DELLA DISTRIBUZIONE DELL' ELETTRICO
NE' CORPI CONDUTTORI
MEMORIA
DEL DOTTOR GIUSEPPE BELLI

PROFESSORE DI FISICA
NELL' I. R. LICEO DI PORTA NUOVA IN MILANO

Ricevuta adì 28 *Ottobre* 1839.

1. La sperienza ha fatto conoscere già da molto tempo che l' Elettricità, sia positiva sia negativa, si distribuisce nei corpi conduttori unicamente alla superficie. Ed è noto dal calcolo, pure da molto tempo, che per riguardo alle sfere e a diversi altri corpi la distribuzione dee necessariamente aver luogo a questo modo, quando le parti del fluido elettrico si respingano fra se, in ragione inversa dei quadrati delle distanze, e vengano attratte secondo la legge medesima dalla materia pesante de' corpi. Dal che si ha una assai valida ragione per credere che il fluido elettrico sia effettivamente soggetto ad una ripulsione e ad una attrazione dotate di questa legge. Convinto dell'importanza di una siffatta conclusione, tanto più che da molti distinti fisici non si reputano affatto sicure le altre ragioni che si addussero a di lei sostegno (1), ho cercato di darne una dimostrazione elementare e rigorosa, mediante la quale anche coloro che non sono molto inoltrati nelle matematiche, si possano persuadere che le *azioni cui è soggetto il fluido elettrico, considerate da molecola a molecola, seguono la ragione inversa de' quadrati delle distanze*. Ed è questo l' oggetto della prima parte della presente Memoria.

(1) Volta *Collezione delle Opere*, T. I. parte 2. p. 71. Kämtz, citato nel Gehlers *Physikalisches Wörterbuch neu bearbeitet*, Leipzig 1825 e seg., art. *Elektrometrie*, p. 698, ec.

A questa dimostrazione, la quale a dire il vero nulla arreca di nuovo alla scienza, ma solamente avvalora ciò che era già conosciuto, aggiungo nella seconda parte della Memoria alcune altre cose le quali non credo ancora trovate da altri. Era ben noto fino dai tempi di Priestley e di Cavendish, che quando le azioni elettriche seguano la ragione inversa de' quadrati delle distanze, dee l' Elettrico ne' corpi sferici distribuirsi unicamente alla superficie (1). E Poisson estese la dimostrazione alle elissoidi e ai sistemi di due sfere, sì toccandosi queste ultime come trovandosi a qualche distanza (2). Ma nessuno, a quello che io sappia, l' aveva estesa a tutti i conduttori in genere (3). Ed è appunto questo quello che io ho procurato di fare nella detta seconda parte della presente Memoria (4).

---

(1) Priestley, *Storia dell' Elettricità* tradotta in francese', Parigi 1771, T. III. p. 463. Cavendish, *Phil. Trans.* 1771. p. 593, 594. e 595.

(2) *Memorie dell' Istituto di Francia, Classe delle Scienze matematiche e fisiche*, anno 1811, Parte I. p. 1 e seg. Parte II. p. 163, e seg.

(3) Nelle Memorie dell'Accademia di Parigi pel 1786, p. 76. si trova su ciò un tentativo di dimostrazione fatto da Coulomb, ma assai imperfetto e affatto lontano dal rigore matematico.

(4) Parecchie delle conclusioni ottenute in questa memoria si trovano già esposte per estratto nel terzo Volume del mio Corso Elementare di Fisica, a p. 82, 114, 141, 153, 178.

PARTE PRIMA

DELLA LEGGE DELLE AZIONI OPERANTI SUL FLUIDO ELETTRICO.

PROPOSIZIONE I.ª

2. *Una quantità qualsivoglia di una materia repulsiva le cui parti si respingano in ragione inversa dei quadrati delle distanze, e che sia distribuita uniformemente in una superficie sferica, non esercita azione veruna verso i punti collocati nell' interno di questa superficie* (1).

DIMOSTRAZIONE.

Sulla superficie di una sfera, della quale sia AFBE (*fig.* 1) un cerchio massimo, suppongasi distribuita uniformemente una materia che sia condensata unicamente su questa superficie senza occupare nessuna grossezza, e le cui parti esercitino un' azione respingente la quale varii in ragione inversa del quadrato delle distanze. In un punto qualsivoglia D preso entro di essa superficie si supponga concentrata una piccola quantità m di materia atta a sentire questa ripulsione. Si asserisce che le azioni esercitate sulla massa m dalle diverse parti della detta materia distribuita sulla superficie sferica, si controbilanciano e si distruggono a vicenda.

Conduciamo pel punto D il diametro ADB, la retta D'DD'' perpendicolare a questo diametro, e inoltre le due corde EDF, E'DF', le quali intercettino due archi EE', FF' situati in due opposti de' quattro archi AD', D'B, BD'', D''A; e distinguiamo

(1) Questo Teorema è stato dimostrato la prima volta da Newton ne' suoi *Principj matematici*, Lib. 1. Prop. 70, rispetto però a una forza attrattiva. Io ho procurato di ridurre elementare la dimostrazione, colla piccola diversità di considerare in vece un' azione repulsiva. Molti lettori troveranno il calcolo troppo sminuzzato: il che fu per renderlo accessibile a un maggior numero di persone. Ma chi conosce il calcolo integrale, può camminar da se per una via assai più breve.

sulla superficie della sfera le due zone che nascono dalla rotazione dei detti due archi EE', FF' intorno al diametro AB. E cominciamo a dimostrare che le contrarie azioni esercitate dalle porzioni di materia repulsiva distribuite su queste due zone sono fra loro uguali.

De' due segmenti AD, DB del diametro AB sia AD il minore. Si conducano ad esso diametro le perpendicolari EG, E'G', FH, F'H'; e per mezzo di corde condotte pel punto D si divida ciascuno degli angoli EDE', FDF' in un tal numero di parti uguali, che gli archetti *ee'*, *ff'* ecc. corrispondenti a queste parti riescano minori della quantità $\frac{1}{n}\,l$, dove per l s'intende la più piccola fra le otto rette EG, E'G', FH, F'H', DG, DG', DH, DH', e per n un numero assai grande anticipatamente scelto. Il quale scopo sarà sempre ottenuto quando le eguali parti degli angoli suddetti EDE', FDF' saranno sì piccole, che venendo fatte alla circonferenza AEBF insistano su archi minori di $\frac{1}{n}\,l$.

Ciò fatto si scelgano due di questi archetti, l'uno *ee'* in EE', l'altro *ff'* in FF', corrispondenti a due angoli *e*D*e'*, *f*D*f'* opposti al vertice. E si considerino le azioni esercitate sulla massa m esistente in D dalle due porzioni di materia repulsiva appartenenti alle zone nate dal rotare di essi archetti *ee'*, *ff'* intorno al diametro AB.

L'azione spettante alla zona generata da *ee'* dipende da due elementi, cioè:

1.° Dall'estensione superficiale di questa zona;

2.° Dalla media energia della materia distribuita sulla zona stessa, per ispingere la massa m verso B.

Ora l'estensione di questa zona è misurata, come è noto dalla Geometria, dal prodotto

$$2\pi.\ \text{corda}\ ee'.e''g'',$$

essendo

π il rapporto della circonferenza al diametro,

corda ee' la corda dell'arco *ee'*,

$e''g''$ la perpendicolare calata su AB dal punto di mezzo e'' dell'arco ee'. Chi non si rammentasse di questo Teorema, consideri che la corda ee' è perpendicolare al raggio Ce'', e che perciò il suo prolungamento fa col prolungamento del diametro BA un angolo che è complemento dell'angolo $e''CA$, ossia un angolo uguale a $g''e''C$, che è anch' esso complemento di $e''CA$. Si ha pertanto

$$gg' : corda\ ee' : : e''g'' : e''C,$$

ossia

$$gg' . e''C = e''g'' . corda\ ee'.$$

Ma l'estensione superficiale della zona di cui si tratta è uguale $= 2\pi . e''C . gg'$ (Legendre, *Géométrie*, Lib. VIII, Prop. XI, ediz. 1813); dunque ella è anche $= 2\pi . e''g'' . corda\ ee'$.

In quanto alla energia dell'azione respingente egli è chiaro che se tutta la materia repulsiva distribuita in questa zona fosse collocata in un punto unico dell'arco ee', la sua azione verso m, considerandone l'effetto utile secondo la direzione DB, varierebbe di grandezza secondo la particolar posizione di un tal punto unico: vi è una posizione per la quale quest' azione sarebbe *massima*, ossia più grande che in qualsivoglia altra posizione scelta in esso arco ee' o anche in tutta l' estensione della detta zona, e perciò più grande altresì dell'azione che dee effettivamente aver luogo secondo la DB, essendo essa materia distribuita, come si è supposto, in tutta l' estensione superficiale della zona medesima; vi è una posizione in cui tale azione sarebbe *minima*, e più piccola della effettiva; e frammezzo a queste due posizioni ve ne debbe eziandio essere necessariamente una in cui una siffatta azione uguaglierebbe esattamente la effettiva suddetta. Chiameremo quest' ultima posizione il punto di *energia media* della ripulsione della materia di essa zona per ispingere la massa m nella direzione DB. Indichiamo con

e''' questo punto di energia media (il quale però non è segnato nella figura per non far confusione);

g''' il piede della perpendicolare calata da e''' su AB;

X l' azione totale esercitata secondo DB dalla materia distribuita nella zona generata da ee'. E sarà

$$X = \frac{p2\pi . e''g'' . \text{corda} ee' . g'''D}{(e'''D)^3},$$

essendo p un coefficiente costante.

In un modo affatto somigliante si trova che l'azione esercitata sulla massa m nella direzione DA dalla materia ripulsiva distribuita nella zona generata dall' arco ff', azione che noi indicheremo con Y, viene data da

$$Y = \frac{p2\pi f''h'' . \text{corda} ff' . h'''D}{(f'''D)^3}$$

essendo p lo stesso coefficiente costante di poc' anzi,

f'' il punto di mezzo dell' arco ff',

f''' il punto di energia media della materia ripulsiva distribuita nella zona summenzionata, per ispingere la massa m nella direzione DA,

$f''h''$, $f'''h'''$ le perpendicolari calate rispettivamente dai punti f'', f''' sulla AB.

Per conseguenza avremo

$$X : Y :: \frac{e''g'' . \text{corda} ee' . g'''D}{(e'''D)^3} : \frac{f''h'' . \text{corda} ff' . h'''D}{(f'''D)^3}.$$

Ma ne' due triangoli rettilinei $ee'D$, $ff'D$ sono uguali fra loro i due angoli eDe', fDf' siccome opposti al vertice, ed uguali i due $e'eD$, $ff'D$, ossieno $e'ef$, $ff'e'$, siccome formati entrambi alla circonferenza AEBF ed insistenti sullo stesso arco $e'Af$; perciò si ha

$$\text{corda } ee' : \text{corda } ff' :: eD : f'D;$$

d' onde si ricava

$$X : Y : : \frac{e''g''.\, g'''D.\, eD}{(e'''D)^3} : \frac{f''h''.\, h'''D.\, f'D}{(f'''D)^3}.$$

In questa proporzione le linee che compongono il terzo termine sono separatamente o uguali o prossimamente uguali ai lati del triangolo egD, e quelle del quarto termine eguagliano ciascuna prossimamente un de' lati del triangolo Dfh simile a egD. Assai poco perciò possono differire, seppure differiscono, i valori di questi due termini, e così pure i valori di X e di Y; e tanto più esatta apparisce l' eguaglianza fra esse X ed Y, quanto più piccoli sono gli archetti ee', ff'. Ma per maggior rigore di ragionamento osserviamo che

$$e''g''=eg-(eg-e''g'')=eg\left[1-\frac{eg-e''g''}{eg}\right];$$

e siccome si ha

$eg-e''g''<$ dell' arco ee'

$eg>$ della lunghezza l,

e perciò

$$\frac{eg-e''g''}{eg}<\frac{ee'}{l}, \text{ e quindi } <\frac{1}{n},$$

così potremo porre

$$e''g''=eg\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

dove per k si vuol indicare una quantità positiva minore di 1.

Similmente si ha

$$g'''D=gD+gg''=gD\left(1+\frac{gg''}{gD}\right)=gD\left(1+\frac{k_1}{n}\right)$$

essendo k_1 una quantità analoga alla k.

Così pure

$$e'''D=eD-(eD-e'''D)=eD\left[1-\frac{eD-e'''D}{eD}\right]=eD\left[1-\frac{k_2}{n}\right],$$

essendo k_2 anch' essa analoga alla k.

In simil modo

$$f''h''=fh-(fh-f''h''),$$

ovvero

$$f''h''=fh+(f''h''-fh),$$

valendo l'una o l'altra equazione, secondo che fh è maggiore o minore di $f''h''$: perciò

$$f''h''=fh\left(1\pm\frac{k_3}{n}\right),$$

ove k_3 è un'altra quantità analoga alla k.

E proseguendo innanzi si trova

$$h'''\mathrm{D}=h\mathrm{D}\left(1+\frac{k_4}{n}\right)$$

$$f'\,\mathrm{D}=f\mathrm{D}\left(1+\frac{k_5}{n}\right)$$

$$f'''\mathrm{D}=f\mathrm{D}\left(1+\frac{k_6}{n}\right),$$

essendo k_4, k_5, k_6 altre quantità positive minori di 1. Avremo adunque

$$\mathrm{X}:\mathrm{Y}::\frac{eg.g\mathrm{D}.e\mathrm{D}}{(e\mathrm{D})^3}\cdot\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k_1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k_2}{n}\right)^3}:\frac{fh.h\mathrm{D}.f\mathrm{D}}{(f\mathrm{D})^3}\cdot\frac{\left(1\pm\frac{k_3}{n}\right)\left(1+\frac{k_4}{n}\right)\left(1+\frac{k_5}{n}\right)}{\left(1+\frac{k_6}{n}\right)^3}.$$

Cominciamo ad osservare che attesa la somiglianza de' triangoli $eg\mathrm{D}$, $fh\mathrm{D}$, si ha

$$\frac{eg}{e\mathrm{D}}=\frac{fh}{f\mathrm{D}},\quad\frac{g\mathrm{D}}{e\mathrm{D}}=\frac{h\mathrm{D}}{f\mathrm{D}},$$

ed avremo

$$\mathrm{X}:\mathrm{Y}::\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k_1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k_2}{n}\right)^3}:\frac{\left(1\pm\frac{k_3}{n}\right)\left(1+\frac{k_4}{n}\right)\left(1+\frac{k_5}{n}\right)}{\left(1+\frac{k_6}{n}\right)^3}$$

da cui

$$(a) \qquad Y = X\left\{\frac{\left(1 \pm \frac{k_3}{n}\right)\left(1 + \frac{k_4}{n}\right)\left(1 + \frac{k_5}{n}\right)\left(1 - \frac{k_2}{n}\right)^3}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{k_1}{n}\right)\left(1 + \frac{k_6}{n}\right)^3}\right\}.$$

Osserviamo che, essendo k_p una quantità positiva minore di 1, si ha

$$1 + \frac{k_p}{n} = \frac{1 + \frac{k_p}{n}}{1 + \frac{k_p}{n} - \frac{k_p}{n}} = \frac{1}{1 - \frac{k_p}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_p}{n}}} = \frac{1}{1 - \frac{k_q}{n}}$$

essendo k_q un' altra quantità compresa fra o e + 1. Pertanto la Equazione (*a*) si può mettere sotto quest' altra forma

$$(b) \qquad Y = X.\frac{\left(1 \pm \frac{k_3}{n}\right)\left(1 - \frac{k_4}{n}\right)^3\left(1 - \frac{k_7}{n}\right)\left(1 - \frac{k_8}{n}\right)^3}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \frac{k_9}{n}\right)\left(1 - \frac{k_{10}}{n}\right)}$$

essendo k_7, k_8 ec. altre quantità analoghe a k. Osserviamo di più che

$$\left(1 - \frac{k_p}{n}\right)\left(1 - \frac{k_q}{n}\right) = 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{k_p}{n}\left(1 - \frac{k_q}{n}\right) = 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{k_r}{n}$$

$$= 1 - \frac{2k_s}{n}$$

$$\left(1 - \frac{ka_p}{n}\right)\left(1 - \frac{k_q}{n}\right) = 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{ak_p}{n}\left(1 - \frac{k_q}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{ak_r}{n}$$

$$= 1 - (a + 1)\frac{k_s}{n}$$

essendo k_r, k_s quantità comprese anch'esse fra o e +1. Avremo perciò

$$Y = X\frac{\left(1 \pm \frac{k_3}{n}\right)\left(1 - \frac{7k_{11}}{n}\right)}{1 - \frac{3k_{12}}{n}}$$

$$= X\left\{\frac{1 - \frac{7k_{12}}{n} \pm \frac{k_3}{n} \mp \frac{7k_3k_{11}}{nn}}{1 - \frac{3k_{12}}{n}}\right\}$$

$$= X\left\{\frac{1 - \frac{3k_{12}}{n} + \frac{3k_{12}}{n} - \frac{7k_{11}}{n} \pm \frac{k_3}{n} \mp \frac{7k_3k_{11}}{nn}}{1 - \frac{3k''}{n}}\right\}$$

$$(c) \qquad Y = X\left\{1 + \frac{3k_{12} - 7k_{11} \pm k_3 \mp \frac{7k_3k_{11}}{n}}{n - 3k_{12}}\right\}$$

dove, col dare una grandezza sufficiente alla n, i diversi termini in cui si può decomporre la parte frazionaria del valore della X, possono rendersi minori di qualsivoglia quantità assegnata. Per conseguenza, col prendere la n sufficientemente grande, noi potremo ridurre la differenza fra la X e la Y più piccola del prodotto di X per una minima frazione scelta preventivamente a piacere.

