# SU LA INTEGRAZIONE APPROSSIMATA
## DELLE FUNZIONI.

## NOTE

DEL PROF. GASPARE MAINARDI

*Ricevute adì* 18 *Luglio* 1845.

1. Poisson (1) dimostrò con analisi elegante e calcolò il resto di una serie data da Eulero (2) ed impiegata da Legendre (3) alla integrazione approssimata delle funzioni. Molte altre serie vennero a questo oggetto immaginate dai geometri fra le quali è rimarcabile quella indicata dall' illustre Signor Professore Venturoli (4). L'analisi del Poisson si presta anche in questo caso per conseguire il medesimo intento, e ciò nel modo seguente.

Si debba calcolare l'integrale $\int_{-a}^{a}\varphi(x).dx$? Figuro perciò la linea rappresentata dalla equazione $y=\varphi(x)$ fra coordinate rettilinee ortogonali $x$ ed $y$. Divido ciascuna ascissa $x=a$, $x=-a$ in un numero $2n+1$ di parti eguali ad $\frac{a}{2n+1}=\omega$; conduco dai punti di divisione le ordinate alla curva, e gli archi di essa compresi fra le rette rappresentate dalle coppie seguenti di equazioni

$$x=-\omega,\ x=\omega;\ x=\omega,\ x=3\omega;\ x=3\omega,\ x=5\omega;\ \ldots..;$$
$$x=-\omega,\ x=-3\omega;\ x=-3\omega,\ x=-5\omega\ \ldots..$$

si considerino come appartenenti a parabole coniche di cui le rette date dalle equazioni

(1) Istituto di Francia. Tomo VI.

(2) Istitut. Calc. different. Tom. I, pars. poster. Cap. 2.

(3) Trattato delle trascend. ellittic. Tom. II, pag, 572.

(4) Meccanica. Tom. I. Cap. 12. Terza edizione.

$$x=0,\ x=2\omega,\ x=4\omega\ .....;\ x=-2\omega,\ x=-4\omega,\ .....$$

siano diametri rispettivi. L'area terminata dall'asse delle ascisse $x$, dalle rette $x=-\omega$, $x=\omega$, e dall'arco parabolico intercetto sarà espressa dalla formola

$$\tfrac{\omega}{3}\left[\ \varphi(-\omega)+4\varphi(0)+\varphi(\omega)\ \right]$$

epperò la somma di tutti i trapezi parabolici compresi fra le rette rappresentate dalle equazioni $x=a$, $x=-a$ verrà data dalla funzione

$$\begin{aligned}\psi=\tfrac{\omega}{3}\Big\{ & \left[\varphi(-(2n+1)\omega)+4\varphi(-2n\omega)+\varphi(-(2n-1)\omega)\right]\cdots \\ & +\left[\varphi(-\omega)+4\varphi(0)+\varphi(\omega)\right]+\left[\varphi(\omega)+4\varphi(2\omega)+\varphi(3\omega)\right]+\cdots \\ & +\left[\varphi((2n-1)\omega)+4\varphi(2n\omega)+\varphi((2n+1)\omega)\right]\Big\} \\ =\tfrac{\omega}{3}\Big\{ & \ 4\varphi(0)+4\Sigma_{r=1}^{r=n}\left[\varphi(2r\omega)+\varphi(-2r\omega)\right]+ \\ & +2\Sigma_{r=1}^{r=n}\left[\varphi(2r-1)\omega)+\varphi(-(2r-1)\omega)\right]+\varphi(a)+\varphi(-a)\Big\}.\end{aligned}$$

Col mezzo della formola di Fourier completata da Poisson; cioè

$$\varphi(x)=\tfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\varphi(u)du+\tfrac{1}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(u)\,du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\cos\frac{i\pi(x-u)}{a}$$

al cui primo membro dobbiamo sostituire

$$\tfrac{1}{2}\left[\ \varphi(a)+\varphi(-a)\right];$$

allorquando $x=a$, mediante questa formola avremo

$$\psi=\frac{\omega}{3}\left|\begin{aligned} & \tfrac{3}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(u)du+\tfrac{3}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(u).du\,\Sigma_{r=1}^{r=\infty}\,2+ \\ & +\tfrac{4}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(u).du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\cos\frac{i\pi u}{a}+ \\ & +\tfrac{2}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(u)du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\cos\frac{i\pi(a-u)}{a} \\ & +\tfrac{4}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(u).du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\,\Sigma_{r=1}^{r=n}\left[\cos\frac{i\pi(2r\omega-u)}{a}+\right. \\ & \qquad\left.+\cos\frac{i\pi(2r\omega+u)}{a}\right] \\ & +\tfrac{2}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(u)du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\,\Sigma_{r=1}^{r=n}\left[\cos\frac{i\pi((2r-1)\omega-u)}{a}+\right. \\ & \qquad\left.+\cos\frac{i\pi((2r-1)\omega+u)}{a}\right];\end{aligned}\right.$$

e siccome
$$\Sigma_{r=1}^{r=n} 2 = 2n$$

$$\cos\frac{i\pi(2r\omega+u)}{a} + \cos\frac{i\pi(2r\omega-u)}{a} = 2\cos\frac{2i\pi r\omega}{a}\cos\frac{i\pi u}{a}$$

quindi
$$\psi = \frac{\omega}{3}\left|\begin{array}{l} \frac{3(2n+1)}{a}\int_{-a}^{a}\phi(u).du + \frac{2}{a}\int_{-a}^{a}\phi(u).du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}(2+\cos i\pi)\cos\frac{i\pi u}{a} \\ +\frac{4}{a}\int_{-a}^{a}\phi(u)du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left\{\cos\frac{i\pi u}{a}\,\Sigma_{r=1}^{r=n}\left(2\cos\frac{2ri\pi\omega}{a}+\cos\frac{(2r-1)i\pi\omega}{a}\right)\right\} \end{array}\right.$$

Essendo poi
$$\Sigma_{r=1}^{r=n}\left\{\cos\frac{2ri\pi\omega}{a}+\cos\frac{(2r-1)i\pi\omega}{a}\right\} = \Sigma_{r=1}^{r=2n}\cos\frac{ri\pi\omega}{a} = -\frac{1+\cos i\pi}{2}$$

$$\Sigma_{r=1}^{r=n}\cos\frac{2ri\pi\omega}{a} = -\tfrac{1}{2};$$

fintantochè $i$ non è multiplo di $2n+1$; e quando sia $i=t(2n+1)$ si ha

$$\Sigma_{t=1}^{t=\infty}\Sigma_{r=1}^{r=n}\left\{2\cos(2rt\pi)+\cos(2r-1)t\pi\right\}\cos\frac{t\pi u}{\omega} = n\Sigma_{i=1}^{i=\infty}(2+\cos i\pi)\cos\frac{i\pi u}{\omega}$$

da che $a=(2n+1)\omega$; avremo quindi

$$\psi = \int_{-a}^{a}\phi(u)du + \frac{4n\omega}{3a}\int_{-a}^{a}\phi(u)du.\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}(2+\cos i\pi)\cos\frac{i\pi u}{\omega}$$

$$= \int_{-a}^{a}\phi(u)du + \frac{4n}{3(2n+1)}\int_{-a}^{a}\phi(u)du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left\{3\cos\frac{2i\pi u}{\omega}+\cos\frac{(2i-1)\pi u}{\omega}\right\}$$

