ESPOSIZIONE COMPENDIATA DE' VARJ SISTEMI INTORNO LE VELOCITÀ DELLE ACQUE CORRENTI, E PARTICOLARE CONFRONTO DELLE FORMOLE DEGLI IDRAULICI EYTELWEIN E TADINI

OPERA

DEL PROF. CAV. ANTONIO COCCONCELLI

PRESENTATA DAL SOCIO

SIG. CAV. PROF. GIACOMO TOMMASINI

ED APPROVATA DAL SOCIO E SEGRETARIO

ANTONIO LOMBARDI

Ricevuta il 12 febbrajo 1840.

1.° La certezza, l'estensione, e l'accrescimento d'ogni scienza naturale si ottenne allora quando dissipate le oscurità si sbandirono i falsi principj, s' interrogò la natura, e se ne seppero intendere senza equivoco le risposte.

2.° Giulio Frontino vide al tempo dell'Impero di Nerva, e di Trajano la quantità dell'acqua somministrata da un foro praticato nelle pareti di un vaso essere maggiore, o minore, secondo che maggiore, o minore era l' altezza dell' acqua in esso contenuta, ma non seppe da così semplice osservazione argomentare come pure lo poteva, l' influsso della pressione nella produzione della varia velocità, e conchiudere che nella misura delle acque correnti devesi avere riguardo non solamente alla larghezza, ed altezza delle sezioni, cioè alla loro superficie, ma eziandio alla velocità del moto, da cui le acque sono animate all' escire da qualsisia recipiente, e ne' fiumi, da quali sono esse dispensate.

3.° Il Galileo, il Castelli, il Guglielmini, gl' Idrometri Italiani ed Oltremontani mercè le moltiplici esperienze istituite da tutti gli stabilimenti scientifici dell' Europa scuoprirono l' errore ed insegnarono che la quantità d' acqua scaricata segue la composta ragione della larghezza, dell' altezza, e della velocità delle vive sezioni, talchè la copia dell' acqua in un fiume ridotto allo stato di permanenza risulta sempre la stessa in tutte le sezioni medesime, comunque difformi, e fornite di varia larghezza e profondità, giacchè non da queste sole dimensioni essa copia dipende, ma eziandio devesi introdurre nel calcolo l'elemento della velocità.

4.° Ritenuto adunque come principio indubitabile la predetta composta ragione della larghezza, altezza e velocità delle sezioni, da cui le acque si scaricano, per poterne con giustezza determinare la quantità, si accinsero gl' Idrometri ad indagare la legge cui conformasi la varia velocità al variare della profondità dei diversi punti della perpendicolare di una sezione qualunque di un corso d' acqua.

5.° Galileo considerando, che le acque come tutti gli altri corpi pesanti obbediscono alle leggi della gravità, e che gli alvei de' fiumi pei quali ne succede la discesa in forza della pendenza, di cui sono i medesimi dotati, ed in conseguenza della forza relativa della gravità; sostenne che la velocità delle acque correnti sia proporzionale alla suddupplicata ragione dell' altezza della caduta, non opponendosi a tal effetto le resistenze, e le irregolarità di cui il fondo de' fiumi è per l' ordinario sparso, ristagnando nelle diverse cavità il fluido, come avverte il Padre Abbate Grandi, togliendo le prominenze, e formando per tal maniera un piano levigato, su cui succede libero il movimento, se prescindere si voglia dall' adesione dell' acqua superiore che corre sulla inferiore che ristagna.

6.° Quindi conchiuse quell' inclito Filosofo che supposti due fiumi di differente lunghezza ma di eguale caduta, acquistano le acque al termine del loro corso la medesima velocità. Egli, per quanto sembra, non avvisò che attendendo alla sola caduta, e non alle resistenze incontrate acquisterebbero le acque discendenti un' immensa e spaventosa velocità, nè potrebbe al loro urto far fronte qualunque sia più valida resistenza.

7.° Dalle dottrine del Galileo deducesi:

I.° Che comunque le resistenze cangino e modifichino la velocità delle acque correnti di maniera che non più si riconosce dipendente dalla caduta, pure discendono esse con moto accelerato che alla fine riducesi all'equabilità.

II.° Che le superficie dei fiumi convergono col fondo.

III.° Che per tale convergenza per un determinato tratto l'altezza delle sezioni superiori è maggiore dell'altezza delle inferiori, supposti i fiumi solitarj, e di costante inclinazione.

8.° Il Padre Abbate Castelli, che il primo avvertì dipendere la varia velocità corrispondente ai diversi punti d'una stessa perpendicolare dalla pressione dell'acqua sopraincombente, pretese di dimostrare che la velocità dell'acqua fluente da un tenue foro praticato nel fondo, o nelle pareti di un vaso in forza della pressione superiore deve divenire doppia, tripla ec. raddoppiandola, triplicandola ec.

9.° Cercò l'encomiato Autore cotanto benemerito alla scienza delle acque di applicare la stessa dottrina al corso dei fiumi, e tentò di darne la dimostrazione geometrica, ma non essendone soddisfatto si attenne all'esperienza.

10.° Introdusse egli l'acqua di un sifone in un recipiente, o canale qualunque, e ne ottenne una certa altezza: ne introdusse valendosi di quattro sifoni, la quantità dell'acqua fu quadrupla, e l'altezza soltanto doppia; l'acqua divenne nonupla, e l'altezza tripla valendosi di nove sifoni, e così successivamente, talchè le quantità d'acqua scaricate in egual tempo risultavano costantemente come i quadrati delle altezze vive, esprimendosi le velocità dalla progressione V, 2V, 3V ec. e le altezze dalla progressione A, 2A, 3A ec.

11.° Invertendo l'ordine delle esperienze, scaricò dapprincipio l'acqua mediante cento sifoni, e soppressi poscia diciannove, indi diciasette, quindici ec. sifoni, e ridotto successivamente il loro numero ad ottantuno, sessantaquattro, quarantanove ec. l' altezza dell' acqua ebbe la diminuzione costante di un decimo della prima altezza.

