ORIGINE ARITMETICA

DELLE SERIE INFINITE PIÙ ELEMENTARI

E DEL BINOMIO NEWTONIANO

MEMORIA

DEL SOCIO PROFESSOR GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta il 16 *Novembre* 1844.

§. 1. Intendendo per serie infinita una quantità sviluppata in una successione di altre, che diconsi termini, senza fine, il primo caso di un simile svolgimento che la scienza del calcolo ne porge, ossia la prima serie infinita nasce spontanea dalla divisione aritmetica nella riduzione di un rotto comune a frazion decimale, che risulti periodica. Ad esempio la frazione $\frac{1}{3}$ convertita nella decimale $0,333\ldots$ è una serie infinita. Come però tali serie aritmetiche sono particolari corrispondentemente alla frazione da cui nascono, così non parlasi comunemente di esse dai matematici se, non dopo la divisione algebraica, uscendone allora la prima serie generale $1-a+a^2-a^3+$ etc., dallo svolgimento per divisione di $\frac{1}{1+a}$. Eppure non è questa la più semplice quantità che per divisione si svolga in una serie generale, bensì la frazione $\frac{1}{a}$, e a ridurvela non si richiede che di effettuare la divisione aritmetica. Da essa poi derivano con facilità tutte le altre serie elementari che alla divisione si riferiscono, fino ad ottenerne lo sviluppo della potenza intera e positiva del binomio; nè occorre per ciò alcun uso nè cognizione della divisione algebraica. Quindi è mio scopo nella presente Memoria di richiamare la teorica elementare delle serie infinite alla sua immediata sorgente, che è riposta nella natura stessa della istituzione aritmetica, ossia nel sistema qualunque sia della numerazione. Oltre il vantaggio di prender la cosa dal più semplice e naturale principio, quelli pure se ne avrà, e di qualche serie non considerata o sfuggita nelle comuni trattazioni dell' Algebra, e di aprire ed esercitare la mente fino dalle nozioni ed operazioni prime del calcolo all' evidenza e al rigore più esatto del raziocinio, ponendo attenzione ai residui e alla convergenza o divergenza delle serie, e infine di render più agevole e familiare il passaggio del calcolo speciale de' numeri al generico delle lettere. Nell' analisi matematica le serie a me sembrano costituire una specie di anello che congiunge una parte di quella coll' altra; e così le serie numeriche espresse generalmente offrono il legame dell' aritmetica particolare coll' algebra, come lo sviluppo generale del binomio di Newton serve quasi di passaggio a quelli delle quantità e funzioni trascendenti, e come la serie o il teorema di Taylor dall' introduzione al calcolo sublime apre l' ingresso a quest' ultimo, allo spirito cioè e ai metodi del calcolo differenziale e integrale, che è la parte somma dell' analisi. Benchè poi sia tutto piano ed elementare l' oggetto che io quì mi propongo, non credo che lo si vorrà perciò dispregiare, dopo che Eulero al proposito delle serie medesime ottenute per la divisione algebraica lasciò scritto (Alg. T. I. pag. 239.) « *Aussi a-t-on tiré de ce fonds les inventions les plus importantes, et cette matiére mérite d' autant plus qu' on l' etudie avec toute l' attention possible.* »

§. 2. Considero di tutte le frazioni decimali periodiche la semplicissima 0, 11111 .... all' infinito, che nasce dalla ordinaria $\frac{1}{9}$. Se un altro qualunque numero intero a sia risguardato come il maggiore de' numeri semplici, o di una sola cifra, per un sistema di numerazione differente dal decadico, ne risulterà del pari la frazione $\frac{1}{a} = 0,11111 \ldots\ldots$ all' infinito; ma in questo caso il valor di classe o di posto per ogni numero semplice non procederà di dieci in dieci, sebbene di $a+1$

in $a+1$, ossia ogni carattere acquisterà consecutivamente nei posti da sinistra a destra un valore $a+1$ volte minore che nell'ultimo posto precedente. Dunque sarà in generale

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^3}+\text{etc. all' infinito}$$

e arrestandoci colla divisione aritmetica al termine r^{esimo} della serie

$$(1)\ldots\ldots\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^3}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{a(a+1)^{r-1}}\text{ esattamente.}$$

Questa serie, il cui ultimo termine è il residuo aritmetico della divisione, sussiste in generale, ha la massima semplicità come la periodica decimale o, 11111 ....., di cui essa è la trasformata; e da essa, qual da sorgente riposta nella generale istituzione o rappresentanza de' numeri interi, scaturiscono tutte le serie elementari prodotte dalla divisione.

