TRISEZIONE GEOMETRICA
DEGLI ARCHI DI CERCHIO
E DESCRIZIONE DI CURVE ALGEBRICHE
COL MEZZO DELLA BASE VARIABILE DI UN TRIANGOLO

MEMORIA

DEL DOTT. AMBROGIO FUSINIERI

Ricevuta adì 31 *Maggio* 1845.

Nell'anno 1822 ho stampato un Opuscolo *Trisezione geometrica di qualunque arco di cerchio*, ove ho risolto il problema col semplice mezzo di rendere continuamente variabile la base di un triangolo isoscele.

Sono partito dai seguenti postulati.

1. Mentre una retta AD è mobile al punto A, un' altra retta DK può essere mobile al punto D (Fig. 1).

2. Come in Geometria si rende mobile un punto lungo una retta, così viceversa si potrà rendere mobile una retta KD in modo che passi continuamente per un punto fisso C. (fig. 2).

3. In conseguenza possono rendersi continuamente variabili l'angolo al vertice A e la base DC di un triangolo, restando immobile il lato AC (fig. 3).

Ho descritto uno strumento semplicissimo che ho fatto costruire per ottenere in un triangolo isoscele il moto continuo del terzo postulato. Consiste in tre righe, due eguali, l' altra doppia unite fra loro col nodo del compasso di Galileo, nodo che serve a rendere continuamente variabile un angolo, conservando lo stesso vertice (fig. 4, 5).

Ho accennato inoltre che lo strumento serve a descrivere col suo moto continuo una curva algebraica di quarto ordine, detta *trisecatrice*, perchè serve a trisecare qualunque arco di cerchio.

Ho immaginato in seguito di rendere continuamente variabile la base di un triangolo qualunque col mezzo del compasso e di una riga. Fatto centro in A, l'apertura del compasso è la retta mobile AD (fig. 3); e la punta D del compasso move la riga DK in modo che passi sempre pel punto fisso C, e come dirò qui sotto.

Descritta la curva trisecatrice o collo strumento o colla riga mossa dal compasso, riesce facilissima la costruzione delle equazioni di terzo grado nel caso chiamato *irreducibile*, che hanno le tre radici reali.

Col moto di continua variazione della base di un triangolo isoscele si descrivono quelle curve algebriche del quarto ordine delle linee, che appartengono alle concoidali aventi il cerchio per linea direttrice; e riducendo scaleno il triangolo a base variabile sorge la descrizione di altre curve dello stesso genere.

Vengo ora a dare brevi cenni di queste cose ulteriori, quanto semplici altrettanto feconde di conseguenze, ben facili a vedersi per la costruzione delle equazioni.

§. I.

Trisezione degli archi di cerchio e strumento relativo.

Riassumerò in primo luogo la risoluzione del Problema data nell'Opuscolo, e ripetuta dal Sig. Prof. Lotteri nelle sue *Lezioni di Introduzione al calcolo sublime* T. II, Sez. I, Cap. XIII.

Probl. *Dato un arco di cerchio trovare la sua terza parte.*

Le figure 4, 5 della Tavola presentano i due casi di archi minori e maggiori di un semicerchio.

Risoluzione.

1. Preso per raggio CA uno dei due lati eguali dello strumento si descriva l'arco AL simile al dato, e si conduca la corda.

2. Il terzo lato DK dello strumento ch' è doppio degli altri, ha una divisione a metà in F.

Si collochi immobile il lato CA dello strumento sul raggio estremo dell' arco dato; e movendo col mezzo dei nodi A, D gli altri due lati dello strumento, in modo che DK passi sempre pel centro C, si conduca il punto F sulla corda. Condotto per quel punto F il raggio CG sarà l'arco AG terza parte dell' arco dato.

Dimostrazione.

Si rivolga l'attenzione alle fig. 6 7 analoghe ai due casi delle fig. 4 5.