In tutto ciò che si è fatto e detto per le due zone appartenenti agli archetti *ee'*, *ff'*, non si è avuto verun riguardo alla posizione di questi archetti dentro agli archi EE', FF'. Perciò quando siasi stabilito che la differenza fra X ed Y debba, p. e., riuscir minore di un milionesimo della X, e siasi quindi assegnato alla n un valore abbastanza grande, e si sieno divisi gli angoli EDE', FDF' in un bastevole numero di parti, noi potremo essere certi che l'azione di ciascuna delle zone appartenenti all'arco FF' differirà dall'azione della corrispondete zona appartenente ad EE' meno di un milionesimo del valore di quest'ultima, e che anche l'azione spettante a tutta

la zona generata dall' arco FF' differirà dall' azione spettante alla zona nata dall' EE' meno di un milionesimo di quest'ultima azione. Da ciò possiamo conchiudere che le azioni esercitate da queste due ultime zone si eguagliano e si distruggono esattamente. Perocchè se alcuno asserisse esservi fra cotali azioni una differenza maggiore di una qualche quantità da lui assegnata, p. e. maggiore di un milionesimo dell'azione della zona corrispondente ad EE', noi gli potremmo immediamente dimostrare che non può aver luogo una differenza di cotale grandezza.

Procedendo innanzi nella dimostrazione, passiamo a provare essere uguali le contrarie azioni esercitate sulla massa *m* dalle due porzioni di materia repulsiva distribuite sulle due calotte, in cui vien divisa la superficie sferica dal piano passante per D perpendicolarmente ad AB.

Chiamiamo a quest' uopo T, T' queste due azioni, cioè T quella della calotta dalla banda di A, T' quella della calotta opposta. E chiamiamo U, X, U'; V, Y, V' le azioni esercitate rispettivamente sulla massa *m* dalle porzioni di materia distribuite sulle parti di superficie sferica generate dalla rotazione degli archi AE', E'E, ED'; BF', F'F, FD'' intorno al diametro AB; delle quali azioni le prime tre operano nella direzione AD, da D verso B, e le altre tre nella direzione da D verso A. Avremo

$$T-T'=U+X+U'-V-Y-V';$$

e siccome, da quanto si è testè veduto, si ha X=Y, così

$$T-T'=U+U'-V-V'.$$

Ma col diminuire gli archi AE', ED', D''F, F'B le quantità U, U', V, V' diminuiscono tutte e quattro sino a poter divenir minori di qualsivoglia quantità assegnata, senza che mai cessi il polinomio

$$U+U'-V-V'$$

dall' essere uguale a T—T'. Dunque T=T'. Altrimenti, se fra

T e T' vi fosse qualche differenza δ anche minima, si potrebbero prendere sì piccoli i detti archi che le quantità U+U', V+V' fossero l'una e l'altra minori di δ, e che perciò anche la loro differenza fosse minore di δ; e si avrebbe l'assurdo che le due quantità T—T', U+U'—V—V' sarebbero nello stesso tempo eguali e diverse.

Si elidono adunque a vicenda le due azioni esercitate sulla massa *m* dalle anzidette due calotte; ed essa *m* si trova in equilibrio fra le diverse azioni su lei esercitate dalle varie parti della materia ripulsiva distribuita sulla superficie sferica.

PROPOSIZIONE II.

3. *Se nella sfera* AEBF (fig. 1) *si trova distribuita della materia ripulsiva non già condensata unicamente alla superficie, ma bensì disposta in uno strato di qualche grossezza al di sotto di essa superficie, essendo pure diversa, se si voglia, la densità in questo strato alle differenti distanze dal centro, ma essendo la stessa in tutti i punti equidistanti dal centro medesimo; anche in questo caso le diverse azioni esercitate dalle varie parti di cotal materia ripulsiva verso una massa* m *collocata in un punto* D *al di dentro del detto strato, supposta aver luogo la medesima legge de' quadrati inversi delle distanze, si fanno vicendevolmente equilibrio.*

Concepiamo che lo strato di materia ripulsiva di cui si tratta, venga separato in tanti minori strati da una numerosa serie di superficie sferiche concentriche equidistanti. E immaginiamo che la materia appartenente a ciascuno di questi strati minori, movendosi secondo la direzione de' raggi della sfera, venga a trasportarsi sulla di lui superficie interna. Lo strato totale verrà con ciò ridotto a una serie di separate porzioni di materia ripulsiva, ciascuna delle quali si troverà distribuita uniformemente su di una superficie sferica e non eserciterà perciò azione veruna sulla massa *m*.

Chiamiamo dopo ciò

S l'azione che può dubitarsi esercitata verso la massa *m* dal considerato totale strato di materia ripulsiva, innanzi all'immaginato trasportamento di questa;

s il cangiamento che può dubitarsi avvenuto nella grandezza di questa azione mediante un tale trasportamento.

Dall'essere nulla cotale azione dopo avvenuto il trasporto, noi veggiamo che il cangiamento *s* distrugge l'azione primitiva *S*, e che perciò la *s* è uguale, e di segno contrario alla *S*; talchè noi potremo conoscere la *S* appena che si sappia il valore della *s*.

Ora per riguardo a quest'ultima egli è manifesto, che s'ella è qualche cosa, deve al certo essere assai piccola quando assai piccolo è il trasportamento che si suppone nella materia ripulsiva del considerato strato, ossia quando sono assai numerose le superficie sferiche equidistanti che lo separano; ed è certamente picciolissima quando cotali superficie sono numerosissime; anzi non vi ha quantità sì piccola di cui non possa cotale *s* ridursi minore col prendere un numero abbastanza grande di siffatte superficie concentriche, e col fare perciò abbastanza piccolo il trasportamento delle varie porzioncelle della detta materia repulsiva. Da ciò possiamo dedurre che tanto la *S* quanto la *s* sono uguali a zero: altrimenti si verrebbe all'assurdo che una quantità di grandezza determinata quale è la *S*, sarebbe eguale a un'altra quantità capace di divenir minore di qualsivoglia minima grandezza data quale è la *s*.

PROPOSIZIONE III.

4. *Se la massa* m, *in luogo di essere concentrata in un punto unico, si trova diffusa in uno spazio alquanto esteso, sempre però abbracciato dallo strato della materia ripulsiva, supposta in questo strato la medesima distribuzione ammessa poc'anzi, e supposta la stessa legge di ripulsione, l'azione di cotal materia ripulsiva verso la massa* m *sarà ancora nulla.*

Ciò è chiaro dal vedersi che la materia ripulsiva di cui si tratta, non esercita azione alcuna verso nessun punto dello spazio occupato dalla massa *m*.

PROPOSIZIONE IV.

5. *Se in vece di uno strato di materia ripulsiva, si trovasse distribuito sotto la superficie sferica uno strato di materia attrattiva avente anch' essa la stessa densità in tutti i punti equidistanti dal centro, e operante similmente in ragione inversa de' quadrati delle distanze, neppur questo strato eserciterebbe azione veruna su di una massa* m *contenuta al di dentro.*

Si scelga ad arbitrio un punto nella massa *m*, e si supponga che la materia distribuita nello strato sferico sia in sul principio ripulsiva, operando in ragione inversa del quadrato delle distanze; e che poscia tutte le azioni esercitate dalle varie porzioncelle di essa materia verso il punto scelto si cangino in attrattive, conservando ciascuna la medesima intensità di prima. Egli è chiaro che siccome tutte queste azioni si equilibrano dapprincipio quando sono ripulsive, così debbono equilibrarsi anche di poi quando sono divenute attrattive; essendo noto dalla meccanica che allorquando in un sistema di forze operanti sopra di un punto si rovescia la direzione di queste senza che se ne alteri l' intensità, l' equilibrio si mantiene ancora. Equilibrandosi poi queste forze attrattive rispetto a qualsivoglia punto della massa *m*, è chiaro che anche l'intera massa medesima non sentirà dal loro aggregato azione veruna.

PROPOSIZIONE V.

6. Supponiamo che vi abbian de' corpi formati di questi due distinti elementi, cioè:

1. Di una materia pesante, impenetrabile tra se medesima, composta di parti fortemente coerenti, mobile sì, ma sempre col mezzo di una sensibile forza estranea;

2. Di un fluido composto di parti estremamente slegate, mobilissime, penetrantissime, capaci perciò di scorrere agevolissimamente frammezzo alle parti della precedente materia pesante.

E ammettiamo che questo fluido sia sottoposto alle seguenti due forze, cioè:

1. A una ripulsione vicendevole fra le proprie parti, operante in ragione inversa del quadrato delle distanze; in conseguenza della qual ripulsione noi daremo a un tal fluido il nome di *fluido repulsivo*;

2. A un' attrazione verso la materia pesante già menzionata, operante anche quest' attrazione in ragione inversa de' quadrati delle distanze.

Noi cominceremo a riflettere che secondo questa ipotesi si può trovare in qualunque de' supposti corpi una tale quantità del menzionato fluido, che distribuita opportunamente non lasci esercitare da esso corpo veruna azione verso nessuna molecola del fluido medesimo sì dentro che fuori del corpo stesso. Perocchè considerata una data porzioncella p di esso corpo, egli è evidentemente possibile il supporvi collocata una tale quantità q di fluido repulsivo, che una data molecola a d' altro simile fluido sia cotanto respinta dalla quantità q come ella è attratta dalla materia pesante della detta porzioncella p. E quando ciò abbia luogo, anche un' altra qualsivoglia molecola b di fluido repulsivo estraneo alla menzionata porzioncella p, sentirà uguali le due azioni contrarie che provengono da essa p, essendo uguale l' incremento o il decremento di cotali due azioni in conseguenza del variare della distanza; e sarà perciò essa porzioncella p affatto priva di azione verso ogni molecola di fluido repulsivo estraneo. Ma ciò può valere per qualunque altra porzioncella del corpo. Dunque in uno qualsivoglia de' considerati corpi si può proporzionare e distribuire talmente il fluido repulsivo, che da esso corpo non venga esercitata azione alcuna verso nessuna molecola di cotal fluido estranea ad esso corpo. E questa nullità d'azione avra altresì

luogo verso le molecole del fluido repulsivo contenuto in esso corpo. Perocchè scelta in questo ad arbitrio una particella di materia pesante colla rispettiva porzioncella di fluido repulsivo, noi possiamo considerare il rimanente del corpo come distinto in due parti, frammezzo alle quali giaccia una tale particella, e alle quali essa si possa riguardare come estranea. Ora il fluido di questa particella non sentirà azione alcuna nè dall'una nè dall'altra delle dette parti, e nemmeno sarà sollecitato a cangiar di luogo dall'azione della materia pesante associatagli. Un corpo che si trovi in questo stato il possiam chiamare *saturo di fluido repulsivo*.

Considereremo dopo ciò che se un corpo, oltre alla dose di fluido repulsivo corrispondente alla saturazione, ne contiene un'altra quantità la quale diremo *sovrabbondante*, l'azione che questo corpo eserciterà su qualsivoglia molecola di fluido repulsivo dipenderà unicamente dalla detta quantità sovrabbondante. Quest'azione poi nell'interno del corpo verrà sentita tanto dalle molecole del fluido sovrabbondante quanto da quelle della dose di saturazione. Tutte cioè le molecole del fluido repulsivo appartenenti al corpo saranno passive; benchè attive non possano essere che quelle del fluido sovrabbondante. E similmente se il fluido repulsivo contenuto nel corpo non arrivasse alla dose di saturazione, ma saturasse soltanto una parte di esso corpo, non avrà luogo sulle molecole del fluido repulsivo sì dentro al corpo stesso che fuori, altra azione che quella attrattiva esercitata dalla parte rimanente della materia pesante del corpo stesso, parte che noi diremo *deficiente*. Ammesso e considerato quanto sopra,

Concepiamo che un corpo sferico della specie che qui consideriamo, contenga una quantità di fluido repulsivo eccedente la dose di saturazione; e che in sul principio la quantità sovrabbondante si trovi distribuita uniformemente in tutta la solidità di esso corpo sferico. Si asserisce che la total massa del fluido repulsivo contenuto in questo corpo non si troverà in equilibrio, ma si muoverà per tal modo da distribuirsi la

detta parte sovrabbondante in uno strato superficiale sottilissimo.

Immaginiamo che per un punto qualunque preso entro la sfera, ma fuori del centro, venga fatta passare una superficie sferica concentrica alla sfera medesima. Egli è evidente, da quanto si è testè dimostrato, che il fluido sovrabbondante contenuto nello strato compreso fra la superficie della sfera e la superficie sferica nuovamente immaginata, non esercita veruna azione verso una particella di fluido esistente in quel punto. In vece il fluido sovrabbondante contenuto al di dentro della superficie sferica ultimamente immaginata spingerà questa medesima particella di fluido verso l'infuori, talchè essa particella verrà dalla somma di tutte le azioni su di essa operanti spinta appunto dall' indentro all'infuori. E così avverrà di tutte le altre particelle di fluido repulsivo contenute dentro la sfera; le quali tutte, sì quelle appartenenti alla dose di saturazione, come quelle sovrabbondanti, tenderanno a portarsi verso la superficie; di manierachè questo fluido andrà rarefacendosi verso il centro e condensandosi verso essa superficie.

Ma anche dopo cessata l' uniforme distribuzione, e dopo che la densità si è resa maggiore nelle parti superficiali che nelle interne, continuerà esso fluido ad essere spinto verso la superficie, purchè nelle dette parti interne rimanga qualche piccola sovrabbondanza, e l' aumento della densità partendo dal centro sia tale che vi abbia la densità medesima in tutti i punti equidistanti da esso centro. Perocchè immaginando descritta dentro la sfera, come poc' anzi, una superficie sferica concentrica qualunque, il fluido sovrabbondante situato al di dentro di questa superficie spingerà verso l'infuori le molecole di fluido esistenti in essa, senza che queste sentano alcuna azione contraria dal fluido sovrabbondante esistente all'esterno della medesima.

