SAGGIO DI TEORIA MATEMATICA

della distribuzione dell' elettricità sulla superficie dei corpi conduttori nell' ipotesi dell' azione induttiva esercitata dalla medesima sui corpi circostanti, per mezzo delle particelle dell' aria frapposta.

DEL CAVALIERE AMEDEO AVOGADRO

Ricevuto li 28 Giugno 1842.

In due Memorie pubblicate nel 1806 e 1807 nel *Journal de physique de La Métherie* T. 63 e 65, sotto il titolo di *Considerations sur l'état dans le quel doit se trouver une couche de corps non-conducteur de l'électricité, lorsqu'elle est interposée entre deux surfaces douées d'électricité de differente espèce*, io avea cercato di dimostrare, per mezzo di considerazioni tratte dai fenomeni del rinascimento apparente dell' elettricità nell' atto della separazione di due lastre di vetro insieme caricate, e quindi scaricate, che l'induzione per cui una superficie elettrizzata tende a produrre un' elettricità di specie opposta in un' altra superficie da essa disgiunta da uno strato di corpo isolante, sia che questo sia solido, come nella carica delle lastre di vetro, sia che esso sia gazoso, come l' aria che circonda i corpi conduttori elettrizzati, non si esercita che per mezzo d' una particolar modificazione, o stato di tensione impresso alle molecole di questo corpo isolante frapposto tra il corpo elettrizzato, e il corpo che ne subisce l' induzione.

Io aveva poi fin d' allora avvertito, che dai principj relativi a questa maniera d' agire, quando essa fosse ammessa, doveano dedursi le leggi della distribuzione dell' elettricità sulla superficie tanto dei corpi conduttori isolati, a cui essa sia comunicata, che su quella de' corpi estranei posti in loro presenza, secondo la diversa forma di questi corpi medesimi, e la loro relativa situazione, da cui dee dipendere la più o men libera corrispondenza di ciascuno dei loro punti con superficie, in cui possano per mezzo dell' accennata modificazione dell' aria frapposta, produrre una contraria elettricità, o di cui l' attuale elettricità eserciti su di loro un' azione induttiva; che quindi non erano più immediatamente applicabili a tale ricerca i calcoli dedotti dall' ipotesi di un' azione a distanza, attrattiva e ripulsiva tra le molecole del fluido o de' fluidi elettrici, esercitata anche attraverso ai corpi conduttori medesimi, ipotesi che avea fatta la base della teoria matematica di tale distribuzione, seguita da Coulomb, Poisson, ed altri autori. I risultati di questi calcoli si erano trovati in vero più o meno prossimamente conformi alle sperienze; ma io avea pensato che un' uguale prossimità, quanto ai risultati finali, si sarebbe pure ottenuta, istituendo i calcoli su quella nuova base, relativa alla teoria dell' induzione, i fenomeni considerati sotto questi due aspetti essendo forse a un dipresso equivalenti, sebbene non fisicamente identici nella loro produzione, ed avea anche poco dopo la pubblicazione di quelle due Memorie comunicate all'Accademia delle Scienze di Torino alcune mie idee a tale riguardo.

Recentemente il Sig. Faraday da sperienze, e considerazioni d'un altro genere, da lui esposte nelle serie undecima e dodicesima delle sue Ricerche sperimentali sull' elettricità, pubblicate nelle *Transazioni Filosofiche* del 1838, fu anch'egli condotto ad ammettere quella stessa ipotesi di una modificazione del corpo isolante frapposto tra due superficie elettriche, per ispiegare la forza d' induzione che l' elettricità nell' una risiedente esercita sull' altra, ed egli fece pure osservare, che i calcoli dedotti da una semplice azione a distanza, per istabilire le leggi della distribuzione dell'elettricità sui corpi elettrizzati, e su quelli esposti alla loro azione induttiva, non aveano più una base reale. Senza però poter entrare, come egli si esprime, nel fondo dell' analisi matematica di Poisson su tale distribuzione, egli pensa che la teoria da lui stabilita in quelle due memorie, e i risultati da lui ottenuti non possano trovarsi in contradizione con quelle conclusioni di Poisson, che riguardano la disposizione e lo stato finale delle forze nel piccolo numero di casi che Poisson ha considerati, quantunque esse suppongano una maniera d'agire affatto diversa da quella che si verrebbe ora ad ammettere.

In tale stato di cose, io ho creduto opportuno di ritornare ad occuparmi di questo punto, e di far conoscere un saggio di calcolo relativo alla distribuzione di cui si tratta, già da lungo tempo da me tentato, partendo da quella base dell' azione propagata per l' intermezzo delle particelle dell' aria; calcolo di cui i risultati, secondo gli accennati principj, dovessero sostituirsi a quelli dell' azione a distanza, e paragonarsi quindi colle sperienze conosciute a tale riguardo, per vedere sino a qual punto essi vi si potessero accordare, e tale è l'oggetto di questa Memoria.

Ho detto un *saggio di calcolo*, poichè lungi dal propormi di esaurire tutta l' estensione di questa ricerca, mi limito qui all'esame d' un caso solo, affatto particolare, della distribuzione dell' elettricità sulla superficie dei corpi conduttori. Cerco di determinare « la legge secondo cui l'elettricità dee distribuirsi « sui diversi punti della superfice di due sfere isolate uguali po- « ste in contatto, e che si trovano altronde abbastanza distanti « da ogni parte dai corpi circostanti, perchè questi possano ri- « guardarsi come posti tutti a ugual distanza da qualunque « punto dei due globi elettrizzati, o che torna allo stesso, come « formanti una superficie sferica, di cui il centro sia occupato « dai due globi suddetti considerati come un solo punto. » Io non ho nè anche compiutamente risolto questo problema, che secondo l' aspetto sotto cui qui lo riguardiamo, dipende, come si vedrà, da considerazioni assai complicate, e di cui alcune non sono forse suscettibili di essere sottoposte al calcolo nello stato attuale delle nostre cognizioni. Ma i risultati a cui io son giunto, paragonati colle sperienze, sono tali da indurci a credere, che una soluzione compiuta della questione condurrebbe ad una perfetta conformità colle medesime, e giustificherebbe così i principj su cui il calcolo è fondato.

Il principio da cui si tratta quì di dedurre le leggi della distribuzione dell'elettricità sulla superficie de' corpi, consiste essenzialmente nel dire, che non si può avere elettricità sulla superficie d' un corpo, senza che vi sia una quantità uguale d' elettricità di specie contraria sopra un' altra superficie separata dalla prima da uno strato di corpo isolante. Secondo questo principio è chiaro primieramente che nessun punto d' un corpo elettrizzato, o d' un sistema di corpi elettrizzati posti in comunicazione, può avere un' elettricità di specie contraria a quella d' un altro punto dello stesso sistema, come ciò è conforme all' esperienza, e che conseguentemente l' elettricità in ciascun punto non può sussistere che per la sua relazione colla superficie de' corpi estranei. Quindi la densità dell' elettricità in ciascun punto o elemento della superficie d' un sistema elettrizzato, quando non si abbia riguardo che alla corrispondenza in linea retta tra le elettricità contrarie dei punti del sistema, e di quelli dei corpi circostanti, dee essere in ragione della porzione di sfera formata dai corpi circostanti, alla quale ciascun punto di quel sistema può corrispondere in linea retta, senza interposizione di alcuna parte del sistema medesimo, diminuita tuttavia tale porzione, relativamente all' influenza di cui si tratta, nella maniera conveniente, dall' obbliquità più o men grande, sotto la quale questo elemento della superficie del sistema si presenta ai diversi elementi della stessa porzione di sfera. Ho detto *quando non si ha riguardo che alla corrispondenza delle elettricità contrarie in linea retta*, perchè la teoria e l' esperienza pajono accordarsi a mostrare (come Faraday lo ha recentemente verificato) che questa corrispondenza si esercita pure in parte in linea curva; ma pare difficile di apprezzare teoricamente questa porzione dell' azione elettrica d'induzione; onde ci contenteremo quì di calcolare l' azione in linea retta, e potremo considerare come almeno in parte raggiunto lo scopo di questo saggio, se i risultati teorici che otterremo, paragonati colle sperienze offriranno un errore che sia nel senso dell' errore che dee essere prodotto dall' ommissione di questa considerazione.