Si conduca la corda AG. Secondo la risoluzione DF=DA=CA=GG, ed il punto F è ridotto sulla corda AL. Essendo *ang.* ACG = *ang.* ADF, nei due triangoli isosceli ACG, ADF, sono eguali anche le basi AG, AF. Dunque è isoscele anche il triangolo AFG. È poi simile al triangolo isoscele ACG, perchè hanno comune l'angolo G alla base. Quindi *ang.* FAG= *ang.* ACG. In conseguenza l'arco GL sul quale insiste l'angolo FAG è doppio dell' arco AG. Ossia l'arco AG è la terza parte dell' arco dato AGL.

Altrimenti.

Nel caso della fig. 6 *ang.* FAG = *ang.* CAG − *ang.* CAF. Ma *ang.* CAG = *ang.* AFD. Dunque *ang.* FAG = *ang.* AFD − *ang.* CAF = *ang.* ACG.

Nel caso della fig. 7 *ang.* FAG = *ang.* CAG + *ang.* CAF. Ma *ang.* CAG = *ang.* AFD. Dunque *ang.* FAG = *ang.* AFD + *ang.* CAF = *ang.* ACG. Vale a dire in tutti i casi l'arco GL è doppio dell' arco AG.

Illustrazioni.

1. Non sarebbe necessario estendere la risoluzione del problema agli archi maggiori del quadrante; giacchè basta levare dagli archi maggiori o un quadrante, o il semicerchio, o

tre quadranti; indi trovare la terza parte del residuo, ed aggiungere a questa il terzo dell'arco levato, ch'è sempre cognito.

2. Quando l'arco dato AL è il semicerchio (fig. 8) il punto F dello strumento è condotto al centro C; i punti G, D coincidono alla periferia e AG divenuto AD eguale al raggio sottende la terza parte.

3. Quando l'arco dato AGL è di tre quadranti (fig. 9), i due lati AC, AD coincidono; il punto F è condotto all'estremo L della corda, e l'arco AG determinato dallo strumento è un quadrante.

4. Però il nodo D dello strumento impedisce la coincidenza della retta AD con AC; e il nodo A impedisce la coincidenza di AC+AD con DK. Dal raggio dei nodi A, D si deduce l'arco minore e l'arco massimo trisecabili collo strumento. Se l'arco dato è minore del minimo si aggiunge un arco triplo, si triseca il tutto, e si sottrae il terzo dell'arco aggiunto. Se l'arco dato è maggiore del massimo si sottrae un arco triplo, si triseca il residuo, e si aggiunge il terzo dell'arco sottratto.

5. Se l'arco dato AHLGT (fig. 10) è maggiore di tre quadranti, si conducano le due corde normali AT, AL. Si trovi collo strumento la terza parte AG dell'arco ATL, ch'è minore dei tre quadranti. Si conduca il diametro GCH; sarà l'arco AH terza parte dell'arco dato AHLGT.

§. II.

Della curva trisecatrice.

1. Nel triangolo isoscele ACD' (fig. 11) secondo il §. I il lato AC è immobile; il lato eguale AD' è mobile al punto A, e la base D'C mobile al punto D' è continuamente variabile di quantità. La retta D'K che porge quella base variabile è doppia di ciascuno dei due lati, ed è divisa a metà in F'. Sicchè D'F' = AC = AD'. Si concepisca descritto dal punto

C col raggio C A il circolo degli archi da trisecarsi. Per quel moto continuo il punto D descrive un altro circolo che ha centro in A e che passa pel centro C del primo. Nello stesso tempo l'estremo F' della costante D' F' descrive una curva.

Il suo principio è in A quando A C + A D in diretto coincidono con D K; prosegue per $F^1 f F^2$, e passa pel punto C quando D^2 si trova al punto G^2 di intersecazione dei due circoli. Indi mentre il punto D descrive l'arco $D^2 D^3 C$, la curva continua nell'area dell'opposto quadrante per $F^2 F^3 F^4$; e quando A D coincide con A C, la curva si trova in F^4 alla periferia del primo circolo, sull'estremo del raggio C F' che fa angolo retto con A C.