Cesserà però nell'interno della sfera questa azione spingente all'infuori, allorchè il fluido sovrabbondante si sarà ridotto a un sottile e uniforme strato superficiale; perocchè allora la

dose di saturazione contenuta al di sotto di un tale strato non sentirà veruna azione che ne spinga le molecole nè all'indentro nè all' infuori. Però nello strato superficiale medesimo, ciascuna delle molecole di fluido esistenti al di fuori della superfice interna di esso strato, si troverà spinta verso l'esterno dal fluido sovrabbondante della parte più interna dello strato stesso; e però le diverse molecole del fluido di questo strato si andranno condensando presso l'esterna superficie, sino a che o l' impenetrabilità, se questa ha quì luogo, o qualche altra causa equivalente, impedisca per avventura l'ulteriore condensamento. Giunto il fluido repulsivo a questo stato, tutte le sue parti si troveranno equilibrate, ben inteso che alla sua superficie si trovi un ostacolo che ne trattenga la tendenza a diffondersi nello spazio circostante.

Ecco adunque come essendo dapprincipio uniforme la distribuzione del fluido sovrabbondante, e respingendosi questo secondo la supposta legge, debba esso infine ridursi a un sottile strato superficiale. Ma anche nel caso che la sua distribuzione iniziale non sia uniforme, non lascerà di prendere la medesima distribuzione finale. Perciochè si vede, con quel grado di evidenza del quale siamo soliti contentarci in molte altre dottrine della fisica, che in questo caso il fluido repulsivo, oltre ad una tendenza pressocchè generale dal centro verso la superficie, ne avrà una a portarsi dai luoghi ove è più condensato verso quelli ove è più rarefatto; talchè si muoverà in maniera da recarsi verso la superficie, e insieme rendersi ugualmente accumulato in tutti i punti di questa. Di ciò però si darà in seguito una dimostrazione rigorosa (Vedi più innanzi al §. 21).

PROPOSIZIONE VI.

7. *Ritengasi ancora, come poc' anzi, l'esistenza di corpi formati d' una materia pesante congiunta a un fluido mobilissimo e penetrantissimo; e ritengasi eziandio che questo fluido sia*

sottomesso a una ripulsione fra le proprie parti e a un' attrazione verso la materia pesante, le quali operino entrambe con una medesima legge (nel qual caso avranno ancora luogo le due considerazioni fatte sul principio della Prop. V.); ma si ammetta che questa legge sia diversa da quella del quadrato inverso delle distanze. Si asserisce non esser possibile l'equilibrio di esso fluido repulsivo in un corpo sferico che ne contenga una quantità maggiore della dose di saturazione, quando la parte sovrabbondante sia tutta distribuita in uno strato superficiale, e le parti interne si trovino tutte allo stato di saturazione.

Sia AMBN (*fig.* 2) il corpo sferico di cui si tratta; e abbia primieramente luogo una legge più rapida di quella del quadrato inverso delle distanze. Consideriamo l'azione che in questo caso il fluido sovrabbondante d'esso corpo AMBN, supposto tutto distribuito alla superficie, esercita verso una molecola di fluido repulsivo appartenente alla dose di saturazione e collocata dentro ad esso corpo in qualsivoglia punto D diverso dal centro C. Conduciamo per D il diametro AB, e perpendicolarmente a questo un piano MN il quale divida la superficie sferica nelle due calotte diseguali MAN, MBN, delle quali la minore sia per ipotesi la sinistra, ossia la MAN. E supponiamo che il fluido sovrabbondante distribuito alla superficie di AMBN cessi per una breve durata di tempo dall' operare secondo questa nuova legge, e operi in vece in ragione inversa de' quadrati delle distanze, con tale energia che l' azione di una di lui porzione, corrispondentemente alla distanza DM, sia la stessa in ambedue le leggi. È chiaro che in questa breve durata di tempo le due porzioni di fluido repulsivo sovrabbondante contenute nelle due calotte MAN, MBN eserciteranno verso D azioni eguali. Ma diverranno subito diseguali queste azioni al repristinarsi della supposta più rapida legge. Giacchè in ciascuna molecola del fluido sovrabbondante contenuto nella calotta MAN verrà a crescere tanto l' azione assoluta verso la molecola situata in D, quanto la componente di quest'azione

operante nella direzione DB; e perciò crescerà eziandio l'azione esercitata secondo DB da tutto il fluido sovrabbondante contenuto in essa calotta; e invece l'azione del fluido sovrabbondante della calotta MBN diverrà più debole. La molecola adunque di fluido repulsivo situata in D non sarà in equilibrio, ma sarà sollecitata a muoversi verso il centro della sfera. E lo stesso avverrà di qualsivoglia altra molecola di fluido repulsivo situata al di dentro dello strato sovrabbondante superficiale ed esistente fuori del centro. Perciò con questa legge più rapida e con questa distribuzione non avrà luogo l' equilibrio; ma il fluido repulsivo si muoverà verso le parti interne.

Questa stessa conclusione avrà pur luogo quando il fluido sovrabbondante si trovi condensato in una serie di vicinissime superficie sferiche concentriche delle quali l' una sia quella stessa della sfera, e le altre sieno collocate al di dentro ma a piccolissima distanza, essendo uniforme la distribuzione in ciascuna delle superficie, ma variando con legge qualsivoglia dall'una all'altra. Vale a dire una qualsivoglia molecola di fluido repulsivo situata nel punto D, al di dentro di tutte queste superficie ma non nel centro, sarà sollecitata verso questo centro. E varrà pure una tale conclusione pel caso che il fluido sovrabbondante si trovi diffuso in uno spazio di qualche grossezza, potendo a questo caso avvicinarsi cotanto quello delle superficie concentriche, da differire le azioni sul punto D, dall' un caso all' altro, meno di ogni minima quantità assegnata. In ogni caso adunque le molecole del fluido repulsivo verranno sollecitate verso il centro. Continuerà poi il movimento in fino a che la densità del fluido nelle parti vicine al centro sia cresciuta al segno da equilibrarsi fra loro le due azioni, che vengono esercitate su qualsivoglia molecola di fluido dell' interno del corpo, dal fluido sovrabbondante più lontano che essa dal centro, e dal fluido sovrabbondante più vicino al centro; azioni che tendono l'una ad avvicinare questa molecola al detto centro, e l' altra ad allontanarla: epperò quando si avrà ottenuto l' equilibrio, si troveranno in qualche grado sovrabbondanti di fluido anche le parti interne del corpo.

Quando in vece il fluido repulsivo si supponesse operare secondo una legge meno rapida di quella de' quadrati inversi delle distanze, fatta la stessa costruzione, e ripetuti presso a poco gli stessi ragionamenti, si troverebbe che l'azione della calotta sinistra verrebbe superata da quella della calotta destra, e che perciò il fluido della dose di saturazione contenuto nelle parti più interne del corpo si muoverebbe verso la superficie; e si conchiuderebbe che dopo ottenuto l'equilibrio dovrebbero le parti interne del corpo trovarsi in qualche grado deficienti (1).

CONCLUSIONE.

8. Segue da tutto ciò, essere la sola legge de' quadrati inversi delle distanze quella che in un corpo sferico può ridurre e mantenere alla superficie la quantità sovrabbondante di un fluido repulsivo quale abbiamo considerato poc'anzi.

Applichiamo ora tutto ciò all'Elettrico, il quale secondo la teoria di Franklin è appunto un fluido repulsivo della specie che abbiamo contemplata. Riguardo a questo adunque la sperienza ha dimostrato che elettrizzando positivamente una sfera conduttrice, tutta la quantità d'elettrico che eccede la dose naturale (corrispondente alla dose di saturazione poc' anzi considerata) si distribuisce unicamente alla superficie (2). Per conseguenza la ripulsione che ha luogo fra le parti del fluido elettrico non può avere altra legge che quella de' quadrati inversi delle distanze.

Questa legge è necessariamente altresì quella secondo cui il fluido elettrico viene attratto dalla materia pesante dieselettrizzata; poichè mostrando il fatto che un corpo allo stato naturale non manifesta azione alcuna sull'elettrico degli altri corpi nè da vicino nè da lontano, dee l'attrazione di cui si

(1) Cavendish, *Phil. Trans.* 1771, p. 596 e 597.

(2) Si consultino i Trattati di Fisica, e in ispecie quello di Pouillet, T. I. parte 2. p. 573, ediz. 1827 e seg.

tratta avere la stessa legge della ripulsione vicendevole fra le parti del fluido elettrico.

9. *Osservazione.* Cogli esposti ragionamenti si è determinata la legge, ma non già l' intima essenza delle azioni a cui è soggetto il fluido elettrico. Se perciò alcuno vuol riguardare la ripulsione fra le parti di questo fluido come una forza propria di esso, tale cioè da sussistere ancora quando tutto venisse a mancare in natura salvo l' elettrico, egli è libero di farlo. E se in vece alcun altro preferisce di crederla una conseguenza di altre cause, di maniera che, tutto distruggendosi in natura tranne l' elettrico, debba cessare anche cotal forza, questi pure è libero di così pensare. Dalle esposte dimostrazioni risulta soltanto che se l' elettricità vitrea nasce dallo accumularsi ne' corpi un particolar fluido oltre ad una data dose, *ogni molecola di questo fluido tende ad allontanarsi dal luogo ove ne esiste un' altra simile, con una forza che varia in ragione inversa del quadrato delle distanze.*

PARTE SECONDA.

DELLA DISTRIBUZIONE DELL'ELETTRICO NE' CORPI CONDUTTORI

10. Mediante la cognizione della legge ritrovata nella Parte prima, noi possiamo coll'ajuto delle matematiche risolvere molte questioni riguardanti l' equilibrio del fluido elettrico, e in ispecie alcune di quelle che riguardano la distribuzione del medesimo ne' corpi conduttori; e dico alcune, perchè lo stato attuale delle matematiche medesime non basta ancora alla risoluzione di tutte.

Fra le altre cose si può dimostrare questo importantissimo Teorema: cioè che *in un qualsivoglia corpo conduttore, isolato o non isolato, l' elettricità o positiva o negativa che in esso si stabilisce, sì per aggiunta o per sottrazione di fluido elettrico, che per influenza di altri corpi elettrizzati, o per entrambe le cagioni insieme, si trova distribuita unicamente*

alla superficie, lasciando le parti interne perfettamente allo stato naturale. Non essendo questo Teorema, per quanto io sappia, stato ancora dimostrato da altri nella sua generalità, ma essendo soltanto conosciuto per mezzo della sperienza, ho stimato di esporne la dimostrazione in questa seconda parte della presente memoria. Dividerò l'argomento in più articoli, e comincerò a trattare nell'

ARTICOLO PRIMO.

Della distribuzione dell' Elettrico in un conduttore isolato, elettrizzato, e libero da azioni straniere.

PROPOSIZIONE VII.

11. Abbiasi un corpo qualsivoglia ABCD (*fig.* 3) sotto la cui superficie si immagini descritta un'altra superficie chiusa *abcd* soggetta alla sola condizione di non toccare la ABCD in nessun punto. Ed abbiasi a disposizione una materia repulsiva operante in ragione inversa del quadrato delle distanze, e la quale possa essere distribuita nell' intervallo ABCD*abcd* con quella qualunque legge di densità che da noi si reputi più conveniente. Si asserisce prima di tutto che *una data quantità* M *di questa materia repulsiva può essere distribuita nell' intervallo suddetto per tal modo, che riesca nulla la sua totale azione verso qualunque punto situato dentro la superficie più interna* abcd.

Ammettiamo siccome dimostrati i due seguenti Teoremi, cioè:

1.° Che una data quantità di materia ripulsiva operante in ragione inversa del quadrato delle distanze, e distribuita uniformemente in una superficie sferica, considerata in totale non esercita azione veruna verso i punti collocati nel vano interno e sottoposti all'azione delle sue singole parti.

2.° Che una tale quantità di materia ripulsiva, verso i punti esterni soggetti all'azione delle sue singole parti esercita la medesima azione totale, come se tutta la sua massa si trovasse raccolta e condensata nel centro della detta superficie.

Il primo di questi Teoremi è stato da noi dimostrato nella prima parte di questa Memoria al §. 2; il secondo, dovuto anch'esso a Newton, il quale lo dimostrò per riguardo a una forza attrattiva operante nella già detta ragione inversa de' quadrati delle distanze (1), può agevolmente verificarlo da se chiunque conosca il Calcolo integrale. Io non mi occuperò perciò della sua dimostrazione, intendendo in questa seconda parte di parlare a chi sia alquanto inoltrato nelle matematiche.

Ammessi questi due Teoremi, immaginiamo che intorno al corpo ABCD sia descritta una superficie sferica FGHI qualsivoglia, purchè di un diametro non molto più grande della maggior dimensione AC del corpo medesimo; e supponiamo condensata e uniformemente distribuita in questa superficie una quantità N, diversa se si voglia dalla M, della detta materia ripulsiva; la quale quantità N, pel primo de' citati Teoremi, non eserciterà azione veruna sui punti situati nell'interno del corpo ABCD. Immaginiamo divisa questa superficie in una grandissima moltitudine di parti di piccolissime dimensioni; e supponiamo che la materia di ciascuna di queste parti si condensi dapprima nel rispettivo centro di massa, e quindi si diffonda e si distribuisca uniformemente in una superficie sferica avente il centro in siffatto centro di massa, e cotanto grande che arrivi a toccare la superficie *abcd*, mantenendosi una tale materia così distribuita, coll' ajuto di forze estranee sufficienti, sino a che noi non torniamo ad alterarne la disposizione.

Con una tale trasformazione nella distribuzione della massa N, una piccola parte di questa verrà a disporsi nell'intervallo ABCD*abcd*, e un' altra parte molto maggiore verrà a distribuirsi in uno spazio solido all' intorno del corpo ABCD, tanto al di dentro della superficie FGHI quanto al di fuori. Nell' azione totale esercitata dalla massa N verso i punti collocati al di dentro di *abcd*, avverrà qualche piccolo cangiamento per le concentrazioni delle varie minime porzioncelle nei

(1) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Lib. 1. Prop. 71.

rispettivi centri di massa; ma pel Teorema 2.°, testè citato non succederà poscia mutazione alcuna in conseguenza della diffusione nelle diverse superficie; talchè la detta massa N non verrà di poi ad avere un' altra azione verso i punti collocati al di dentro di *abcd* che quella derivante dalle dette concentrazioni. Ora quest' ultima azione, quando si prendano abbastanza numerose e abbastanza piccole le porzioncelle suddette, può aversi minore di qualsivoglia minima quantità assegnata, e determinatamente può aversi minore della quantità

$$\frac{1}{n} Q,$$

ove n è un numero assai grande scelto anticipatamente ad arbitrio, e Q l' azione che la parte di materia dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd*, quando fosse concentrata in un punto, eserciterebbe su di un altro punto collocato, per fissar le idee, ad una distanza uguale ad AC.