Applicando questi principj al caso di due globi A, B in contatto (*fig.* 1.ª), per trovare il rapporto della densità dell' elettricità tra il punto g del globo A posto alla distanza di 90, o più gradi dal punto di contatto *l*, ed un altro punto *h* posto ad una distanza angolare data *hl* dallo stesso punto di contatto, punti di cui il primo ha per superficie libera ne' corpi incostanti una mezza sfera superiore al punto tangente in quel punto al globo A, converrebbe calcolare primieramente, e astrazion fatta dall' accennata influenza della diversa obbliquità, la porzione di superficie libera che il globo B intercetta al punto *h*, sottrarla dalla mezza sfera, e determinare il rapporto che la porzione rimanente avrebbe colla intiera superficie della mezza sfera. Ma inoltre tra le diverse porzioni della superficie libera, alle quali il punto *g* per esempio corrisponde, la sola che contribuisca all'elettricità, presa dal punto *g*, o da un elemento di superficie posto attorno ad esso, in ragione della sua estensione, è quella che corrisponde perpendicolarmente alla superficie del globo A in g; le altre porzioni che gli corrispondono obbliquamente non concorrono all'elettricità che questo elemento può prendere, che per una parte proporzionale alla loro estensione moltiplicata pel seno dell'obbliquità che essi presentano relativamente allo stesso elemento. Così per esempio la porzione *de* (*fig.* 2ª) della superficie libera non permette, quanto a se, alla piccola porzione od elemento *ab* della superficie del globo elettrizzato attorno al punto *g*, che di prendere una quantità d' elettricità rappresentata da *cb*, e che sta a quella rappresentata da *ab* o da *fe* come il seno dell' angolo *hgb*, o *bac*, o *feb* al raggio. Dobbiamo dunque cercare di apprezzare la densità dell'elettricità sui diversi punti della superficie dei due globi in contatto secondo il grado d' influenza che le diverse parti della sfera ambiente lasciate libere, o intercette sopra ciascun globo dalla presenza dell'altro, debbono avere, secondo questo principio, per favoreggiare la condensazione dell'elettricità sopra ciascuno di questi punti od elementi superficiali. Non occorre quì di tener conto dell' influenza che il diverso spessore dello strato di corpo isolante frapposto tra questi punti dei due globi, e i corpi estranei, o che viene allo stesso, la distanza tra i punti elettrizzati, e i punti su cui essi esercitano la loro induzione, possa avere a tale riguardo, poichè per ipotesi i corpi estranei sono tutti posti a tale distanza che la differenza tra un punto e l'altro si possa considerare come insensibile.

Siano GHOI, FSOP (*fig.* 3ª) i due globi in contatto tra loro nel punto O. I due emisferi esterni HGI, SFP posseggono, secondo i principj da noi ammessi, un' elettricità uniforme ed uguale, cosicchè l' elettricità ha per esempio la stessa densità in H che in G, questi due punti avendo ciascuno un emisfero di superficie libera ne' corpi circostanti, in cui possono indurre la contraria elettricità. Secondo le sperienze di Coulomb, l' elettricità sarebbe un po' meno intensa in H che in G, nel che si scorge una conseguenza dell' azione induttiva delle elettricità in linea curva, che noi quì trascuriamo; ma la differenza ne è poco considerevole. L' elettricità è nulla al punto O, secondo la teoria, come secondo l' esperienza; e la densità elettrica dee decrescere dal punto H sino in O secondo una certa legge che si tratta di stabilire, poichè questa legge determinata per ciascun punto dell' arco HO sarà la stessa in tutti gli altri punti similmente situati relativamente ad O, e che formano circoli paralleli all' equatore o circolo massimo HI; e quello che si dice del globo GHOI si dirà parimenti del globo FSOP. Si tratta dunque solo di vedere qual rapporto la densità dell' elettricità in un punto qualunque C, distante dal punto O dell' arco CO misurante un angolo qualunque CAO$=\theta$, avrà alla densità dell' elettricità in H; e a tal fine conviene calcolare quale porzione di superficie libera sferica, formata dai corpi circostanti, corrisponda al punto C, avuto riguardo all' obbliquità di ciascuna porzione, poichè si sa che al punto H corrisponde un' intera mezza sfera di superfice libera, sottoposta alla stessa influenza della diversa obbliquità delle sue parti.

Per facilitare l' esposizione dell' analisi per ciò richiesta faremo dapprima astrazione da quell' influenza dell' obbliquità di posizione delle diverse porzioni della sfera libera: la questione si riduce allora a questo problema geometrico. Si concepisca una mezza sfera avente per centro C, posta al dissopra del piano tangente in C al globo A ossia GHOI, piano di cui la linea MCL rappresenta la projezione; si dee determinare l' area della porzion di superficie di questa mezza sfera, che è intercetta dall'interposizione della porzione del globo B ossia FSOP situata al dissopra di questo piano MCL. La porzione della superfice sferica intercetta dal globo B intiero sarebbe quella d' un segmento sferico formato dalla rivoluzione dell' arco che misura l' angolo DCB su quella superfice, sferica attorno alla linea CB prolungata sino a quella superficie, e che terminerebbe il cono QCR formato da tutte le tangenti tirate dal punto C al globo B. La superficie cercata è la porzione della superficie di questo segmento, che si trova al dissopra del piano MCL, cioè d' un piano, con cui l' asse del segmento forma un angolo BCL. Supponiamo i due angoli DCB e BCL conosciuti, e chiamiamoli s' ed s rispettivamente. Il problema si riduce così al seguente: dato un segmento sferico *afbcei* (*fig.* 4.ª) formato dalla rivoluzione d' un arco *ae*, che misura un angolo $=s'$, attorno all' asse *a*O, trovare la porzione *afbcdhi* di questo segmento separata da un arco di circolo massimo, che passa ad una distanza dal punto *a* uguale all' arco *ad* misura dell' angolo dato s, ossia di cui il piano fa col piano del circolo *a*O*m* l' angolo *a*O*d* $=s$. Basterà perciò trovare la superfice *abcdhi*, poichè *abfi* è la superficie del semi-segmento che si suppone conosciuta, od anche semplicemente *abcd* metà di *abcdhi*. Ora questa superficie *abcd* è facile a determinarsi relativamente a quella dell' intiera mezza sfera. Prenderemo perciò per unità il raggio della sfera, e indicheremo con π il rapporto del diametro alla circonferenza facendo passare pei punti *a*, *c* l' arco di circolo massimo *ac*, si avrà $abcd = abc + acd$. Ora *abc*, è la superficie d' una porzione di segmento sferico, che sta a quella del segmento sferico intiero $(1 - \cos.s').2\pi$, come l' arco *bc* stà al circolo *bcehf*, o come *ml* sta a 2π, o come l' angolo sferico *abc* o l' arco che lo misura sta allo stesso 2π. Quest' angolo *abc* è il complemento dell' angolo *dac*, e l' angolo *dac* si determina per mezzo del triangolo sferico *dac*, rettangolo in *d*, in cui si conosce il lato $ac = s'$, e il lato $ad = s$, d'onde $\cos.dac = \cot.s' \tang.s = \frac{\tang.s}{\tang.s'}$, e per conseguenza anche $\text{sen}.abc = \frac{\tang.s}{\tang.s'}$, ossia $bac = \text{arc.}\left(\text{sen.} = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right)$. Si ha dunque, secondo quello che sopra si è detto,

$$2\pi : \text{arc.}\left(\text{sen.} = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right) :: (1 - \cos.s')2\pi : \text{superficie } abc,$$

e quindi questa superficie

$$= (1 - \cos.s')\text{arc.}\left(\text{sen.} = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right).$$