2. È chiaro dalla dimostrazione del Problema di trisecazione (§. I) che le corde AF^1, Af della curva sono eguali alle corde AG^1, Ag degli archi di cerchio determinati dai raggi C G, Cg che passano pei punti F^1, f della curva. Ed è chiaro egualmente dalla stessa dimostrazione, che quelle corde AG^1, Ag sottendono le terze parti degli archi di cerchio determinati dalle corde A L che passano pei punti f della curva.

Quindi descritta che sia la sola parte di curva $AF^1 fC$ nel primo quadrante del cerchio, serve a trisecare gli archi fino al semicerchio in questo modo. Si conduce la corda A L dell' arco dato, la quale taglia la curva in un punto f. Per quel punto si conduce il raggio Cfg, e si ha Ag terza parte dell' arco A L.

Così conducendo il diametro AC ec. il raggio AC è corda della curva $AF^1 fF^2$. Ed essendo $AG^2 = AF^2$, si ha l' arco AG^2 sotteso dal raggio, terza parte del semicerchio.

3. Si può dunque in tavole metalliche avere incisa nel primo quadrante di un semicerchio la parte di curva $AF^1 fF^2$ (fig. 11); e queste tavole possono essere diffuse ad uso universale, per la facilissima trisezione di tutti gli archi fino al semicerchio; il che è più che sufficiente.

4. Se negli altri due quadranti del circolo si descrive in senso opposto la stessa curva di cui sopra (n. 1), si ha la

curva mostrata dalla fig. 12. In quel caso la corda A L di arco maggiore del quadrante taglia la curva nei due punti f, F; pei quali conducendo il raggio Cfg, e l'altra retta F C G che passa pel centro, saranno, per la risoluzione del Problema (§. I e fig. 5, 7), Ag terza parte del segmento minore AgL, ed A G terza parte del segmento maggiore A G L del cerchio.

5. Ma la curva mostrata dalla fig. 12 non è che una porzione della curva che rientra in se stessa con un nodo interno, come mostra la fig. 13. Viene questa descritta per intiero con due rivoluzioni di un triangolo isoscele a base variabile, al che non serve lo strumento di sopra descritto delle fig. 4, 5 (§. I). Serve invece una riga mossa col compasso, come passo a descrivere.

§. III.

Come colla riga e col compasso si renda continuamente variabile la base di un triangolo isoscele, e si descriva la curva trisecatrice.

1. Si faccia una riga D K (fig. 3) o di metallo o di legno, la quale in D abbia una piccolissima nicchia, ove collocata una punta del compasso cada esattamente sulla estremità D di quella retta.

Fatto centro in A coll'altra punta del compasso si mova la riga, mentre si descrive l'arco D D.

Movendo in quel modo la riga si potrà fare che passi continuamente per un punto fisso C, se per esempio in C vi sia lo spigolo acutissimo di un prisma triangolare fissato sul piano della figura.

Se le rette A C, A D sono eguali, e se D K doppia di ciascuna ha un segno al suo mezzo, si ha l'equivalente dello strumento (fig. 4, 5) di sopra descritto per la trisezione degli archi di cerchio (§. I).

2. Si è veduto (§. II, n. 4, 5) che collo strumento a due nodi del compasso di Galileo, adoprato due volte in sensi

opposti, si descrive soltanto la parte compresa nel circolo (fig. 12) della curva trisecatrice, che rientra in se stessa con un nodo interno (fig. 13). Non si può con quello strumento descrivere la parte della curva esterna al circolo, perchè la retta mobile A D giunta col punto D al centro C del circolo, non può oltrepassare la retta fissa A C (fig. 11). Al contrario movendo col compasso la retta D K (n. 1), la retta A D può oltrepassare A C; e dopo quel passaggio D F resa tutta esterna alla base variabile C D del triangolo isoscele, continua a descrivere col punto F la curva anche fuori del circolo (fig. 11, 12, 13), purchè la retta K F D prolungata indietro continui a passare sempre pel punto C.