§. 3. Dall'essere $\frac{1}{a}=0,11111\ldots$, ossia $a=\frac{1}{0,11111\ldots}$, ricaviamo tosto la conseguenza che un qualunque numero intero può esprimersi brevemente per la sola unità, sottintesa però la condizione indispensabile che nel denominatore di tal espressione il valore dell'unità, dopo la virgola e da sinistra a destra, diviene successivamente $a+1$ volte minore, in riguardo al posto che immediatamente lo precede. Ed osserviamo che la formola (1) vale ancora, se a sia una frazione ordinaria qualunque, coll' avvertenza nondimeno che in tal caso per nuova unità decimale, ossia per l'elemento del periodo nella o, 11111 .... prendasi il numeratore di a, e il denominatore di a indicando allora la cifra più grande nella corrispondente istituzion aritmetica.

§. 4. Per un altro numero m avendosi parimente

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+1)^3}+\ldots+\frac{1}{m(m+1)^{r-1}}$$

poniamo in questa $m-1$ in luogo di m, e si avrà:

$$\frac{1}{m-1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m^{r-1}}.$$

Fatto quindi $m = \frac{1}{a}$, e divisa l'equazione per a, ne risulta:

$$(2) \qquad \frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + \frac{a^{r-1}}{1-a},$$

e cangiato a in $-a$:

$$(3) \qquad \frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots\ldots \pm \frac{a^{r-1}}{1+a}.$$

Le (2), (3) sono le due note serie somministrate dalla divisione algebraica e che servon di fondamento alle altre. Ci siamo arrestati in ciascuna col residuo al termine r^{esimo}, e nella (3) il segno $+$ di tal termine corrisponde ad r dispari, il $-$ ad r pari.

Come dalla (1) abbiam ottenuto le (2), (3), così dalla (2) inversamente ricavasi la (1). Imperocchè presa la

$$\frac{1}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 + \ldots\ldots + \frac{m^{r-1}}{1-m},$$

e fatto in essa $m = \frac{1}{1+a}$, si ha:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+a}} = \frac{1+a}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(a+1)^{r-2}.a},$$

e quindi

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{(a+1)^{r-2}.a};$$

ove l'ultimo termine dello sviluppo, stante l'ommissione del primo, è divenuto l' $r-1^{esimo}$. Similmente avendosi per la (3)

$$\frac{1}{1+m} = 1 - m + m^2 - m^3 + \ldots\ldots \pm \frac{m^{r-1}}{1+m},$$

e fatto in questa $m = \frac{1}{a}$, si ottiene dividendo l'equazione per a:

$$(4) \qquad \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \ldots \pm \frac{1}{a^{r-1}(a+1)}$$

Alle quali serie fondamentali aggiungiamo pur quella, che viene tosto dalla (1), cioè

$$(5) \qquad \frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{(a-1)a^{r-1}}.$$

Le (1), (4) ci rappresentan dunque le (2), (3); ma ripetiamo la (1) aver sopra tutte il vantaggio di essere il principio delle altre, e di uscir essa immediatamente dall' espressione più semplice in tutta la numerazione, qual è la periodica 0,11111.... all'infinito. Eulero, Brunacci e i trattatisti in genere non presentano che le (2), (3) come risultamento della divisione algebraica, dalla quale, ordinando inversamente il divisore, vengono altresì le (4) e (5) di forma e sviluppo apparentemente diverse dalle due prime.

§. 5. Una comune frazione coll'unità per numeratore si svolge in una serie infinita, li cui termini sono le successive potenze del dato denominatore, tanto accresciuto che diminuito di 1. Posto nella (1) $a=9$, $a=8$, etc., ne viene rispettivamente

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\cdots\frac{1}{10^{r-1}.9}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\cdots\cdots\frac{1}{9^{r-1}.8}$$

etc.

E invece nella (4) posto $a+1=9$, $a+1=8$, etc. si ha corrispondentemente

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^3}-\cdots\cdots\pm\frac{1}{8^{r-1}.9}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}-\cdots\cdots\pm\frac{1}{7^{r-1}.8}$$

etc.

bella e generale proprietà, che nella duplice serie per ogni frazione offre la sola differenza dei segni dall'una all'altra serie.