Quanto alla superficie del triangolo sferico *dac*, essa si troverà osservando che si ha l'angolo *adc*, retto, ossia $= \frac{1}{2}\pi$; l'angolo $dac = \text{arc.}\left(\cos. = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right)$ come sopra abbiamo veduto; e per mezzo dello stesso triangolo sferico *acd*, l' angolo

$$acd = \text{arc.}\left(\text{sen.} = \frac{\text{sen}.s}{\text{sen}.s'}\right);$$

poichè la superficie di qualunque triangolo sferico è rappresentata dalla somma degli archi che misurano i suoi tre angoli, meno la semicirconferenza;
avremo la superficie di questo triangolo

$$=\tfrac{1}{2}\pi+\text{arc.}\left(\cos.=\frac{\text{tang.}s}{\text{tang.}s'}\right)+\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.}s}{\text{sen.}s'}\right)-\pi$$

$$=\text{arc.}\left(\cos.=\frac{\text{tang.}s}{\text{tang.}s'}\right)+\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.}s}{\text{sens.}s'}\right)-\tfrac{1}{2}\pi.$$

La superficie totale cercata $abcd=abc+acd$ sarà dunque

$$=\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{tang.}s}{\text{tang.}s'}\right)(1-\cos.s')+\text{arc.}\left(\cos.=\frac{\text{tang.}s}{\text{tang.}s'}\right)$$
$$+\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.}s}{\text{sen.}s'}\right)-\tfrac{1}{2}\pi,$$

espressione che si riduce come è facile vedere, a

$$\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.}s}{\text{sen.}s'}\right)-\text{acr.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{tang.}s}{\text{tang.}s'}\right)\cos.s'.$$

Raddoppiando quest' espressione si avrà

$$2\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.}s}{\text{sen.}s'}\right)-2\,\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{tang.}s}{\text{tang.}s'}\right).\cos.s'$$

per la superficie *abcdhi*, e se vi si aggiunge ancora $\pi(1-\cos.s')$ si avrà per l' espressione della superficie *afcdh*,

$$\pi(1-\cos.s')+2\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.}s}{\text{sen.}s'}\right)-2\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{tang.}s}{\text{tang.}s'}\right)\cos.s'.$$

Questo valore si applicherebbe ugualmente al caso in cui la porzione di superficie di cui si tratta fosse minore del mezzo segmento facendosi s negativo.

Applicando ora questo risultato alla nostra questione, si vede che la superficie libera corrispondente al punto C, nella *fig.* 3ª, poichè la superficie della mezza sfera è 2π, avrà per espressione

$$2\pi-\Big[\pi(1-\cos.\text{DCB})+2\,\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.BCL}}{\text{sen.DCB}}\right)$$
$$-2\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{tang.BCL}}{\text{tang.DCB}}\right).\cos.\text{DCB}\Big],$$

ove si dovrà prendere BCL positivo o negativo, secondo che quest' angolo si troverà al dissotto della linea BC, come nel caso della figura, o al dissopra di essa.

Non si tratta più ora, per compire la soluzione del nostro problema, che di apprezzare gli angoli DCB, e BCL in funzione dell' angolo $\theta = \mathrm{CAO}$.

Per l' angolo DCB, il triangolo DCB rettangolo in D, e in cui il lato BD è il raggio comune ai due globi, che qui indicheremo con 1, ci dà primieramente $\mathrm{sen.DCB} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CB}} = \frac{1}{\mathrm{CB}}$; e per mezzo del triangolo CEB rettangolo in E, in cui si ha

$$\mathrm{CE} = \mathrm{sen.}\theta,\ \mathrm{EB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AE} = 2 - \cos.\theta,$$

si trova

$$\mathrm{CB} = \sqrt{\mathrm{CE}^2 + \mathrm{EB}^2} = \sqrt{\mathrm{sen.}^2\theta + (2 - \cos.\theta)^2};$$

d' onde

$$\mathrm{sen.DCB} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sen.}^2\theta + (2 - \cos.\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos.\theta}},$$

$$\cos.\mathrm{DCB} = \sqrt{\left[1 - \frac{1}{5 - 4\cos.\theta}\right]}.$$

Quanto all' angolo BCL si osserverà che quest' angolo è uguale a BCE — LCE, il che dà $\mathrm{sen.BCL} = \mathrm{sen.(BCE - LCE)}$ $= \mathrm{sen.BCE.cos.LCE} - \mathrm{sen.LCE.cos.BCE}$. Ora dal triangolo BCE si ha $\mathrm{sen.BCE} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{CB}} = \frac{2 - \cos.\theta}{\sqrt{5 - 4\cos.\theta}}$, e per conseguenza

$$\cos.\mathrm{BCE} = \sqrt{\left[1 - \frac{(2 - \cos.\theta)^2}{\mathrm{sen.}^2\theta + (2 - \cos.\theta)^2}\right]} = \sqrt{\left[\frac{\mathrm{sen.}^2\theta}{\mathrm{sen.}^2\theta + (2 - \cos.\theta)^2}\right]}$$

$$= \frac{\mathrm{sen.}\theta}{\sqrt{5 - 4\cos.\theta}}.$$

Per altra parte l'angolo LCE è evidentemente $= \theta$. Si ha dunque

$$\mathrm{sen.BCL} = \frac{(2 - \cos\theta)\cos.\theta}{\sqrt{5 - 4\cos.\theta}} - \frac{\mathrm{sen.}\theta}{\sqrt{5 - 4\cos.\theta}} = \frac{2\cos.\theta - \cos.^2\theta - \mathrm{sen.}^2\theta}{\sqrt{5 - 4\cos.\theta}}$$

$$= \frac{2\cos.\theta - 1}{\sqrt{5 - 4\cos.\theta}},\ \text{e}\ \cos.\mathrm{BCL} = \sqrt{1 - \frac{(2\cos.\theta - 1)^2}{5 - 4\cos.\theta}}.$$

Si osserverà che questo seno, e per conseguenza l'angolo stesso BCL diviene nullo quando $\cos.\theta = \frac{1}{2}$, ossia $\theta = 60°$ e infatti quest' angolo dee divenir nullo quando la linea CB si confonde colla linea CL tangente al punto di cui si tratta, il che ha luogo nel punto C′, ove questa linea CB diviene essa medesima tangente al circolo A, nel qual caso il triangolo C′BA rettangolo in C′ ci dà realmente, come è facile vedere, $\cos.\theta = \cos.C'AB = \frac{1}{2}$. Se $\cos.\theta$ è maggiore di $\frac{1}{2}$, BCL, col suo seno, diviene negativo.

In conseguenza degli indicati valori avremo per la superficie libera corrispondente a un punto qualunque C della superficie del globo A (osservando che $\frac{\text{tang.BCL}}{\text{tang.DCB}} = \frac{\text{sen.BCL}\cos.\text{DCB}}{\cos.\text{BCL}\,\text{sen.ECB}}$), l' espressione

$$2\pi - \pi\Big[1 - \sqrt{\left(\frac{1}{5-4\cos.\theta}\right)} - 2\text{arc.}(\text{sen.} = 2\cos.\theta - 1)$$

$$+ 2\text{arc.}\left[\text{sen.} = \frac{(2\cos.\theta - 1)\cdot\sqrt{\left(1 - \frac{1}{5-4\cos.\theta}\right)}\cdot\sqrt{(5-4\cos.\theta)}}{\sqrt{(5-4\cos.\theta)}\cdot\sqrt{\frac{(2\cos.\theta-1)^2}{5-4\cos.\theta}}}\right] \times$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{5-4\cos.\theta}\right)}$$

che fatte le riduzioni diviene

$$2\pi - \pi\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5-4\cos.\theta}\right)}\right] - 2\text{arc.}(\text{sen.} = 2\cos.\theta - 1)$$

$$+ 2\text{arc.}\left[\text{sen.} = \frac{(2\cos.\theta-1)\sqrt{1-\cos.\theta}}{\text{sen.}\theta}\right]\sqrt{\left(1 - \frac{1}{5-4\cos.\theta}\right)}.$$

Quest'espressione della superficie libera corrispondente al punto C sussiste anche nel caso che $\cos.\theta$ sia maggiore di $\frac{1}{2}$, e che per conseguenza la porzione di segmento da sottrarsi dalla mezza sfera 2π divenga minore del semi-segmento sferico, l' angolo che dee allora divenir negativo prendendo da se stesso un valor negativo per la sostituzione del valore di θ. Quando $\cos.\theta = \frac{1}{2}$

la somma dei due ultimi termini, la quale rappresenta la superficie corrispondente all' angolo BCL diviene nulla, poichè quest' angolo stesso è allora zero; la superficie da sottrarsi dalla mezza sfera si riduce allora semplicemente a

$$\pi\left[1-\sqrt{\left(\frac{1}{5-4\cos.\theta}\right)}\right],$$

che è la superficie del semi-segmento sferico. È poi facile vedere che l' espressione intiera si annulla come ciò dee essere facendosi $\theta=0$, cioè pel punto O di contatto dei due globi, ove non vi è più superficie libera a cui esso corrisponda; e che essa diviene 2π, cioè uguale alla superficie della mezza sfera prendendo per θ l'angolo retto, cioè riferendola al punto H, che corrisponde infatti alla mezza sfera di superficie libera senza impedimento del globo B.