Infatti coll' impiccolire le porzioncelle dell' anzidetta superficie sferica FGHI, le due azioni che ciascuna di esse può esercitare prima e dopo la suddetta concentrazione verso qualsivoglia punto preso dentro la *abcd*, possono ridursi ad avere una differenza quanto si voglia minore dell' una di esse. All' incontro, descritta dal centro di massa di una di cotali porzioncelle una superficie sferica toccante la *abcd*, non può la parte di questa superficie sferica compresa nell' intervallo ABCD*abcd* esser ridotta quanto si voglia minore della totalità di essa superficie; ella dee, p. e., necessariamente avere con quest' ultima un rapporto maggiore di quello che si otterrebbe conducendo da un centro p preso nello spazio frapposto alle superficie FGHI e ABCD, una superficie sferica toccante la *abcd*, determinando di questa superficie la parte compresa nell' intervallo *abcd*ABCD, e il rapporto di questa parte colla totalità di essa superficie sferica, e scegliendo il punto p di tal maniera che questo rapporto risultasse il minimo possibile. Si può perciò con sicurezza conchiudere che le porzioncelle menzionate

possono impiccolirsi a tal punto che il cangiamento dell'azione di una qualunque di esse verso qualsivoglia punto preso al di dentro di *abcd*, in conseguenza della già detta concentrazione sia minore della quantità

$$\frac{1}{n} q,$$

essendo n il numero indicato poc'anzi con questa medesima lettera, e

q l'azione che verrebbe esercitata alla distanza AC da quella parte della materia appartenente alla detta porzioncella la quale viene a passare nell'intervallo ABCD*abcd*. Unendo pertanto insieme per mezzo della composizione delle forze tutti i cangiamenti delle azioni delle varie porzioncelle verso un determinato punto preso entro *abcd*, e rammentando che la risultante di tutti questi cangiamenti è minore della somma loro, noi possiamo conchiudere che il cangiamento totale nell'azione della massa N verso qualsivoglia punto preso entro *abcd* può aversi minore dell'anzidetta quantità

$$\frac{1}{n} Q.$$

Dimostratane la possibilità, supponiamo che ciò siasi realmente mandato ad effetto; ed allora dopo la supposta trasformazione l'azione della massa N verso qualsivoglia punto compreso entro *abcd* sarà minore di $\frac{1}{n}$ Q.

Eseguita questa prima trasformazione nella intera massa N, immaginiamone fatta una seconda su quella parte di N che viene a rimanere al di fuori del corpo ABCD. Immaginiamo cioè, che lo spazio solido da essa parte esterna occupato venga distinto in tante parti di dimensioni piccolissime: che la porzioncella di materia contenuta in ciascuna di queste parti si venga prima a concentrare nel rispettivo centro di massa, e poi ad estendere uniformemente in una superficie

sferica descritta intorno a cotale centro di massa e toccante la *abcd*, mantenendosi distribuita in questa superficie coll'ajuto di forze a ciò sufficienti. Con questa seconda trasformazione una nuova piccola porzione della N verrà a disporsi nell'intervallo ABCD*abcd*, e la parte rimanente si distribuirà in uno spazio attorno ad ABCD, stendentesi ad una distanza alquanto maggiore di quella di poc' anzi. E raccogliendo in uno tutti i cangiamenti d'azione nati dalle varie concentrazioni operatesi in questa seconda trasformazione, si avrà in totale un cangiamento d'azione verso i punti collocati entro *abcd*, il quale, col prendere abbastanza piccole le dimensioni delle porzioncelle, potrà sicuramente aversi minore della quantità

$$\frac{1}{n} Q_1,$$

dove Q_1 è l'azione che verrebbe esercitata alla distanza AG dalla parte della N dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd* con questa seconda trasformazione. La quale piccolezza, giacchè lo si può, supponiamola effettivamente ottenuta.

Dopo questa seconda trasformazione, concepiamone eseguita allo stessissimo modo una terza su quella parte della massa N la quale dopo essa seconda trasformazione rimane esteriore al corpo ABCD; quindi, ancora allo stesso modo, una quarta, una quinta, ec. su quelle parti della N che successivamente rimangono esteriori ad ABCD; con che si verranno a disporre altre nuove parti di materia repulsiva nell'invervallo ABCD*abcd*; ma nello stesso tempo avverranno de' nuovi cangiamenti di azione verso i punti contenuti entro *abcd*; i quali cangiamenti però noi supponiamo, come realmente lo si può, che riescano rispettivamente minori delle quantità

$$\frac{1}{n} Q_2, \frac{1}{n} Q_3, \frac{1}{n} Q_4, \text{ ec.},$$

essendo Q_2, Q_3, Q_4, ec. le azioni che le parti di materia repulsiva passate separatamente nell'intervallo ABCD*abcd* eser-

terebbero verso un punto collocato alla distanza AC. Diverrà poi successivamente più grande lo spazio solido in cui si verrà a diffondere la parte di N rimasta all'esterno di ABCD.

Ma fino a quando continueremo queste trasformazioni? Immaginiamo descritta all'intorno della FGHI e ad essa concentrica una superficie sferica S di tale grandezza, che se venisse trasportata oltre ad essa tutta la massa N e disposta ivi comunque, dovesse questa esercitare verso qualsivoglia punto contenuto dentro *abcd* un'azione minore di

$$\frac{1}{n} Q,$$

essendo n, Q quelle quantità che abbiamo indicate con siffatte lettere nella prima trasformazione. E noi continueremo le nostre trasformazioni nel modo anzidetto, insino a che la materia della N cominci a diffondersi oltre a questa nuova superficie S. Quando però una di tali trasformazioni comincerà a far oltrepassare questo limite, ella dovrà esser l'ultima di quelle eseguite nel detto modo; e dopo di essa se ne eseguiranno bensì ancora delle altre, ma operando solamente sulla materia repulsiva che rimarrà fra la superficie S e la ABCD. In ciascuna cioè delle nuove trasformazioni si dividerà questa materia in tante porzioncelle di piccolissime dimensioni, s'immagineranno queste concentrate ne' rispettivi centri di massa, e quindi estese in altrettante superficie sferiche descritte intorno a cotali centri e toccanti la superficie *abcd*, prendendo sì piccole le dimensioni di esse porzioncelle, che il cangiamento d'azione che ne nasce verso qualsivoglia punto collocato entro *abcd* riesca minore della quantità

$$\frac{1}{n} Q_k ,$$

dove per Q_k s' intende l'azione che verrebbe esercitata su di un punto alla distanza AC dalla porzione di materia dispostasi

nell'intervallo ABCD*abcd* mediante la trasformazione di cui si tratta. E si continueranno le trasformazioni a questa nuova maniera in sino a tanto che nello spazio fra S ed ABCD non rimanga quasi più materia repulsiva, ma siasi quasi tutta ridotta parte nell'intervallo ABCD*abcd*, e parte al di là della superficie S; e precisamente non ne rimanga fra S ed ABCD che una tale quantità da esercitare sui punti contenuti entro *abcd* un' azione minore di

$$\frac{1}{n}\,Q.$$

Il che è sempre possibile mediante un sufficiente numero di trasformazioni. Infatti, per quanto grande siasi presa la S, ciascuna delle ultime trasformazioni dee trasportare nell' intervallo ABCD*abcd* una parte aliquota della materia esistente fra S ed ABCD, parte che non può esser minore di ogni quantità data, ma che dee necessariamente superare il prodotto di essa materia per qualche data piccola frazione che diremo $\frac{1}{m}$. Ond'è che ad ogni successiva trasformazione la parte di materia che rimane fra S ed ABCD, dee diminuire in una ragione più rapida di quella di 1 a $1-\frac{1}{m}$. Ora è chiaro che ripetendo un sufficiente numero di volte cotal diminuzione si può scendere al di sotto di qualsivoglia minima quantità. Ed è perciò chiaro che questa quantità di materia che rimane fra ABCD ed S dee potersi ridurre sì piccola, da dover necessariamente esercitare su ciascun punto preso dentro *abcd* un' azione minore di $\frac{1}{n}\,Q$.

Giunti a questo punto fermeremo le nostre trasformazioni. E allora nell' azione esercitata dalla massa N verso i punti collocati al di dentro della superficie *abcd*, avranno parte:

1.° Quella porzione di N che colle successive trasformazioni è passata nell' intervallo ABCD*abcd*;

2.° La porzione rimasta fra ABCD ed S;

3.° La porzione recatasi al di là della S.

La grandezza poi di cotale azione si avrà componendo insieme tutti i cangiamenti d'azione avvenuti nelle dette successive trasformazioni. E siccome nella composizione di più forze, la risultante è sempre minore della somma delle componenti, così quest'azione sarà minore della quantità

$$\frac{1}{n}Q+\frac{1}{n}Q_1+\frac{1}{n}Q_2+\ldots+\frac{1}{n}Q_r,$$

ossia della quantità

$$\frac{1}{n}(Q+Q_1+Q_2+\ldots+Q_r),$$

essendo $Q+Q_1+Q_2,\ldots+Q_r$ l'azione che verrebbe esercitata alla distanza AC da tutta la materia dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd*.

Immaginiamo adesso soppressa la materia repulsiva rimasta fra ABCD ed S, e quella collocata oltre ad S, e lasciata soltanto quella dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd*. È chiaro che l'effetto di questa soppressione equivarrà all'introduzione di due azioni uguali e contrarie a quelle esercitate dalle porzioni di materia soppresse, e perciò minori anch'esse, separatamente considerate, della quantità $\frac{1}{n}Q$. Per conseguenza, rammentando un'altra volta che l'azione totale risultante dall'unione di parecchie azioni parziali è sempre minore della loro somma, noi avremo l'azione della materia repulsiva dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd* minore della quantità

$$\frac{1}{n}(Q+Q_1+Q_2+\ldots+Q_r)+\frac{1}{n}Q+\frac{1}{n}Q,$$

e però anche minore di

$$\frac{3}{n}(Q+Q_1+Q_2+\ldots+Q_r).$$

Fin quì questa quantità di materia dispostasi nell' intervallo ABCD*abcd* non è che una porzione a noi sconosciuta della massa N. Siccome però accrescendone o scemandone in qualsivoglia proporzione la densità e quindi la quantità, cresce o scema nella ragione medesima la sua azione verso qualsivoglia punto dello spazio, così noi potremo ridurla alla grandezza della massa M, e conchiudere che questa massa M può talmente disporsi nell' intervallo ABCD*abcd* da non esercitare sui punti contenuti dentro *abcd* che un' azione minore della frazione $\frac{3}{n}$ moltiplicata per l' azione che essa M può esercitare alla distanza AC.

Ma la *n* si può prendere di qualsivoglia grandezza senza che mai la conseguenza manchi. Perciò ripetendo più volte da capo l' operazione col dare alla *n* de' valori gradatamente più grandi, si avrà per la M una serie di disposizioni nell'intervallo ABCD*abcd*, per le quali le azioni di essa verso i punti collocati entro *abcd*, si troveranno al di sotto di limiti successivamente minori, e in fine affatto minimi. Il che ci porta a conchiudere, che è possibile una tale disposizione della massa M nell' intervallo ABCD*abcd* da riuscire affatto nulla la sua azione verso i detti punti compresi entro *abcd*.

La trovata conclusione ha luogo qualunque sia la distanza fra la superficie *abcd* e la ABCD, anche allorquando queste sono estremamente vicine. Da ciò possiamo ricavare la seguente importantissima

PROPOSIZIONE VIII.

12. *Una data quantità di materia ripulsiva può essere per tal modo distribuita alla superficie di un corpo qualsivoglia da non esercitare azione veruna sui punti collocati internamente.*

Siavi chi il neghi, asserendo che disposta in qualunque modo la menzionata quantità di materia repulsiva nella superficie ABCD, e tracciata entro questa una qualche altra superficie

a'b'c'd', vi dee sempre essere, verso qualcuno de' punti situati al di dentro di questa, un' azione non minore di una data *a*. Noi possiamo immaginare descritta fra la ABCD e la *a'b'c'd'* un' altra superficie *abcd*; concepire disposta per tal modo la data quantità di materia nell' intervallo ABCD*abcd*, da non esercitare azione alcuna verso i punti collocati internamente, e in ispecie verso quelli situati entro *a'b'c'd'*; in fine immaginare trasportata tutta questa materia nella superficie ABCD col mezzo di movimenti normali a quest'ultima. E con ciò, supposte abbastanza vicine le due superficie ABCD, *abcd*, avremo verso i suddetti punti interni ad *a'b'c'd'* un cangiamento d'azione, ossia un' azione totale, minore sicuramente di *a*, contro l' asserzione dell' oppositore, la quale perciò era assurda.

13. *Osservazione* I. Io ho forte ragione di credere che la distribuzione superficiale alla quale non corrisponde nessuna azione interna, sia una sola per un dato corpo e per una data quantità di materia repulsiva. Uno degli argomenti si è, che se dopo data questa distribuzione e se noi la immaginiamo alterata togliendo parte di quella materia da un dato piccolo luogo e aggiungendola in un altro, l'azione verso i punti interni cessa dall'esser nulla; in modo che qualunque molecola collocata internamente ed atta a sentire quell' azione repulsiva, viene attratta al luogo stato impoverito e respinta dal luogo stato arricchito. Ma questa conclusione non ho potuto finora estenderla a qualunque maniera di trasportamento della materia repulsiva e a qualunque forma di corpi. Veggasi su ciò anche la Prop. XIII.

14. *Osservazione* II. Non v' è che la ragione inversa de' qnadrati delle distanze, la quale renda possibile una tal distribuzione superficiale di una materia repulsiva, da non produrre alcuno effetto sui corpi internamente contenuti. Di che può sufficientemente persuaderci la dimostrazione data pei corpi sferici al §. 7.

PROPOSIZIONE IX.

15. *Dentro ad un corpo di figura qualunque, formato d'una materia repulsiva di densità o uniforme o in qualsivoglia modo variabile e le parti della quale si respingano fra se in ragione inversa del quadrato delle distanze, si può condurre per un punto qualunque una tale superficie chiusa da lasciare esternamente una porzione di esso corpo, che sia affatto priva d'azione verso i punti situati al di dentro di cotal superficie.*

Immaginiamo che nella superficie ABCD di questo corpo venga disposta una piccola porzione di cotal materia ripulsiva, venendovi distribuita in tal modo che sia affatto nulla la sua azione verso i punti collocati internamente, supponendo però che una tale materia venga ceduta da parti del corpo contigue ad essa superficie ABCD, alla quale essa materia arrivi movendosi secondo linee normali alla ABCD medesima. Verrà con ciò lasciato un vano sotto questa superficie, e la residua parte del corpo sarà terminata da un' altra superficie A'B'C'D' posta al di dentro della ABCD e assai vicina ad essa. In questa A'B'C'D' immaginiamo distribuita un' altra piccola porzione della detta materia repulsiva nel modo medesimo. E lo stesso immaginiamo fatto colla superficie A''B''C''D'' che succederà alla precedente a rivestire la rimanente parte del corpo. E seguitiamo a fare lo stesso in sino a che il corpo abbia perduto tanta parte della sua materia, che la superficie della parte residua passi per un punto scelto precedentemente ad arbitrio; il che si può conseguire esattamente col prendere in quantità opportuna l' ultima porzione di materia ripulsiva trasportata. Ciò fatto egli è evidente che la materia ripulsiva distribuita nel complesso di tutte queste superficie, non eserciterà azione veruna verso i punti collocati al di dentro di esse tutte. Ed è pure evidente che restituita questa materia ripulsiva alle pristine sue posizioni, non ne avverrà che un piccolissimo cangiamento d' azione, il quale cangiamento poi

costituirà l'azione totale esercitata dallo strato primitivo che ha somministrato cotale materia. E un siffatto cangiamento d'azione, e una siffatta azione totale saranno di tanto maggiore piccolezza, quanto più numerose e più vicine si saranno prese le dette superficie, e più piccolo sarà perciò stato il movimento della materia repulsiva per ritornare alle posizioni primitive; e potranno esso cangiamento d'azione ed essa azion totale riuscire minori di ogni quantità data, col prendere le dette superficie sufficientemente numerose e sufficientemente vicine. Dal che possiamo conchiudere che pel punto dato si può far passare una tale superficie chiusa da lasciare esternamente uno strato di materia repulsiva affatto privo d'azione verso i punti interni (1).