Conchiuse quindi ciò stesso, che dapprima era stato da lui argomentato.

12.° La scala dunque delle velocità nel sistema del Padre Abbate Castelli viene rappresentata dalle linee perpendicolari all' altezza di un triangolo rettilineo rettangolo, pari a quella dell' acqua parallele alla base e terminate all' ipotenusa dello stesso triangolo.

13.° Il rammentato sistema fu seguito dal Barattieri, dal Montanari, dal Cassini, ed è stato richiamato ultimamente dal Mengotti, che dichiara, che ne' *fiumi uniti l'altezza e la velocità vanno prossimamente di pari passo procedendo ed aumentandosi l' una e l' altra con pari tenore.*

14.° Il teorema del Castelli fu contraddetto dal Guglielmini il quale opinò che le varie velocità abbiansi bensì ad ascrivere alle variabili altezze prementi delle acque, ma che la scala delle velocità stesse abbiasi a rappresentare dalle ordinate d'una parabola Apolloniana, come si verifica nel moto delle acque fluenti dal foro riferito all' ampiezza del fondo del vaso da cui esce l' acqua e riguardato come infinitamente piccolo.

15.° Il celebre Idrometra considerò i canali, ed i fiumi come immensi recipienti, che si vuotano per l' inferiore loro apertura, mentre sono per l' altra superiore alimentati dalle fonti, e dai rivi tributarj.

Distingue il Guglielmini la pendenza dell' alveo, e la pressione dell' acqua. Possono amendue produrre la velocità, la prima in proporzione della caduta, la seconda dipendentemente dall' altezza.

16.° Queste due cagioni giusta l' opinione del celebre Autore non operano giammai insieme combinate, ma soltanto per prevalenza. Quando l' effetto della pressione, ossia la velocità, che da questa puossi produrre è maggiore di quella che puossi acquistare dall' acqua in forza della caduta, la prima diviene operosa; la seconda inoperosa; viceversa se succede il contrario, nello stesso modo che un corpo veloce non può essere urtato da un più lento, che lo insegue.

17.° Quindi s' inferisce, che ne' tronchi superiori, ove pesanti sono le materie, notabile la pendenza de' fiumi, tenue l' altezza dell' acqua, hassi ad attribuire la velocità alla caduta; viceversa ne' tronchi inferiori ove le materie sono minori, poca o nulla la pendenza, massima l'altezza dell' acque, nasce la velocità dalla pressione.

18.° A dimostrare come nella sezione de' Fiumi di notabile altezza abbia luogo la pressione, s' immagini coll'encomiato maestro, segato l' alveo con un piano verticale, che presenti un infinito numero di pertugi alle acque correnti; da ciascuno di essi in forza della pressione dell'acqua sopraincombente uscirà il fluido con velocità proporzionale alla radice quadrata dell' altezza dell' acqua premente. Si argomenti quindi che potendosi applicare lo stesso ragionamento a qualunque punto dell' immaginato piano verticale, si può risguardare ogni fiume conformato a strati forniti di varia velocità determinata dalla radice quadrata dell'altezza dell'acqua, che sovrasta a ciascuno strato.

Per tal maniera si trova la scala delle velocità corrispondente alle ordinate d' una parabola Apolloniana, come si è detto, avente il vertice alla superficie de' fiumi.

19.° Il sistema del Guglielmini, neglette le resistenze, fu solennemente professato dalla maggior parte degli Architetti d' acque d' Italia, e d'Oltremonti; mentre all' opposto uomini di estesa fama il combatterono, principalmente l' Idrometra Francese Bernard.

20.° Non essendo applicabile il principio che un corpo veloce non può essere urtato da un meno veloce, poichè l'uno fugge e si sottrae dall' azione dell' altro, non s'intende come le due cagioni (la declività dell' alveo, e la profondità dell' acqua) non possono agire combinate; non s' intende il limite fin dove operi la pendenza, ed ove operi la pressione, dovendosi trovare una sezione nel moto progressivo nella quale le due cagioni si eguagliano, e la prevalenza diviene nulla; non s'intende come nella stessa sezione la velocità della parte superiore del corso possa essere originata dalle pendenze, mentre la velocità dell' inferior parte dipende dalla pressione, e come i due strati che si toccano, e servono di limite alle due cagioni, continuino il loro movimento; non s' intende come nella superficie de' fiumi, ove nulla è la pressione, siano le acque dotate di un vivo corso, qualora non si abbia ricorso all' altezza equivalente introdotta ingegnosamente dal Padre Abbate Grandi; non s' intende in fine come due sezioni fornite di pari larghezza, ma che nell' una sia come quattro l'altezza dell'acqua, e nell'altra come uno, si reciprochino colle velocità nel rapporto di uno a quattro, (altrimenti le quantità delle acque non si eguaglierebbero) e nello stesso tempo la velocità della prima sia nel sistema del Guglielmini come due radice quadrata di quattro, e quella dell'altra come una radice quadrata dell' unità, cioè nella prima sezione la velocità debba essere quattro volte minore, ed insieme due volte maggiore della seconda, contraddizione manifesta come osserva il Mengotti.

21.° Taccio del sistema del Gennetè che pretese crescere la velocità delle acque correnti prossimamente in corrispondenza, ed in proporzione della varia loro quantità introdotta ne' fiumi appoggiato alle seguenti esperienze.

Impinguando un corso d'acqua di uno o di due rivi, la cui portata corrisponda in ciascuno alla metà dell' acqua di prima, e conseguentemente il corpo d'acqua corrisponda successivamente ad 1, 1 $\frac{1}{2}$, 2, egli riconobbe bensì aumentata la velocità, ma l'altezza si mantenne invariabile, e costante. Reso il numero dei rivi maggiore, ed aumentata successivamente la quantità dell' acqua introdotta come 3, 4, 5, 6, 7, crebbe eziandio la velocità, ma l' altezza dell' acqua corrispondente ebbe soltanto l'accrescimento di $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{9}$ (veggasi il II Volume delle Istituzioni d'Idraulica teorica pratica dell' Autore.)