Se ogni porzione della superficie libera a cui ciascun punto della superficie di un corpo elettrizzato corrisponde, avesse un' uguale influenza sulla densità dell' elettricità che questa corrispondenza gli permette di prendere, l'espressione trovata di questa superficie libera nel caso dei due globi in contatto pei punti di ciascuno di essi, posti ad una distanza angolare qualunque dal punto di contatto, rappresenterebbe pure la legge della densità che l'elettricità dee offrire in questi diversi punti. Ma come sopra abbiamo veduto quest' influenza della superficie libera è diversa, nelle sue diverse porzioni, secondo la varia obbliquità con cui queste corrispondono all' elemento di superficie elettrizzata. Conviene adunque introdurre ora nel calcolo questa considerazione, da cui fin quì avevamo fatta astrazione.

Cerchiamo primieramente il rapporto della densità elettrica di un punto, dovuta ad una mezza sfera compiuta di superficie libera, secondo questa considerazione, a quella che avrebbe luogo nel caso di un' influenza uguale di tutte le sue porzioni. Sia A*a*B (*fig.* 5ª) la superficie del corpo elettrizzato, e D*f*E la mezza sfera di superficie libera al dissopra del piano tangente al punto a senza che alcun corpo vi si frapponga: la densità elettrica al punto a, per la sua corrispondenza con una piccola porzione di superficie ce presa ad un' altezza qualunque sulla mezza sfera sta a quella che lo stesso punto a può prendere per la sua corrispondenza colla piccola porzione $fg = ce$ in superficie che le corrisponde perpendicolarmente, come il seno dell' angolo caE stà al raggio, secondo quello che sopra abbiamo detto; cioè si avrà la densità dovuta alla corrispondenza con ce uguale alla densità dovuta alla corrispondenza con fg, moltiplicata per sen.caE, facendo il raggio della superficie sferica $= 1$. Se dunque si chiama 1 la densità dovuta alla porzione fg, e che se fosse pur quella dovuta a tutte le porzioni ce di superficie libera, darebbe la densità totale di elettricità nel punto a rappresentata dalla superficie della mezza sfera 2π, come prima l' avevamo supposto, e si indichi con θ l' angolo caE, la densità dovuta alla porzione ce di superficie sarà espressa da sen.θ. Ciò posto per avere la densità dovuta alla differenziale $chne$ di superficie sferica compresa tra due circoli massimi infinitamente vicini aventi il loro polo in f, e due circoli paralleli a DE, pur anche vicinissimi, bisogna moltiplicare $chne$ per sen.θ. Ora si ha $chne = ce.ch = d\theta.d\chi\cos.\theta$, chiamando χ una porzione del circolo massimo orizzontale DE, compresa tra un altro circolo massimo avente il suo polo in f, e di posizione arbitraria, e il circolo massimo fm su cui si trova la differenziale. Si avrà dunque la densità dovuta a questa porzion differenziale di superficie espressa da $d\theta.d\chi.\cos.\theta\text{sen}.\theta$, e per conseguenza la densità dovuta a tutta la mezza sfera di superficie libera, rappresentata da $\int\int d\theta d\chi\cos.\theta\text{sen}.\theta$, l'una delle integrazioni essendo fatta relativamente a θ da $\theta = 0$, sino a $\theta = \frac{1}{2}\pi$, e l'altra relativamente a χ da $\chi = 0$ sino a $\chi = 2\pi$ che è la circonferenza intiera. Facendo prima questa seconda integrazione l' integrale si riduce a $2\pi\int d\theta\cos.\theta\text{sen}.\theta$, e si ha poi $\int d\theta\cos.\theta\text{sen}.\theta = \frac{1}{2}\text{sen}.^2\theta$, che al limite $\theta = \frac{1}{2}\pi$ diviene $= \frac{1}{2}$. La densità dovuta alla mezza sfera di superficie libera è dunque semplicemente espressa dalla metà di 2π, cioè da π, invece che quando non si avea riguardo all' obbliquità delle diverse porzioni di questa superficie essa era 2π in parti di una stessa unità, e così doppia di questa.

Per avere ora secondo lo stesso principio la densità elettrica in un punto qualunque di un globo in contatto con un altro globo uguale, in conseguenza della porzione di superficie libera che gli corrisponde, e avuto riguardo all'obbliquità delle diverse parti di questa relativamente all'elemento posto in quel punto, converrà pure determinare per mezzo del calcolo integrale la quantità di superficie libera così modificata formante una porzione qualunque del segmento sferico che sopra abbiamo considerato, e ciò a qualunque altezza, al dissopra del piano tangente a quel punto, si trovi il punto di mezzo del segmento.

A tal fine sia ABD (*fig.* 6ª) la mezza sfera al dissopra di questo piano tangente; EcF la porzione di segmento di cui si tratta, avente il suo punto di mezzo in a elevato dall'arco ab sopra al piano tangente; AaD un mezzo circolo massimo che passa per questo punto, e pei due punti A, D. Siano inoltre. AmD, Am'D due circoli massimi infinitamente vicini fatti passare per gli stessi punti A, D, e di cui il primo passa pure pel punto m elevato sopra al punto a dell' arco $am=t$; ed oh, sz due archi di circoli massimi perpendicolari al circolo massimo AaD, e di cui il primo cade in h ad una distanza $ah=v$ dal punto a. L' elemento del 2.° ordine della superficie del quarto di segmento aci sarà il parallelogrammo obbliquangolo $pqrn$ compreso nelle intersezioni di questi circoli, e di cui la base sarà $rn=d(mr)$, e l'altezza un piccolo arco di circolo uguale ad $mm'.\cos.(mr)$, ossia $dt.\cos.(mr)$; quest' elemento del la superficie avrà dunque per espressione $d(mr).dt.\cos.(mr)$. Ora si osserverà che il triangolo Drh rettangolo in h ci dà $\cot.\mathrm{D}r=\cot.h\mathrm{D}.\cos.am$, ossia (poichè ah è il complemento di hD, ed mr il complemento di Dr),

$$\mathrm{tang}.mr=\mathrm{tang}.ah.\cos.am=\mathrm{tang}.v\cos.t,$$

e per conseguenza

$$\cos.mr = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang.}^2 v \cos.^2 t)}} = \frac{\cos.v}{\sqrt{(\cos.^2 v + \text{sen.}^2 v \cos.^2 t)}} = \frac{\cos.v}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2 v \text{sen.}^2 t)}}.$$