16. *Osservazione* I. Nel corso delle operazioni or ora indicate può succedere che nel far venire materia repulsiva ad una delle superficie ABCD, A'B'C'D', A"B"C"D" ecc. dallo spazio interno per mezzo di movimenti secondo linee normali a queste superficie, vengano alcune di queste normali a incontrarsi prima di arrivare a tale lunghezza, che alle parti corrispondenti delle superficie suddette possa giungere una sufficiente quantità di materia repulsiva. Così può avvenire p. e. in N e in Q delle fig. 4 e 5, dove la superficie è o troppo incurvata o anche acuminata. In questi casi dopo avere fatto uso dei movimenti normali sino a che le linee normali non si sono incontrate, si guarderà quanta materia ancor manchi dopo quest'incontro, affinchè quelle parti di superficie ne abbiano la debita porzione; e vi si supplirà con della materia presa nello spazio lasciato ancora intatto, da parti più che si può vicine a quelle parti di superficie, p. e. dai coni indicati

(1) Pe' corpi omogenei pochissimo differenti dalla sfera quest'ultima conseguenza era già stata dimostrata da Laplace; il quale si era altresì accinto a determinare l'interna superficie del sovrammenzionato strato, ammettendo, in luogo di una forza repulsiva, l'attrazione di gravitazione. *Meccanica celeste* T. II, Capo 11, §. 13.

abc, def. Siccome anche in tali casi il cammino percorso dalla materia ripulsiva è piccolissimo, così regge ancora la medesima dimostrazione, e la medesima conseguenza.

17. *Osservazione* II. Per certe forme di corpi, se si va prendendo successivamente più grosso lo strato che manca d'azione verso i punti interni, viene finalmente il residuo del corpo ad essere formato di più parti interrotte. Così avverrebbe in un sistema di due sfere, ineguali se si voglia di grandezza e unite da un sottile cilindro, essendo sì questo che quelle di una medesima uniforme densità. Determinando in questo sistema uno strato mancante d'azione verso i punti interni, e pigliando questo strato successivamente più grosso, arriva esso infine ad occupare in qualche punto tutta la grossezza del cilindro, e a interrompere la continuità della materia residua. A ciascuna poi delle parti interrotte possono ancora levarsi altri ed altri strati privi anch'essi d'azione verso i rispettivi punti interni: ma non è quì il luogo di occuparci di ciò. Basti quì il notare che questo interrompimento non ha luogo quando dal corpo si levano strati assai sottili.

18. *Osservazione* III. Se in una massa indefinita di materia ripulsiva di una densità o uniforme o in qualsivoglia modo variabile, si immagina condotta una superficie qualunque, all'esterno di essa può sempre trovarsene un'altra passante per un punto dato e tale che lo strato compreso fra le due superficie non eserciti azione alcuna sui punti interni. Chiamata infatti A la superficie immaginata, si concepisca distribuita in essa una piccola quantità di materia ripulsiva priva di azione verso i punti interni, fatta venire in essa A dall'esterno della massa indefinita supposta, per mezzo di movimenti normali alla A medesima. Sulla nuova superficie che si verrà a formare al di fuori di A, e che dirò A′, si immagini fatta la stessa operazione; e così sull'altra nuova superficie A″ che verrà a risultarne, continuando infino a che si arrivi al punto dato; e infine si immaginino ravvicinate e moltiplicate all'infinito queste superficie A′, A″ ec. E con un ragio-

namento simile a quello del §. 14 si arriverà alla conseguenza proposta.

PROPOSIZIONE X.

19. Supponiamo che dentro al vano chiuso da una superficie qualsivoglia ABCD si trovi contenuta una certa quantità di una materia repulsiva respingentesi nella ragione tante volte nominata de' quadrati inversi delle distanze, e capace di potersi ridurre, senza opporre veruna resistenza, a una densità assaissimo più grande di quella che corrisponderebbe a una densità uniforme dentro a quel vano, ma che però al di là di certo condensamento opponga una forte resistenza diversa dalla repulsione già menzionata, e analoga a quella dell'impenetrabilità. Si asserisce che *questa materia non potrà trovare equilibrio dentro a quello spazio se non disponendosi in uno strato assai sottile contiguo alla superficie* ABCD, *e non esercitante azione alcuna sui punti interni.*

Suppongasi che per un istante abbia luogo una disposizione diversa, tale che vi abbia di cotal materia in tutte le parti del suddetto spazio chiuso, anche in quelle più lontane dalla superficie. Si concepisca condotta per un punto qualsivoglia *a* di questo spazio una superficie *abcd* la quale lasci all' esterno di se uno strato di essa materia repulsiva che sia affatto privo d' azione verso i punti collocati entro *abcd*, e che non arrivi a quella densità a cui ha luogo la resistenza all'avvicinamento analoga all' impenetrabilità. La parte di cotale materia che è contenuta dentro *abcd*, si troverà in piena balìa della vicendevole ripulsione delle sue parti, come se fosse in un luogo affatto vacuo; di maniera che ella tenderà ad espandersi al di fuori di essa *abcd*, senza che la materia esistente fra *abcd* ed ABCD eserciti veruno sforzo per opporsi a questa espansione. Non avremo adunque equilibrio, ma bensì movimento della materia repulsiva verso l' esterno; e questo movimento non cesserà sino a che una siffatta materia ripulsiva non siasi tutta condensata alla superficie, a quella den-

sità sino a cui le sue parti possono arrivare, e lasciando vacuo l'interno. Giunta poi a questo stato non potrà ella ancora essere in equilibrio finchè non siasi disposta in uno strato non avente azione alcuna verso i punti situati internamente. Suppongasi in fatti che giunta presso la superficie ella non abbia ancora presa una siffatta disposizione. Noi potremo considerare lo strato K da essa allora formato, siccome nato da un altro strato *k* non esercitante azione alcuna verso i punti interni, e al quale siasi levata di questa materia da un lato per porla, pure internamente da un altro lato; e contentandoci dell'evidenza fisica, senza pretendere al rigore geometrico, noi veggiamo che con questo traslocamento verrebbe indebolita la forza ripulsiva delle parti scemate, e invigorita quella delleparti accresciute, e che la materia traslocata verrebbe per cotal cangiamento di forze sospinta via da queste ultime parti verso le prime.

20. *Osservazione* I. Se la materia ripulsiva non opponesse nessuna resistenza alla sua condensazione, non si potrebbe ella in tal caso ridurre all'equilibrio, se non disponendosi interamente nella superficie ABCD, e accumulandosi ove più e ove meno ne' diversi punti di questa, in guisa da non esercitare azione alcuna verso i punti dello spazio interno.

21. *Osservazione* II. Con questa Proposizione viene esteso a tutte le specie di corpi quello che avevamo enunciato alla fine del §. 6 riguardo alle sfere.

22. *Corollario*. Ammettiamo ora che la materia ripulsiva di cui si tratta sia del fluido elettrico sovrabbondante in un corpo conduttore cinto da aria asciutta o da altro mezzo coibente. Supposto dapprincipio che il fluido naturale di un tal corpo sia affatto immobile, *quello sovrabbondante, lasciato in balìa delle proprie forze, nel prendere la disposizione di equilibrio si disporrà tutto alla superficie in uno strato sottilissimo non esercitante azione alcuna verso i punti interni.* E supposto di poi che venga lasciato libero al moto anche il fluido naturale, coll'anzidetta distribuzione si troverà in equilibrio altresì quest'ultimo.

PROPOSIZIONE XI.

23. *Ne' conduttori isolati, e liberi da azioni straniere l'elettricità negativa si distribuisce allo stesso modo come la positiva.*

Ammettansi nel fluido elettrico le due azioni menzionate nel §. 6, cioè una ripulsione fra le sue parti, e un' attrazione verso la materia pesante, operanti entrambe in ragione inversa de' quadrati delle distanze. E si abbia un qualsivoglia corpo C allo stato naturale. Sotto la superficie di questo si supponga descritta un' altra superficie tale che lasci al di fuori uno strato d' elettrico appartenente alla dose naturale, il quale strato uguagli nella massa l' elettrico che si intende di levare al corpo, e sia determinato in modo da non esercitare azione alcuna verso le molecole del fluido interno. È facile a vedersi che tolto via questo strato dal corpo, non cesseranno le molecole del fluido naturale interno dal trovarsi in equilibrio. Perocchè se si equilibrano fra loro diverse forze ripulsive operanti su di una data molecola del fluido naturale interno, quali sono le forze ripulsive che venivano esercitate dal fluido sottratto, l'equilibrio dovrà sussistere ancora quando a queste si sostituiscano altrettante forze attrattive della medesima grandezza, quali sono le forze esercitate su quella data molecola di fluido naturale, dalla materia pesante che da quella sottrazione è rimasta spoglia d' elettrico. Dovrà per conseguenza esser quella la distribuzione di equilibrio del fluido rimasto, dopo fatta la suddetta sottrazione.

Immaginiamo ora che si abbia un altro corpo conduttore C' uguale e simile al C, e che essendo prima allo stato naturale, gli si aggiunga una quantità sovrabbondante d'elettrico perfettamente uguale a quella levata da C. Si asserisce che dopo ridottasi questa quantità aggiunta allo stato di equilibrio, avrà essa sensibilmente la stessa distribuzione dello strato levato da C; vale a dire che prendendo nello strato aggiunto a C' e in quello levato a C due porzioni di fluido elettrico in-

sistenti normalmente a porzioni omologhe delle superficie de' due corpi, saranno queste porzioni prossimamente eguali. Immaginiamo infatti che ogni molecola del fluido aggiunto a C' sia per un momento trasportata e condensata alla superficie di esso C' col mezzo di movimenti normali a questa superficie; e che una simile cosa si faccia rispetto al fluido dello strato levato da C. Essendo piccolissimo il movimento delle parti in ciascuno de' due strati, dee di necessità esser pochissimo il cangiamento delle forze operanti sui punti interni, pochissimo il disequilibrio che verrà a risultarne, e pochissimo tanto nell' uno che nell' altro strato il cangiamento di distribuzione necessario a rimettere l'equilibrio. Per conseguenza le distribuzioni dell' elettrico ne' due strati dopo il trasportamento alla superficie differiscono pochissimo dalla distribuzione superficiale di equilibrio, e sono perciò vicinissime fra loro.

PROPOSIZIONE XII.

24. *Determinare l' azione che lo strato di fluido elettrico sovrabbondante in un corpo conduttore e in esso ridotto allo stato di equilibrio esercita sulle proprie più superficiali molecole.*

Lemma I. Siano QA, MB (*fig.* 6) due archi circolari concentrici, aventi le due estremità A e B in una retta passante pel comun centro O, e le due Q ed M in una retta QMD perpendicolare ad AO. E immaginiamo che il quadrilatero mistilineo QMBA rotando intorno alla retta OA generi un solido, il quale sia formato d'una materia di densità uniforme e dotata d' una forza ripulsiva operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze. Si vogliono le azioni esercitate da questo solido su d'un punto fisico collocato in A, e su d' uno collocato in B.

Chiamisi P l' azione che verrebbe esercitata su d'uno di cotali punti fisici da una porzione della materia del solido in quistione, corrispondente al volume 1 e supposta concentrata in un punto alla distanza 1;

S l'azione esercitata sul punto A dal segmento sferico nato dalla rotazione del triangolo mistilineo BMD, nel supposto che questo segmento sia della materia e della densità del solido che consideriamo;

S' l'azione esercitata su A dal segmento sferico nato dalla rotazione del triangolo AQD, nel supposto come sopra;

X l'azione esercitata su A dal solido in questione, e la quale si tratta di determinare,

Posto

$$BA = a$$
$$BO = R,$$
$$BD = m,$$
$$BE = x,$$
$$EF = y,$$

avremo evidentemente

$$S = P\int dx \int dy \, \frac{2\pi y(a+x)}{[(a+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

essendo le integrazioni estese fra i limiti

$$y = 0,\ y = \sqrt{x(2R-x)};$$
$$x = 0,\ x = m.$$

Avremo S' ponendo nel valore di S

$a = 0$, m' in luogo di m, R' in luogo di R,

e quindi facendo

$$m' = a + m,$$
$$R' = a + R.$$

E sarà finalmente

$$X = S' - S.$$

Eseguendo le integrazioni indicate, avremo

$$S=P2\pi\int dx\left[-\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}+\text{cost.}\right]$$

$$=P.2\pi\int dx\left[1-\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+x(2R-x)}}\right]$$

$$=P.2\pi\int dx\left[1-\frac{a+x}{\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}\right]$$

$$=P.2\pi\left[x-\frac{(a+x)\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}{a+R}+\int dx\,\frac{\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}{a+R}\right]$$

$$=P.2\pi\left[x-\frac{(a+x)\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}{(a+R)}+\frac{(a^2+2ax+2Rx)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^2(2a+2R)}+\text{cost.}\right]$$

$$=P.2\pi\left[m-\frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)}+\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}+\frac{a^2}{a+R}-\frac{a^3}{3(a+R)^2}\right]$$

$$S'=P.2\pi\left[m'-\frac{m'\sqrt{2R'm'}}{R'}+\frac{2R'm'\sqrt{2R'm'}}{3R'R'}\right]$$

$$=P.2\pi\left[m'-\frac{m\sqrt{2m'}}{3\sqrt{R'}}\right]$$

$$=P.2\pi\left[a+m-\frac{1}{3}\,\frac{(a+m)\sqrt{2(a+m)}}{\sqrt{a+R}}\right.$$

$$X=P.2\pi\left[a+m-\frac{1}{3}\,\frac{(a+m)\sqrt{2(a+m)}}{\sqrt{a+R}}\right.$$

$$\left.-m+\frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}-\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}-\frac{a^2}{a+R}+\frac{a^3}{3(a+R)^2}\right]$$

$$=P.2\pi\left[a-\frac{a^2}{a+R}+\frac{a^3}{3(a+R)^2}-\frac{1}{3}\,\frac{(a+m)\sqrt{2(a+m)}}{\sqrt{a+R}}\right.$$

$$\left.+\frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)}-\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}\right].$$

Chiamiamo ora

Y l'azione esercitata dallo stesso solido verso il punto B: si avrà questa col determinare:

1.° l'azione T esercitata su B dal pezzo di sfera nato dalla rotazione intorno ad AO, del quadrilatero mistilineo KBDQ, ove la retta BK è parallela alla DQ;

2.° l'azione T' esercitata su B dal segmento di sfera nato dalla rotazione del triangolo mistilineo BMD;

3.° l'azione T'' esercitata sullo stesso punto B dal segmento di sfera nato dalla rotazione del triangolo mistilineo AKB.

Perciocchè sarà

$$Y=T-T'-T'';$$

e tenderà essa azione a spingere il punto B verso A o verso D secondo che il suo valore si troverà essere positivo o negativo.