In questo modo con due rivoluzioni del triangolo isoscele a base variabile, il punto F descrive la intera curva della fig. 13. Partendo cioè dalla posizione dei due lati A C, A D in diretto (fig. 11) si forma poscia il triangolo isoscele A D' C; e quando i due lati eguali coincidono in A C è descritta dal punto F una parte di curva entro il circolo $AF^1F^2F^3F^4$. Poi quando A D ha oltrepassato A C, la retta D F è divenuta tutta esterna alla base del triangolo isoscele; e quando i due lati A C, A D tornano ad essere in diretto il punto F ha descritto il rimanente della metà della curva (fig. 13) ch' è fuori del circolo (fig. 12). È questa la prima rivoluzione del triangolo con cui viene descritto prima la metà a destra del nodo; poi la metà a sinistra del resto della curva (fig. 12, 13) fuori del nodo.

Quando dall'essere di nuovo i due lati A D, A C in diretto (fig. 11) tornano a formare il triangolo isoscele A D' C, ma colla retta D F tutta esterna alla base, fino a nuova coincidenza dei due lati A C, A D, il punto F descrive l'altra metà della parte di curva, ch' è fuori del circolo. E quando dopo quella coincidenza, A D ha oltrepassata di nuovo la retta fissa A C, il punto F torna a descrivere la curva entro il circolo. Quando F ha oltrepassato di nuovo il centro C, ritorna ad essere nella base variabile del triangolo; e finchè i due lati

AD, AF ritornano in diretto, il punto F descrive l'altra metà del nodo. È questa la seconda rivoluzione del triangolo isoscele, colla quale viene descritto prima la metà a destra della curva fuori del nodo; poi la metà a sinistra dello stesso nodo (fig. 13).

3. Io feci costruire una regola di ottone quadrupla di AC (fig. 11) con piccola nicchia alla sua metà, ove la punta del compasso coincide col punto D. Ciascuna delle due porzioni è pure divisa a metà, e dicansi que' due punti F', F. Un prisma triangolare di ottone ha uno spigolo acutissimo C, ed è alto come la grossezza della regola. Si rende fisso il prisma sopra un piano col mezzo di tre puntine che ha alla sua base. Si fa l'apertura del compasso AC eguale alla parte DF della regola, e fatto centro in A, coll'altra punta del compasso si movono le DF' DF, in modo che esse o i loro prolungamenti passino continuamente per lo spigolo C del prisma. I due punti F, F' della regola descrivono ad un tempo la parte interna e la parte esterna al circolo della curva trisecatrice (fig. 11. 13). Cosicchè con una sola rivoluzione si descrive la intera curva.

§. IV.

Come la trisecatrice serva alla costruzione delle equazioni di terzo grado nel caso irreducibile.

1. È noto che essendo a il raggio del circolo, b la corda di un arco dato, x la corda della terza parte dell'arco, si ottiene $x^3-3a^2x+a^2b=0$.

Confrontando questa equazione colla generale $x^3+px+q=0$ risulta che p è negativo ed insieme $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$; i quali due caratteri costituiscono il caso *irreducibile*; quello cioè ove tutte tre le radici sono reali, due positive la terza negativa, ed è insufficiente la formula di Cardani a risolvere la equazione.

È noto parimenti che essendo AL l'arco dato, le tre radici lineari della equazione sono:

1. Corda di $\frac{1}{3}$ AL
2. Corda di $\frac{1}{3}$ (360° — AL)
3. — Corda $\frac{1}{3}$ (360° + AL).

Il modo usato dai Geometri per trovare queste tre radici fa la intersecazione di due sezioni coniche; una delle quali il circolo come il più comodo. Ma per ogni arco dato AL bisogna rinnovare le descrizioni e le intersecazioni di quelle curve.