E da questo valore di $\cos.mr$ si dedurrà pure

$$d(mr) = d.\text{arc.}\left(\cos. = \frac{\cos.v}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2 v \text{sen.}^2 t)}}\right)$$

espressione che eseguita la differenziazione per rapporto a v si troverà ridursi a $\frac{dv.\cos.t}{1-\text{sen.}^2 v \text{sen.}^2 t}$. La nostra superficie differenziale sarà dunque

$$\frac{dv \cos.t}{1-\text{sen.}^2 v \text{sen.}^2 t} \cdot \frac{dt \cos.v}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2 v \text{sen.}^2 t)}} \text{ ossia } \frac{dt.dv.\cos.v \cos.t}{(1-\text{sen.}^2 v \text{sen.}^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se si integrasse quest' espressione differenziale dapprima per esempio relativamente a v da $v=0$, sino a $v=at$, cioè sino al valore di v che è intercetto da un arco di circolo massimo tradotto pel punto g d'intersezione dell'orlo del segmento coll' arco mD, e cadente perpendicolarmente sopra aD (poichè mg è il valore compiuto di mr in questo segmento), e poi relativamente a t da $t=0$ sino a $t=ac=ai=s'$, indicando quì colla stessa lettera di sopra quest' arco generatore del segmento, si avrebbe la superficie del quarto segmento, ed eseguendo solo quest' ultima integrazione da $t=0$ sino a t uguale all' arco qualunque am si ritroverebbe la superficie della porzion di segmento $amgi$, che sopra abbiamo determinata direttamente senza il calcolo differenziale e integrale. Il valore di at di cui abbiamo parlato, come limite della prima di queste integrazioni, si trova osservando, che avendosi in generale, come sopra si è veduto, $\text{tang.}mr = \text{tang.}v \cos.t$, ossia $\text{tang.}v = \frac{\text{tang.}mr}{\cos.t}$, si avrà pure $\text{tang.}(at) = \frac{\text{tang.}(mg)}{\cos.t}$; ma pel triangolo amg rettangolo in m si trova $\cos.(mg) = \frac{\cos.(ag)}{\cos.(am)} = \frac{\cos.s'}{\cos.t}$ e per conseguenza tang. $(mg)=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}$; quindi tang.$(at)=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'\cos.t}$, ossia $at=$arc.$\left[\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.t\cos.s'}\right]$. Tale è dunque il valore che bisognerebbe dare a v, dopo aver integrato relativamente a questa variabile, avanti di integrare per rapporto a t, per ottenere la suddetta superficie del quarto di segmento, o della porzione di essa, quale sopra l'abbiamo stabilita direttamente. È facile altronde assicurarsi colla differenziazione di quella espressione di una porzione di segmento, per rapporto a v e t successivamente, che la differenziale che qui abbiamo trovata è appunto quella di detta porzione di superficie, e dee per conseguenza riprodurla per mezzo dell' integrazione.

Ma per ottenere, come qui ci proponiamo, la densità che questa superficie differenziale permetterebbe ad un punto qualunque di uno dei globi di prendere, quando ad esso corrispondesse, e quindi per mezzo dell' integrazione quella che sarebbe dovuta ad una porzione qualunque finita del segmento sferico, avuto riguardo all' influenza dell' obbliquità delle diverse sue parti, bisogna, secondo ciò che sopra si è detto, moltiplicare quell' espressione differenziale della superficie del segmento per sen.ar, ar essendo qui l'elevazione di quell'elemento al dissopra del piano tangente al globo elettrizzato nel punto di cui si tratta. Quest' elevazione fa parte del circolo massimo Ba, perpendicolare ad AbD, e che ha per conseguenza il suo polo in B, ed è così il complemento di Br. Ora il triangolo mBr, rettangolo in m, dà cos.B$r=$cos.Bm.cos.mr, e quindi (poichè Bm è anche il complemento di bm), sen.a=sen.bm.cos.mr. Se si fa $ab=s$, conformemente al significato già sopra dato a questa lettera, si avrà $bm=s+t$; per altra parte abbiamo veduto qui sopra che cos.$mr=\frac{\cos.v}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2v.\text{sen.}^2t)}}$; si avrà dunque finalmente sen.$ar=\frac{\text{sen.}(s+t)\cos.v}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2v\,\text{sen.}^2t)}}$. Moltiplicando per questa quantità la nostra superficie differenziale si ottiene

$$\frac{dt.dv.\cos.t\cos.^2v\,\text{sen}.(s+t)}{(1-\text{sen}.^2t\,\text{sen}.^2v)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-\text{sen}.^2t.\text{sen}.^2v)}}, \text{ ossia } \frac{dt.dv.\cos.t\cos.^2v\,\text{sen}.(s+t)}{(1-\text{sen}.^2t\,\text{sen}.^2v)^2},$$

per la differenziale della densità che la porzione *amgi* del segmento permetterebbe di prendere al punto del globo elettrizzato a cui corrispondesse; e integrando quest' espressione prima, per esempio, per rapporto a v tra i limiti sovra indicati, poi per rapporto a t, si dee avere la densità finita, che sarebbe dovuta a questa superficie *amgi*.

Cominciamo ad integrare per rapporto a v, cioè cerchiamo il valore di $dt.\cos.t\,\text{sen}.(s+t)\int\frac{\cos.^2v.dv}{(1-\text{sen}.^2t\,\text{sen}.^2v)^2}$. La quantità contenuta sotto il segno dell' integrazione in quest' espressione può mettersi sotto la forma

$$\frac{\cos.v.d.\text{sen}.v}{(1-\text{sen}.^2t\,\text{sen}.^2v)^2}, \text{ ossia } \frac{\sqrt{(1-\text{sen}.^2v)}d.\text{sen}.v}{(1-\text{sen}.^2t.\text{sen}.^2v)^2};$$

onde se si fa $\text{sen}.v=x$, $\text{sen}.^2t=a$, si avrà ad integrare l' espressione algebrica $\frac{\sqrt{(1-x^2)}dx}{(1-ax^2)^2}$. L'integrale di questa quantità è

$$\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2(1-ax^2)}+\frac{1}{2\sqrt{(1-a)}}\left[\text{arc.}\left(\text{tang.}=\sqrt{\frac{(1+x)(1-\sqrt{a})}{(1-x)(1+\sqrt{a})}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\text{arc.}\left(\text{tang.}=\sqrt{\frac{(1+x)(1+\sqrt{a})}{(1-x)(1-\sqrt{a})}}\right)\right]\right.,$$

e per mezzo della formola che dà la tangente della somma di due archi in funzione della loro tangente si riduce a

$$\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2(1-ax^2)}+\frac{1}{2\sqrt{1-a}}.\,\text{arc.}\left(\text{tang.}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-a}}\right),$$

ossia $$\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2(1-ax^2)}+\frac{1}{2\sqrt{(1-a)}}\left[2q-\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x\sqrt{(1-a)}}\right)\right],$$

rappresentando con q il quarto di circolo. Rimettendo in vece di x ed a i loro valori quest' espressione diviene

$$\frac{\text{sen.}v.\cos.v}{2(1-\text{sen.}^2t\,\text{sen.}^2v)}+\frac{1}{2\cos.t}\left[2q-\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\cos.v}{\cos.t\,\text{sen.}v}\right)\right].$$

L' integrale $\int\frac{\cos.^2v.dv}{(1-\text{sen.}^2t\,\text{sen.}^2v)^2}$ sarà dunque uguale a questa quantità, più una costante. La costante dee determinarsi colla condizione che l' integrale divenga nullo quando $v=0$, nel qual caso l'espressione indicata si riduce a $\frac{1}{2\cos.t}(2q-q)$, ossia $\frac{q}{2\cos.t}$, poichè infatti al quarto di circolo si agguaglia allora l'arco che ha per fattore $\frac{1}{2\cos.t}$, come è facile verificarlo anche risalendo alla somma dei due archi primitivi, a cui esso fu sostituito, e di cui l' uno diviene il complemento dell'altro. Si avrà dunque la costante $=-\frac{q}{2\cos.t}$, e

$$\int\frac{\cos.^2v.dv}{(1-\text{sen.}^2t.\text{sen.}^2v)^2}=\frac{\text{sen.}v.\cos.v}{2(1-\text{sen.}^2t.\text{sen.}^2v)}$$

$$+\frac{1}{2\cos.t}\left[q-\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\cos.v}{\cos.t\,\text{sen.}v}\right)\right]=\frac{\text{sen.}v\cos.v}{2(1-\text{sen.}^2t\,\text{sen.}^2v)}$$

$$+\frac{1}{2\cos.t}\cdot\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\cos.t\,\text{sen.}v}{\cos.v}\right).$$

Ora secondo ciò che sopra abbiamo veduto per avere il valore compiuto del nostro integrale bisogna fare

$$\text{tang.}v=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.t.\cos.s'},\text{ il che dà sen.}v=\sqrt{\frac{\cos.^2t-\cos.^2s'}{\cos.^2t.\cos.^2s'+\cos.^2t-\cos.^2s'}},$$

$$\cos.v=\frac{\text{sen.}v}{\text{tang.}v}=\frac{\cos.t\cos.s'}{\sqrt{(\cos.^2t.\cos.^2s'+\cos.^2t-\cos.^2s')}},$$

$$\text{e sen.}v\cos.v=\frac{\cos.t.\cos.s'\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.^2t.\cos.^2s'+\cos.^2t-\cos.^2s'};$$

quindi si ottiene pel valore di quest' integrale

$$\frac{\cos.s'\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{2\cos.^2t}+\frac{1}{2\cos.t}\ .\ \text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}\right).$$

Non si tratta più che di moltiplicare quest' integrale per $\cos.t.\text{sen.}(s+t)dt$, il che dà

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\cos.s'\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.^2t}+\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}\right)\right]\text{sen.}(s+t)dt;$$

e questa è la differenziale del primo ordine, che si deve ora integrare di nuovo per rapporto a t.