Integrando ora il secondo membro per parti si ottiene

$$\psi = \int_{-a}^{a}\phi(u)du + \frac{4n}{3(2n+1)}\left|\begin{array}{l} \frac{\omega^2}{\pi^2}\left(\phi'(a)-\phi'(-a)\right)\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{3}{(2i)^2}+\frac{1}{(2i-1)^2}\right) \\ -\frac{\omega^4}{\pi^4}\left(\phi'''(a)-\phi'''-(a)\right)\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{3}{(2i)^4}+\frac{1}{(2i-1)^4}\right) \\ +\frac{\omega^6}{\pi^6}\left(\phi^{v}(a)-\phi^{v}(-a)\right)\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{3}{(2i)^6}+\frac{1}{(2i-1)^6}\right) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ +\frac{\omega^{2n}}{\pi^{2n}}\int_{-a}^{a}\phi^{(2n)}(u)du\,\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left\{\frac{3}{(2i)^{2n}}\cos\frac{2i\pi u}{\omega}+\right. \\ \qquad\qquad\left.+\frac{1}{(2i-1)^{2n}}\cos\frac{(2i-1)\pi u}{\omega}\right\} \end{array}\right.$$

Eulero trovò (1):

$$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}\,,\quad \Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i^4}=\frac{2^3}{1.2.3.4.5}\,\frac{1}{3}\pi^4\,,\quad \Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i^6}=\frac{2^4}{1.2\ldots.6.7}.\frac{1}{3}\pi^6\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

per cui

$$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{(2i)^2}=\frac{\pi^2}{24}\,,$$

$$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}=\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}+\frac{1}{2^2}\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{(2i)^2}\,,$$

$$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{3}{(2i)^2}+\frac{1}{(2i-1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

$$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{3}{(2i)^4}+\frac{1}{(2i-1)^4}\right)=\frac{2.3}{1.2\ldots5}\,\frac{\pi^4}{4}=0,05.\,\frac{\pi^4}{4}$$

$$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{3}{(2i)^6}+\frac{1}{(2i-1)^6}\right)=\frac{2.11}{1.2\ldots6.7}\,\frac{\pi^6}{4}=0,0044\,\frac{\pi^6}{4}$$

avremo quindi per ultimo

$$\psi=\int_{-a}^{a}\phi(u)du+\frac{n}{3(2n+1)}\left\{\begin{array}{l}\omega^2[\phi'(a)-\phi'(-a)]-0.05\,.\,\omega^4[\phi'''(a)-\phi'''(-a)]+\\ \quad+0,0044\,.\,\omega^6[\phi^{v}(a)-\phi^{v}(-a)]+\text{ec}\ldots\end{array}\right\}$$

ove $\phi'(a)$, $\phi'''(a)\ldots$, indicano i valori corrispondenti ad $x=a$ dei coefficienti differenziali $\frac{d\phi(x)}{dx}$, $\frac{d^3\phi(x)}{dx^3}\ldots$;

2. Argomento di non minore importanza si è il calcolo approssimato degli integrali duplicati, al quale oggetto potrà essere utile la formola, che passo a trovare. È noto, che qualunque siano i limiti fra i quali si deve estendere un integrale duplicato, questo può ridursi ad altro integrale i di cui limiti siano quantità date fra loro indipendenti. Supponiamo perciò che si debba calcolare la funzione seguente:

$$\int_0^a dx\int_0^b dy.\phi(x,y).$$

Suppongo che la equazione $z=\phi(x,y)$ rappresenti una superficie riferita ad assi rettilinei ortogonali, e che si abbia a tro-

---

(1) Introduct. in anal. infinit. Tom. I, Cap. 10.

vare il volume del solido che ha per base il rettangolo compreso fra gli assi $x, y$, e le due parallele date dalle equazioni $z=o$, $x=a$; $z=o$, $y=b$; ed è terminato da quella superficie. Si dividano, il lato $a$ in $n$ parti eguali e sia $\frac{a}{n}=\omega$; ed il lato $b$ in $m$ parti eguali e sia $\frac{b}{m}=\theta$; quindi dai punti di divisione siano condotte le parallele agli assi coordinati $x\ y$ le quali divideranno l'area del rettangolo in molti altri. Da tutti i vertici di questi rettangoli si fingano innalzate le parallele all'asse $z$ fino all'incontro della superficie, e s'immaginino finalmente tutti i prismi a facce piane aventi per basi ognuno di detti rettangoli, e per spigoli normali alla base le ordinate della superficie che corrispondono ai vertici di essa. Rappresentata con $P(a,b)$ la somma dei volumi di detti prismi, facilmente comprenderemo essere

$$P(a,b)=\frac{\omega\theta}{4}\left|\begin{array}{l}\phi(o,o)+\phi(a,o)+\phi(o,b)+\phi(a,b)\\ +2\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\left[\phi(r\omega,o)+\phi(r\omega,b)\right]+2\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\left[\phi(o,s\theta)+\phi(a,s\theta)\right]\\ +4\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\ \Sigma_{s=1}^{s=m-1}(\phi r\omega,s\theta)\ ,\end{array}\right.$$

nella quale espressione entrano una sola volta le ordinate della superficie che corrispondono ai vertici del rettangolo; due volte ciascuna ordinata corrispondente al contorno; e quattro volte quelle dei punti interni al rettangolo medesimo.

Se nella ricerca che ci occupa vorremo seguire il metodo di Eulero formeremo le espressioni

$$P(a+\omega,b)=\frac{\omega\theta}{4}\left|\begin{array}{l}\phi(o,o)+\phi(a+\omega,o)+\phi(o,b)+\phi(a+\omega,b)\\ +2\left\{\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\left[\phi(r\omega,o)+\phi(r\omega,b)\right]+\phi(a,o)+\phi(a,b)\right\}\\ +2\Sigma_{s=0}^{s=m-1}\left\{\phi(o,s\theta)+\phi(a+\omega,s\theta)\right\}+\\ \qquad\qquad +4\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\left\{\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\phi(r\omega,s\theta)+\phi(a,s\theta)\right\}\end{array}\right.$$

$$P(a+\omega,b)-P(a,b=\frac{\omega\theta}{4}\left|\begin{array}{l}\phi(a+\omega,o)+\phi(a+\omega,b)-\phi(a,o)-\phi(a,b)\\ +2\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\left\{\phi(a+\omega,s\theta)-\phi(a,s\theta)\right\}+4\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\phi(a,s\theta)\end{array}\right.$$

$$P(a+\omega,b+\theta)-P(a,b+\theta)-P(a+\omega,b)+P(a,b)=$$
$$+\frac{\omega\theta}{4}\left\{\phi(a+\omega,b+\theta)+\phi(a+\omega,b)+\phi(a,b+\theta)+\phi(a,b)\right\}$$

da cui si desume

$$P+\frac{\omega}{2}\frac{dP}{da}+\frac{\theta}{2}\frac{dP}{db}+\text{ecc}=\int\int\phi.da.db+\frac{\omega}{2}\int\phi.db+\frac{\theta}{2}\int\phi da+\text{ecc}\ldots$$

e quindi ricaveremo la espressione di $P$ in serie ordinata secondo le potenze crescenti di $\omega$, $\theta$. Ma questo metodo, per altro assai spedito, non fornisce la misura dell'approssimazione, il che conseguiremo coll'analisi seguente.