2. Trovato secondo il problema della trisezione il terzo dell'arco dato AL la corda di cui è la prima radice, è ben facile determinare le altre due. Ma ecco un modo semplicissimo. Descritta che sia la curva trisecatrice, essendo l'arco dato AL, la sua corda taglia la curva nei due punti *f*, F (fig. 12). La retta A*f* = A*g* è corda della terza parte del minore segmento, e la retta AF = AG è corda della terza parte del maggiore segmento del circolo, come dall' esposto al §. II, n. 4, dalle figure 4, 5, 6, 7; e dalla risoluzione del Problema (§. I). Sono dunque A*g*, AG, ossia A*f*, AF le due prime radici dell' equazione.

Si prolunghi oltre il punto A la corda LA, finchè taglia di nuovo la trisecatrice (fig. 13). La retta compresa fra il punto A e la parte esterna al circolo della curva è la terza radice negativa.

Sulla stessa retta dunque condotta pel vertice A del nodo della trisecatrice si ha da una parte la corda dell'arco dato, le corde delle terze parti del minore e del maggiore segmento, e alla parte opposta la corda di 120° più un terzo dell' arco dato, ch' è la terza radice.

Ed anche senza la previa descrizione della trisecatrice si trovano le tre corde, ossia le tre radici reali delle equazioni di terzo grado nel caso *irreducibile* col solo uso del compasso e di una riga che sia mossa da quello, conducendo il punto F sulla corda dell' arco e sul suo prolungamento da una parte e dall' altra.

§. V.

Di altre curve descritte con triangolo isoscele, e con triangolo scaleno a basi variabili; e delle loro equazioni.

1. Premetto la equazione della trisecatrice, presentata sotto altra forma dal Prof. Lotteri e da Garnier da lui citato, il quale non conobbe nè lo strumento del §. I nè l'altro modo che ho proposto (§. III) per la descrizione della curva.

Sia $AC = AD' = D'F' = a$ (fig. 11); CP ascissa $= x$;

PF semiordinata $= y$; saranno: $CF = \sqrt{(x^2+y^2)}$

$AP = a - x$; $AF = \sqrt{(a-x)^2+y^2} = AG'$ (§. I);

$FG = a - \sqrt{(x^2+y^2)}$;

$AC : AF = AF : FG$ (§. I); $AF^2 = AC \times FG$;

d' onde

$$x^2+y^2-2ax+a\sqrt{(x^2+y^2)}=0$$

$$y^4+(2x^2-4ax-a^2)y^2+(x^2-4ax+3a^2)x^2=0$$

$$y=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[a^2+4ax-2x^2\pm a\sqrt{a(a+8x)}\right]}$$

2. Se ritenuto $AC = AD'$ si prende sulla retta $D'K$ una costante qualunque $D'F$, col moto di AD al punto A e di $D'K$ al punto D' si ha ancora un triangolo isoscele a base variabile (fig. 11); ed il punto F' descrive in parte collo strumento del §. I, fig. 4, 5, o in tutto colla riga mossa dal compasso, come al §. III, delle curve concoidali, che hanno il cerchio per linea direttrice.

Caso singolare di tali curve è quello della curva trisecatrice, ove $D'F = AC = AD'$.

La equazione generale di tali curve si ottiene in questo modo

(fig. 11) $AC = AD' = a$; $D'F' = b$; $CP = x$; $PF' = y$;

saranno $CF' = \sqrt{(x^2+y^2)}$; $CD' = \sqrt{(x^2+y^2)} + b$.

Se si concepisce condotta anche la retta DD′, il triangolo rettangolo DD′C è simile al triangolo rettangolo CPF′; d'onde l'analogia

$$CF' \left[\sqrt{(x^2+y^2)} \right] : CP(x) = CD(2a) : CD' \left[\sqrt{(x^2+y^2)} + b \right]$$

quindi: $$x^2+y^2+b\sqrt{(x^2+y^2)} - 2ax = 0$$

$$y^4 + (2x^2 - 4ax - b^2)y^2 + (x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2)x^2 = 0$$

se $a = b$, com' è il caso della trisecatrice, queste equazioni si riducono alle precedenti (n. 1).