Per determinare T, poniamo ancora

$$BE=x$$

$$EF=y;$$

e adottate le altre denominazioni usate poc'anzi, avremo

$$T=P.\int dx\int dy.\frac{2xyx}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

essendo le integrazioni estese fra i limiti

$$y=0,\ y=\sqrt{(a+x)(2R+a-x)},$$

$$x=0,\ x=m.$$

Sarà perciò

$$T = P.2\pi \int dx \left[- \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \text{cost.} \right]$$

$$= P.2\pi \int dx \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+2Ra+2Rx+a^2-x^2}} \right]$$

$$= P.2\pi \int dx \left[1 - \frac{x}{\sqrt{a^2+2Ra+2Rx}} \right]$$

$$= P.2\pi \left[x - x\frac{\sqrt{a^2+2Ra+2Rx}}{R} + \int dx \frac{\sqrt{a^2+2Ra+2Rx}}{R} \right]$$

$$= P.2\pi \left[x - x\frac{\sqrt{a^2+2Ra+2Rx}}{R} + \frac{(a^2+2Ra+2Rx)^{\frac{3}{2}}}{R.\frac{3}{2}.2R} + \text{cost.} \right]$$

$$= P.2\pi \left[m - m\frac{\sqrt{a^2+2Ra+2Rm}}{R} + \frac{(a^2+2Ra+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3R^2} - \frac{(a^2+2Ra)^{\frac{3}{2}}}{3R^2} \right].$$

Il valore di T' si avrà immediatamente col porre $a = 0$ nel valore di T; e perciò sarà

$$T' = P.2\pi \left[m - \frac{m\sqrt{2Rm}}{R} + \frac{2Rm\sqrt{2Rm}}{3R^2} \right]$$

$$= P.2\pi \left[m - \frac{1}{3}\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} \right],$$

per avere T'', poniamo

$$AP = x$$

$$PV = y.$$

sarà

$$T'' = P \int dx \int dy \frac{2\pi(a-x)y}{[(a-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

essendo estese le integrazioni fra i limiti

$$y = 0,\ y = \sqrt{x(2R+2a-x)}$$

$$x = 0,\ x = a$$

perciò

$$T''=P.2\pi\int dx\left[-\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}+\text{cost.}\right]$$

$$=P.2\pi\int d\left[x\,1-\frac{(a-x)}{\sqrt{a^2-2ax+x^2+2Rx+2ax-x^2}}\right]$$

$$=P.2\pi\int dx\left[1-\frac{(a-x)}{\sqrt{a^2+2Rx}}\right]$$

$$=P.2\pi\left[x-\frac{\sqrt{a^2+2Rx}}{R}(a-x)+\int dx\,\frac{(-1)}{R}\sqrt{a^2+2Rx}\right]$$

$$=P.2\pi\left[x-\frac{\sqrt{a^2+2Rx}(a-x)}{R}-\frac{1}{R}\,\frac{(a^2+2Rx)^{\frac{3}{2}}}{3R}+\text{cost.}\right]$$

$$=P.2\pi\left[a-\frac{1}{3R^2}(a^2+2Ra)^{\frac{3}{2}}+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}\right]$$

donde

$$Y=P.2\pi\left[m-\frac{m\sqrt{a^2+2Ra+2Rm}}{R}+\frac{(a^2+2Ra+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}-\frac{(a^2+2Ra)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right.$$

$$\left.-m+\frac{1}{3}\,\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}-a-\frac{a^2}{R}-\frac{a^3}{3R^2}+\frac{(a^2+2Ra)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right]$$

$$=P.2\pi\left[-a-\frac{a^2}{R}-\frac{a^3}{3R^2}+\frac{1}{3}\,\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}-\frac{m\sqrt{a^2+2Ra+2Rm}}{R}\right.$$

$$\left.+\frac{(a^2+2Ra+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right].$$

25. Lemma II. Quando la grossezza AB del solido testè considerato è estremamente piccola e affatto trascurabile in confronto del raggio BO, e la saetta BD è assai grande in confronto di essa grossezza AB, ma assai piccola in confronto di esso raggio BO, i due valori di X e Y sono prossimamente uguali.

Per dimostrarlo svolgiamo i valori di X e di Y in serie secondo le potenze crescenti della quantità a, la quale nel presente supposto è piccolissima in confronto di R, e anche

di m, continuando le serie in sino a che i resti sieno, nel detto supposto, minimi e trascurabili in confronto de' termini ottenuti dallo svolgimento suddetto.

Serviamoci a quest'uopo della formola di Lagrange

$$\varphi(a) = \varphi(0) + a.\varphi'(0) + \tfrac{1}{2}a^2.\varphi''(0). \ldots\ldots$$
$$+ \frac{a^{n-1}}{2.3\ldots n-1}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{a^n}{2.3\ldots.n}\varphi^{(n)}(ka),$$

dove k è un numero convenientemente scelto fra 0 e 1; la quale formola, come avverte Cauchy (1), è sempre legittima quando col dare successivamente a k tutti i valori da 0 a 1, non si hanno mai per $\varphi^n(ka)$ nè valori infiniti, nè valori immaginarj, nè salti bruschi da una grandezza ad un' altra. Cominciando dal valore di X, poniamo

$$\varphi(a) = \frac{X}{P2\pi} = a - \frac{a^2}{a+R} + \frac{a^3}{3(a+R)^2} - \frac{\sqrt{2}(a+m)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a+R}} + \frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}$$
$$- \frac{(a^2+2am+2mR)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}$$

da cui

$$\varphi(0) = -\frac{m\sqrt{2.m}}{3\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{R}\sqrt{2m}}{R} - \frac{2Rm\sqrt{2m}\sqrt{R}}{3R^2} = -\frac{m\sqrt{2m}}{3\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}$$
$$- \frac{2}{3}\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} = 0$$

$$\varphi'(a) = 1 - \frac{2a}{a+R} + \frac{a^2}{(a+R)^2} + \frac{3a^2}{3(a+R)^2} - \frac{2a^3}{3(a+R)^3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\frac{\sqrt{a+m}}{\sqrt{a+R}}$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{(a+m)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}$$

(1) *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal*, T. 1. p. 143.

$$+\frac{(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}-\frac{3(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^2}$$

$$+\frac{2}{3}\,\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^3}\quad-\frac{3(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{3(a+R)^2}$$

$$=1-\frac{2aR}{(a+R)^2}-\frac{2a^3}{3(a+R)^3}-\frac{\sqrt{a+m}}{\sqrt{2}\sqrt{a+R}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{(a+m)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}$$

$$+\frac{(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}-\frac{2(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^2}+\frac{2}{3}\,\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^3}$$

da cui

$$\varphi'(0)=1-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}.\sqrt{R}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{m\sqrt{m}}{R\sqrt{R}}+\frac{\sqrt{2}.\sqrt{R}.\sqrt{m}}{\sqrt{R}}+\frac{m^2}{R\sqrt{2m}.\sqrt{R}}$$

$$-\frac{2m\sqrt{R}.\sqrt{2m}}{R^2}+\frac{2}{3}\,\frac{2Rm.\sqrt{2m}\sqrt{R}}{R^3}$$

$$=1-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}+\frac{m\sqrt{2m}}{6.R\sqrt{R}}+\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}+\frac{m\sqrt{2m}}{2R\sqrt{R}}-\frac{2m\sqrt{2m}}{R\sqrt{R}}+\frac{4}{3}\,\frac{m\sqrt{2m}}{R\sqrt{R}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}$$

$$\varphi''(a)=-\frac{2R}{(a+R)^2}+\frac{4aR}{(a+R)^3}-\frac{6a^2}{3(a+R)^3}+\frac{6a^3}{3(a+R)^4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+m}\sqrt{a+R}}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{a+m}}{(a+R)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{a+m}}{(a+R)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(a+m)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3}{2}$$

$$+\frac{(a+m)}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}-\frac{\sqrt{a^2+2am+2mR}}{(a+R)^2}+\frac{2(a+m)}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}$$

$$-\frac{(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2Rm)}}-\frac{(a+m)^3}{(a+R)(a^2+2am+2mR)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2\sqrt{a^2+2am+2mR}}{(a+R)^2}$$

$$-\frac{2(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}+\frac{4(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^3}+\frac{2(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^3}$$

$$-\frac{2(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^4}=-\frac{2R}{(a+R)^2}+\frac{4aR}{(a+R)^3}-\frac{2a^2R}{(a+R)^4}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{a+m}\cdot\sqrt{a+R}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{a+m}}{(a+R)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(a+m)^{\frac{1}{2}}}{(a+R)^{\frac{1}{2}}}-\frac{3\sqrt{a^2+2am+2mR}}{(a+R)^2}$$

$$+\frac{6(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^2}+\frac{3(a+m)}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}-\frac{3(a+m)^2}{(a+R)^2\sqrt{a^2+2am+2Rm}}$$

$$-\frac{2(a^2+2am+2mR)^{\frac{1}{2}}}{(a+R)^3}-\frac{(a+m)^3}{(a+R)(a^2+2am+2mR)^{\frac{1}{2}}}.$$

Proviamo a vedere se basta all'uopo nostro, pel presente valore di X, lo avere la serie sotto la forma:

$$\varphi(a)=\varphi(0)+a\varphi'(0)+\frac{a^2}{2}\varphi''(ka).$$

Al qual fine osserviamo, se ponendo ka in luogo di a ne' diversi termini del valore di $\varphi''(a)$ e quindi moltiplicandoli per $\frac{a^2}{2}$, diventino tutti incomparabilmente minori della somma

$$\varphi(0)+a\varphi'(0)$$

ossia di

$$a\left[1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}\right];$$

ossia anche se essi termini, dopo sostituito semplicemente ka in luogo di a, riescano incomparabilmente minori di $\frac{1}{a}$.

Facendo questa sostituzione nel primo termine, avremo

$$-\frac{2R}{(ka+R)^2}=-\frac{2R^2}{R(ka+R)^2}=-\frac{2k'}{R},$$

dove k' è una quantità compresa fra o e 1, diversa da k. La legittimità della quale riduzione si riconosce considerando che $\frac{R^3}{(ka+R)^3}$ è minore di 1. Ora essendo a incomparabilmente minore di R, si ha anche $\frac{1}{R}$ incomparabilmente minore di $\frac{1}{a}$; e questo primo termine gode perciò del pregio che in esso si desidera. Proseguiamo, e indichiamo sempre con k' de' numeri compresi fra o e 1, e che possono essere diversi sì da k che fra se stessi. Avremo

$$\frac{4kaR}{(ka+R)^2} = \frac{4ak.R^3}{R^3(ka+R)^3} = \frac{k}{R} \cdot \frac{4a}{R} \cdot \left(\frac{R}{ka+R}\right)^3 = \frac{k'}{R}$$

dove l'ultimo secondo membro gode anch'esso del desiderato pregio.

$$-\frac{2k^2a^2R}{(ka+R)^4} = -\frac{2a^2.k^2.R^4}{R^3(ka+R)^4} = -\frac{k^2}{R} \cdot \frac{2a}{R} \cdot \frac{a}{R} \cdot \left(\frac{R}{(ka+R)}\right)^4 = -\frac{k'}{R},$$

dove si può dire lo stesso. Segue il termine

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}};$$

del quale però non si può dire la medesima cosa come degli altri, essendo la quantità $\frac{1}{\sqrt{mR}}$ assai più grande di $\frac{1}{R}$. Lo lasceremo perciò un momento da banda, per isvolgerlo di poi ulteriormente in serie. Passiamo agli altri; e sarà

$$+\frac{\sqrt{ka+m}}{\sqrt{2.(ka+R)^{\frac{1}{2}}}} - \frac{(ka+m)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2.(ka+R)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{ka+m}\left(ka+R-\frac{ka}{2}-\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{2}.\sqrt{ka+R}.(ka+R)^2} = \frac{\sqrt{ka+m}\left(R+\frac{ka}{2}-\frac{m}{2}\right)R}{\sqrt{2}.\sqrt{ka+R}.(ka+R)(ka+R)} \cdot \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k'}{R},$$

dove i due termini del primo membro si sono potuti sommare, per essere la k dello stesso valore in entrambi, siccome uguale a quella contenuta in $\varphi''(ka)$.

$$-\frac{3\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{(ka+R)^2}=-\frac{3}{R}\cdot\frac{R}{(ka+R)}\cdot\frac{\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{(ka+R)}=-\frac{3k'}{R};$$

$$\frac{6(ka+m)\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{(ka+R)^3}=\frac{6R.(ka+m).\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{R.(ka+R)(ka+R)(ka+R)}=\frac{6k'}{R};$$

$$\frac{3(ka+m)}{(ka+R)\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}-\frac{3(ka+m)^2}{(ka+R)^2\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}$$

$$=\frac{3(ka+m)(ka+R-ka-m)}{(ka+m)^2\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}=\frac{3R.(R-m)(ka+m)}{R(ka+R)(ka+R)\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}=\frac{3k'}{R};$$

$$-\frac{2(k^2a^2+2kam+2mR)^{\frac{3}{2}}}{(ka+R)^4}=-\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{ka+R}\cdot\left(\frac{\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{ka+R}\right)=-\frac{2k'}{R};$$

$$-\frac{(ka+m)^3}{(ka+R)(k^2a^2+2kam+2mR)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{R}\cdot\frac{R}{ka+R}\cdot\left(\frac{ka+m}{\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}\right)^3$$

$$=-\frac{k'}{R}.$$

Ed anche in queste sei ultime equazioni gli ultimi secondi membri godono della qualità che si desidera. Unendo tutto insieme si ha

$$\varphi''(ka)=-\frac{1}{R}(2k'+k'+3k'+2k'+k')+\frac{1}{R}\left(k'+\frac{k'}{\sqrt{2}}+6k'+3k'\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}.\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}}=\frac{11.k'}{R}-\frac{9.k'}{R}-\frac{1}{2\sqrt{2}.\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}}.$$

Svolgiamo ora in serie la quantità

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}}.$$

Ponendo $ka = b$, e indicando la detta quantità per $\psi(b)$, si potrà porre

$$\psi(b) = \psi(0) + b\psi'(k'b)$$

Ora

$$\psi(0) = -\frac{1}{2\sqrt{2mR}}$$

$$\psi'(b) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2(b+m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b+R}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b+m}\,(b+R)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\psi'(kb') = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(k'b+m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{k'b+R}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k'b+m}\,(k'b+R)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{k''}{m} \cdot \frac{k''}{\sqrt{m}} \cdot \frac{k''}{\sqrt{R}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{k''}{\sqrt{m}} \cdot \frac{k''}{R} \cdot \frac{k''}{\sqrt{R}}$$

perciò

$$\psi(b) = -\frac{1}{2\sqrt{2mR}} + \frac{ka}{4\sqrt{2}}\left(\frac{k''}{m\sqrt{mR}} + \frac{k''}{R\sqrt{mR}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2mR}} + \frac{k''}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{m\sqrt{mR}} + \frac{k''}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{R\sqrt{mR}}.$$

Ora nel secondo termine dell' ultimo membro la quantità $\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{mR}}$, che è già assai piccola in confronto di $\frac{1}{a}$, si trova moltiplicata per la quantità piccolissima $\frac{a}{m}$; sarà dunque esso termine di un valore piccolissimo, e potremo contentarcene senza pensare ad altri svolgimenti. Il terzo termine poi si può mettere sotto la forma $\frac{k''}{R}$.

Avremo perciò

$$\varphi''(ka) = \frac{11k''}{R} - \frac{9k'}{R} - \frac{1}{2\sqrt{2mR}} + \frac{k'a}{4m\sqrt{2mR}} + \frac{k'}{R}$$

$$= \frac{12k'}{R} - \frac{9k'}{R} - \frac{1}{2\sqrt{2mR}} + \frac{k'a}{4m\sqrt{2mR}}$$

dove non si eseguisce la sottrazione ne' due primi termini del secondo membro, atteso il diverso valore che può in essi avere la k'. Raccogliendo adunque i valori di $\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(ka)$ avremo

$$\varphi(a) = \varphi(0) + a\varphi'(0) + \frac{a^2}{2}\varphi''(ka)$$

$$= a\left(1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right) + \frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2mR}} + \frac{12k'}{R} - \frac{9k'}{R} + \frac{ak'}{4m\sqrt{2mR}}\right)$$

$$= a\left(1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right) - \frac{a^2}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6a^2k'}{R} - \frac{9a^2k'}{2R} + \frac{a^3k'}{8m\sqrt{2mR}},$$

da cui

$$X = P.2\pi.\varphi(a)$$

$$= P.2\pi a\left[1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6ak}{R} - \frac{9a^2k}{2R} + \frac{a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

essendo tutte le k delle quantità fra 0 e $+1$, le quali possono essere diverse sì fra di se che con quella indicata precedentemente colla medesima lettera.

