1-m^2)(\cos^2 q + \operatorname{sen}^2 q), \quad 1-k^2 = k'^2$$

si trova

$$\frac{dU_0}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{(1-m^2)\cos^2 q + (1-m^2k'^2)\operatorname{sen}^2 q}.$$

Prima d'integrare osserviamo che nel nostro caso, $m>1$, $mk'>1$, per ciò converrà scrivere

$$\frac{dU_0}{dm} = -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{(m^2-1)\cos^2 q + (m^2k'^2-1)\operatorname{sen}^2 q}.$$

Effettuando l'integrazione indicata si ha

$$\frac{dU_0}{dm} = -\frac{\pi}{\sqrt{(m^2-1)}\sqrt{(m^2k'^2-1)}}$$

e quindi

$$U_0 = -\pi\int\frac{dm}{\sqrt{(m^2-1)}\sqrt{(m^2k'^2-1)}}.$$

Il secondo membro è un trascendente ellittico di prima specie, e potrà ridursi alla consueta forma data da Legendre col porre

$$mk' = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}, \quad dm = -\frac{1}{k'}\cdot\frac{\cos\phi\, d\phi}{\operatorname{sen}^2\phi}$$

e però

$$U_0 = \pi\int\frac{d\phi}{\sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\phi)}},$$

ovvero per la notazione di Legendre

$$U_0 = \pi F(k', \phi),$$

ove ϕ sarà l'ampiezza, e $k'<1$ il modulo.

Dopo l'integrazione dovrà sostituirsi per

$$m = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{c}, \quad k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}.$$

(*) Liouville, Journal de Mathématiques 1846, pag. 163.

il valore di

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{mk'} = \frac{c}{\sqrt{(b^2+c^2)}}.$$

Nella stessa guisa per l' integrale U_2, abbiamo dalla differenziazione

$$\frac{dU_2}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 q\, dq}{(1-m^2+m^2k'^2\operatorname{sen}^2 q)}.$$

Per integrare il secondo membro convien fare la separazione dei termini per mezzo della divisione, il che porge

$$\frac{\operatorname{sen}^2 q}{1-m^2+m^2k'^2\operatorname{sen}^2 q} = \frac{1}{m^2k'^2} - \frac{(1-m^2)}{m^2k'^2(1-m^2+m^2k'^2\operatorname{sen}^2 q)};$$

quindi moltiplicando per dq, ed integrando abbiamo come sopra

$$\frac{dU_2}{dm} = \pi\left(\frac{1}{m^2k'^2} - \frac{(m^2-1)}{m^2k'^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}\cdot\sqrt{(m^2k'^2-1)}}\right).$$

Qui pure la moltiplicazione per dm, e la consueta sostituzione di $mk' = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}$, dà l' integrale

$$U_2 = -\pi\left[\frac{1}{mk'^2} - \frac{1}{k'^2}\int d\phi\sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\phi)}\right].$$

L' integrale che trovasi nel secondo membro è un trascendente ellittico di seconda specie, e si rappresenta con il simbolo $E(k', \phi)$, quindi

$$U_2 = -\pi\left[\frac{1}{mk'^2} - \frac{E(k',\phi)}{k'^2}\right],$$

e sostituendo nuovamente i valori di m, k' si ha

$$U_2 = -\pi\left[\frac{c\sqrt{(a^2+c^2)}}{(a^2-b^2)} - \frac{(a^2+c^2)\cdot E(k',\phi)}{a^2-b^2}\right].$$

Applichiamo ora lo stesso metodo alla ricerca del valore di U_4.

6°. Differenziando al solito relativamente ad m, si troverà

$$\frac{dU_4}{dm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^4 q\, dq}{(1-m^2+m^2k'^2\operatorname{sen}^2 q)}.$$

Dalla divisione deduciamo

$$\frac{\operatorname{sen}^4 q}{1-m^2+m^2k'^2\operatorname{sen}^2 q} = \frac{\operatorname{sen}^2 q}{m^2k'^2} - \frac{(1-m^2)}{m^4k'^4} + \frac{(1-m^2)^2}{m^4k'^4(1-m^2+m^2k'^2\operatorname{sen}^2 q)}.$$

Moltiplicando per dq, ed integrando entro i limiti $q=0$, $q=\frac{1}{2}\pi$, avremo

$$\frac{dU_4}{dm}=\pi\left[\frac{1}{2m^2k^2}+\frac{m^2-1}{m^4k^4}-\frac{(m^2-1)^2}{m^4k^4\sqrt{(m^2-1)}.\sqrt{(m^2k'^2-1)}}\right].$$

Qui pure nell'integrare relativamente ad m pongasi nell'espressione irrazionale $mk'=\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}$, si troverà facilmente

$$U_4=\pi\left[\frac{1}{3m^3k^4}-\frac{1}{2mk^2}-\frac{1}{mk^4}+\frac{1}{k^4}\int\frac{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\phi)^2\,d\phi}{\sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\phi)}}\right].$$

Se nell' integrale del secondo membro si ponga

$$\Delta'=\sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\phi)}$$

esso si svolge in

$$\int\frac{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\phi)^2\,d\phi}{\Delta'}=\int\frac{d\phi}{\Delta'}-2k'^2\int\frac{\operatorname{sen}^2\phi\,d\phi}{\Delta'}+k'^4\int\frac{\operatorname{sen}^4\phi\,d\phi}{\Delta'}.$$