§. 6. Riuniamo in un prospetto le cinque serie semplici ottenute:

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{a} &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{a(a+1)^{r-1}} \\
\frac{1}{a+1} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{a^{r-1}(a+1)} \\
\frac{1}{1+a} &= 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots\ldots \pm \frac{a^{r-1}}{1+a} \\
\frac{1}{1-a} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + \frac{a^{r-1}}{1-a} \\
\frac{1}{a-1} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{(a-1)a^{r-1}}
\end{aligned}\right.$$

Di queste (A) la prima serie, o la fondamentale, è sempre convergente; sono la 2ª. e la 5ª. convergenti per a intero, e divergenti per a frazionario; all' opposto la 3ª. e la 4ª. sono convergenti per a frazionario, e divergenti per a numero intero. Quindi la prima, oltre il pregio della origin più semplice, ha pur quello sopra le altre di approssimarsi per ogni valore di a colla somma finita de' suoi termini alla quantità da cui si svolge. E quì riflettiamo che le precedenti eguaglianze (A) sussiston del pari esattamente in generale, ossia per a indeterminato, e tanto se gli sviluppi si considerino all' infinito quanto se, limitata la serie, tengasi conto del residuo. Ma in riguardo ai valori speciali e determinati di a, ossia in particolare, esse non trovansi verificate tutte nè sempre, se non a serie finita e a residuo calcolato. Imperocchè pei valori di a, che rendono una delle dette serie divergente, la serie stessa più che prolungasi, anzichè uguagliarsi alla frazione da cui nasce, maggiormente all' opposto se ne allontana, e quindi la divisione che la fa nascere sarebbe viziata in radice e col progresso accumulerebbe l' errore all' infinito, qualora non si avesse in considerazione, al di là pure dell' infinita operazione, il residuo. Ciò si vede chiaro nella 4ª. delle (A), ove pongasi $a = 2$; poichè dallo sviluppo all' infinito, e senza il residuo, se ne ha $-1 = +\infty$. Al qual proposito parmi non giusta la ragione addotta da Eulero (Alg. T. I. pag. 228.) che protraendosi la divisione all' infinito, la questione più non si riferisce alla frazione primitiva. E neppur giusta, comecchè spiritosa, direi l' altra spiegazione dell' Eulero medesimo al caso della serie 3ª. (A), ove facciasi $a = 1$, risultandone all' infinito $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$; perocchè dal non arrestarsi la serie, e dall' esserne la somma de' termini alternativamente $+1$ e 0, non viene legittima o provata la conseguenza che il vero valore starà nel mezzo di questi limiti costanti d' errore; costanza di limiti che d'altronde definisce in genere le serie parallele. Quello che a mio avviso giustifica e l' operazione, considerata pure all' infinito, e l' eguaglianza dello sviluppo alla frazion primitiva, è sempre il riflesso al residuo, che nelle serie convergenti protratte all' infinito risulta nullo, è costante, nè perciò trascurabile, nelle parallele, e cresce nelle divergenti continuamente di valore coll' operazione dello sviluppo.

§. 7. Dal confronto della seconda (A) colla quarta viene di conseguenza

$$(B) \qquad \ldots\ldots \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \text{etc.} \pm \frac{1}{(a+1)\,a^{r-1}}$$

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + \text{etc.} \pm \frac{a^{r-1}}{a+1},$$

curiosa proprietà generale de' numeri, che sembra eguagliare le potenze di un rotto a quelle del suo intero denominatore. Il paradosso appare anche più manifesto, se l' una e l' altra serie della (B) si consideri all' infinito, poichè in tal caso una serie infinita convergente eguaglierebbe una divergente, sia a numero intero o frazionario, e comecchè siano le due serie diseguali fino dal primo termine. Ma cessa qualunque maraviglia e apparente assurdità, ponendo attenzione ai residui, e per essi l' eguaglianza delle due serie, anche all' infinito, sussiste rigorosamente. Facciasi in esempio $a = 2$, e si avrà

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots\ldots \text{ all' inf.} \quad = 1 - 2 + 4 - 8 + \ldots\ldots \text{ all' inf.}$$

Dopo un qualunque numero di termini, s' introducano i resti, e per esempio dopo tre termini da una parte e quattro dall' altra si avrà