All' incontro scemando la quantità dell' acqua colla diminuzione del numero de' rivi introdotti, si ottenne la stessa progressione in ordine inverso.

22.° Non distinguendo il Gennetè il diverso stato de' fiumi, e non avvertendo che in tempo di gonfiezza più agevolmente si vincono le resistenze, per cui il decremento della velocità è assai minore, stabilì per teorema che il movimento de' fiumi cresce assai prossimamente come la quantità dell' acqua che si aggiunge, e scema in ragione di quella che toglie.

23.° L' illusione dell'Idrometra Olandese nacque appunto probabilmente per non essere stato da lui osservato, che trovandosi un fiume in piena somma fornito di considerevole velocità, può essere da questo ricevuto l' influsso di un altro fiume senza nessuno, o sensibile accrescimento di altezza, o perchè dalle resistenze costanti viene assai meno ritardato il corso delle acque aumentate e varianti; o perchè parte della sezione che prima del gonfiamento delle acque era inerte, e morta, diviene dopo viva ed operosa; o perchè ripieno alla foce un fiume dalle acque regurgitate dal recipiente, vengono queste spinte all' ingiù dalle acque crescenti, e per tal maniera viene la loro discesa animata senza aumento di altezza.

24.° Quindi si spiega come nelle sezioni in parte *morte* in tempo di acque ordinarie, e divenute in tutto operose al sopraggiungere di una piena in circostanza della quale l' opposizione delle resistenze si fa eziandio minore, si possa verificare, ciocchè fu osservato dal Lecchi, che pretendeva restringersi le sezioni del recipiente dopo la confluenza, e ciocchè fu avvertito dal Padre Frisi, che come si esprime il Professore Masetti, fu assai più discreto del Lecchi, cioè che l' area delle sezioni del recipiente presa sopra, e sotto la confluenza si conserva invariabile, e presso a poco costante.

25.° Nelle scale determinate dal Castelli e dal Guglielmini la velocità dovrebbe assai sensibilmente aumentare dalla superficie all' ima profondità delle acque e riscontrarsi massima, mentre in natura si verifica tutto all' opposto.

26.° Ne' predetti sistemi la scala delle velocità è rappresentata da una linea, o da una curva ad ordinate crescenti, mentre all' incontro avuto riguardo alle resistenze incontrate la curva ritorna in se stessa, e la celerità verso il fondo è minima, e pressocchè nulla.

27.° In fatti con reiterate prove interrogossi dal Mariotte l'esperienza, e trovossi che all'eccezione de' luoghi nei quali a motivo di qualche ostacolo si gonfiano le acque, e formano caduta come al passaggio de' ponti, i galleggianti erano rapiti con maggiore celerità dai corpi collocati verso il fondo, e che la differenza del moto era tanto più grande, quanto più i corpi immersi si accostavano al fondo.

28.° Il Bonati che replicò le sperienze di Mariotte, ed intorbidò un corso d' acqua col fango, osservò che la nuvoletta ondeggiante al dissopra della superficie era sospinta come quella posta al di sotto verso il fondo.

29.° Parve al Michelotti, ed al Ximenes che la media proporzionale aritmetica fra la velocità della superficie, e quella del fondo si confonda colla media velocità delle acque correnti.

30.° Stabilì il Prony che questa stessa media velocità riesce eguale alli quattro quinti circa della velocità superficiale, e più esattamente chiamando u la velocità media, v la superficiale, w quella del fondo diede la formola $u=v\left(\frac{v+2,372}{v+3,153}\right)$ preso il metro per unità.

31.° Laonde supponendo che la velocità superficiale non ecceda i tre metri per ogni secondo, velocità massima in pratica d' ordinario osservata, determina il Venturoli il rapporto delle tre velocità v, u, w, e lo esprime coi numeri 5 , 4, 3 assai prossimamente.

32.° In generale dalle precedenti osservazioni, e dall' esperienze deducesi che negli alvei sparsi di resistenze la velocità delle acque correnti dalla superficie al fondo d'ordinario decresce, talvolta cresce secondo le particolari varie circostanze; che il decremento, e ritardo succede lentamente; che in fine si fa maggiore rapidamente quanto più il fondo s' avvicina.

33.° Considerando gl' Idrometri che gli alvei de' fiumi si possono risguardare come altrettanti piani inclinati, e che le acque discendono per essi tratte dalla loro gravità relativa modificata dalle resistenze incontrate; chiamata g la gravità assoluta, chiamato ϕ l'angolo formato dalla verticale colla direttrice dell'alveo, chiamate R le resistenze incontrate, hanno conchiuso, che le acque correnti discendono con movimento uniformemente accelerato, e che la loro velocità riesce proporzionale all'espressione $g\cos.\phi - gR$. In conseguenza ridottosi il movimento all' uniformità, come si verifica nel corso delle acque dopo non lunga discesa, si avrà $g\cos.\phi - gR = o$, e perciò $\cos.\phi = R$, equazione nella quale restano a determinarsi le resistenze, affinchè si possa riguardare equabile negli alvei il movimento nelle acque.

34.° Il Coulomb fu il primo che stabilì potersi esprimere le resistenze mediante due termini, l' uno proporzionale al quadrato della velocità, l' altro alla velocità semplice, supponendo questi due termini inversamente proporzionali al così detto *raggio medio* cioè al rapporto fra l' area ed il perimetro della sezione. Per la qual cosa nominando M l' area d' una sezione, N il perimetro di essa bagnato dall'acqua; D il raggio medio, sarà $D = \frac{M}{N}$, e ritenuta la ipotesi del Coulomb si avrà la formola dei signori Girard, e Prony che rappresenta la legge delle resistenze incontrate dalle acque correnti

$$R = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{D} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{3B}{2D} u,$$

essendo a, B due coefficienti, il cui valore devesi determinare coll' esperienza.

Essendo poi $R = \cos.\phi$, sarà (sostituito il valore di R) $\frac{au^2}{2g} + Bu = \frac{2}{3} D\cos.\phi$.