Ora per i primi due integrali abbiamo evidentemente

$$\int\frac{d\phi}{\Delta'}=F(k',\phi),\quad\int\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\Delta'}=\frac{F(k',\phi)-E(k',\phi)}{k'^2}$$

come per il terzo, facendo per brevità

$$Z_{2n}=\int\frac{\operatorname{sen}^{2n}\phi\,d\phi}{\Delta'}$$

conviene ricorrere alla formola generale data da Legendre, cioè (*)

$$\Delta'\cos\phi\operatorname{sen}^{2n-3}\phi=(2n-3)Z_{2n-4}-(1+k'^2)(2n-2)Z_{2n-2}+k'^2(2n-1)Z_{2n},$$

ove fatto $n=2$, e sostituiti i valori di Z_0, Z_2 si trova

$$\int\frac{\operatorname{sen}^4\phi\,d\phi}{\Delta'}=\frac{\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\Delta'}{3k'^2}-\frac{2(1+k'^2)E(k',\phi)}{3k'^4}+\frac{(2+k'^2)F(k',\phi)}{3k'^4}.$$

Da queste espressioni dopo la riduzione e sostituzione di $k'^2=1-k^2$, otteniamo

$$\int\frac{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\phi)^2\,d\phi}{\Delta'}=\frac{2(1+k^2)E(k',\phi)}{3}-\frac{k^2F(k',\phi)}{3}+\frac{k'^2\Delta'\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{3}.$$

L'ultimo termine per la sostituzione dei valori di k', $\operatorname{sen}\phi$, $\cos\phi$, darà

(*) Fonctions elliptiques. Tom. 1er, pag. 12.

$$\frac{k'^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \sqrt{(1-k'^2 \operatorname{sen}^2\phi)}}{3} = \frac{abc}{3\sqrt{(a^2+c^2)^3}},$$

quindi è che il valore di U_4 diviene

$$U_4 = \pi \left[\frac{abc}{3k^4\sqrt{(a^2+c^2)^3}} + \frac{1}{3m^3k^4} - \frac{1}{2mk^2} - \frac{1}{mk^4} \right]$$

$$+ \pi \left[\frac{2(1+k^2)\,E(k',\phi)}{3k^4} - \frac{F(k',\phi)}{3k^2} \right].$$

Sostituendo nel secondo membro i noti valori di m, k, k', abbiamo

$$U_4 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{c(2ab-4c^2-9a^2+3b^2)}{3(a^2-b^2)^2} \right]$$

$$+ \pi \left[\frac{2(a^2+c^2)(2a^2+c^2-b^2)\,E(k',\phi)}{3(a^2-b^2)^2} - \frac{(a^2+c^2)(a^2-b^2)\,F(k',\phi)}{3(a^2-b^2)^2} \right].$$

Così gli integrali U_0, U_2, U_4 trovandosi espressi in trascendenti ellittici di prima e seconda specie di modulo $k' = \frac{\sqrt{(b^2+c^2)}}{\sqrt{(a^2+c^2)}}$, e di ampiezza

$$\phi = \operatorname{arc.sen}\left(\frac{c}{\sqrt{(b^2+c^2)}}\right)$$

si avrà facilmente la riduzione somigliante per l' integrale, che rappresenta la cubatura del solido di cui si è parlato.

7°. Infatti i valori trovati di U_0, U_2, U_4 si sostituiscano nell' ultima formola del parag. 4° avremo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_1 \log(Q)\, dq = \frac{\pi}{2}\left[c(2ab-4c^2+3a^2+3b^2) \right]$$

$$+ \frac{\pi}{2}\left(\frac{3a^4-(a^2-b^2)(a^2+c^2)}{3\sqrt{(a^2+c^2)}}\right) F(k',\phi) + \frac{\pi}{2}\sqrt{(a^2+c^2)}\left(\frac{2c^2-2b^2-2a^2}{3}\right) E(k',\phi),$$

quindi l' espressione di V già trovata al parag. 3°

$$V = \frac{\pi c^3}{3} - \frac{c(a^2+b^2)}{4} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q_1 \log(Q)\, dq$$

diviene finalmente

$$V = \frac{\pi abc}{6} + \frac{\pi}{6}\left[\frac{3a^4-(a^2-b^2)(a^2+c^2)}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\right] F(k',\phi)$$

$$+ \frac{\pi}{6} \cdot 2\sqrt{(a^2+c^2)}\,[c^2-b^2-a^2]\, E(k',\phi).$$

Il primo termine rappresenta l' ottava parte del volume di un ellissoide costruita sopra i medesimi semiassi a, b, c. Quando $a = b$ si ha $k' = 1$, e perciò

$$E(k', \phi) = \int d\phi \cos\phi = \operatorname{sen}\phi = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}$$

$$F(k', \phi) = \int \frac{d\phi}{\cos\phi} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\phi}{1 - \operatorname{sen}\phi}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{(a^2+c^2)} + c}{\sqrt{(a^2+c^2)} - c}\right),$$

ovvero

$$F(k', \phi) = \log\left(\frac{\sqrt{(a^2+c^2)} + c}{a}\right)$$

d' onde

$$V = \frac{\pi c^3}{3} - \frac{\pi a^2 c}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+c^2)}} \log\left(\frac{\sqrt{(a^2+c^2)} + c}{a}\right).$$

A questa formola si giunge egualmente per mezzo del primitivo riportato valore di W, mentre per $a = b$ le due quantità Q_1, Q del parag. 3° divengono

$$Q_1 = \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+c^2)}}, \quad Q = \frac{c + \sqrt{(a^2+c^2)}}{a}.$$

In questo caso V sarà il volume generato dalla rotazione dell' area della curva

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2 x^2 - a^2 y^2$$

attorno l' asse rettilineo $2c$.

Fine della Parte I. del Tomo XXIV.