3. Se il triangolo ADC è scaleno (fig. 3) ancora si può rendere continuamente variabile la sua base, sia con istrumento simile a quello del §. I (fig. 4, 5), sia con una riga mossa dal compasso come nel §. III (fig. 11). Presa sulla retta D′K una costante D′F′, il punto F′ descrive con quel moto continuo, o in parte collo strumento a due nodi, o in tutto col secondo mezzo, le curve relative. Anche queste appartengono alla famiglia delle concoidali che hanno il cerchio per linea direttrice. Sembra che tal genere di curve non sia stato dai geometri considerato; ed è certo che nessuno ne ha data descrizione con un moto continuo semplice come io propongo. Resterà a cercare i risultati ulteriori di queste prime indagini, ed a quali utili applicazioni possano servire.

Dicendosi (fig. 11) $AC = a$; $AD' = c$; $D'F = b$. E prese ancora le ascisse sul lato fisso AC dal punto C per cui passa la base variabile D′C; $CP = x$, $PF = y$, si arriva alla seguente equazione.

$$\sqrt{(x^2+y^2)}\,(x^2+y^2+b^2+a^2-c^2-2ax) + 2b\,(x^2+y^2) - 2abx = 0$$

facendo $AC = AD$; ossia $a = c$, risulta

$$\sqrt{(x^2+y^2)}\,(x^2+y^2+b^2-2ax) + 2b\,(x^2+y^2) - 2abx = 0$$

$$x^2+y^2+b^2-2ax+2b\sqrt{(x^2+y^2)} - \frac{2abx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0.$$

Nel caso di $a = c$ si ha pel precedente n. 2

$$x^2+y^2+b\sqrt{(x^2+y^2)} - 2ax = 0;$$

sottraendo questa da quella resta

$$b^2+b\sqrt{(x^2+y^2)}-\frac{2abx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=0;$$

$$b+\sqrt{(x^2+y^2)}-\frac{2ax}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=0;$$

$$x^2+y^2+b\sqrt{(x^2+y^2)}-2ax=0;$$

ch' è la medesima del n. 2.

Cosicchè la equazione nel caso del triangolo scaleno ridotta al caso di $a=c$, contiene due volte la equazione di quel caso di triangolo isoscele (n. 2), ciascuna eguale a zero; il che conferma la verità della stessa equazione nel caso dello scaleno.

§. VI.

Se sia geometrica la trisezione di sopra data degli archi di cerchio.

1. Quando ho pubblicato la trisezione collo strumento del §. I i geometri si sono divisi di opinione circa il termine di *geometrica.*

Chi diceva che per essere risolto il problema con curva descritta per moto continuo e non per punti vicini, la risoluzione era geometrica. Chi diceva che appartiene alla geometria sublime e non alla elementare. Chi diceva che non è geometrica per non essere eseguita col mezzo della riga e del compasso.

Il Sig. Lotteri medesimo (T. II, pag. 201) ha detto che la soluzione del problema, *a rigore non si può dire geometrica*, senza dire cosa intenda egli per soluzione geometrica; mentre egli stesso chiamò geometriche altre costruzioni fatte con istrumenti ben più complicati di quello da me proposto per la trisezione.

Io ho distinto fin d' allora e distinguerò sempre la parte intellettuale della risoluzione di un problema di geometria dalla sua pratica esecuzione.

Si sa bene che neppure colla riga e col compasso si descrivono quelle rette e que' circoli che intellettualmente considerano i geometri. Anche coll' uso della riga e del compasso non si fa che ottenere meccanicamente delle approssimazioni.

Lo stesso dicasi in genere delle descrizioni di curve per moto continuo con mezzi meccanici. Non si arriva mai a quel rigore geometrico del quale parla il Sig. Lotteri. Rendere variabile la base di un triangolo isoscele, e condurre un punto di quella base sulla corda di un' arco, sono idee geometriche. La pratica esecuzione non può essere che meccanica.

Io distinguo per altro anche nella stessa pratica esecuzione que' mezzi che per la loro semplicità si approssimano alla esattezza geometrica intellettuale, da quelli che per la loro complicazione se ne allontanano, come sarebbe l' uso di macchine, il quale accorderò che in geometria non si possa ammettere.