Ricordiamo la formola di Poisson (1)

$$\phi(x,y)=\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b du.dt.\phi(u,t)\left|\begin{matrix}1+2\Sigma\left(\cos\frac{i\pi t}{a}\cos\frac{i\pi x}{a}+\cos\frac{j\pi u}{b}.\cos\frac{j\pi y}{b}\right)\\ +4\Sigma\Sigma\cos\frac{i\pi t}{a}\cos\frac{j\pi u}{b}\cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\end{matrix}\right|$$

ove gli integrali finiti indicati dalla lettera $\Sigma$ si riferiscono ai simboli di numeri interi $i$, $j$, e si estendono dallo zero all'infinito. Col mezzo di questa equazione possiamo trasformare la funzione $P(a,b)$ nella seguente maniera

$$P(a,b)=\frac{\omega\theta}{4ab}\int_0^a\int_0^b du.dt.\phi(u,t)\left\{4+2\Sigma_{r=1}^{r=n-1}2+2\Sigma_{s=1}^{s=m-1}2+\right.$$
$$\left.4\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\Sigma_{s=1}^{s=m-1}1\right\}$$

$$+\frac{\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b du\,dt\,\phi(u,t)\,\Sigma_1^{\infty}\left|\begin{matrix}\cos\frac{i\pi t}{a}+\cos\frac{j\pi u}{b}+\cos\frac{i\pi t}{a}\cos i\pi+\cos\frac{j\pi u}{b}\cos j\pi\\ +\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\left\{(1+\cos j\pi)\cos\frac{j\pi u}{b}+2\cos\frac{i\pi t}{a}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}\right\}\\ +\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\left\{(1+\cos i\pi)\cos\frac{i\pi t}{a}+2\cos\frac{j\pi u}{b}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}\right\}\\ +2\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\left\{\cos\frac{i\pi t}{a}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}+\right.\\ \left.+\cos\frac{j\pi u}{b}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}\right\}\end{matrix}\right.$$

(1) Theor. de la Chaleur. pag. 211.

$$+\frac{\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b du\,dt\,\phi(u,t)\,\Sigma_1^\infty\,\Sigma_1^\infty\cos\frac{i\pi t}{a}\cos\frac{j\pi u}{b}\left|\begin{array}{l}1+\cos i\pi+\cos j\pi+\cos i\pi\,.\cos j\pi\\ +2\,(1+\cos j\pi)\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}\\ +2\,(1+\cos i\pi)\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}\\ +4\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}\ \times\\ \qquad\times\ \Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}\end{array}\right.$$

$$=\frac{\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b du\,.\,dt\,\phi(u,t)\,[\,1+(n-1)+(m-1)+(n-1)(m-1)\,]$$

$$+\frac{2\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b du\,dt\,\phi(u,t)\,\Sigma_1^\infty\left|\begin{array}{l}\left\{1+\cos i\pi+2\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}\right\}\\ \qquad\qquad\left(1+\Sigma_{s=1}^{s=m-1}1\right)\cos\frac{i\pi t}{a}\\ +\left\{1+\cos j\pi+2\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}\right\}\\ \qquad\qquad\left(1+\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\right)\cos\frac{j\pi u}{b}\end{array}\right.$$

$$+\frac{\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b du\,dt.\phi(a)t\,\Sigma_1^\infty\,\Sigma_1^\infty\left|\begin{array}{l}1+\cos i\pi+\cos j\pi+\cos i\pi+\cos j\pi\\ +2(1+\cos j\pi)\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}+\\ +2(1+\cos i\pi)\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}\\ +4\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}=\\ \qquad=\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}\end{array}\right|\cos\frac{i\pi t}{a}\cos\frac{j\pi u}{b}$$

Per ridurre ulteriormente questa formola distinguiamo i casi in cui i numeri $i$, $j$ sono primi ovvero multipli rispettivamente di $n$ ed $m$. Quando siano primi siccome

$$1+\cos i\pi+2\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{i\pi r\omega}{a}=0\,,\qquad 1+\cos j\pi+2\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos\frac{j\pi s\theta}{b}=0$$

facilmente riconosceremo che i termini secondo e terzo del valore di $P(a,b)$ si annullano. Supposti poi $i=hn$, $j=km$ avremo

$$P(a,b)=\frac{mn\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b\phi(u,t)\,du\,dt$$

$$+\frac{2\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b\phi(u,t)\,du\,dt\,\Sigma_1^\infty\left\{\begin{array}{l} m\left(1+\cos hn\pi+2\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos hr\pi\right)\cos\frac{h\pi t}{\omega}\\ +n\left(1+\cos km\pi+2\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos ks\pi\right)\cos\frac{k\pi u}{\theta}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b\phi(u,t)\,du\,dt\,\Sigma_1^\infty\,\Sigma_1^\infty\cos\frac{h\pi t}{\omega}\cos\frac{k\pi u}{\theta}\left|\begin{array}{l} 1+\cos hn\pi+\cos km\pi+\\ \qquad+\cos hn\pi\,.\cos km\pi\\ +2(1+\cos km\pi)\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos h\pi r\\ +2(1+\cos hn\pi)\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos k\pi s\\ +4\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos h\pi r\;\times\\ \qquad\times\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos k\pi s.\end{array}\right.$$

Considerando il secondo termine osserviamo che

$$1+\cos 2im\pi+2\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos 2is\pi=2m$$

$$1+\cos(2i+1)m\pi+2\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos(2i+1)s\pi=0$$

da che $\cos 2im\pi=1\,,\quad \Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos 2i\pi s=m-1$

$\cos(2i+1)\,m\pi=1\,,\quad \Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos(2i+1)s\pi=-1$ se $m$ è pari;

$\cos(2i+1)m\pi=-1\,,\quad \Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos(2i+1)\,s\pi=0$ se $m$ è dispari;

epperò detto secondo termine si riduce al seguente

$$\frac{2mn\omega\theta}{ab}\int_0^a\int_0^b du\,dt\,\phi(u,t)\,\Sigma_1^\infty\left(\cos\frac{2i\pi t}{\omega}+\cos\frac{2j\pi u}{\theta}\right)$$

Passando ad esaminare il terzo termine della funzione $P(a,b)$ noteremo che se $h=2i$, $k=2j+1$, o viceversa il coefficiente del prodotto $\cos\frac{h\pi t}{\omega}\cos\frac{k\pi u}{\theta}$ si riduce come segue

$$1+\cos hn\pi+\cos km\pi+\cos hn\pi\cos km\pi+2(1+\cos km\pi)\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos hr\pi$$

$$+2(1+\cos hn\pi)\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos ks\pi+4\,\Sigma_{r=1}^{r=n-1}\cos hr\pi\,\Sigma_{s=1}^{s=m-1}\cos ks\pi=$$

$$=4+4(n-1)-4-4(n-1)=0 \quad \text{se } m \text{ è pari:}$$

e si annulla ancora quando $m$ è dispari. Se poi $h$, $k$ sono dispari entrambi il valore di detto terzo termine si annulla siano $m$, $n$ dispari o pari in qualsivoglia maniera. Concludiamo da tutto ciò che il terzo termine della funzione $P(a,b)$ sussiste unicamente nel caso in cui $h, k$ sono entrambi pari, e si riduce a

$$4+4(n-1)+4(m-1)+4(m-1)(n-1)=4mn$$

onde si avrà

$$P(a,b)=\int_0^a\int_0^b \phi(u,t)\,du\,dt+4\int_0^a\int_0^b du\,dt\,\phi(u,t)\,\Sigma_1^\infty\left(\cos\frac{2i\pi t}{\alpha}+\cos\frac{2j\pi u}{\theta}\right)$$

$$+4\int_0^a\int_0^b du\,.\,dt\,.\,\phi(u,t)\,\Sigma_1^\infty\,\Sigma_1^\infty\cos\frac{2i\pi t}{\alpha}\cos\frac{2j\pi u}{\theta}\,.$$