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8 . 3} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3},$$

ossia $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

§. 8. Ricaviamo il valore di $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ dalle 1ª. e 2ª. (A), ed eguagliando l'uno all'altro ne troveremo:

$$(C) \quad \ldots \quad \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{a(a+1)^{r-1}}$$
$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \ldots\ldots \mp \frac{1}{(a+1)a^{r-1}},$$

ove il residuo di quà e di là è divenuto il termine $r-1^{esimo}$. Dalla (C) si esprime un'altra singolare proprietà di un qualunque numero a, ed abbiam quì una serie a segni tutti positivi cangiata in una serie a segni alternati. Sia in esempio $a=7$, e fermiamoci in ambe le serie al terzo termine, compreso il residuo (potendo però prendersi r diverso dall'una all'altra serie), onde avremo

$$\frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{7 . 8^3} = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8 . 7^3}.$$

Eseguite le riduzioni si trova

$$\frac{2097152}{117440512} = \frac{823543}{46118408},$$

la qual eguaglianza si verifica nel prodotto a croce 96717311574016. Per altro esempio si ponga $a=12$, e ne verrà

$$\frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{11 . 12^3} = \frac{1}{11^2} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{12 . 11^3}$$

che si riduce alla seguente

$$\frac{3583180 8}{4729798656} = \frac{19487171}{2572306572}$$

e ne risulta il prodotto 92170395205042176 di quà e di là eguale nei numeratori.

§. 9. Ora data una qualunque frazione $\frac{p}{q}$, se domandasi di svolgerla in serie infinita e convergente, ciò si ottien tosto mediante la prima delle (A), poichè sarà

$$(D) \ldots\ \frac{p}{q} = p\left[\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{q(q+1)^{r-1}}\right];$$

e altri simili sviluppi, ma non tutti convergenti, ne porgerebbero le altre (A). Allo svolgimento di una frazione in serie non è quindi necessario di spezzar il denominatore in due parti, come praticano Eulero, Brunacci e gli Algebristi, ottenendosi immediatamente uno sviluppo convergente dalla stessa proposta $\frac{p}{q}$. Però è assai utile usar il detto spezzamento in vista delle infinite serie diverse in cui può svolgersi per tal modo la stessa $\frac{p}{q}$. Facciasi dunque $q=m+n$, onde sarà:

$$(E)\left\{\begin{aligned} &\frac{p}{m+n} \\ &= \frac{p}{m} \times \frac{1}{1+\frac{n}{m}} \\ &= \frac{p}{m}\left[1 - \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^3}{m^3} + \ldots\ldots \pm \left(\frac{n}{m}\right)^{r-1} \times \frac{1}{1+\frac{n}{m}}\right] \\ &= \frac{p}{n} \times \frac{1}{1+\frac{m}{n}} \\ &= \frac{p}{n}\left[1 - \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \frac{m^3}{n^3} + \ldots\ldots \pm \left(\frac{m}{n}\right)^{r-1} \times \frac{1}{1+\frac{m}{n}}\right]. \end{aligned}\right.$$

A meno che non sia $m=n$, l'una di queste due serie o l'altra è necessariamente convergente, e quindi atta a rappresentar prossimamente, quando si ommette il residuo, la data frazione $\frac{p}{q}$. E nel caso di $m=n$, essendo la serie infinita col residuo $1-1+1-1+$ etc. $=\frac{1}{2}$, ne verrà sempre $\frac{p}{q} = \frac{p}{2m} - \frac{p}{2n}$. Tutti i modi pertanto di spezzamento di q in due parti m ed n porgeranno altrettante serie che rappresentan ed eguagliano la data $\frac{p}{q}$.

Giova qui richiamare l' osservazione del §. 3. che qualunque frazione $\frac{p}{q}$ si esprime da $p \times 0,11111\ldots = 0,pppp\ldots$; però sempre coll' avvertenza che trattasi di un sistema di numerazione con q cifre significative per gl' interi semplici a cominciar da 1 e terminare in q, e che ciascuna cifra per gl' interi composti cresce da destra a sinistra di un valore ad ogni passaggio $q+1$ volte maggiore. Sotto questo aspetto una qualunque frazione è una periodica, nella quale il periodo, numerato in se col valor decimale ordinario, va tuttavia diminuendo verso la destra in ragione di $q+1$. Ad esempio la frazione $\frac{827}{914}$ si potrà scrivere 0, 827827827...., ma colla distinzion precedente sopra il valor del periodo al passaggio di una in altra classe. È naturale del resto che l'idea fondamentale o primitiva delle frazioni e serie infinite aritmeticamente venga dalle frazioni periodiche, per le quali non si richiede alcuna idea di divisione algebraica.