35.° Il sig. Eytelwein appoggiandosi alle sperienze fatte dagli Ingegneri Tedeschi Brunizo, Munk, Woltman nel Reno di Germania, nel Weser, nello Yssel ed in varj canali di scolo, e dal Dubuat, in tutto novanta una esperienze, pensò che la supposta legge delle resistenze si verifichi generalmente, e determinò il valore de' coefficienti costanti a, B, cioè $\frac{3}{2}a = 0,007171\frac{1}{2}$, $B = 0,00024$. Conseguentemente ritrovato il valore di $\cos.\phi$, cioè il coseno dell' inclinazione dell' alveo alla verticale, coseno che risulta dividendo l'altezza del punto superiore sopra l' inferiore per la lunghezza interposta fra questi due punti; ritenuta l' espressione della gravità eguale al doppio spazio percorso da un grave che cade liberamente nel vuoto durante un minuto secondo $= 9,8088$, e chiamata u la velocità media si ottiene la prima delle due formole d' Eytelwein

$$u = -0,00338375.g + \sqrt{(0,0001145g^2 + 278.899 \times Dg\cos.\phi)}$$

e sostituito il valore di g, si troverà

$$u = -0,03319 + \sqrt{(0,0011 + 2735,66D.\cos.\phi)}.$$

Trasportando il primo termine del secondo membro della precedente equazione per isolare il radicale, ed innalzando poscia i due membri dell' equazione al quadrato si ha il valore di $\cos.\phi = 0,007171 \frac{u^2}{2gD} + 0,00024 \frac{u}{D}$, che è la seconda delle formole del predetto Autore.

36.° Quindi conchiudesi pure che conoscendosi la media velocità u e nominando Q la portata di un fiume, ed A la sezione, si avrà per l' espressione della quantità dell' acqua scaricata per ogni minuto secondo dalla sezione medesima $Q = Au$, ed in conseguenza se si dirà q la quantità dell'acqua scaricata da un' altra sezione dello stesso fiume solitario, dovrà essere $Q = q$; ossia $Au = au'$, e perciò $A : a :: u' : u$.

37.° Nelle ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella scuola degli Ingegneri Pontificj d' acque e strade nell' anno 1821 si fa menzione di tre diligentissime esperienze del Professore sig. Giorgio Bidone che si usarono ne' canaletti dello stabilimento idraulico della Reale Università di Torino, e che confrontate colla formola di Eytelwein corrisposero esattamente.

38.° Si ricordano ancora le prove del chiarissimo Teodoro Bonati, che determinò la portata del Po in istato di magra, di mezzana, di piena valendosi delle aste ritrometriche, e determinò (dividendo la portata del fiume per una sezione del Po presa poco sotto Lago-Scuro in tempo di acque basse e mezzane) la rispettiva media velocità di metri 0,687, e di metri 0,736 e collo stesso metodo rinvenne la velocità nel colmo di una grossa piena a Lagoscuro di metri 1,269. Calcolò successivamente attenendosi alla formola d' Eytelwein dipendentemente dal raggio medio, e dalla pendenza superficiale del fiume, ed ebbe la velocità per secondo del Po basso, del Po mezzano e del Po alto espresse dai seguenti valori metrici, 0,632, metri 0,758, metri 1,356 che prossimamente corrispondono alle velocità osservate, e più sopra riportate di metri 0,687, metri 0,736, metri 1,269.

39.° Le recenti esperienze de' Professori della scuola di Roma fatte nel Po, e nel Tevere, e dall' Ingegnere signor Vincenzo Bertelli hanno pure confermato la coincidenza del fatto colle deduzioni, che traggonsi dalla formola di Eytelwein, cioè che le resistenze incontrate dalle acque correnti hanno per espressione due termini, l' uno proporzionale al quadrato della velocità, l' altro alla velocità semplice.

40.° Noto in fine che il Professore Masetti, e la scuola degli Ingegneri Pontifici ritrovarono col sussidio della formola di Eytelwein l' alzamento prodotto nel Po in piena per l' influenza del Reno di metri 0,457 prossimamente, non molto diverso da quello che in questo caso particolare risulta dall' applicazione del sistema del Guglielmini modificato dal sullodato Masetti.

Io stesso ho data la soluzione dello stesso problema con eguale metodo nelle mie istituzioni.

41.° Le precedenti considerazioni, ed i precedenti esperimenti istituiti da uomini illustri non possono non imporre agli idrometri per indagare se le formole dell'Eytelwein sono generalmente applicabili ad ogni corso d'acqua, ai torrenti, ai fiumi, qualunque sieno le materie trasportate, la pendenza, il raggio medio.

42.° In circostanza ch'io dirigeva i lavori costrutti per l'innalzamento del nuovo Ponte sull'Arda a tre arcate nell'Emilia presso Fiorenzuola, esplorai la velocità superficiale della piena del torrente in quel luogo, e mi parve di metri 2. 50 per secondo.

Laonde nominata v questa velocità, u la velocità media, w la velocità del fondo, e determinata la velocità media colla formola riportata più sopra dal Prony $u=v\left(\frac{v+2.372}{v+3,153}\right)$, estimata col Ximenes, e col Michelotti la velocità del fondo terza proporzionale aritmetica della velocità superficiale e media trovasi $v=2,50$, $u=2,15$, $w=1.80$.

43.° Parimente fu osservata la velocità superficiale della piena d'Arda di metri 3,35 per secondo al Ponte di Castello Arquato, e fu determinata colla formola Prony la velocità media di metri 2,94.

44.° Per eguale maniera la velocità dell'Arda al Ponte di Cortemaggiore essendosi mostrata in piena di metri, 3, 50 per secondo, si trovò la velocità media di metri 3,08.