Integrando per parti i termini secondo e terzo, e notando essere

$$\operatorname{sen}\frac{2i\pi a}{\alpha}=\operatorname{sen}2i\pi n=0,\quad \operatorname{sen}\frac{2j\pi b}{\theta}=\operatorname{sen}2j\pi m=0$$

otteniamo per ultimo la formola

$$P(a,b)=\int_0^a\int_0^b \phi(u,t)\,du\,dt+4\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\int_0^b\left\{d_{t=a}\phi(u,t)-d_{t=0}\phi(u,t)\right\}du\,\Sigma\frac{1}{i^4}$$

$$+4\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2\int_0^a\left\{d_{u=b}\phi-d_{u=0}\phi\right\}dt\,.\,\Sigma\frac{1}{j^2}$$

$$+4\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^4\int_0^b\left\{d^3{}_{t=a}\phi-d^3{}_{t=0}\phi\right\}\Sigma\frac{1}{i^4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+4\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2\left(\Sigma\frac{1}{i^2}\right)^2\times$$

$$\times\ \left\{d^2{}_{t=a,\,u=b}\,\phi-d^2{}_{t=0,\,u=b}\,\phi-d^2{}_{t=a,\,u=0}\,\phi+d^2{}_{t=0,\,u=0}\,\phi\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ove $d_{t=a}\phi(u,t)$ indica il valore del coefficiente differenziale $\frac{d\phi}{dt}$ corrispondente a $t=a$, ecc.....

Dunque la funzione $P(a,b)$ offre un valore approssimato dell' integrale $\int_0^a\int_0^b \phi(u,t)\,du\,.\,dt$, e potremo calcolarne altri valori ancora più prossimi collocando in quella formola in luogo degli integrali semplici le loro espressioni date dalla formola trovata nel paragrafo antecedente. La equazione da noi ottenuta può impiegarsi ancora alla somma di serie a doppio ingresso, come fecero già Eulero e Poisson per le serie semplici nelle opere citate.

3. Fra i varj metodi immaginati dai Geometri per il calcolo approssimato degli integrali commendabilissimo è quello di Newton e Cotes perfezionato dal sommo Matematico Sig. Gauss (1). In questo paragrafo espongo con brevità quel metodo, per ottenere direttamente le equazioni alle quali l' Autore giunge per induzioni, e per indicare alcune formole notabili, ed altre che possono giovare volendo estendere più oltre le tavole numeriche date dall' insigne Geometra.

Si debba calcolare la funzione $\int_a^{a+b} \phi(x)\,dx$? A tale oggetto poniamo $x=a+bt$ per cui

$$\int_a^{a+b} \phi(t)\,dy = \int_0^1 \phi(a+bt)\,.\,b\,.\,dt:$$

Si divida la grandezza $b$ in più parti le quali indicheremo coi simboli seguenti

$$a_0 b\,,\ (a_1-a_0)\,b\,,\ (a_2-a_1)\,b\,,\ldots\ (a_i-a_{i-1})\,b\,,\ldots,\ (a_n-a_{n-1})\,b$$

ove $a_n = 1$.

Siccome $\phi(a+bt) = \Sigma_{r=0}^{r=\infty} \frac{b^r t^r}{1.2\ldots r} \frac{d^r \phi(a)}{da^r}$, posto $\frac{b^r}{1\ldots r} \frac{d^r \phi(a)}{da^r} = -P_r$ sarà $\phi(a+bt) = \Sigma_{r=0}^{r=\infty} t^r P_r$. Si ponga $\phi(a+ba_i) = \Sigma_{r=0}^{r=\infty} a_i^r P_r = A_i$ per brevità.

Si formi il prodotto

$$(t-a_0)(t-a_1)(t-a_2)\ldots\ (t-a_n) = E(t)$$

e supposto $\frac{dE(t)}{dt} = E'(t)$ la funzione

$$Y(t) = \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{E(t)}{(t-a_i)E'(a_i)} A_i = \Sigma_{r=0}^{r=\infty} P_r \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r E(t)}{(t-a_i)E'(a_i)}$$

darà $\quad Y(a_0) = A_0,\quad Y(a_1) = A_1,\ldots,\quad Y(a_n) = A_n.$

Essendo poi $\quad \frac{t^r}{E(t)} = \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r}{(t-a_i)E'(a_i)}$

(1) Nuovi Atti della R. Accad. di Gottinga. Tomo III, anno 1814-15.

fintanto che $r < n+1$ per cui $\Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r E(t)}{(t-a_i) E'(a_i)} = t^r$ sarà per conseguenza

$$Y(t) = \Sigma_{r=0}^{r=n} P_r t^r + \Sigma_{r=n+1}^{r=\infty} P_r \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r E(t)}{(t-a_i) E'(a_i)} ;$$

quindi

$$\int_0^1 \phi(a+bt) . dt = \Sigma_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r+1} P_r$$

$$\int_0^1 Y(t) dt = \Sigma_{r=0}^{r=n} \frac{1}{r+1} P_r + \Sigma_{r=n+1}^{r=\infty} P_r \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r}{E'(a_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i} dt$$

$$(a) \quad \int_0^1 [\phi(a+bt) - Y(t)] dt = \Sigma_{r=n+1}^{r=\infty} P_r \left\{ \frac{1}{r+1} - \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r}{E'(a_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i} dt \right\} ;$$

epperò quando il secondo membro di questa equazione avrà un valore trascurabile, la funzione $\int_0^1 Y(t) dt$ si approssimerà all' integrale $\int_0^1 \phi(a+bt) dt$ attualmente cercato.

Nel caso di Newton e Cotes sono

$$a_0 = 0, \; a_1 = \frac{1}{n}, \; a_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \; a_i = \frac{i}{n}, \ldots, \; a_n = 1$$

quindi

$$E(t) = t\left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right) \ldots \left(t-\frac{i-1}{n}\right)\left(t-\frac{i}{n}\right)\left(t-\frac{i+1}{n}\right) \ldots \left(t-\frac{n}{n}\right)$$

$$E'(a_i) = \frac{\Gamma(i) . \Gamma(n-i)}{n^n} (-1)^{n-i}$$

$$E(1-t) = (-1)^{n+1} E(t), \quad E'(a_{n-i}) = E'(a_i)(-1)^{2i-n}$$

$$\int_0^1 \frac{E(t)}{(t-a_{n-i}) E'(a_{n-i})} dt = \int_0^1 \frac{E(1-t)}{\left(\frac{i}{n}-t\right) E'(a_{n-i})} dt = \int_0^1 \frac{E(t)}{(t-a_i) E'(a_i)} dt$$

per cui $$\int_0^1 Y(t) . dt = \Sigma_{i=0}^{i=\frac{n}{2}} \frac{A_i + A_{n-i}}{E'(a_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i} dt$$

avvertendo che se $n$ è dispari al termine insignificante

$$\frac{2A_{\frac{n}{2}}}{E'\left(a_{\frac{n}{2}}\right)} \quad \text{si deve sostituire} \quad \frac{A_{\frac{n-1}{2}}}{E'\left(a_{\frac{n-1}{2}}\right)}$$

Il Sig. Gauss osserva che i numeri arbitrarj $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, si possono determinare talmente che spariscano tanti termini dal secondo membro della equazione ($a$) quanti sono quei numeri, e ciò col fare che sia

$$(b) \qquad \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{\alpha_i^r}{E'(\alpha_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-\alpha_i} - \frac{1}{r+1} = 0$$

per tutti i valori di $r = n+1,\ n+2, \ldots\ 2n$:

Supponiamo $E(t) = t^{n+1} + \beta_1 t^n + \beta_2 t^{n-1} \ldots + \beta_n t + \beta_{n+1}$, e moltiplicato il primo membro della equazione ($b$) per $\frac{E(u)}{u^{r+1}}$, se ne faccia la somma da $r=0$ ad $r=\infty$. Avremo

$$\Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{E(u)}{E'(\alpha_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-\alpha_i} dt\, \Sigma_{r=0}^{r=\infty} \frac{\alpha_i^r}{u^{r+1}} - \Sigma_{r=0}^{r=\infty} \frac{E(u)}{(r+1)u^{r+1}} =$$

$$(c) \qquad = \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{E(u)}{(u-\alpha_i)E'(\alpha_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-\alpha_i} dt - \Sigma_{r=0}^{r=\infty} \frac{E(u)}{(r+1)\,u^{r+1}}.$$

Affinchè la equazione ($b$) abbia luogo per tutti i valori di $r=0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots$ fino a $2n$, bisogna che nello sviluppo della funzione ($c$) ordinato secondo le potenze decrescenti di $u$ spariscano tutti i termini moltiplicati per

$$u^n,\ u^{n-1},\ u^{n-2}, \ldots\ldots, u,\ u^0\ \frac{1}{u},\ \frac{1}{u^2},\ \frac{1}{u^3} \ldots\ldots \frac{1}{u^n};$$

ma le potenze negative di $u$, derivano unicamente dal secondo termine della funzione ($c$) per cui dovrà essere

$$\Sigma_{i=0}^{i=n+1} \frac{\beta_i}{n+r-i+1} = 0$$

per tutti i valori $r=1,\ 2,\ 3 \ldots\ n$.

Considero due di queste equazioni prossime consecutive, le quali siano

$$\frac{\beta_{n+1}}{r} + \ldots\ldots + \frac{\beta_i}{n+r-i+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+r+1} = 0$$

$$\frac{\beta_{n+1}}{r+1} + \ldots\ldots + \frac{\beta_i}{n+r-i+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+r+2} = 0;$$

vi elimino $\beta_{n+1}$, e soppresso nella risultante il fattore $\frac{1}{r(r+1)}$ comune a tutti i suoi termini, si ottiene

$$\Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{(n+1-i)\,\beta_i}{(n+r-i+1)(n+r-i+2)} = 0,$$

la quale si verifica per tutti i valori di $r$ superiormente indicati. Consideriamo nuovamente due prossime di queste equazioni, e siano

$$\frac{\beta_n}{(r+1)(r+2)}+\ldots\ldots+\frac{(n+1-i)\,\beta_i}{(n+r-i+1)(n+r-i+2)}+\ldots\ldots=0$$

$$\frac{\beta_n}{(r+2)(r+3)}+\ldots\ldots+\frac{(n+1-i)\,\beta_i}{(n+r-i+2)(n+r-i+3)}+\ldots\ldots=0\,;$$

elimino da esse $\beta_n$, e tolto nella risultante il fattore $\frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ si ottiene

$$\Sigma_{i=0}^{i=n-1}\;\frac{(n-i+1)(n-i)\,\beta_i}{(n+r-i+1)(n+r-i+2)(n+r-i+3)}=0.$$

Eliminando da queste equazioni successivamente $\beta_{n-1}$, $\beta_{n-2}$, .... giungeremo a conseguire risultanti della forma seguente

$$\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-t+2)}{(n+r+1)(n+r+2)\ldots(n+r+t+1)}+\ldots+\frac{(n-i+1)(n-i)\ldots(n-i-t+2)}{(n+r-i+1)\ldots(n+r-i+t+2)}\,\beta_i\ldots=0\,;$$

ossia $(d)$
$$\Sigma_{i=0}^{i=n-t+1}\;\frac{(n-i+1)\ldots(n-i-t+2)}{(n+r-i+1)\ldots(n+r-i+t+2)}\,\beta_i=0\,.$$

Da questa equazione e dall'altra che si ricava cambiando $r$ in $r+1$ eliminiamo il primo termine a sinistra, e tolto dalla risultante il fattore $\frac{1}{(n+r+1)(n+r+t+2)}$ si avrà

$$\Sigma_{i=1}^{i=n-t+1}\;\frac{(n-i+1)\ldots(n-i-t+2)}{(n+r-i+1)\ldots(n+r-i+t+3)}\,i\,\beta_i=0\,.$$

Da questa e dalla seguente eliminato $\beta_1$ si ottiene

$$\Sigma_{i=2}^{i=n-t+1}\;\frac{(n-i+1)\ldots(n-i-t+2)}{(n+r-i+1)\ldots(n+r-i+t+4)}\,i\,(i-1)\,\beta_i=0\,;$$

ed eliminati di seguito $\beta_2$, $\beta_3$ ..... avremo risultanti della forma che segue

$$(e)\quad \Sigma_{i=h}^{i=n-t+1}\;\frac{(n-i+1)(n-i)\ldots(n-i-t+2)}{(n+r-i+1)\ldots(n+r-i+t+h+1)}\,i\,(i-1)\ldots(i-h+1)\,\beta_i=0\,.$$

Poniamo in questa equazione $r=1$, $h=n-t$ e si avrà

$$\frac{t+1}{t+n+2}\;\beta_{n-t}+\frac{n-t+1}{t+1}\;\beta_{n-t+1}=0\,,$$

cioè fatto $n-s=t$, $\beta_{s+1}=-\frac{(n-s+1)^2}{(s+1)(2n-s+2)}\,\beta_s$.

Se nella equazione ($d$) supponiamo $n-t=0$, $r=1$ si cava

$$\beta_1 = -\frac{(n+1)^2}{2n+2}$$

cosicchè $$\beta_s = (-1)^s \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)^2 \ldots (n-s+2)^2}{1.2\ldots s(2n+2)(2n+1)\ldots(2n-s+3)};$$

$$(f) \qquad E(t) = t^{n+1} - \frac{(n+1)^2}{2n+2} t^n +$$
$$+ \frac{(n+1)^2 n^2}{1.2(2n+2)(2n+1)} t^{n-1} - \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)^2}{1.2.3(2n+2)(2n+1)2n} t^{n-2} \ldots$$

che è la equazione ottenuta per induzione dal Sig. Gauss.

La formola ($e$) fornisce intanto l' integrale finito definito

$$\Sigma_{i=h}^{i=n-t+1} (-1)^i \frac{(n-i+1)\ldots(n-i-t+2)}{(n+r-i+1)\ldots(n+r-i+t+h+1)} \times$$
$$\times \frac{(n+1)^2 n^2 \ldots (n-i+2)^2}{1.2\ldots(i-h)(2n+2)\ldots(2n-i+3)} = 0.$$

Dalla equazione ($f$) si desume

$$E(t+u) = \Sigma_{r=0}^{r=n+1} \frac{(n+1)n\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots r} \Big\{ u^r - r\frac{n+1}{2n+2} u^{r-1} +$$
$$+ \frac{r(r-1)}{1.2} \frac{(n+1)n(n-1)}{(2n+2)(2n+1)} u^{r-2} + \ldots + (-1)^r \frac{(n+1)n\ldots(n-r+2)}{(2n+2)\ldots(2n-r+3)} \Big\} t^{n-r+1}.$$

Rappresentiamo colla lettera $N_r$ il coefficiente di $t^{n-r+1}$ in questa funzione, e poichè

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\phi^{2n+2-i}.\cos i\phi.d\phi = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-i+2)2^i}{(2n+2)(2n+1)\ldots(2n-i+3)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\phi^{2n+2}.d\phi$$

avremo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} N_r.\cos\phi^{2n+2}.d\phi = \frac{1}{2^r}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\phi \cos\phi^{2n-r+2} \times$$
$$\times \left[ (2u\cos\phi)^r - r(2u\cos\phi)^{r-1}\cos\phi + \ldots \right]$$
$$= \frac{1}{2^{r+1}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\phi.\cos\phi^{2n-r+2} \Big\{ \left(2u\cos\phi - e^{\phi\sqrt{-1}}\right)^r +$$
$$+ \left(2u\cos\phi - e^{-\phi\sqrt{-1}}\right)^r \Big\};$$

e supposto $\qquad \tang\phi = (2u-1)\tang\psi \qquad$ ne segue

$$(g) \quad N_r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\phi^{2n+2}.d\phi = \frac{(2u-1)^{r+1}}{2^r} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos\psi^{2n-r+2}.\cos r\psi}{(\cos^2\psi + (2u-1)\mathrm{sen}^2\psi)^{n+2}} d\psi.$$

Di qui caviamo intanto il valore dell' integrale definito scritto nel secondo membro, il quale appartiene ad una classe di formole studiate da Eulero, Legendre ed Abel.