Il primo termine $\frac{1}{2}\cos.s'.\ \frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.^2t}\ .\ \text{sen.}(s+t)dt$, di quest'espressione, ha per integrale secondo le regole conosciute:

$$\frac{1}{2}\cos.s'\left\{\text{sen.}s\left[\text{arc.}\left(\text{sen.}=\frac{\text{sen.}t}{\text{sen.}s'}\right)\right.\right.$$
$$\left.+\cos.s'\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right)\right]$$
$$\left.-\cos.s\left[\log.\left(\cos.t+\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}\right)-\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.t}\right]\right\}.$$

Per l' integrale del secondo termine

$$\frac{1}{2}\ \text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}\right)\text{sen.}(s+t).$$

della stessa espressione, si trova:

$$\frac{1}{2}\cos.s'\left\{\cos.s.\log.\left(\cos.t+\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\text{sen.}s}{\cos.s'}\ .\ \text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right)-\text{sen.}s.\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{sen.}t}{\text{sen.}s'}\right)\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\cos.(s+t)\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}\right).$$

Riunendo le due parti, e sopprimendo i termini che si annullano, si ha dunque per l' integrale cercato:

$$\tfrac{1}{2}\cos.s'\left\{\text{sen.}s\left[\frac{\cos.^2s'-1}{\cos.s'}\right]\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\text{sen.}t.\cos.s'}\right)\right.$$

$$\left.+\cos.s\,\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.t}\right\}-\tfrac{1}{2}\cos.(s+t)\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}\right)$$

$$+\text{ costante.}$$

ossia

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}s.\text{sen.}^2s'\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\cos.s'\cos.s.\,\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.t}$$

$$-\tfrac{1}{2}\cos.(s+t)\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}\right)+\text{ costante.}$$

Quest' integrale dovendo esser nullo quando $t=0$, e per conseguenza $\cos.t=1$, $\text{sen.}t=0$, ne risulta che la costante ha per valore $+\frac{1}{2}\text{sen.}^2s'.\text{sen.}s.q-\frac{1}{2}\cos.s'.\cos.s.\text{sen.}s'+\frac{1}{2}s'\cos.s$, e l' integrale diviene così (osservando che

$$q-\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right)$$

si riduce semplicemente a $\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{sen.}t\cos.s'}{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}\right)$):

$$\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}^2s'.\text{sen.}s.\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{sen.}t\cos.s'}{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\cos.s'\cos.s\left\{\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.t}-\text{sen.}s'\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\cos.(s+t)\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2t-\cos.^2s')}}{\cos.s'}\right)+\tfrac{1}{2}s'\cos.s.$$

Per avere, secondo quest'espressione, la densità dell'elettricità che il semi-segmento intiero da a in c permetterebbe di prendere al punto a cui esso corrispondesse come superficie libera, bisogna farvi $t=s'$, e raddoppiare il risultato. Si ha così per questa quantità (mettendo ora pel quarto di circolo q il suo valore $\frac{1}{2}\pi$),

$$\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}^2 s'.\text{sen.}s.\pi - \cos.s'\text{sen.}s'\cos.s + s'\cos.s.$$

Per ottenere poi l'espressione della densità elettrica che sarebbe dovuta ad una porzione qualunque di superficie libera al dissotto del punto a della figura, bisognerebbe sostituire nella differenziale da cui abbiamo dedotta quella dovuta alla porzione superiore allo stesso punto, il fattore $\text{sen.}(s-t)$ a $\text{sen.}(s+t)$. Ciò equivale a mettere per tutto $-t$ in vece di t, e cangiar quindi il segno a tutta la differenziale, poichè la sostituzione di $-t$ a t non fa altro che cangiare $\text{sen.}(s+t)dt$ in $-\text{sen.}(s-t)dt$, t non entrando altronde nella differenziale di cui si tratta che sotto forma di coseno. Si dovrebbe poi integrare questa differenziale; ma è indifferente di fare immediatamente la sostituzione di $-t$ a t nell'integrale stesso già ottenuto per la porzione superiore, il quale deve prendere relativamente a $-t$ la stessa forma di quello relativamente a $+t$, e cangiar quindi il segno a tutti i termini dell' integrale. Si ha in tal modo:

$$\tfrac{1}{2}\text{sen.}^2 s'.\text{sen.}s\left[2q - \text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right)\right]$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos.s'\cos.s\,\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\cos.t}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cos.(s-t)\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\cos.s'}\right),$$

dove si è scritto

$$2q - \text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right),$$

$$\text{in vece di arc.}\left(\text{tang.}=-\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right).$$

Quest' integrale dee esser nullo, come il precedente quando $t=0$, donde si deduce pel valore della costante da aggiungervi,

$$-\frac{1}{2}\,\text{sen.}^2 s'.\ \text{sen.}s.q. + \frac{1}{2}\cos.s'\,\text{sen.}s'\cos.s - \frac{1}{2}\,s'\cos.s,$$

e l' integrale diviene così

$$\left(\text{osservando che } q \text{—arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\text{sen.}t\cos.s'}\right.\right.$$

$$\left.\left.\text{equivale a arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{sen.}t\cos.s'}{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}\right)\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\text{sen.}^2 s'\,\text{sen.}s.\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{sen.}t\cos.s'}{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cos.s'.\cos.s\left[\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\cos.t}-\text{sen.}s'\right]$$

$$+\frac{1}{2}\cos.(s-t)\,\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2 t-\cos.^2 s')}}{\cos.s'}\right)-\frac{1}{2}\,s'\cos.s.$$

Per avere ora l' effetto della porzione di questo segmento inferiore al punto a, che sola potrebbe influire nel nostro caso, come posta al dissopra del piano tangente al punto del globo elettrizzato che si considera, si dee fare in quest' integrale $t=s$, ed esso diviene allora

$$\frac{1}{2}\,\text{sen.}^2 s'.\text{sen.}s\,\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{sen.}s\cos.s'}{\sqrt{(\cos.^2 s-\cos.^2 s')}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cos.s'.\cos.s\left[\frac{\sqrt{(\cos.^2 s-\cos.^2 s')}}{\cos.s}-\text{sen.}s'\right]$$

$$+\frac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\cos.^2 s-\cos.^2 s')}}{\cos.s'}\right)-\frac{1}{2}\,s'\cos.s.$$

Egli è il doppio di questa quantità, che bisogna aggiungere all'espressione sopra stabilita dell' influenza del semi-segmento superiore al punto a, per avere l' espressione di tutta la densità elettrica che sarebbe dovuta alla porzione di segmento che si trova al dissopra del piano tangente al punto che si considera. Si ottiene così

$$\text{sen.}^2 s'.\text{sen.}s\left[\tfrac{1}{2}\pi+\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{sen.}s.\text{cos.}s'}{\sqrt{(\text{cos.}^2 s-\text{cos.}^2 s')}}\right)\right]$$

$$-\text{cos.}s'\sqrt{(\text{cos.}^2 s-\text{cos.}^2 s')}+\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\sqrt{(\text{cos.}^2 s-\text{cos.}^2 s')}}{\text{cos.}s'}\right).$$

Quest' espressione si applicherebbe anche al caso in cui, per la posizione del punto del globo elettrizzato che si considera, la porzione di cui si tratta fosse minore che la metà del segmento, purchè si desse ad s il valore negativo che allora gli converrebbe. Se si supponesse che questa quantità fosse precisamente uguale al mezzo segmento, il che, secondo quello che sopra abbiamo notato, avrebbe luogo pel punto posto a 60° di distanza dal punto di contatto dei due globi, si dovrebbe fare $s=0$, e l' espressione si ridurrebbe a $-\text{cos.}s'\text{sen.}s'+s'$.