45.° Ora essendo, giusta i rilievi fatti dal sig. Ingegnere Montecchini, che mi fu cortese dandomene comunicazione, e che condusse i lavori del nuovo Ponte dell'Arda presso Fiorenzuola, assistito dal discepolo mio sig. Dottor Pasini, la larghezza superiore dell'Arda al ponte di Castell'Arquato distante da Fiorenzuola miglia sette circa, di metri 74,00, l'altezza della piena di metri 1,00 e perciò la sezione di metri quadrati 74,00, ed essendo la larghezza dello stesso torrente al

Ponte di Cortemaggiore posto al disotto alla distanza presso a poco di sei miglia di metri 16,50, l'altezza della piena di metri 4,30, e la sezione di metri quadrati 70,95.

Ritenendo la sezione di Fiorenzuola della larghezza viva eguale alla libera del Ponte di metri 49,50, dell'altezza in piena di metri 2,00, e della superficie di metri quadrati 99,00.

Applicando il noto teorema, che in un fiume, o torrente solitario ridotto all'equabilità come si verifica nell'Arda da Castello Arquato a Cortemaggiore, si reciprocano colle velocità le sezioni (36), altrimenti non passerebbe per ciascuna d'esse la stessa quantità d'acqua in egual tempo, si avranno le seguenti proporzioni, supposta costante la velocità calcolata media di Fiorenzuola, di metri 2,15 colle quali proporzioni si determina la quantità dell'acqua scaricata dall'Arda in piena in un minuto secondo, e le velocità reciproche di ciascuna sezione.

			Metri	q.ti
Sezione a Castell'Arquato.				
Larghezza metri	74	00	74	00
Altezza della piena	1	00		
Sezione a Fiorenzuola				
Larghezza metri	49	50	99	00
Altezza della piena	2	00		
Sezione a Cortemaggiore				
Larghezza metri	16	50	70	95
Altezza della piena	4	30		

Colle proporzioni in cui le sezioni si reciprocano colle velocità medie, si calcola la portata del torrente, conoscendosi, e supposta costante come si è avvertito, la velocità media di Fiorenzuola computata di metri 2,15.

Sezione e velocità a Castell'Arquato paragonata con quella al Ponte di Fiorenzuola.

$$74 : 99 : . 2{,}15 : 2{,}876 \left\{ \frac{74 \times 2{,}876 = 212{,}824}{99 \times 2{,}13 = 212{,}85} \right. .$$

Sezione e velocità al Ponte di Fiorenzuola paragonata a quella di Cortemaggiore,

$$70{,}95 : 99 :: 2{,}15 : 2{,}999 \left\{ \frac{99 \times 2{,}15 = 212{,}85}{70{,}95 \times 2{,}999 = 212{,}778} \right. .$$

Sezione e velocità al Ponte di Castello Arquato paragonata a quella del Ponte di Cortemaggiore

$$74{,}00 : 70{,}95 :: 2{,}999 : 2{,}876 \left\{ \frac{74 \times 2{,}876 = 212{,}824}{70{,}95 \times 2{,}999 = 212{,}779} \right. .$$

46.° Le velocità adunque ritrovate mediante la reciproca ragione delle sezioni seguono a Castello Arquato, a Fiorenzuola, a Cortemaggiore la serie dei numeri 2,876; 2,15; 2,999 e quelle somministrate dall'osservazione sono 2,94; 2,15, 3,08.

La differenza fra queste velocità è assai tenue, che si possono esse considerare eguali ammettendo la loro coincidenza.

47.° Ora si determini la stessa velocità applicando all' Arda la formola di Eytelwein, e deducendone la velocità nelle sezioni da noi esaminate.

48.° La formola del predetto Autore sostituito il valore della gravità (35) è la seguente

$$u = -0{,}03319 + \sqrt{(0{,}0011 + 2735{,}66 . D\cos.\varphi)}$$

in cui D esprime il raggio medio, e $\cos.\varphi$ è il coseno dell'angolo formato dalla verticale colla linea direttrice, ossia col piano inclinato dell'alveo.

49.° La sezione a Castello Arquato è di metri quadrati 74,00. Il perimetro bagnato dall' acqua è di metri 76,00. Il raggio medio D sarà $= \frac{74}{76} = 0{,}9737$. La pendenza dell' alveo per metro è di 0,0079. e quindi $\cos.\varphi = 0{,}008$, e

$$D\cos.\varphi = 0{,}00779.$$

Conseguentemente sostituendo il predetto valore si trova colla formola di Eytelwein riportata al § 48, $u=4,583$ colla quale velocità l'acqua percorrerebbe in un'ora miglia undici.

50.° La sezione a Fiorenzuola è di metri quadrati 99,00. Il perimetro bagnato dall'acqua è di metri 53,50 lineari, perciò il raggio medio $=\frac{99}{53,50}=1,85$.

La pendenza dell'alveo per metro è di metri 0,006 e risulta $\cos.\varphi=0,006$.

Colla formola predetta si ha $u=5,48$.

Con questa velocità l'acqua percorrerebbe per ora miglia 13 e 1/10 circa.

51.° A Cortemaggiore la sezione è di metri quadrati 70,95, il perimetro bagnato dall'acqua di metri lineari 25,10 ed il raggio medio $D=\frac{70,95}{25,10}=2,82$.

La pendenza dell'alveo per metro è di metri 0,003 per cui risulta $\cos.\varphi=0,003$ e $D\cos.\varphi=0,00846$, dal'qual valore sostituito nella formola si deduce $u=4,777$, talchè il viaggio dell'acqua in un'ora corrisponderebbe a miglia $11\frac{1}{2}$ circa.

52.° Adunque constando dalle osservazioni generalmente adoperate ne' fiumi, e nei torrenti, che la massima velocità media suol essere o eccedere di poco i metri 3,00 per secondo, ed essendo le velocità dedotte dalla formola di Eytelwein notabilmente maggiori di tale misura, si pensa di potere inferire, che la predetta formola di Eytelwein può bensì servire ne' corsi d'acqua ne' quali è assai lieve la pendenza degli alvei, e sottili sono le materie trasportate giusta le verificazioni usate ne' canaletti della R. Università di Torino, nel Tevere, nel Po, nel Reno (§ 35, 37, 38 e 39); ma non è applicabile ai torrenti di cui gli alvei forniti sono di notabile pendenza, e che colla loro violenta discesa rapiscono dall'alto ghiaje, e materie pesanti.