Fatto $u=1$ abbiamo

$$N_r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi^{2n+2}.d\varphi = \frac{1}{2^r}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi^{2n-r+2}.\cos r\psi d\psi = \frac{(n+1)n\ldots(n-r+2)}{(2n+2)\ldots(2n-r+3)} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi^{2n+2}.d\psi;$$

quindi la formola notabile

$$\Sigma(-1)^i \frac{r(r-1)\ldots(r-i+1)}{1.2\ldots i}\,\frac{(n+1)n\ldots(n-i+1)}{(2n+2)\ldots(2n-i+1)} = \frac{(n+1)n\ldots(n-r+2)}{(2n+2)\ldots(2n-r+3)},$$

poi $$E(t+1) = \Sigma_{r=0}^{r=n+1} \frac{(n+1)^2 n^2\ldots(n-r+2)^2}{1.2\ldots r(2n+2)\ldots(2n-r+3)}\, t^{n-r+1},$$

$$E(t) = (-1)^{n+1}E(1-t);$$

epperò ad ogni radice della equazione $E(t)=0$ un' altra vi corrisponde la somma delle quali eguaglia l' unità.

Dunque se $n$ è dispari, quella equazione è soddisfatta da $t=\frac{1}{2}$ per cui

$$\Sigma_{i=1}^{i=n+1}(-1)^i \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)^2\ldots(n-i+2)^2}{1.2\ldots i(2n+2)(2n+1)\ldots(2n-i+3)}\,\frac{1}{2^{n-i+1}} = 0.$$

La equazione $E(t+\frac{1}{2})=0$ avrà le radici due a due eguali e di segni opposti: e siccome fatto $u=\frac{1}{2}$ dalla formola $(g)$ caviamo

$$N_r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi^{2n+2}.d\varphi = \frac{(\sqrt{-1})^r}{2^{r+1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1+(-1)^r)\cos\varphi^{2n-r+2}.\operatorname{sen}\varphi^r.d\varphi;$$

quindi se $r$ è dispari $N_r=0$, se $r$ è pari

$$N_r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi^{2n+2}.d\varphi = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{2^r}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi^{2n-r+2}.\operatorname{sen}\varphi^r.d\varphi$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{2^r}\,\frac{1.3.5\ldots(r-1)}{(2n+2)\ldots(2n-r+4)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi^{2n-r+2}.d\varphi.$$

Essendo poi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi^{2n+2}.d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\,\frac{\pi}{2}, \times$$

$$\times \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi^{2n-r+2}.d\varphi = \frac{1.3\ldots(2n-r+1)}{2.4\ldots(2n-r+2)}\,\frac{\pi}{2}$$

ne segue $$N_r = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{2^r} \frac{1.3.5\ldots(r-1)}{(2n+1)(2n-1)\ldots(2n-r+3)}$$
e le formole osservabili
$$\Sigma_{i=0}^{i=r} (-1)^i \frac{(n+1)\ldots(n-i+2)}{(2n+2)\ldots(2n-i+3)} \cdot \frac{r(r-1)\ldots(r-i+1)}{1.2\ldots i} 2^i = 0$$
se $r$ è dispari: ed
$$\frac{(n+1)n\ldots(n-r+2)}{1\ldots r} \Sigma_{i=0}^{i=r} (-1)^i \frac{(n+1)\ldots\ldots(n-i+2)}{(2n+2)\ldots(2n-i+3)} \cdot \frac{r(r-1)\ldots(r-i+1)}{1.2\ldots i} 2^i =$$
$$= (-1)^r \frac{1.3.5\ldots(r-1)}{(2n+1)(2n)\ldots(2n-r+3)}$$
quando $r$ sia pari. Caviamo ancora la equazione del Sig. Gauss
$$E(t+\tfrac{1}{2}) = \Sigma \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2s+2)}{2.4.6\ldots.2s(2n+1)(2n-1)\ldots(2n-2s+3)} (-1)^s t^{n-2s+1} = 0.$$

Le radici della equazione $E(t)=0$ sono tutte reali positive, mentre se potesse essere $t=r(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi)$ ne verrebbe di conseguenza $r\cos\varphi = 1$, cioè $t=\frac{1}{2}\pm r\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi$, e la equazione $E(t+\frac{1}{2})=0$ avrebbe radici della forma $r\,\mathrm{sen}\varphi\sqrt{-1}$, il che non è avendo i segni de' suoi termini alternativamente positivi e negativi. Ormai non restano che a risolvere l'una o l'altra delle equazioni
$$E(t)=0, \quad E(\tfrac{1}{2}+t)=0,$$
a calcolare la funzione $\int_0^1 Y(t)\,dt$; ed a determinare l'errore che si commette assumendo il valore di questa per rappresentare l'integrale cercato $\int_0^1 \varphi(a+bt)\,.\,dt$.
Essendo
$$\frac{E(t)}{t-a_i} = t^n + (\beta_1+a_i)t^{n-1} + (\beta_2+\beta_1 a_i + a_i^2)t^{n-2} \ldots\ldots + (\beta_n+\beta_{n-1}a_i\ldots\ldots+a_i^n)$$
epperò $$\int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i}dt = \left(\frac{1}{n+1}+\frac{\beta_1}{n}+\frac{\beta_2}{n-1}\ldots\ldots+\frac{\beta_{n-1}}{2}+\beta_n\right)+$$
$$+a_i\left(\frac{1}{n}+\frac{\beta_1}{n-1}+\ldots+\frac{\beta_{n-2}}{2}+\beta_{n-1}\right)+a_i^2\left(\frac{1}{n-1}+\ldots\ldots+\beta_{n-2}\right)\ldots+$$
$$\ldots\ldots+a_i^{n-1}\left(\frac{1}{2}+\beta_1\right)+a_i^n =$$
$$= \Sigma_{s=0}^{s=n}\left(\frac{1}{n+1-s}+\frac{\beta_1}{n-s}\ldots\ldots+\beta_{n-s}\right)a_i^s$$

avremo $\int_0^1 Y(t)\,dt = \Sigma_{s=0}^{s=n} \left( \frac{1}{n+1-s} + \frac{\beta_1}{n-s} \ldots + \beta_{n-s} \right) \Sigma_{i=s}^{i=n} \frac{A_i a_i^s}{E'(a_i)} =$

$$= \Sigma_{r=0}^{r=\infty} P_r \Sigma_{s=0}^{s=n} \left( \frac{1}{n-s+1} + \frac{\beta_1}{n-s} \ldots + \beta_{n-s} \right) \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^{r+s}}{E'(a_i)},$$

ed abbiamo ancora

$$\Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r}{E'(a_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i}\,dt = \Sigma_{s=0}^{s=n} \left( \frac{1}{n-s+1} + \ldots + \beta_{n-s} \right) \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^{r+s}}{E'(a_i)}.$$