Veniamo ora alla Y. Poniamo

$$\chi(a) = -\frac{Y}{P.2\pi} = a + \frac{a^2}{R} + \frac{a^3}{3R^2} - \frac{m\sqrt{2m}}{3\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{a^2+2Ra+2Rm}}{R}$$

$$- \frac{(a^2+2Ra+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}.$$

Sarà

$$\chi(a) = \chi(0) + a\chi'(0) + \frac{a^2}{2}\chi''(ka),$$

essendo quì pure k una conveniente quantità fra 0 e + 1; e si avrà

$$\chi(0) = -\frac{m\sqrt{2m}}{3\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{R}.\sqrt{2m}}{R} - \frac{2mR.\sqrt{2m}\sqrt{R}}{3RR}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} - \frac{2}{3}\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}$$

$$= 0$$

$$\chi'(a) = 1 + \frac{2a}{R} + \frac{a^2}{R^2} + \frac{m(a+R)}{R\sqrt{a^2+2Ra+2mR}} - \frac{3(a+R)\sqrt{a^2+2aR+2mR}}{3R^2},$$

$$\chi'(0) = 1 + \frac{m}{\sqrt{2mR}} - \frac{1}{R}\sqrt{2mR} = 1 + \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} = 1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}},$$

$$\chi''(a) = \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{m}{R\sqrt{a^2+2aR+2mR}} - \frac{m(a+R)^2}{R(a^2+2aR+2Rm)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{(a+R)^2}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}} - \frac{\sqrt{a^2+2aR+2mR}}{R^2}$$

$$= \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{m}{R}\frac{(a^2+2aR+2mR-a^2-2aR-R^2)}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(a^2+2aR+R^2+a^2+2aR+2mR)}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}}$$

$$= \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{m(2m-R)}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(R^2+2mR+4aR+2a^2)}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}}$$

$$= \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{2m^2}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2a^2+4aR+2mR}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}} - \frac{Rm}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a^2+2aR+2mR}};$$

$$\chi''(ka) = \frac{2}{R} + \frac{2ka}{R^2} + \frac{2m^2}{(ka^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(2k^2a^2+4kaR+2mR)}{R^2\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}$$

$$- \frac{Rm}{(k^2a^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}.$$

Ora esaminando ad uno ad uno i termini del secondo membro, si ha

$$\frac{2ka}{R^2} = \frac{k}{R} \cdot \frac{2a}{R} = \frac{k'}{R}$$

$$\frac{2m^2}{k^2a^2+2kaR+2mR^2} = \frac{2m.m}{(k^2a^2+2kaR+2mR)\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}} = \frac{k'.2m}{2mR} \cdot \frac{mk'}{\sqrt{2mR}}$$

$$= \frac{k'}{R} \cdot \frac{\sqrt{m}.\sqrt{m}.k'}{\sqrt{2m}.\sqrt{R}} = \frac{k'}{R}$$

$$-\frac{(2k^2a^2+4ak.R+2mR)}{R^2\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\left(2m+4ka+\frac{2k^2a^2}{R}\right)}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}$$

$$= -\frac{k'}{R} \cdot \frac{\left(2m+4ka+\frac{2k^2a^2}{R}\right)}{\sqrt{2mR}}$$

$$= -\frac{k'}{R} \cdot \frac{2m\left(1+\frac{4ka}{2m}+\frac{2k^2a^2}{2mR}\right)}{\sqrt{2m}\sqrt{R}}$$

$$= -\frac{k'}{R} \cdot \sqrt{\frac{2m}{R}}\left(1+\frac{4ka}{2m}+\frac{2k^2a^2}{2mR}\right),$$

dove quantunque il terzo fattore dell'ultimo secondo membro sia > 1, si ha però il secondo fattore tanto < 1, che il loro prodotto si dee assolutamente avere per minore di 1. Quindi anche questa quantità possiamo farla

$$= -\frac{k'}{R}.$$

Non così possiamo dire degli ultimi due termini del valore di $\chi''(ka)$, pei quali è perciò necessario un ulteriore sviluppo. Poniamo adunque

$$-\frac{Rm}{(k^2a^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}$$

$$=V(ka)=V(b)=V(o)+bV'(k'b).$$

Sarà

$$V(b)=-\frac{Rm}{(b^2+2bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+2bR+2mR}}$$

$$V(o)=-\frac{Rm}{2mR\sqrt{2mR}}-\frac{1}{\sqrt{2mR}}=-\frac{1}{2\sqrt{2mR}}-\frac{1}{\sqrt{2mR}}=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}};$$

$$V'(b)=\frac{Rm.3(b+R)}{(b^2+2bR+2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{(b+R)}{(b^2+2bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V'(k'b)=\frac{3Rm(k'b+R)}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{bk'+R}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}.$$

E perciò

$$-\frac{Rm}{(k^2a^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}=V(ka)=V(o)+bV(k'b)$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{3Rm(k'b+R)b}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{b(bk'+R)}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{3mRk''a^2}{(2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3R^2mk''a}{(2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{k''a^2}{(2Rm)^{\frac{3}{2}}}+\frac{k''aR}{(2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{3.a.a.k''}{4.mR\sqrt{2mR}}+\frac{3}{4}\frac{a.k''}{m\sqrt{2mR}}+\frac{a^2k''}{2Rm\sqrt{2mR}}+\frac{ak''}{2m\sqrt{2mR}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{k''}{R}+\frac{3ak''}{4m\sqrt{2mR}}+\frac{k''}{R}+\frac{2ak'}{4m\sqrt{2mR}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{5ak''}{4m\sqrt{2mR}}+\frac{2k''}{R}.$$

Sarà perciò

$$\chi''(ka) = \frac{2}{R} + \frac{k'}{R} + \frac{k'}{R} - \frac{k'}{R} - \frac{3}{2\sqrt{2mR}} + \frac{5k''a}{4m\sqrt{2mR}} + \frac{2k''}{R}$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{2mR}} + \frac{6k''}{R} - \frac{k''}{R} + \frac{5ak''}{4m\sqrt{2mR}};$$

$$\chi(a) = \chi(0) + a\,\chi'(0) + \frac{a^2}{2}\chi''(ka)$$

$$= a\left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}}\right) + \frac{a^2}{2}\left[-\frac{3}{2\sqrt{2mR}} + \frac{6k''}{R} - \frac{k''}{R} + \frac{5ak''}{4m\sqrt{2mR}}\right]$$

$$= a\left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}}\right) - \frac{3a^2}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3a^2k''}{R} - \frac{a^2k''}{2R} + \frac{5a^3k''}{8m\sqrt{2mR}}.$$

$$Y = -P2\pi.\chi(a)$$

$$= -P.2\pi\left[a\left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}}\right) - \frac{3a^2}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3a^2k''}{R} - \frac{a^2k''}{2R} + \frac{5a^3k''}{8m\sqrt{2mR}}\right]$$

$$= -P.2\pi a\left[1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{3a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3ak}{R} - \frac{ak}{2R} + \frac{5a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

essendo tutte le k quantità fra 0 e + 1, e che possono essere diverse sì fra se che da quelle indicate precedentemente colle stesse lettere.

Paragonando ora la X colla Y, noi veggiamo che entrambe differiscono pochissimo in grandezza dalla quantità $P.2\pi a$, e che sono rivolte in direzioni contrarie.

Sia per esempio

$$a = \frac{R}{(1000000)^2}$$

$$m = \frac{R}{1000000}$$

sarà

$$\sqrt{\frac{m}{2R}} = \sqrt{\frac{1}{2000000}} = \frac{1}{1414}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2mR}} = \sqrt{\frac{a}{2m} \cdot \frac{a}{R}} = \frac{1}{1000000.1414}$$

$$X = P2\pi a\left(1 + \frac{1}{1414}\right)$$

$$Y = -P2\pi a\left(1 - \frac{1}{1414}\right),$$

trascurando in entrambi i secondi membri i termini ulteriori siccome minori di un milionesimo

26. Lemma III. Immaginiamo che lo strato indicato da HANMBI (fig. 7) sia formato da un grandissimo numero di unghie, ciascuna delle quali sia compresa: 1.° da due piani congiunti ad angolo acutissimo nella linea AB; 2.° da due triangoli sferici l'uno de' quali abbia un angolo in B e l'altro in A e le cui sfere abbiano un medesimo centro nel prolungamento della linea AB, variando però questo centro dall'un' unghia all'altra; 3.° da un piano perpendicolare alla linea AB, e condotto ad una distanza BC da B la quale sia grandissima in confronto di AB, ma piccolissima in confronto de' raggi delle sfere cui appartengono i triangoli sferici. Se la materia di cui è formato questo strato è d'una densità uniforme ed è dotata d'un' azione repulsiva operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze, la forza con cui essa materia respinge il punto A è prossimamente uguale a quella con cui ella respinge il punto B.

Perciocchè se si chiama $\Delta\omega$ l'angolo acutissimo che fanno fra loro nella linea AB i due piani che comprendono una delle unghie, e si pone $AB=a$, $BC=m$, e si chiama R il raggio della sfera a cui appartiene il triangolo sferico più interno di essa unghia, le azioni che questa può esercitare sul punto A nella direzione BA, e sul punto B nella direzione AB, sono rispettivamente misurate dalle quantità

$$P\Delta\omega.a\left[1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6ak}{R} - \frac{9ak}{2R} + \frac{a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

$$P\Delta\omega.a\left[1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{3a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3ak}{R} - \frac{ak}{2R} + \frac{5a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

le quali, pel Lemma II, sono prossimamente uguali.

27. *Osservazione* I. Chiamando h l'azione esercitata sul punto esterno A da tutto lo strato or ora considerato, e h' quella esercitata sul punto interno B, ∂ la densità della materia di esso strato, avremo

$$P = p\partial,$$

essendo p un altro coefficiente costante; e

$$h = \Sigma.p\partial\Delta\omega.a\left[1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6ak}{R} - \frac{9ak}{2R} + \frac{a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right]$$

$$= p\partial a.\Sigma\Delta\omega\left[1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6ak}{R} - \frac{9ak}{2R} + \frac{a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right]$$

$$h' = p\partial a.\Sigma.\Delta\omega\left[1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{3a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3ak}{R} - \frac{ak}{2R} + \frac{5a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right]$$

il che mostra che h ed h' sono sensibilmente proporzionali al prodotto della grossezza per la densità dello strato, senza dipendere sensibilmente dalla sua figura, nè dalla altezza AC.

28. *Osservazione* II. Se lo strato non è di densità uniforme, h e h' sono allora sensibilmente proporzionali al prodotto della sua grossezza per la sua media densità.

Suppongasi infatti che la densità dello strato cresca dall'interno all'esterno, ossia da B ad A. Noi possiamo riguardare esso strato siccome formato da una moltitudine di strati insieme conpenetrantisi, alcuni più grossi ed alcuni più sottili, aventi tutti la medesima superficie esterna, e dotati ciascuno di uniforme densità. E in questo caso l'azione h dèll'aggregato di tutti questi strati verso il punto esterno A sarà data sensibilmente dal prodotto della quantità

$$\Sigma.p.\Delta\omega\left(1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right),$$

comune a tutti gli strati parziali, per la somma di tutti i valori che ha la quantità ∂a ne' diversi strati. Ora questa somma si ha altresì dall'immaginar divisa in un grandissimo numero

di parti la grossezza totale a dello strato totale o complessivo, dal moltiplicare ciascuna minima parte per la somma della densità di quegli strati parziali a cui essa parte corrisponde, e dal sommare tutti questi prodotti; la quale operazione somministra appunto il prodotto della densità media dello strato totale per la grossezza a. Ed è a riflettere che è affatto minimo l' errore nascente dall' ammettere uguali i valori di m e quelli di R dell' espressione

$$\Sigma p.\Delta\omega\left(1+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right),$$

per tutti gli strati parziali.

Se la densità crescesse dall'esterno, all'interno si avrebbe il valore di h immaginando che da uno strato avente l'intera grossezza a ed avente la più grande delle densità, venissero sottratti moltissimi altri strati di minor grossezza, aventi comune con quello la superficie esterna, e dotati ciascuno di densità uniforme. E si avrebbe ancora l'h misurata sensibilmente da

$$\Sigma p.\Delta\omega.\left[1+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right],$$

moltiplicata pel prodotto della grossezza a per la media densità dello strato. E facile sarebbe lo estendere la dimostrazione a qualunque maniera di variazione della densità dello strato stesso.

Per l' azione h' esercitata sul punto B, conviene immaginare che lo strato considerato risulti dalla somma o dalla differenza di un grandissimo numero di strati parziali, aventi la stessa superficie interna, e dotati ciascuno di densità uniforme. E la conclusione è sempre la stessa.

29. Veniamo dopo tutto ciò alla Proposizione che ci siamo prefissi di dimostrare. Sia PQRS.... (fig. 8) lo strato del fluido sovrabbondante in un conduttore elettrizzato in più. Si scelga nelle superficie esterne di cotale strato un punto

A; si segni B quel punto della superficie interna pel quale passa la normale condotta da A verso l'interno; e si immagini che con un piano HN perpendicolare ad AB venga tagliato in questo strato un piccolissimo segmento IBMNAH, la cui altezza AC sia bensì moltissimo maggiore della grossezza AB dello strato medesimo, ma però moltissimo minore del più piccolo de' raggi di curvatura che ha in A l'esteriore superficie di esso strato, ossia la superficie del corpo. Con che tutta la massa dell'elettrico sovrabbondante verrà distinta in due porzioni, delle quali l'una sarà quella del detto segmento, e l'altra sarà tutta la parte rimanente. Si chiamino h, H le due azioni ripulsive esercitate rispettivamente da queste due porzioni su di una molecola d'elettrico collocata in A; h', H' le due azioni pur ripulsive esercitate dalle medesime due porzioni verso una molecola d'elettrico situata in B.

Siccome la molecola esistente in B si trova in equilibrio, essendo al di dentro di uno strato d'elettrico equilibrato (§. 22), così sono eguali in grandezza ed opposte in direzione le due azioni H', h' su di essa operanti. In quanto alle due azioni operanti sulla molecola collocata in A, noi avremo prossimamente la H uguale alla H' sì in grandezza che in direzione attesa la vicinanza di luogo de' punti A e B. Così pure si avrà prossimamente la h uguale in grandezza alla h', come si ha dal calcolare queste due azioni nel supposto che il segmento sia formato da un grandissimo numero di unghie comprese fra triangoli sferici, e le quali concorrano co' loro spigoli nella linea AB, nel modo che si è veduto nel Lemma III; colla qual forma, quando le unghie sieno numerosissime e i triangoli sferici opportunamente scelti, il considerato segmento quasi affatto coincide. La grandezza assoluta poi sì di h che di h', è porporzionale al prodotto della grossezza AB dello strato per la densità media di esso nella linea AB, vale a dire all'intensità dell'elettricità nel punto A, come si è testè veduto al § 28; nè dipende sensibilmente dalla forma del corpo, quando sia data quella grossezza e densità media, come neppure

dalla distanza AC del piano che separa i due segmenti, purchè questa distanza abbia le condizioni precedentemente espresse. Le direzioni in fine di esse azioni sui punti A e B sono prossimamente perpendicolari al piano HN, e volte in versi contrarj. Perciocchè se dal punto A vengono descritte sulla superficie esterna dello strato due linee dirette in versi contrarii ed esistenti in uno stesso piano passante per AB, hanno in A queste due linee la stessa curvatura; epperò ognuna delle unghie che abbiamo considerato, è accompagnata da un' altra diametralmente opposta, uguale di grandezza e di forma. Per conseguenza la molecola d' elettrico situata in A sarà sollecitata da due forze h, H pressochè con correnti, danti una risultante uguale prossimamente a $2h$ e operante verso l'infuori in una direzione prossimamente parallela alla linea BA.