Non si tratta più ora che di sostituire nella nostra espressione generale ad s ed s' i loro valori sopra trovati in funzione di θ, per aver la densità elettrica, che per un punto qualunque di uno dei due globi, distante dall' arco θ dal punto di contatto, sarebbe dovuta alla porzione di segmento della superficie esterna di corrispondenza, al dissopra del piano tangente a quel punto, intercetta dalla presenza dell' altro globo, e che dee sottrarsi dalla densità π, che apparterrebbe, senza questa circostanza, allo stesso punto, per aver quella che gli appartiene realmente.

Si è veduto che si ha $\text{sen.}s'$, ossia sen.DCB della figura 3ª, $=\frac{1}{\sqrt{(5-4\text{cos.}\theta)}}$, e $\text{sen.}s$, ossia sen.BCL della stessa figura, $=\frac{2\text{cos.}\theta-1}{\sqrt{(5-4\text{cos.}\theta)}}$, il che dà $\text{cos.}s'=2\sqrt{\frac{1-\text{cos.}\theta}{5-4\text{cos.}\theta}}$, e $\text{cos.}s=\frac{2\text{sen.}\theta}{\sqrt{(5-4\text{cos.}\theta)}}$, e quindi $\sqrt{(\text{cos.}^2 s-\text{cos.}^2 s')}=2\sqrt{\frac{\text{cos.}\theta-\text{cos.}^2\theta}{5-4\text{cos.}\theta}}$. Facendo queste sostituzioni l' espressione diviene

$$\frac{2\cos.\theta-1}{\sqrt{(5-4\cos.\theta)^3}}\left[\tfrac{1}{2}\pi+\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{2\cos.\theta-1}{\sqrt{[(5-4\cos.\theta)\cos.\theta]}}\right)\right]$$

$$-4\frac{(1-\cos.\theta)\sqrt{\cos.\theta}}{5-4\cos.\theta}+\text{arc.}(\text{tang.}=\sqrt{\cos.\theta}).$$

Se si fa in quest' espressione $\theta=q=\frac{1}{2}\pi$, e per conseguenza sen.$\theta=1$, cos.$\theta=0$, si troverà che essa si riduce a zero, prendendo per quarto di circolo negativo l' arco di cui la tangente diviene $-\infty$; e ciò dee essere, poichè quando si considera un punto distante di un quarto di circolo dal punto di contatto, non si dee nulla sottrarre da π, che esprime la densità elettrica dovuta ad un intiero emisfero di superficie libera.

Se poi si fa nella stessa espressione $\theta=0$, e quindi sen.$\theta=0$, cos.$\theta=1$, essa si riduce a $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{4}\pi=\pi$, cioè la quantità da sottrarsi da π, densità corrispondente all' emisfero di superficie libera, è la quantità stessa π, onde la densità diviene nulla, come ciò dee avverarsi in questo caso; ove il punto che si considera è quello stesso del contatto, a cui non corrisponde alcuna porzione di superficie libera.

Proviamo ora ad applicare la nostra espressione ad alcuni valori di θ, intermedii tra o e q, e per cui si hanno determinazioni sperimentali della densità elettrica dei punti corrispondenti sui due globi elettrizzati.

Coulomb ha paragonata questa densità sui punti di due globi uguali in contatto, posti a 60° e a 30° nonagesimali dal punto di contatto con quella che si osservava ad un quarto di circolo di distanza dallo stesso punto. Egli si è servito per questo, come è noto, di cerchietti di carta dorata posti in contatto con questi punti, e presentati quindi alla sua bilancia elettrica, di cui l' ago era munito alla sua estremità di un cerchietto simile animato di una elettricità della stessa specie: e ne conchiudeva la densità dalla forza di torsione necessaria a mantenere i due cerchietti ad una stessa data distanza, contro alla ripulsione che essi esercitavano fra loro (5 *Mémoire sur* *l'électricité, Mémoires de l'académie des sciences de Paris* 1787.) Queste osservazioni di Coulomb sono pur quelle con cui Poisson ha paragonati i risultati dedotti col calcolo dalle leggi dell' attrazione, e della ripulsione elettrica da lui presi per base, e con cui vi avea trovato un accordo approssimato (1^re^ *Mémoire sur la distribution de l' électricité à la surface des corps, Memoires de l' Institut t.* 12. 1811, 1^re^ *partie n*^o.^ 37.)

Cerchiamo dunque quale dovrebbe essere, secondo la nostra formola, il rapporto delle densità elettriche nei punti posti a quelle distanze dal punto di contatto dei due globi, per vedere sino a qual segno esso si accordi colle sperienze.

Se si fa primieramente $\theta=\frac{2}{3}q=60°$, si ha $\cos.\theta=\frac{1}{2}$, $\text{sen}.\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sostituendo questi valori nell' espressione quì sopra, si trova che i termini che non s' annullano, diventano $-0,4714+\text{arc.}(\text{tang.}=0,7071)=-0,4714+35°\,16'=-0,4714+0,3917.\frac{1}{2}\pi$. Questi termini sono quelli stessi a cui l' espressione si riduce, come abbiamo detto, nel caso di $s=0$, poichè a questo caso si riferisce infatti, come già abbiamo veduto, la supposizione di $\cos.\theta=\frac{1}{2}$, e l' arco arc. $(\text{tang.}=0,7071)$ $=\text{arc.}\,(\text{tang.}=\sqrt{\frac{1}{2}})$, che forma l' ultimo termine, è appunto l'arco s'. La somma di questi due termini, riducendo il primo, che ha per unità il raggio, in parti di $\frac{1}{2}\pi$, è $(-0,3001+0,3917)\frac{1}{2}\pi$ $=0,0916.\frac{1}{2}\pi=0,0458\,\pi$. Sottraendo questa quantità da π, si ha per la densità d' elettricità che il punto situato alla distanza indicata dal punto di contatto può prendere, espressa nell' unità che quì ne abbiamo adottata, $(1-0,0458)\,\pi=0,9542.\,\pi$, o a un dipresso $0,95.\pi$ mentre quella che corrisponde al punto H della *fig.* 3^a^ che si trova ad un quarto di circolo dal contatto, in parti della stessa unità, è π. Le densità in questi due punti sono adunque tra loro come 0,95 a 1, ossia come 1 a 1,05 circa.

Ora Coulomb avendo paragonata, come si è detto, nei due globi elettrizzati l' elettricità a 60° dal punto di contatto con quella a 90°, trovò che la prima stava alla seconda nel rapporto di 1 a 1,25 in vece di 1 a 1,05 circa dato dal nostro calcolo; od altrimenti chiamando 1 la densità nel punto distante di 90° dal contatto, si avrebbe, secondo quelle sperienze $\frac{1}{1{,}25}=0{,}80$, per quella a 60°, invece di 0,95. Il calcolo darebbe dunque, andando da 90° verso il punto di contatto, un decrescimento di densità notabilmente meno rapido che la esperienza.