Consimili furono le idee di Newton nella Prefazione a' suoi Principj Matematici di Filosofia Naturale, ove ha detto: « Mechanica omnis a geometria ita distinguatur, ut quicquid « accuratum sit ad geometriam referatur, quicquid minus ac- « curatum ad mechanicam..... Fundatur igitur geometria in « praxi mechanica, et nihil aliud est quam mechanicae uni- « versalis pars illa, quae artem mensurandi proponit ac de- « monstrat. »

NOTA

Probl. Trovare le tre radici reali nel caso irreducibile col solo uso del compasso e di una riga mobile, come fu accennato al §. IV, n. 2.

Si risolve questo problema colla riga mobile divisa in quattro parti eguali e quadrupla del raggio, ossia dell' apertura del compasso; cioè colla medesima che descrive la curva trisecatrice (§. III).

Sia come nella figura della Tav. II la corda dell' arco dato AL, la quale si prolunghi indefinitamente fuori del circolo da ambedue le parti.

Si apra il compasso come AC raggio del circolo, e si pianti una punta del compasso all' estremo A della corda data. Coll' altra punta D alla metà della riga ab quadrupla del raggio AD si mova la riga in modo che la retta ab passi continuamente pel centro C del circolo.

Le divisioni della retta ab in quattro parti eguali sono ai punti F, D, f: indi

1. Si conduca il punto F sulla corda AL, la costante DF è interna nella base variabile DC del triangolo isoscele ADC. Sarà AF la prima radice.

2. Si conduca sul prolungamento della corda AL, fuori del circolo il punto f della riga. Sarà la retta Af la seconda radice dell' equazione.

3. Si conduca il punto F sul prolungamento alla parte opposta della corda AL fuori del circolo. Sarà AF la terza radice negativa.

Dimostrazione.

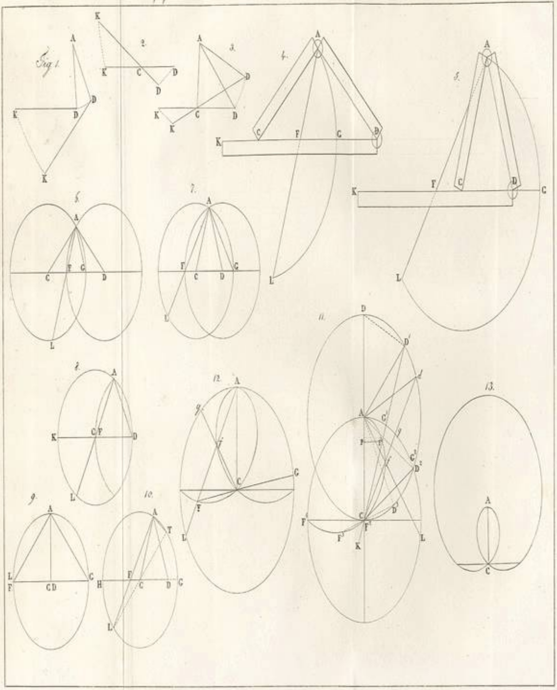
1. Nella prima posizione della riga ab.

$$AF = cord.\ arc.\ AG = corda\ \tfrac{1}{3}\ arc.\ AL.$$

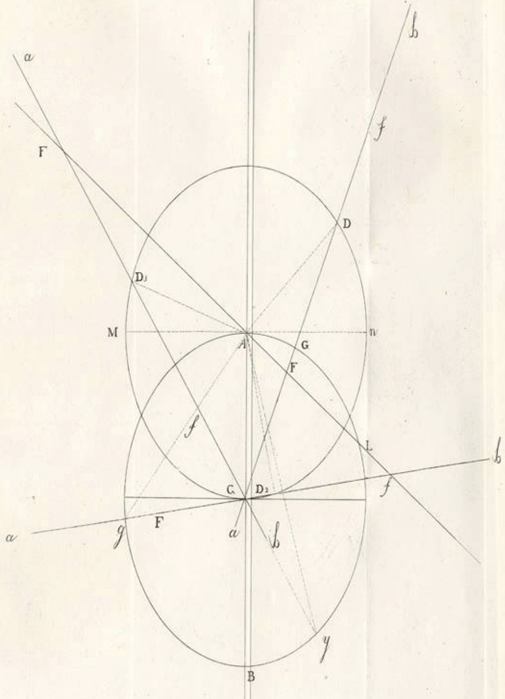
Come nella Memoria §. I.