§. 10. Sia nella prima (E) $p=1$; $m+n=a+1$; e fatto successivamente

$$\begin{array}{lcr}
m=a-1, & \text{onde abbiasi in corrispondenza....} & n=2 \\
\;\;=a-2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & =3 \\
\;\;=a-3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & =4 \\
\;\;\vdots & & \vdots \\
\;\;=a-b & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & =b+1
\end{array}$$

ne risultano le serie

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a-1}-\frac{2}{(a-1)^2}+\frac{2^2}{(a-1)^3}-\ldots\ldots\pm\frac{2^{r-1}}{(a-1)^{r-1}(a+1)}$$

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a-2}-\frac{3}{(a-2)^2}+\frac{3^2}{(a-2)^3}-\ldots\ldots\pm\frac{3^{r-1}}{(a-2)^{r-1}(a+1)}$$

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a-3}-\frac{4}{(a-3)^2}+\frac{4^2}{(a-3)^3}-\ldots\ldots\pm\frac{4^{r-1}}{(a-3)^{r-1}(a+1)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a+1}=\frac{(b+1)^0}{a-b}-\frac{(b+1)^1}{(a-b)^2}+\frac{(b+1)^2}{(a-b)^3}-\ldots\ldots\pm\frac{(b+1)^{r-1}}{(a-b)^{r-1}(a+1)},$$

l'ultima delle quali è una serie generale fra due numeri qualunque a e b. Per esempio la frazione $\frac{1}{9}$ possiam esprimerla in infiniti modi come segue:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{8^{r-1}.9}$$
$$= \frac{1}{7} - \frac{2}{7^2} + \frac{2^2}{7^3} - \ldots\ldots \pm \frac{2^{r-1}}{7^{r-1}.9}$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{3}{6^2} + \frac{3^2}{6^3} - \ldots\ldots \pm \frac{3^{r-1}}{6^{r-1}.9},$$

e così via discorrendo.

§. 11. Nella stessa prima (E), posto $-n$ in luogo di n, facciasi $p=1$, $m-n=a$; e successivamente

$$\begin{array}{lcr} m=a+2, & \text{onde in corrispondenza sia} & n=2 \\ =a+3 & & =3 \\ \vdots & & \vdots \\ =a+b & & =b. \end{array}$$

Da ciò risulta:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+2} + \frac{2}{(a+2)^2} + \frac{2^2}{(a+2)^3} + \ldots\ldots + \frac{2^{r-1}}{(a+2)^{r-1}a}$$
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+3} + \frac{3}{(a+3)^2} + \frac{3^2}{(a+3)^3} + \ldots\ldots + \frac{3^{r-1}}{(a+3)^{r-1}a}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{a} = \frac{b^0}{a+b} + \frac{b^1}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(a+b)^3} + \ldots\ldots + \frac{b^{r-1}}{(a+b)^{r-1}a},$$

altra serie generale fra due numeri qualunque a e b. Così, ritornando alla nostra frazione $\frac{1}{9}$, possiam esprimerla di nuovo, del pari che ogni data frazione, in infiniti modi come segue

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{10^{r-1}.9}$$
$$= \frac{1}{11} + \frac{2}{11^2} + \frac{2^2}{11^3} + \ldots\ldots + \frac{2^{r-1}}{11^{r-1}.9}$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{3}{12^2} + \frac{3^2}{12^3} + \ldots\ldots + \frac{3^{r-1}}{12^{r-1}.9}$$
etc.

ecco un esempio delle ultime serie ottenute:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{7} - \frac{2}{49} + \frac{4}{343} - \frac{8}{343.9} = \frac{343}{343.9}$$
$$= \frac{1}{11} + \frac{2}{121} + \frac{4}{1331} + \frac{8}{1331.9} = \frac{1331}{1331.9}.$$

§. 12. Similmente all' operato nella prima, facciasi nella seconda (E) $p=1$; $m+n=1-a$; e di seguito

$$\begin{array}{ll} m=-(a+1), & \text{onde} \quad n=2 \\ =-(a+2) & \phantom{\text{onde} \quad n}=3 \\ \quad\vdots & \quad\quad\quad\vdots \\ =-(a+b) & \phantom{\text{onde} \quad n}=b+1. \end{array}$$

Dipoi nella serie medesima (E), posto $-n$ in luogo di n, facciasi $p=1$; $m-n=a+1$; e successivamente

$$\begin{array}{ll} m=a-1, & \text{onde} \quad n=-2 \\ =a-2 & \phantom{\text{onde} \quad n}=-3 \\ \quad\vdots & \quad\quad\quad\vdots \\ =a-b & \phantom{\text{onde} \quad n}=-(b+1). \end{array}$$