Calcoliamo ora il rapporto della densità elettrica tra un punto situato a $\frac{1}{3}q$, ossia a 30° nonagesimali dal punto di contatto, e lo stesso punto H posto a 90° dal contatto. Si ha allora $\text{sen.}\theta=\frac{1}{2}$, $\cos.\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sostituendo questi valori nell' espressione qui sopra, essa diviene.

$$\begin{aligned} & 0{,}3846\left[\tfrac{1}{2}\pi+\text{arc.}(\text{tang.}=0{,}635)\right]-0{,}3243+\text{arc.}(\text{tang.}=0{,}931) \\ & =0{,}3846(\tfrac{1}{2}\pi+32^\circ25')-0{,}3243+42^\circ57' \\ & =0{,}3846(\tfrac{1}{2}\pi+0{,}3602.\tfrac{1}{2}\pi)-0{,}3243+0{,}4772.\tfrac{1}{2}\pi \\ & =0{,}5231.\tfrac{1}{2}\pi-0{,}3243+0{,}4772.\tfrac{1}{2}\pi, \end{aligned}$$

o riducendo il secondo numero che ha per unità il raggio, in parti di $\frac{1}{2}\pi$,

$$(0{,}5231-0{,}2064+0{,}4772)\tfrac{1}{2}\pi=0{,}794.\tfrac{1}{2}\pi=0{,}397.\pi.$$

Questa quantità sottratta da π, ci dà $0{,}603.\pi$ per la densità dell' elettricità nel punto distante di 30° dal contatto dei due globi; cioè questa densità starebbe, secondo il nostro calcolo, a quella che ha luogo a 90° dal punto di contatto, come 0,603 a 1, ossia come 1 a 1,65 circa, e così questa un po' meno del doppio della prima. E ben si vede infatti, che secondo le basi del nostro calcolo l' elettricità in H non può giungere ad esser doppia di quella a 30° dal punto di contatto, o in altri termini, che l' elettricità a 30° dee essere maggiore della metà di quella in H, poichè a 30° l' angolo MCD è retto, la linea CD venendo a formarvi col raggio una sola retta CD', e per conseguenza il punto a 30° ha per superficie libera corrispondente la metà dell' emisfero che è al dissopra del piano rappresentato dalla linea CD, più la porzione dell' altra metà dell' emisfero, che rimane libera attorno alla porzione intercetta dal globo B.

Ma se si paragona ora questo risultato colla sperienza, vi si trova un grande divario, poichè Coulomb ha dedotto dalle sue sperienze, che la densità dell' elettricità a 90° dal punto di contatto è 4,80, prendendo per unità quella a 30°, ossia è più di quattro volte e mezza quest' ultima, in vece di un pò più di una volta e mezza che darebbe il nostro calcolo; od altrimenti l' elettricità a 30° dal contatto sarebbe, secondo l' osservazione $\frac{1}{48}$ ossia 0,21 circa di quella a 90°, in vece di esserne 0,6 circa, come nel nostro calcolo.

Si vede anche quì, che la nostra formola dà l' elettricità dei punti intermedii tra H ed O troppo grande per rapporto a quella del punto H. La figura 7ª rappresenta all' occhio a un dipresso la forma delle due curve di cui le ordinate sarebbero conformi, le une alla sperienza, e le altre alla formola. In essa HO indicando il quarto di circolo preso sul globo A della fig. 3ª, ed H*a* l' ordinata supposta comune alle due curve, cioè la densità elettrica nel punto distante di 90° dal contatto, la curva della sperienza sarebbe *adf*O, e quella della formola *abe*O, le ordinate *cd*, *gf* essendo l' una i quattro quinti, e l' altra circa un quinto di H*a*, mentre le ordinate *cb*, *ge* sono l' una circa 0,95, e l' altra 0,6 ossia i tre quinti della stessa linea H*a*.

Le nostre ipotesi teoriche danno dunque bensì un decrescimento di densità elettrica andando dal punto H verso il punto di contatto dei due globi, per cui l' elettricità diviene nulla al punto di contatto medesimo, conformemente alla sperienza; ma la legge di questo decrescimento è, secondo esse, sino ad una piccola distanza dal contatto, meno rapida che quella data dall' osservazione. Ora questo appunto dee risultare dalla circostanza di cui non abbiamo tenuto conto, della corrispondenza in linea curva, che, come già abbiamo accennato, dee aver luogo tra ciascun punto del corpo elettrizzato, e le porzioni della superficie dei corpi circostanti, con cui esso non può corrispondere in linea retta. Infatti il globo, che è in contatto di quello, sopra cui si considera la densità elettrica, ammettendo questa corrispondenza in linea curva, intercetta non solamente una parte della corrispondenza di un punto qualunque coll' emisfero di superficie de' corpi circostanti, posto al dissopra del piano tangente al globo in quel punto, ma anche una parte di quella che lo stesso punto ha in linea curva, coll' emisfero inferiore a questo piano tangente, e una parte tanto più considerevole, quanto più il punto di cui si tratta è prossimo a quello di contatto, il che dee diminuire la densità elettrica nel medesimo in più grande ragione che nol farebbe la sola sottrazione di corrispondenza in linea retta che abbiamo calcolata. Questa parte di diminuzione non pare suscettibile di essere sottoposta a calcolo nello stato attuale delle nostre cognizioni, poichè si ignora secondo qual legge la curvatura più o men grande delle linee per le quali dee supporsi effettuata una tale corrispondenza influisca sulla densità dell' elettricità che le è dovuta; ma si vede almeno che la considerazione di questa parte dell' effetto tende a correggere, come l' abbiamo annunziato, la differenza che si è trovata tra il calcolo e la sperienza, col trascurarla; e che quindi il principio da cui abbiamo quì fatto dipendere la distribuzione dell' elettricità sulla superficie de' corpi conduttori, non ha nulla di contrario ai risultati sperimentali, con cui ne abbiamo paragonate le conseguenze. Del resto l' iufluenza della corrispondenza in linea curva che abbiamo trascurata nel nostro caso, si scorge anche in particolare nella circostanza, che secondo le sperienze di Coulomb l' elettricità è pure un pò men densa nel punto H posto alla distanza d' un quarto di circolo dal contatto che in quello situato, come G nella *fig.* 3ª alla distanza di un semicircolo intiero dal punto di contatto, ossia ad esso diametralmente opposto, sebbene l' emisfero di superficie dei corpi circostanti superiore al piano tangente sia intieramente libero per amendue questi punti; e in generale questa considerazione sola può render ragione, secondo le idee teoriche

Fig. 1.

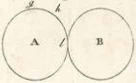


Fig. 2.

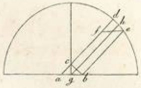


Fig. 3.

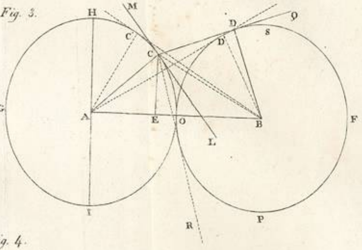


Fig. 4.

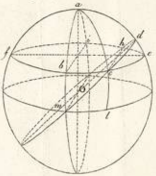


Fig. 5.

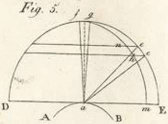


Fig. 6.

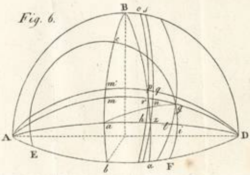
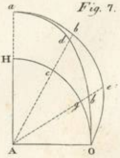


Fig. 7.



che qui seguiamo, della disuguaglianza di distribuzione dell' elettricità presentata dalle osservazioni nei corpi di diversa figura senz' angoli rientranti, o porzioni concave di superficie; per esempio dell' accumulazione dell' elettricità verso le due estremità dell' asse maggiore di un ellissoide allungato, comparativamente ai punti intermedii della sua superficie, poichè tutti questi punti hanno una libera corrispondenza uguale coll' emisfero di superficie formata dai corpi esterni, al dissopra del piano tangente a ciascuno di essi, e solo la corrispondenza in linea curva colle porzioni di questa superficie inferiori al piano tangente a quella del corpo elettrizzato, è più libera nei punti di questo, in cui la superficie ha una più rapida curvatura. Solo adunque tenendo conto di questa corrispondenza in linea curva si potrà sperare di ottener dal calcolo risultati relativi alla distribuzione elettrica, secondo le idee teoriche quì proposte, che si accordino compiutamente colle sperienze, con cui abbiamo qui cercato di mostrare la possibilità di conciliarle.