2. Nella seconda posizione della riga ab si concepisca condotta la corda Ag essendo $D_2 f = D_2 A = CA = Cg$, ed essendo il punto f sul prolungamento della corda AL, sono isosceli ambidue i triangoli ACg, $AD_2 f$. Ed essendo isoscele anche il triangolo ACD_2; quindi $ang.\ ACg = ang.\ AD_2 f$, sarà la base $Ag =$ alla base Af. Quindi isoscele anche il triangolo fAg. È poi simile al triangolo isoscele gCA perchè hanno comune l' angolo g alla base. Dunque $ang. fAg = ang.\ ACg$. Ma l' angolo fAg insiste sull' arco gBL, e l' angolo ACg è misurato dall' arco Ag; dunque arco gBL doppio dell' arco Ag, ossia *arc.* Ag è terza parte del maggiore segmento $AgBL$ sotteso dalla corda AL. Ed essendo pel dimostrato la retta $Af =$ corda Ag. Sarà quindi Af eguale alla corda della terza parte di esso maggiore segmento.

Mem. di Matem. Soc. Ital. T. XXIII pag. 398 Tav. I



Mem.a di Matem.a Soci: Ital. T.o XXIII pag. 308 Tav. 2.



3. Nella terza posizione della riga si concepisca prodotta la retta ab fino alla periferia in y, e si concepisca condotta la corda Ay.

Essendo CAD_3 triangolo isoscele, sarà *ang.* $AD_3F =$ *ang.* ACy. Ed essendo $AC = Cy = AD_3 = D_3F$, saranno nei due triangoli isosceli AD_3F, ACy eguali le basi AF, Ay. Laonde è isoscele anche il triangolo FAy; ed è simile al triangolo isoscele ACy, perchè hanno comune l' angolo alla base y. Quindi *ang.* $ACy =$ *ang.* FAy.

Se si concepisce pel punto A condotta una retta tangente mn al circolo prolungata da ambe le parti, sarà l' *ang.* FAy eguale alla somma dei due angoli che fanno con questa tangente le due corde Ay, AL. E come le misure di questi due angoli sono le metà degli archi $AgBy$, AL, sarà quindi *ang.* $FAy = \frac{1}{2}\,arc.\,AgBy + \frac{1}{2}\,arc.\,AL$. E poichè dell'angolo eguale ACy la misura è l'arco ALy. Sarà quindi $\frac{1}{2}\,arc.\,AgBy + \frac{1}{2}\,arc.\,AL = Arc.\,AL + arc.\,Ly$.

quindi $arc.\,AgBy + arc.\,AL = 2\,arc.\,AL + 2\,arc.\,Ly$.

$$arc.\,AL + arc.\,Ly = arc.\,AL + arc.\,Ly$$

perciò sommando

$$AgBy + Ly + 2AL = 3AL + 3Ly$$

ma $AgBy + Ly + AL = 360°$

dunque

$$360° + AL = 3\,(AL + Ly)$$

ossia $arc.\,(AL + Ly) = \frac{1}{3}\,arc.\,(360° + AL)$

Cioè *corda* $Ay = AF = cord.\,\frac{1}{3}\,arc.\,(360° + AL)$

ossia $AF = -\,cord.\,\frac{1}{3}\,arc.\,(360° + AL)$.

Scolio.

Sono cioè nelle tre posizioni della retta ab li punti F, f, F nella curva trisecatrice (§. III).

AMBROGIO FUSINIERI.