Se ne ottiene altre due serie generali che sono

$$\frac{1}{1-a}=\frac{(a+b)^0}{b+1}+\frac{(a+b)^1}{(b+1)^2}+\frac{(a+b)^2}{(b+1)^3}+\ldots\ldots+\frac{(a+b)^{r-1}}{(b+1)^{r-1}(1-a)}$$

$$\frac{1}{a+1}=\frac{(a-b)^0}{b+1}-\frac{(a-b)^1}{(b+1)^2}+\frac{(a-b)^2}{(b+1)^3}-\ldots\ldots\pm\frac{(a-b)^{r-1}}{(b+1)^{r-1}(a+1)}$$

Pongasi ad esempio nella prima ... $a=b=\frac{1}{2}$, e arrestandoci al quarto termine, compreso il residuo, avremo

$$2=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{27}=\frac{54}{27}.$$

E nella serie medesima ritenuto $a=\frac{1}{2}$, se pongasi $b=1$, si trova:

$$2=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{9}{32}+\frac{27}{32}=\frac{64}{32}.$$

§. 13. Raccogliamo sotto un punto di vista le ultime serie ottenute:

$$(F)\begin{cases}\dfrac{1}{a}=\dfrac{b^0}{a+b}+\dfrac{b^1}{(a+b)^2}+\dfrac{b^2}{(a+b)^3}+\ldots\ldots+\dfrac{b^{r-1}}{(a+b)^{r-1}a}\\[2ex]\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{(b+1)^0}{a-b}-\dfrac{(b+1)^1}{(a-b)^2}+\dfrac{(b+1)^2}{(a-b)^3}-\ldots\ldots\pm\dfrac{(b+1)^{r-1}}{(a-b)^{r-1}(a+1)}\\[2ex]\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{(a-b)^0}{b+1}-\dfrac{(a-b)^1}{(b+1)^2}+\dfrac{(a-b)^2}{(b+1)^3}-\ldots\ldots\pm\dfrac{(a-b)^{r-1}}{(b+1)^{r-1}(1+a)}\\[2ex]\dfrac{1}{1-a}=\dfrac{(a+b)^0}{b+1}+\dfrac{(a+b)^1}{(b+1)^2}+\dfrac{(a+b)^2}{(b+1)^3}+\ldots\ldots+\dfrac{(a+b)^{r-1}}{(b+1)^{r-1}(1-a)}\end{cases}$$

Queste serie (F) altro non sono che le prime quattro (A), da cui esse derivano mediante le (E), ma in certa guisa generalizzate da quelle, a motivo che includono un altro qualunque numero b e ne mostrano la relazione con a. Tutte poi discendono dalla sola prima delle (A), e aritmeticamente dalla o, IIIII..... nel sistema generale della numerazione intera. Possiamo dare alle (F) anche quest'altra forma:

$$(G)\begin{cases}(a+b)^{r-1}=a\,[\,(a+b)^{r-2}+b(a+b)^{r-3}\\ \qquad +\,b^2(a+b)^{r-4}+\ldots\ldots\,]+b^{r-1}\\ (a-b)^{r-1}=(a+1)\,[\,(a-b)^{r-2}-(b+1)(a-b)^{r-3}\\ \qquad +\,(b+1)^2(a-b)^{r-4}-\ldots\ldots\,]\pm(b+1)^{r-1}\\ (b+1)^{r-1}=(1+a)\,[\,(b+1)^{r-2}-(a-b)(b+1)^{r-3}\\ \qquad +\,(a-b)^2(b+1)^{r-4}-\ldots\ldots\,]\pm(a-b)^{r-1}\\ (b+1)^{r-1}=(1-a)\,[\,(b+1)^{r-2}+(a+b)(b+1)^{r-3}\\ \qquad +\,(a+b)^2(b+1)^{r-4}+\ldots\ldots\,]+(a+b)^{r-1}\end{cases}$$

Abbiamo già nella prima e seconda (G) il più naturale sviluppo della potenza positiva ed intera di $a+b$ e di $a-b$ secondo le potenze discendenti e intere del rispettivo binomio. E così pure dalla 3ª. e 4ª. (G), eguagliando i due valori di $(b+1)^{r-1}$, ricaviamo una relazione o proprietà singolare fra la serie delle potenze intere di $a+b$ e quelle delle potenze simili di $a-b$.