53.° Dopo la precedente illazione, della cui evidenza, non si può dubitare, il sig. Dottor Giuseppe Pasetti giovane fornito di non comune intelligenza, ed istrutto nelle idrometriche dottrine sospettò, che per qualsivoglia corso di acqua convenisse valersi della formola lasciataci dall'Idraulico Italiano Tadini contradditore d'Eytelwein, e ne provocò l'applicazione alle acque correnti nell'Arda. In fatti la soluzione de' seguenti problemi sembra dimostrare la generalità della predetta formola.

54.° *Problema* I. Nella formola Tadini, frutto di sessanta e più correnti diverse esplorate dall'Autore vengono espresse cinque quantità. Essendone cognite quattro si determina la quinta.

La formola è la seguente $\frac{pL^2A^3}{Q^2} = 0{,}00040$ nella quale p indica la pendenza della superficie per metro, e corrisponde a cos.ϕ, L la larghezza del canale, A l'altezza dell'acqua, Q la quantità dell'acqua scaricata in un secondo da una sezione, e la decimale 0,00040 è chiamata dal Tadini modulo, che è rigorosamente variabile ne' diversi corsi d'acqua.

Perchè indicato il modulo generalmente colla lettera M, cioè fatto $0{,}00040 = M$ vengono somministrate le seguenti equazioni

$$\frac{pL^2A^3}{Q^2} = M;\ p = \frac{Q^2M}{L^2A^3},\ L = \frac{Q}{A}\sqrt{\frac{M}{pA}};$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{Q^2M}{pL^2}};\ Q = AL\sqrt{\frac{Ap}{M}}.$$

55.° *Problema* II. Conoscendo la velocità media al ponte d'Arda presso Fiorenzuola dedotta dall'osservazione, determinare il modulo.

La velocità media è stata stabilita di metri 2,15(§. 42). La pendenza p nell'indicato luogo è di metri 0,006 per metro; l'altezza A della piena è =metri 2,000 sotto la larghezza viva di metri 49,50.

Il modulo $M = \frac{pL^2A^3}{Q^2}$ (§. 54); perciò $pL^2A^2A = Q^2M$. conseguentemente

$$AL\sqrt{Ap}=Q\sqrt{M}\,;\ \text{e}\ \frac{Q}{AL}=\sqrt{\frac{Ap}{M}}\,;$$

ma $\frac{Q}{AL}=u$, in generale non avendo riguardo alle resistenze incontrate; dunque volendo tenere a calcolo anche queste sarà $u=\sqrt{\frac{Ap}{M}}$, equazione nella quale la velocità si modifica dal modulo proporzionevolmente alle resistenze medesime.

L' equazione stessa serve generalmente per l' invenzione del modulo, ove succedano cangiamenti. Dunque

$$u=\sqrt{\frac{Ap}{M}},\ \text{ed}\ M=\frac{Ap}{u^2}.$$

Ora sostituendo i valori noti di u=2, 15, di A=2, e di p=0,006 come sopra, si trova M=0,002596 che è Il valore del modulo ricercato.

Collo stesso metodo richiamate le velocità dell'Arda ai ponti di Castello Arquato e di Cortemaggiore fornite dalla reciproca ragione di quelle sezioni (§ 45), cioè di metri 2,876, e di metri 2,999 rispettivamente, si trova il modulo per Castello Arquato M=0,000955 e per Cortemaggiore M=0,001434 in metri. . . . . .

56.° *Problema* III. Essendosi determinati nel precedente problema i moduli per le sezioni dell' Arda ai ponti di Castello Arquato, di Fiorenzuola, e di Cortemaggiore col mezzo delle rispettive velocità, ora viceversa si ricerchino tali velocità essendo noti i moduli.

Dalla formola $u=\sqrt{\frac{Ap}{M}}$ (§ 55), sostituiti i valori di A, p ed M si ha

Per Castello Arquato $u=\sqrt{\left(\frac{0,0079}{0,00955}\right)}=2,87$

Per Fiorenzuola $u=\sqrt{\left(\frac{0,012}{0,002596}\right)}=2,15$

Per Cortemaggiore $u=\sqrt{\left(\frac{0,0129}{0,001434}\right)}\doteq 2,99$

57.° *Problema* IV. Conoscendo la larghezza, l'altezza e la pendenza del Po a Lago Scuro determinare la portata del fiume.

Si ritenga la formola riportata dal Tadini cioè $\frac{pL^2A^3}{Q^2}=0{,}00040$, e si richiami l'equazione $Q=AL\sqrt{\frac{Ap}{M}}$ (§ 54).

La larghezza del Po è di metri	288,875=L
L'altezza della piena è di metri	11,403=A
La pendenza per metro è di	0,000099571=p
Il modulo	" 0,00040=M

Sostituiti questi valori si trova $Q=5547{,}166$ che poco differisce dalla quantità scaricata dal Po servendosi della formola d'Eytelwein dalla quale si trae di metri cubi 5477,99.

58.° *Problema* V. Posta la larghezza media del Reno di metri 52,824, l'altezza della piena di metri 4,181, la pendenza per metro di 0,000245833 determinare la portata del fiume.

Colla stessa formola $Q=AL\sqrt{\frac{Ap}{M}}$ ritenuto il modulo $=0{,}00040$, si trova la quantità d'acqua scaricata dal Reno eguale a $Q=353{,}813$ che poco differisce da quella determinata colla formola di Eytelwein di m. c. 337,092.

Nota. Aumentando il modulo $M=0{,}00040$ di pochi milionesimi si ottengono risultati identici tanto coll'una, che coll'altra formola in amendue i fiumi.

59.° *Problema* VI. È nota la portata, l'altezza, la pendenza del Po, ed è nota pure la portata del Reno, si cerca quale sarà l'aumento dell'altezza del primo per l'influenza del secondo.