Abbisognando di calcolare le funzioni $\Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^{r+n}}{E'(a_i)}$ senza risolvere la equazione $E(t)=0$ potremo valerci delle formole seguenti: essendo

$$E(t) = t^{n+1} + \beta_1 t^n + \beta_2 t^{n-1} + \ldots .$$

$$E'(t) = (n+1)\,t^n + n\beta_1 t^{n-1} + \ldots . .$$

posti $\frac{n\beta_1}{n+1} = -b_1$, $\frac{(n-1)\beta_2}{n+1} = -b_2$, $\frac{(n-2)\beta_3}{n+1} = -b_3 \ldots$, colla divisione effettiva troviamo

$$\begin{aligned}\frac{t^{n+r}}{E'(t)} = \frac{1}{n+1} \Big\{ & t^r + b_1 t^{r-1} + (b_1^2 + b_2)\,t^{r-2} + (b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3)\,t^{r-3} + \\ & + (b_1^4 + 3b_1^2 b^2 + 2b_1 b_3 + b_2^2 + b_4)\,t^{r-4} \\ & + (b_1^5 + 4b_1^3 b_2 + 3b_1^2 b_3 + 3b_1 b_2^2 + 2b_2 b_3 + 2b_1 b_4 + b_5)\,t^{r-5} \\ & + (b_1^6 + 5b_1^4 b_2 + 4b_1^3 b_3 + 6b_1^2 b_2^2 + 3b_1^2 b_4 + 6b_1 b_2 b_3 + \\ & + 2b_1 b_5 + 2b_2 b_4 + b_3^2 + b_2^3 + b_6)\,t^{r-6} \\ & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \Big\} \\ = \frac{1}{n+1} & \Sigma_{i=0}^{i=r} \frac{t^{r-i}}{1.2\ldots i} d^i{}_{u=0} \Sigma_{s=1}^{s=i} (b_1 u + b_2 u^2 \ldots + b_n u^n)^s\end{aligned}$$

A persuaderci di questa formola noteremo, che supposto

$$\frac{x^{n+r}}{x^n - b_1 x^{n-1} - b_2 x^{n-2} \ldots} = m_0 x^r + m_1 x^{r-1} \ldots + m_t x^{r-t} \ldots .$$

deve essere $\quad m_t = b_1 m_{t-1} + b_2 m_{t-2} \ldots + b_n m_{t-n};$

quindi $\quad m_t = \Sigma_{i=1}^{i=n} \frac{1.2..3...h}{1.2..a_1 \times 1.2..a_2 \times \ldots 1.2\ldots a_n} b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n}$

ove nel secondo membro si devono attribuire ad $a_1 a_2 \ldots a_n$, $h$ tutti i valori interi positivi, non escluso lo zero, i quali rendono

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 \ldots + na_n = t - i, \quad a_1 + a_2 \ldots + a_n = h.$$

Diffatti ponendo nel secondo membro del valore di $m_t$ le espressioni di $m_{t-1}$, $m_{t-2}$.... formate con $b_1$, $b_2$....; e raccolti i termini che contengono il prodotto $b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n}$ si ottiene

$$\frac{1.2\dots(h-1)}{1.2..(a_1-1)\times 1.2.\,a_2\times\dots\times 1.2\dots a_n} b_1 . b_1^{a_1-1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n} +$$

$$+ \frac{1.2\dots(h-1)}{1.2\dots a_1\times 1.2\dots(a_2-1)\times\dots\times 1.2\dots a_n} b_2 . b_1^{a_1} b_2^{a_2-1} b_n^{a_n} + \dots.$$

$$+ \frac{1.2\dots(h-1)}{1.2\dots a_1\times 1.2\dots a_2\times\dots\times 1.2\dots(a_n-1)} b_n . b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots. b_n^{a_n-1} =$$

$$= \frac{1.2\dots h-1}{1.2\dots a_1\times 1.2\dots a_2\times\dots\times 1.2\dots a_n} b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots. b_n^{a_n} (a_1+a_2+\dots.+a_n)$$

$$= \frac{1.2\dots h}{1.2\dots a_1\times\dots\times 1.2\dots a_n} b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots. b_n^{a_n}$$

eguale identicamente al termine che vi corrisponde nella espressione di $m_r$.

Il passaggio poi dall'una all'altra delle formole indicate superiormente è pressochè manifesto.

Ma nel caso di cui ci occupiamo la funzione $\Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r}{E'(a_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i} dt$ si può calcolare speditamente nella maniera che passo ad esporre. Consideriamo la funzione

$$\phi(u) = \Sigma_{r=0}^{r=\infty} \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^r}{u^{r+1} E'(a_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i} dt = \Sigma_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(u-a_i)E'(a_i)} \int_0^1 \frac{E(t)}{t-a_i} dt =$$

$$= \Sigma_{i=0}^{i=n} \int_0^1 \frac{E(t)}{(t-u)E'(a_i)} \left\{ \frac{1}{u-a_i} - \frac{1}{t-a_i} \right\} dt =$$

$$= \int_0^1 dt \frac{E(t)}{t-u} \Sigma_{i=0}^{i=n} \left\{ \frac{1}{(u-a_i)E'(a_i)} - \frac{1}{(t-a_i)E'(a_i)} \right\}$$

$$= \int_0^1 dt \frac{E(t)}{t-u} \left\{ \frac{1}{E(u)} - \frac{1}{E(t)} \right\} = \int_0^1 \frac{E(t)-E(u)}{(t-u)E(u)} dt =$$

$$= \left\{ \left( \frac{1}{n+1} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n-1} \dots + \beta_n \right) + u \left( \frac{1}{n} + \frac{\beta_1}{n-1} \dots. + \beta_{n-1} \right) \dots + u^n \right\} : E(u)$$

$= [A_n + A_{n-1} u + A_{n-2} u^2 \dots + u^n] : E(u)$ per brevità di scrittura.

Supposto quindi

$$\phi(u) = \frac{u^n + A_1 u^{n-1} \dots. + A_n}{u^{n+1} + \beta_1 u^n \dots + \beta_{n+1}} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} C_2 + \frac{1}{u^3} C_3 \dots. + \frac{1}{u^r} C_r \dots.$$

avremo le equazioni che seguono

$$C_2+\beta_1=A_1,\ C_3+C_2\beta_1+\beta_2=A_2,\ C_4+C_3\beta_1+C_2\beta_2+\beta_3=A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e se $r>n$

$$C_r\beta_{n+1}+C_{r+1}\beta_n+C_{r+2}\beta_{n-1}\ldots+C_{r+n+1}=0.$$

Dalle quali ricaviamo

$$C_2=\tfrac{1}{2},\ C_3=\tfrac{1}{3},\ C_4=\tfrac{1}{4},\ldots\ldots C_{2n+1}=\frac{1}{2n+1},$$

$$C_{2n+2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}-\frac{1}{2n}\frac{(n+1)^2n^2}{1.2(2n+2)(2n+1)}+\frac{1}{2n-1}\frac{(n+1)^2n^2(n-1)^2}{1.2.3(2n+2)(2n+1)2n}\cdots$$

$$+\frac{(-1)^n}{n+2}\frac{(n+1)^2n^2(n-1)^2\ldots2^2}{1.2\ldots n(2n+2)\ldots(n+3)}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\frac{(n+1)^2n^2\ldots1^2}{1.2\ldots(n+1)(2n+2)\ldots(n+2)}.$$