§. 14. Per altri due numeri m, n trattiamo la 4ª. delle (F), che diviene

$$\frac{1}{1-m}=\frac{(m+n)^0}{n+1}+\frac{(m+n)^1}{(n+1)^2}+\frac{(m+n)^2}{(n+1)^3}+\ldots\ldots+\frac{(m+n)^{r-1}}{(n+1)^{r-1}(1-m)}.$$

In essa poniamo $\frac{m-1}{m}$ in luogo di m, e poichè $1-\frac{m-1}{m}=\frac{1}{m}$, si avrà

$$m=\frac{\left(n+1-\frac{1}{m}\right)^0}{n+1}+\frac{\left(n+1-\frac{1}{m}\right)^1}{(n+1)^2}+\frac{\left(n+1-\frac{1}{m}\right)^2}{(n+1)^3}+\ldots+m.\frac{\left(n+1-\frac{1}{m}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r-1}},$$

l'ultimo termine rappresentando sempre il residuo completo della divisione aritmetica dopo il termine $r-1^{esimo}$ del quoziente, o della serie. Formando coll' effettiva moltiplicazione le crescenti potenze di $n+1-\frac{1}{m}$, presa come binomio di $n+1$ e di $\frac{1}{m}$, e avuto riguardo al numero r dei termini nel precedente sviluppo di m, facilmente si trova

$$(H) \qquad \ldots m=(r-1).\frac{1}{n+1}-\frac{(r-1)(r-2)}{2}.\frac{1}{m(n+1)^2}$$
$$+\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3}.\frac{1}{m^2(n+1)^3}-\ldots\ldots+m.\frac{\left(n+1-\frac{1}{m}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r-1}}$$

equazione identica fra li due numeri qualunque m ed n. Qui la serie necessariamente finisce, ove incontrasi nel coefficiente $r-r$; ma se r, ossia il numero de' termini prefisso e considerato, sia grandissimo, la serie stessa può risguardarsi protratta all' indefinito.

Supponiam in esempio di arrestarci al 4°. termine della divisione; ossia fatto $r=5$, prendiamo $m=7$, $n=3$ ed avremo

$$7=\frac{4}{4}-\frac{6}{7\cdot4^2}+\frac{4}{7^2\cdot4^3}-\frac{1}{7^3\cdot4^4}+\frac{27^4}{7^3\cdot4^4}=\frac{614656}{87808}=\frac{7.87808}{87808}.$$

In questo esempio, come in quello del §. 12., osserviamo che la rispettiva serie, quantunque convergente, non avvicinasi con pochi termini al suo valor esatto, se non tengasi conto del residuo; il che avvien sempre quando, come in questi esempi, il primo termine risulta piccolo e il residuo piuttosto grande. Quindi a valersi utilmente delle serie infinite per approssimazione, trascurandone cioè il residuo, è duopo innanzi riconoscere e stabilire in quelle il grado della convergenza.

§. 15. Moltiplichiamo l'equazione (H) per $(n+1)^{r-1}$ e dividiamola per m: ne viene

$$(n+1)^{r-1} = (r-1)\frac{(n+1)^{r-2}}{m} - \frac{(r-1)(r-2)}{2}\frac{(n+1)^{r-3}}{m^2} + \ldots\ldots + \left(n+1-\frac{1}{m}\right)^{r-1}.$$

Fatto quivi $n+1=a$; $-\frac{1}{m}=b$; $r-1=c$, si ha:

$$a^c = -ca^{c-1}b - \frac{c(c-1)}{2}a^{c-2}b^2 - \frac{c(c-1)(c-2)}{2.3}a^{c-3}b^3 - \ldots\ldots + (a+b)^c$$

ossia

$$(I) \ldots (a+b)^c = a^c + ca^{c-1}b + \frac{c(c-1)}{2}a^{c-2}b^2 + \frac{c(c-1)(c-2)}{2.3}a^{c-3}b^3 + \ldots$$

che è lo sviluppo del binomio newtoniano, il quale perciò esso pure scaturisce dai principj e dalle serie aritmetiche sovraesposte. Riflettiamo di quì che la potenza c del binomio rappresenta il residuo della divisione aritmetica effettuata nella frazione $\frac{1}{1-a}$, dipendentemente dalla periodica infinita $\frac{1}{a}$; il primo termine a^c dello sviluppo rappresentando la frazione medesima $\frac{1}{1-a}$, e gli altri termini costituendo il quoziente di tale frazione svolto in serie all'indefinito. Però è da notare che il grado c della potenza è nel nostro caso un numero intero e positivo necessariamente, indicando esso il numero qualsivoglia dei termini della serie in cui è svolta la $\frac{1}{1-a}$. Quindi per la semplice divisione aritmetica lo sviluppo del binomio non sarebbe propriamente generale, nè sarebbe dimostrato sussistere anche per le potenze frazionarie e negative, e solo procederebbe all'infinito supponendo $c=\infty$. Ma quivi appunto piacerebbemi di ravvisare il confine segnato dall'analisi al passaggio dall'aritmetica particolare alla generale, non in quanto ai segni dei numeri e delle operazioni, bensì in riguardo allo spirito de' principj e de' ragionamenti.