La portata del Po è calcolata di metri cubi 5547,156, la sua altezza di metri lineari 11,403, la larghezza di metri 288,875, la pendenza per metro di 0,000099571; la portata del Reno è di m. c. 353,813.

Conseguentemente la portata del Po accresciuto del Reno sarà di 5900,979.

La soluzione del problema si ottiene mediante la sostituzione de' riportati valori nell' equazione $A=\sqrt[3]{\frac{Q^2M}{pL^2}}$ (§ 54) e si troverà $A = 11{,}87$ prossimamente, altezza che deducesi eziandio facendo uso della formola di Eytelwein.

Osservazioni Generali.

60.° I. Si ripete ciò che è stato detto al § 52, che dopo i risultamenti de' precedenti problemi risoluti colla formola del Tadini, e paragonati con quelli che ottengonsi colla formola di Eytelwein resta confermato, che quest'ultima si può usare senza tema di gravi errori ne' corsi d' acqua forniti di poca pendenza, che trasportano tenui materie come ne' canali, e ne' fiumi maggiori, e che la prima generalmente è applicabile qualunque sieno le materie trasportate, e le pendenze come nei torrenti.

II. Essendosi ritrovato al § 55 problema secondo $u=\sqrt{\frac{Ap}{M}}$, apparisce che la velocità de' fiumi è proporzionale alla ragione suddupplicata della composta della diretta dell' altezza e della pendenza combinate, e dell' inversa del modulo affine di computare le resistenze, e conseguentemente che il Guglielmini ben si apponeva attribuendo la velocità alla radice quadrata della pressione e della caduta, ma s' ingannava sostenendo che queste due cagioni agiscono sempre divise, e soltanto per prevalenza.

III. I limiti fra i quali varia il modulo Tadini, sono assai sensibili nei torrenti per le resistenze che in essi variano senza legge quasi direbbesi dall' una all' altra sezione, mentre ne' fiumi di poca pendenza e che trasportano materie sottili, e poco pesanti, il modulo è variabile *fra brevi confini*, come accenna l'Autore atteso che le resistenze non molto variano, e si avvicinano all' uniformità nel progresso del corso.

IV. Poste tutte le altre cose pari, meno l'altezza, si trova colla formola Tadini il quadrato della quantità d' acqua scaricata da un fiume proporzionale al cubo delle altezze come avvertì il Guglielmini.

V. La velocità delle acque viene notabilmente modificata dall' inversa ragione del modulo, ossia dalle resistenze (§ 55), velocità che nella formola d' Eytelwein si fa costantemente dipendere dal perimetro della sezione bagnato dall'acqua, e secondo il Tadini dal modulo necessariamente assai variabile ne' torrenti per le addotte ragioni in questo paragrafo n.° III e contenuto *fra brevi* confini ne' grandi fiumi.

VI. Considerando come corpi gravi le acque discendenti dalla loro origine, e raccolti dai Rivi per formare i torrenti ed i fiumi, ben si comprende che la loro discesa deve succedere in forza della gravità relativa proporzionale al coseno dell'angolo d' inclinazione dell' alveo coll' orizzonte, e conseguentemente con moto accelerato il quale a poco, a poco si diminuisce per le resistenze incontrate, e riducesi in fine all' uniformità, quindi (Tomo I.°) bene opinò il Galileo osservando che la superficie de' fiumi solitarj, e disposti secondo una sola linea inclinata al loro fondo converge col fondo medesimo.

Che però ridotto il moto ad uniformità, se dal supremo punto di una sezione si condurrà una linea all'insù parallella al fondo, sino all'origine delle acque discendenti, si fa chiaro che resterà determinato superiormente un prisma d' acqua triangolare alla cui pressione nulla si oppone inferiormente, e spinge conseguentemente l' acqua posta al dissotto, cospirando coll' inclinazione del piano alla produzione della velocità. Sembra perciò che il movimento si aumenti perchè si fa maggiore la velocità già nata dalla discesa lungo il piano inclinato dell' alveo.

Resta così confermato l' inganno del Guglielmini che asserì non operare che per prevalenza l'inclinazione del piano, e la pressione dell' acqua.

E per vero essendo la pendenza di metri 0,006, l'altezza della piena = metri 2; se si moltiplicheranno (§ 60 II.) insieme queste due quantità, e si dividerà il prodotto pel ritrovato modulo =0,002596 (§ 55) e dal quoziente sarà estratta la radice quadrata, si otterrà la velocità media = metri 2,15 (§ 42).

Si determina eziandio collo stesso principio la velocità dell'Arda nel tronco medio tra il Ponte dell'Arda, e quello di Cortemaggiore supposto sempre il moto ridotto all'equabilità, e perciò costante la quantità dell'acqua scaricata da ogni sezione nell' unità del tempo. Prendasi la pendenza media fra le due rispettive 0,006, e 0,003 che trovasi $=\frac{0,006+0,003}{2}=0,0045$, e l'altezza media delle piene che corrisponde a $\frac{2,00+4,30}{2}=3,15$. Il prodotto di queste due quantità $=0,014175$ si divida pel modulo medio $=\frac{0,002596+0,001434}{2}=0,00215$; dal quoziente 7,03 si estragga la radice quadrata, e si troverà la velocità del suddetto tronco di metri 2,65. Essa è media fra le due velocità all'Arda, ed a Cortemaggiore $=\frac{\text{metri } 2,15+2,99}{2}=$ metri 2,57 trascurata la tenue differenza.

VII. È desiderabile che si replichino le esperienze, e l'applicazione della formola Tadini si estenda eziandio a molti, e diversi torrenti a conferma delle argomentazioni dedotte dal solo torrente Arda.

VIII. Io mi limito ad alcune applicazioni delle formole stesse fatte in circostanza ch'io dirigeva i lavori eseguiti nei torrenti Taro, e Mure.

Applicazione al torrente Taro.