Per sommare quest' ultima serie poniamo

$$y_n=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}x-\frac{(n+1)^2n^2}{1\,2(2n+2)(2n+1)(2n)}x^2+\frac{(n+1)^2n^2(n-1)^2}{1.2.3(2n+2)\ldots(2n-1)}x^3\ldots$$

per cui avremo

$$y_{n+1}=\frac{(n+2)^2}{(2n+4)(2n+3)}x-\frac{(n+2)^2(n+1)^2}{1.2(2n+4)(2n+3)(2n+1)}x^2+\ldots$$

$$\frac{dy_{n+1}}{dx}=\frac{(n+2)^2}{(2n+4)(2n+3)}-\frac{(n+2)^2}{(2n+4)(2n+3)}\left\{\frac{(n+1)^2}{2n+2}x-\frac{(n+1)^2n^2}{1.2(2n+2)(2n+1)}x^2+\ldots\right\},$$

e siccome $\dfrac{y_n}{x^{2n+2}}=\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}x^{-2n-1}-\dfrac{(n+1)^2n^2}{1.2(2n+2)(2n+1)(2n)}x^2+\ldots\ldots$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{x^{2n+2}}\right)=-\frac{1}{x^{3n+3}}\left\{\frac{(n+1)^2}{2n+2}x-\frac{(n+1)^2n^2}{1.2(2n+2)(2n+1)}\right\}x^{-2n}+\ldots$$

concludiamo la equazione

$$2(2n+3)\frac{dy_{n+1}}{dx}-(n+2)x\frac{dy_n}{dx}+2(n+1)(n+2)y_n=n+2.$$

Per integrarla, poniamo $y_n=P_n\cdot\chi_n+\frac{1}{2(n+1)}$, ove $P_n$ non dipenda dalla variabile $x$: e fatta la sostituzione ne segue

$$2(2n+3)P_{n+1}\frac{d\chi_{n+1}}{dx}-(n+2)P_nx\frac{d\chi_n}{dx}+2(n+1)(n+2)P_n\chi_n=0.$$

Si suppongano $\frac{d\chi_{n+1}}{dx}=x\frac{d\chi_n}{dx}=k_n\cdot\chi_n$, essendo $k_n$ un coefficiente a determinare: e troviamo $\chi_n=\frac{C}{n}x^n$, ove $\underline{C}$ non contiene $\underline{x}$ nè $\underline{n}$; poi $\quad 2(2n+3)P_{n+1}+(n+2)(2n+1)P_n=0.$

epperò $$P_n = \frac{2.3.4.5.....(n-1)\,n\,(n+1)}{(2n+1)\,2^n}(-1)^n.D,$$

$$C_{2n+2} = \frac{2.3....(n+1)}{(2n+1)\,2^n}(-1)^n\,\frac{E}{n} + \frac{1}{2(n+1)},$$

essendo $C$, $D$, $E$ indipendenti da $\underline{x}$ e da $\underline{n}$.

Supposto $n=1$ troviamo dover essere $E=0$, epperò

$$C_{2n+2} = \frac{1}{2n+2};$$

onde $$\Sigma_{i=0}^{i=n}(-1)^i\,\frac{(n+1)^2 n^2 \ldots (n-i+1)^2}{1.2\ldots(i+1)(2n+2)(2n+1)\ldots.(2n-i+2)} = \frac{1}{2n+2}.$$

Avremo poi $$C_{2n+3} = -\frac{1}{2n+2}\beta_1 + \frac{1}{2n+1}\beta_2 - \frac{1}{2n}\beta_3 + \ldots.$$

ossia $$C_{2n+3} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - \frac{(n+1)^2 n^2}{1.2(2n+2)(2n+1)^2} + \frac{(n+1)^3 n^2 (n-1)^2}{1.2.3\,(2n+2)(2n+1)(2n)^2}\ldots.$$

di cui facilmente calcoleremo il valore allorchè $\underline{n}$ sia determinato. Se poniamo

$$y = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)^2}\,x^{2n+2} - \frac{(n+1)^2 n^2}{1.2(2n+2)(2n+1)^2}\,x^{2n+1}\ldots.$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{(n+1)^2}{2n+2}\,x^{2n+1} - \frac{(n+1)^2 n^2}{1.2.(2n+2)(2n+1)}\,x^{2n} + \ldots.$$

e $$\frac{dy}{dx}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\phi^{2n+2}.d\phi = x^{2n+2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\phi^{2n+2}.d\phi -$$

$$-\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left\{\begin{matrix}[(2x-1)\cos\phi - \sqrt{-1}\,sen\,\phi^{n+1}] + \\ [(2x-1)\cos\phi + \sqrt{-1}\,sen\,\phi^{n+1}]\end{matrix}\right\}\cos\phi^{n+1}.d\phi.$$

Supposto $\quad tang\,\phi = (2x-1)\,tang\,\psi \quad$ ne viene

$$\left(x^{2n+2} - \frac{dy}{dx}\right)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\phi^{2n+2}.d\phi = \frac{x^{n+1}(2x-1)^{n+2}}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\psi^{n+1}.\cos(n+1)\psi}{(\cos^2\psi + (2x-1)^2 sen^2\psi)^{n+2}}\,d\psi$$

e quindi

$$\left(\frac{1}{2n+3} - C_{2n+3}\right)\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}\,\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 dx\,x^{n+1}(2x-1)^{n+2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\psi^{n+1}.\cos(n+1)\psi}{(\cos^2\psi + (2x-1)^2 sen^2\psi^{n+2})}\,d\psi;$$

ed abbiamo così le espressioni di due integrali definiti notabili.

Siccome poi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\psi^{n+1}\cos(n+1)\psi}{(\cos^2\psi + (2x-1)^2 sen^2\psi)^{n+1}}\,d\psi \text{ non } < \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\psi^{n+1}}{(\cos^2\psi + (2x-1)^2 sen^2\psi)^{n+1}}\,d\psi$$

e questo secondo integrale colla posizione
$tang\,\phi = (2x-1)\,tang\,\psi$ si riduce al seguente

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos\,\phi^{n+1} \left(sen^2\phi + (2x-1)^2 cos^2\phi\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{d\phi}{(2x-1)^n}$$

così che per essere

$$sen^2\phi + (2x-1)^2 cos^2\phi = 1 - 4x(1-x)\,cos^2\phi \;non > 1$$

per tutti i valori di $x$ dallo zero fino all' unità, avremo

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2n+3} - C_{2n+3}\right) < \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 dx\,.\,x^{n+1}(2x-1)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos\phi^{n+1}.d\phi\,.$$

Ma $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos\phi^{n+1}.d\phi = \frac{1.3.5\ldots n}{2.4\ldots n+1}\,\frac{\pi}{2}$, se $n =$ dispari,

ovvero $= \frac{1.2.4\ldots n}{1.3\ldots n+1}$ quando $n$ sia pari;

ed $\int_0^1 x^{n+1}(2x-1)^2.dx = \frac{n^2+3n+4}{(n+2)(n+3)(n+4)}$,

onde avremo per ultimo

$$\frac{1}{2n+3} - C_{2n+3} < \frac{\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n+5}{2}\right)\ldots(n+1)}{(n+2)(n+4)\ldots(2n+1)}\,\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{n^2+3n+4}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

quando $n$ sia dispari: e se $n$ è pari

$$\frac{1}{2n+3} - C_{2n+3} < \frac{1.2^2.3^2\ldots\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.3^2.5^2\ldots(n+1)^2}\,\frac{n^2+3n+4}{(n+2)(n+3)(n+4)}\,\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)\ldots(n+1)}{(n+3)\ldots(2n+1)\pi}\,.$$