§. 16. In altro modo e più diretto può ricavarsi lo sviluppo del binomio newtoniano; ed anzi esso deriva, immediatamente per successive sostituzioni ma con ordine inverso di termini, dalla nostra serie fondamentale $\frac{1}{a}$ rappresentata nella prima delle (G) ossia delle (F). Consideriamo infatti gli svolgimenti successivi che dal primo discendono e sussiston con esso:

$$(a+b)^{r-1} = a\left[(a+b)^{r-2} + b(a+b)^{r-3} + b^2(a+b)^{r-4} + \ldots\ldots\right] + b^{r-1}$$
$$(a+b)^{r-2} = a\left[(a+b)^{r-3} + b(a+b)^{r-4} + b^2(a+b)^{r-5} + \ldots\ldots\right] + b^{r-2}$$
$$(a+b)^{r-3} = a\left[(a+b)^{r-4} + b(a+b)^{r-5} + b^2(a+b)^{r-6} + \ldots\ldots\right] + b^{r-3}$$
$$(a+b)^{r-4} = a\left[(a+b)^{r-5} + b(a+b)^{r-6} + b^2(a+b)^{r-7} + \ldots\ldots\right] + b^{r-4}$$
etc.

Fatte nel primo sviluppo le sostituzioni dei seguenti si ha:

$$\begin{aligned}(a+b)^{r-1} = {} & a^2\left[(a+b)^{r-3} + b(a+b)^{r-4} + b^2(a+b)^{r-5} + \ldots\ldots\right] + ab^{r-2} + b^{r-1} \\ & + a^2b\left[(a+b)^{r-4} + b(a+b)^{r-5} + b^2(a+b)^{r-6} + \ldots\ldots\right] + ab^{r-2} \\ & + a^2b^2\left[(a+b)^{r-5} + b(a+b)^{r-6} + b^2(a+b)^{r-7} + \ldots\ldots\right] + ab^{r-2} \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

E siccome nel primo sviluppo di $(a+b)^{r-1}$ il numero de' termini moltiplicati per a è $r-1$, così raccogliendo i termini simili del secondo membro nell'ultima equazione si avrà:

$$\begin{aligned}(a+b)^{r-1} = {} & a^2\left[(a+b)^{r-3} + 2b(a+b)^{r-4}\right. \\ & \left. + 3b^2(a+b)^{r-5} + \ldots\ldots\right] + (r-1)ab^{r-2} + b^{r-1}.\end{aligned}$$

Proseguendo le sostituzioni ed osservando che il numero de' termini è ridotto nel secondo sviluppo ad $r-2$, si vedrà che il coefficiente di a^2b^{r-3}, ossia del termine terz' ultimo, è $= 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + r-2$ e quindi $= \frac{(r-1)(r-2)}{2}$; e poscia, colle simili operazioni e avvertenze, che quello del termine quart' ultimo è $\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2\,.\,3}$, e così di seguito. Posto dunque $r-1 = c$, abbiamo

$$(a+b)^c = \ldots\ldots + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\,.\,3}a^3b^{c-3} + \frac{c(c-1)}{2}a^2b^{c-2} + cab^{c-1} + b^c,$$

e già per la simmetria dei termini equidistanti dal mezzo dello sviluppo è indifferente che sia riconosciuta e dimostrata la prima o la seconda metà del medesimo.

Lo sviluppo infine di $(a-b)^c$, che si ha tosto dal precedente ponendovi $-b$ in luogo di b, si avrebbe pure trattando la seconda (G) come abbiam trattata la prima. Pertanto dalla piccola Memoria, che ho data innanzi sopra le frazioni continue periodiche, e da questa che le sorge quasi gemella intorno alla decimale periodica più semplice 0, 11111 ..., chiaro apparisce che sì le une come le altre periodiche godono di utili e importanti proprietà, che ne rendon l'uso nel calcolo assai pregevole.