La pendenza dell'alveo all'Emilia è per metro di 0,003; la larghezza circa di metri 690, l'altezza della piena è di metri 3,00; la velocità alla superficie di metri 2,50; e la media dedotta dalla formola del Prony di metri 2,15 per secondo. Così si ritrova il modulo conveniente a questo tronco, applicando la formola del Tadini eguale a $\frac{pL^2A^3}{Q^2} = 0{,}00195$.

Servendosi della formola di Eytelwein l' ampiezza della sezione riesce $= 2070$, il perimetro bagnato dall' acqua

$$= 690 + 2 \times 3 = 696,\ \cos.\phi = 0{,}003,$$

il raggio medio $D = \frac{2070}{696} = 2{,}97$, e conseguentemente

$$u = 0{,}0332 + 4{,}947 = 4{,}9802.$$

Tale velocità è maggiore della massima osservata ne' fiumi, e ne' torrenti che è di metri 3,00 o di poco più maggiore, e con essa si percorrerebbe dal Taro in un'ora la lunghezza di miglia 11 $\frac{3}{4}$ e più, ciascuno di metri 1500.

La pendenza del Taro al Micone superiormente a Fornuovo rimpetto al Comunello di Rubiano è di 0,0056 per metro.

La sua larghezza viva si considera eguale ad un terzo di quella della sezione del Taro mancando ivi l'influsso del Ceno, l' altezza della piena è di metri 2,10; la velocità superficiale è di metri 3,00, e la media di metri 2,61. Per le quali cose si trova $\frac{pL^2A^3}{Q^2} = 0{,}00172$, ossia il modulo corrispondente al Micone.

Valendosi della formola di Eytelwein, ed essendo la superficie della sezione di metri quadrati 483,00 il perimetro bagnato dall' acqua = metri 234,20, il raggio medio

$$D = \frac{483{,}00}{234{,}20} = 2{,}06,\ \cos.\phi = 0{,}0056,$$

si ottiene $u = 5{,}505$ di maniera che il viaggio di un' ora sarebbe maggiore di miglia 13 $\frac{1}{3}$.

Applicazione al torrente Mure.

La pendenza dell' alveo all' Emilia è come nel Taro, di metri 0,003 per metro; la larghezza viva, avuto riguardo alle resistenze o almeno alla contrazione della vena in ragione di 8,5 di metri 70,00; l' altezza della piena di metri 2,76; la velocità superficiale di metri 2,90, e la media di metri 2,52 prossimamente.

Si trova $\frac{pL^2A^3}{Q^2}=0,00129$ per l'espressione del modulo corrispondente.

Colla formola di Eytelwein si ha la superficie della sezione = metri quadrati 196, il perimetro bagnato dall' acqua $=70+2\times2,80=75,60$; il raggio medio $D=\frac{196}{75,60}=2,59$, $\cos.\phi=0,003$, ed $u=6,07$ di miglia $14\frac{1}{2}$ per ora.

La pendenza a Ponte dall' Olio è di metri 0,0075, la larghezza viva si ritiene di metri 70, l' altezza della piena è di metri 2,60, e la velocità media di metri 2,71, per cui si ha $\frac{pL^2A^3}{Q^2}=0,00265$ per l' espressione del rispettivo modulo.

Usando della formola di Eytelwein la superficie della sezione risulta di metri quadrati 182; il perimetro bagnato dall' acqua di metri $70+2\times2,60=75,20$ il raggio medio $D=\frac{182}{75,20}=2,42$, $\cos.\phi=0,0075$, ed $u=$metri 7,003 per secondo, ed il viaggio di un' ora poco meno di miglia 17,00.

61.° Confermasi sempre ciò che superiormente è stato dedotto, cioè (§ 57, 58, 59 e 60).

Che la formola Tadini si può generalmente adoperare pel calcolo della velocità in tutti i corsi d' acqua cioè ne' torrenti forniti di molta pendenza, e ne' fiumi, il cui alveo è fornito di tenue inclinazione, e che la formola di Eytelwein è soltanto applicabile a questi ultimi. Colla formola Tadini si hanno risultati ragionevoli e conformi all' esperienza per determinare la velocità, mentre colla formola di Eytelwein si ottengono velocità notabilmente discrepanti dalle vere allora quando l' inclinazione è sensibile.

Lo stesso intendesi per le altre argomentazioni (§. 60.)

62.° Quindi è che ne' diversi fiumi, canali e torrenti, il modulo è rigorosamente variabile, che ne' fiumi maggiori viene esso espresso da una frazione decimale esprimente dei centomillimetri composta d' ordinario di due cifre nel numeratore, laddove ne' torrenti correnti in ghiaja le cifre sono tre per lo più.

63.° Si può ritenere ancora che crescendo la pendenza negli alvei, cresce pure il modulo, come si trae specialmente dall' osservazione sul Mure.

64. Notisi che ad ogni parziale tronco di torrente o fiume fornito di una determinata pendenza conviene un modulo particolare, e questo si determina colla formola $M=\frac{pL^2A^3}{Q^2}$ (§ 55) esplorando la velocità in tempo di piena di una conosciuta sezione. Per tal maniera si trovano i brevi confini fra i quali il modulo è variabile dall' uno all' altro tronco.

Forsechè (notasi eziandio) moltiplicando le esperienze, ed estendendo le osservazioni ai torrenti impetuosi, forniti di notabile pendenza, e correnti di corso equabile, non si potesse come ne' fiumi e canali di poca inclinazione, giungere a tale espressione della velocità, da cui dedurre pei primi i valori dei coefficienti A, B, applicabili e valevoli onde esprimere la misura, e la legge delle resistenze?

Perciò ritengonsi due formole, l'una pei fiumi, l'altra generale pei torrenti e pei fiumi, finchè siano temperati e modificati i coefficienti predetti per modo, che una sola formola generale serva per gli uni e gli altri corsi d' acqua.

Sembra però doversi in ogni ipotesi preferire la formola Tadini e per la semplicità, e per la non dubbia generalità, e per le spontanee conseguenze ch' indi ne nascono.

FINE DELLA PARTE FISICA DEL TOMO XXII.