A questa risultante si può dimostrare vicinissima in grandezza e in direzione anche l' azione che verrebbe esercitata sulle molecole d' elettrico che si trovassero prossime ad A nel prolungamento della BA. Infatti una calotta sferica nata dalla rotazione dell'arco AH (fig. 9) intorno alla retta MAC che prolungata passa pel centro O, esercita su di un punto esterno M preso nella detta retta MAC un'azione la quale, chiamata P l' azione esercitata alla distanza 1 da una massa uguale a quella che si troverebbe distribuita colla densità della calotta sulla superficie 1, e posto

$$MA = b$$

$$AE = x$$

$$EF = y$$

$$AO = R$$

$$AC = \text{seno}v.AH = m,$$

e data dall' espressione

$$P\int dx.\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{2\pi y(b+x)}{[(b+x)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}},$$

essendo l' integrale esteso da $x=0$ ad $x=m$; e però, avendosi

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)=\frac{R}{y};\ y^2=x(2R-x),$$

essa azione sarà

$$=P2\pi\int dx.\ \frac{R(b+x)}{[(b+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=P2\pi R\int dx\ \frac{(b+x)}{[(b+x)^2+x(2R-x)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=P2\pi R\int dx\ \frac{b+x}{[b^2+2bx+2Rx]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=P2\pi.R\left[-\frac{(b+x)}{(b^2+2bx+2Rx)^{\frac{1}{2}}(b+R)}+\int dx.\ \frac{1}{(b+R)\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[-\frac{(b+x)}{(b+R)(b^2+2bx+2Rx)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}{(b+R)^2}+\text{cost.}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[\frac{-(b+x)(b+R)+b^2+2bx+2Rx}{(b+R)^2\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}+\text{cost.}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[\frac{-bR+bx+Rx}{(b+R)^2\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}+\text{cost.}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[\frac{-bR+bm+Rm}{(b+R)^2\sqrt{b^2+2bm+2Rm}}+\frac{R}{(b+R)^2}\right]$$

la quale quantità, quando $b=0$, è uguale a

$$P2\pi.\left[\frac{m}{\sqrt{2Rm}}+1\right],$$

e differisce pochissimo da questo valore quando *b* è piccolissimo. L' azione pertanto esercitata da cotale calotta verso il punto M diversifica pochissimo dall'esserle questo punto collocato a contatto o soltanto vicinissimo. E lo stesso può dirsi di una moltitudine di siffatte calotte, ossia di uno strato compreso fra due superficie di cotal forma; come anche di uno strato formato da una moltitudine di unghie quali abbiamo supposte nel Lemma III: come in fine dello strato elettrico IBMNAH della *fig.* 8. E siccome per questo piccolo cangiamento di luogo del punto su cui l' azione è esercitata, varia pochissimo anche l' azione del rimanente strato elettrico che riveste il corpo, cangiandosi pochissimo l' azione spettante a ciascun punto di questo rimanente strato; così l' azione che verrebbe sofferta dalle molecole d' elettrico che si trovassero prossime ad A nel prolungamento della BA, differisce pochissimo dall' azione che verrebbe sofferta da una molecola collocata in A; come avevamo asserito.

Quanto si è fin quì detto, noi possiamo applicarlo anche all' attrazione esercitata dallo strato deficiente di un corpo elettrizzato in meno verso il fluido naturale delle molecole d' aria contigue. Quest' attrazione cioè è proporzionale al prodotto della grossezza di esso strato deficiente per la densità che ivi aveva il fluido sottratto, senza che sia d' uopo aver riguardo alla figura o ad altre circostanze.

Questa dimostrazione, dovuta in origine a Laplace, si trova riferita da Poisson, con qualche sua aggiunta, nelle Memorie dell' Istituto di Francia per l' anno 1811 (*). Io l' ho sviluppata e modificata alquanto e adattata all' ipotesi Franklíniana.

Dopo una tale dimostrazione, Poisson cerca altresì di provare che la forza con cui tutto l' elettrico esistente nella linea AB (*fig.* 8) è spinto verso l'infuori, è in ragione dupli-

(*) *Classe matematica e fisica,* parte I, p. 6 e 30.

cata del prodotto della grossezza AB dello strato per la media densità dell'elettrico lungo essa linea AB, ossia, adattando le sue conclusioni al linguaggio frankliniano, in ragione duplicata dell'intensità dell'elettricità sovrabbondante o positiva nel punto A. E infatti nella serie delle molecole d'elettrico distribuite lungo la linea AB, le più interne sono spinte all'infuori con forza minore e le più esterne con forza maggiore; essendo la forza con cui è spinta ciascuna, in ragione del numero di quelle che ella ha più internamente. Ond'è che la somma di queste forze è proporzionale al prodotto del numero delle molecole distribuite in AB, per la media delle forze dalle quali esse sono sollecitate una per una, la qual forza media è anch'essa proporzionale al detto numero. Supponendo adunque che le molecole d'elettrico situate in AB si premano l'una l'altra a modo degli ordinarj fluidi pesanti, ed esercitino contro l'aria uno sforzo puramente meccanico uguale alla somma di tutte le forze onde esse sono sollecitate, questo sforzo sarà in ragione del quadrato del numero di esse molecole disposte in AB. Poisson non parla esplicitamente di questo vicendevole premersi delle molecole; ma a me pare che egli lo sottintenda, nè veggo come si possa senz'esso arrivare alla menzionata conclusione.

Questa conseguenza, ricevuta in generale dai fisici francesi, viene da essi ammessa non solo per l'elettricità vitrea o positiva, ma anche per la resinosa o negativa, la quale essi fanno dipendere con Symmer da un altro fluido che similmente si accumuli alla superficie de' conduttori. Io temo però che in questi ragionamenti di Poisson sieno portate troppo oltre le analogie dell'elettricità co' fluidi ordinarj: il che io stimo pericoloso, fintantochè è sì poco nota l'intima natura dell'elettricità, e che è persino incerto se veramente ella dipenda da qualche sostanza esistente da se.

PROPOSIZIONE XIII.

30. Se dentro ad una superficie convessa in tutti i versi e non avente nè angoli solidi nè spigoli nè variazioni repentine nella curvatura, si trova contenuto un fluido incompressibile le cui parti si respingano in ragione inversa de' quadrati delle distanze, non può esservi per questo che un' unica distribuzione colla quale esso non eserciti alcuna azione verso i punti a lui interni.

Chiamo *convessa* una superficie *in tutti i versi*, allorquando condotto per qualsivoglia di lei punto un piano tangente, questo piano non ha comune con essa che quell' unico punto, e la lascia sempre tutta da una sola banda, senza mai segarla. Tali sono per un esempio le superficie elissoidiche.

Per dimostrare la enunciata Proposizione cerchiamo di far vedere come la supposizione contraria conduca all'assurdo. Supponiamo adunque che dentro alla superficie CC (*fig.* 10) convessa in tutti i versi, possano esservi due maniere di distribuzione colle quali una data massa dell'indicato fluido repulsivo non eserciti azione alcuna all'interno; le quali due maniere formino due strati le cui interne superficie sieno indicate l' una dalla linea punteggiata DD, e l'altra dalla linea continua EE; le quali due superficie si segheranno in diversi luoghi, rimanendo in alcune parti più interna la prima, e in alcune la seconda. E immaginiamo che data al fluido la distribuzione limitata dalla superficie DD, e ritenuto immobile esso fluido con una siffatta distribuzione, talchè esso non cangi di luogo per pressioni che venga a soffrire internamente, immaginiamo, dico, che al di dentro gli si aggiunga dell'altro fluido della stessa natura a piccole successive dosi, lasciando che questo pigli a ciascuna volta la distribuzione di equilibrio, e così si continui in fino a che da ultimo la interna superficie del fluido aggiunto, indicata dalla linea FF fatta a brevi lineette, riesca

tutta al di dentro della EE, toccando però questa in uno o più punti. Dalle cose dette al §. 19 è chiaro che nè questo fluido novellamente aggiunto nè quello limitato dalla superficie DD eserciteranno azione alcuna verso i punti situati al di dentro di FF. Immaginiamo reso immobile anche il fluido aggiunto, e che dall' aggregato de' due strati immobili, ossia dal fluido immobile collocato al di fuori della superficie FF venga levata la parte situata al di fuori della superficie EE. Siccome anche questa parte non esercita, nella nostra ipotesi, azione alcuna verso i punti dentro lei contenuti, così nella detta ipotesi non ne dee nemmeno esercitare la parte compresa fra EE ed FF, che ha in uno o più punti una grossezza nulla. Dimostriamo come sia assurda questa mancanza d' azione di cotale parte di fluido verso i punti ad essa interni.

Immaginiamo che dal punto o da uno de' punti ove la distanza fra EE ed FF è nulla, punto che noi indicheremo con A (*fig.* 11), venga condotta una retta AO normale alla superficie EE, la quale EE nel supposto che lo strato di fluido fra EE e CC sia dappertutto assai sottile, sarà anch' essa convessa per tutti i versi; come anche, in un supposto simile per lo strato fra CC ed FF, sarà convessa per tutti i versi la FF. E immaginiamo che per un punto B di questa AO, preso vicinissimo ad A, sia condotto un piano KK', perpendicolare ad essa AO; col quale piano verrà lasciata dalla banda di A una porzione dello strato EEFF di fluido repulsivo, di una grossezza nulla nel punto A ma gradatamente crescente coll'allontanarsi da A secondo tutte le direzioni; e dalla banda contraria a quella di A verrà lasciata tutta la rimanente porzione dello strato medesimo. Determiniamo approssimatamente l' azione della prima porzione.

Questa porzione di strato si può con grande approssimazione riguardare come una calotta compresa fra il piano KK' e due superficie elissoidiche toccantisi in A; o come l'aggregato di un grandissimo numero di unghie, ciascuna delle quali sia parte di una calotta sferica compresa fra il piano KK' e due superficie sferiche di diverso raggio toccantisi in A.

Cominceremo perciò a determinare l'azione di una intera calotta sferica di questa specie; ossia la differenza d' azione di due segmenti di sfera nati dalla rotazione intorno ad AB di due triangoli mistilinei AKB, A*k*B (*fig.* 12) essendo AK, A*k* due archi circolari normali ad AB. Chiamando R, R' i raggi delle due sfere, cioè R il maggiore, R' il minore; a la AB; P il coefficiente costante già adoperato nel §. 24, le azioni di essi due segmenti verso il punto B saranno, come si ha dal valore di T'' del §. 24,

$$P.2\pi\left[a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{1}{3R^2}(a^2+2aR)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$P.2\pi\left[a+\frac{a^2}{R'}+\frac{a^3}{3R'R'}-\frac{1}{3R'R'}(a^2+2aR')^{\frac{3}{2}}\right];$$

e l'azione della calotta che ne è la differenza, sarà

$$P.2\pi\left[\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a\,(a+2R)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}-\frac{a^2}{R'}-\frac{a^3}{3R'R'}+\frac{a\,(a+2R')^{\frac{3}{2}}}{3R'R'}\right].$$

E prese di questa calotta due unghie contrapposte al vertice, comprese ciascuna fra due piani formanti un sottilissimo spigolo $\Delta\varpi$ lungo la retta AB, l'azione esercitata su B dall'aggregato di queste due unghie sarà

$$P.2\Delta\varpi\left[\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a\,(a+R)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}-\frac{a^2}{R'}-\frac{a^3}{3R'R'}+\frac{a\,(a+2R')^{\frac{3}{2}}}{3R'R'}\right].$$

E però l'azione della calotta elissoidica della *fig.* 11 sarà prossimamente misurata da

$$\Sigma.P2\Delta\varpi\left[\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a\,(a+2R)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}-\frac{a^2}{R'}-\frac{a^3}{3R'R'}+\frac{a\,(a+2R')^{\frac{3}{2}}}{3R'R'}\right]$$

presa la somma da $\varpi=0$, ad $\varpi=\pi$, e ritenendo variabili la R e la R' col variare di ϖ.

Ora essendo quest' ultima quantità tutta moltiplicata per $a^{\frac{1}{2}}$, è facile vedere che col diminuire di a il valore di essa quantità va gradatamente diminuendo, in modo da poter divenir minore di ogni quantità assegnata col diminuire sufficientemente di essa a. Laddove non si può dire lo stesso per riguardo all'altra porzione dello strato repulsivo EEFF, esistente, rispetto al piano KK', dalla banda più lontana da A; l'azione della quale altra porzione non può divenire piccolissima col successivo impicciolimento di a; come si scorge evidentemente prendendo anche soltanto una piccola porzione di questo strato esistente all' intorno del prolungamento della retta AO. Non è adunque possibile che con questa forma di strato vi sia equilibrio fra le azioni esercitate sul punto B per tutte le posizioni di questo punto. E però è assurda la supposizione fatta dapprincipio, che si possano dare due distribuzioni capaci tutte e due di non esercitare azione alcuna sui punti interni.

31. La conclusione regge anche nel caso che la superficie interna FF dello strato residuo sia affatto diversa da quella che abbiamo immaginata, perchè quella esterna EE sia convessa per tutti i versi, e abbia in A un punto comune colla interna. Perocchè condotta da A la normale AO (*fig.* 11), e per un punto B vicinissimo ad A guidato il piano KkBk'K' perpendicolare ad AO; e divisa la calotta KAK'k'Ak in tante unghie per mezzo di tanti piani segantisi in AO ad un angolo acutissimo $\Delta\omega$, l' azione esercitata sul punto B da una qualsivoglia di queste unghie nella direzione AO sarà misurata dalla quantità

$$P.\Delta\omega\left[a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a^{\frac{5}{2}}(2R+a)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right]$$

diminuita dell' azione del solido abbracciato dal piano KK', dalla superficie kAk' e dai due piani segantisi in AO e comprendenti la data unghia; ossia sarà essa azione espressa da

$$P.\Delta\omega.\lambda\left[a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(2R+a)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right],$$

essendo λ una quantità positiva minore di 1. E la totale azione esercitata da tutta la calotta verso il punto B nella direzione AO sarà misurata da

$$\Sigma P.\Delta\omega.\lambda\left[a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(2R+a)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right]$$

dove la R varierà da un' unghia all' altra, e così pure la λ, rimanendo però quest' ultima sempre compresa fra o e + 1.

Ora il valore di questa espressione, atteso il comune fattore a, col diminuire della a può divenir minore di ogni quantità data; cosa che non si può dire dell'azione esercitata sul medesimo punto B, nella contraria direzione OA, da quella porzione del medesimo residuo strato la quale esiste dall'opposta banda del piano KK'. Perciò non può sussistere l'equilibrio per tutte le posizioni del punto B; ed è in conseguenza assurda la supposizione della possibilità delle due maniere di distribuzione.

32. Ciò vale qualunque sia la densità e la grossezza dello strato di fluido repulsivo disposto sotto la superficie CC. Dal che si può arguire che la conclusione vale anche pel caso di una distribuzione meramente superficiale, qual è quella considerata al §. 12. Eccone nulladimeno una dimostrazione.

Immaginiamo per un momento che sieno possibili due distribuzioni meramente superficiali, colle quali un fluido repulsivo disposto nella superficie convessa CC ed operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze, possa non esercitare azione alcuna verso nessun punto dello spazio interno. E supponiamo disposta in CC una data quantità M di un siffatto fluido repulsivo con una di queste due maniere di distribuzione, la quale noi chiameremo la *prima* maniera. E quindi immaginiamo levate successivamente delle piccole por-

zioni di questa quantità M disposte tutte all'altra maniera che noi diremo la *seconda*, continuando queste sottrazioni in fino a che in qualche punto della superficie CC arrivi il fluido residuo ad avere una densità *zero*. Il che dovrà necessariamente avvenire prima che tutta la quantità M sia levata; poichè in alcuni punti di CC, a pari quantità totale di fluido repulsivo, dee aversi una maggiore densità colla seconda maniera che non colla prima; e perciò dee bastare per questi punti una quantità minore di M disposta alla seconda maniera, per avere la stessa densità come disponendo tutta la M alla prima maniera. Ottenuta che siasi in qualche punto A una densità nulla, immaginiamo che si cessi da ulteriori sottrazioni; e condotta da esso punto A una retta AO normalmente e internamente alla superficie CC, e per un punto B della AO vicinissimo ad A menato un piano KK' perpendicolare ad AO, consideriamo l'azione esercitata su B dalla porzione di fluido che, dopo fatte le dette sottrazioni, esisterà nella calotta KAK'. Avrà questa porzione di fluido un minimo di densità nel punto A, e andando lungi da questo punto la densità andrà crescendo progressivamente da tutte le bande. E se immagineremo la calotta KAK' divisa in tante minime unghie superficiali, col mezzo di tanti piani segantisi in AO ad angoli acutissimi, ciascuna di queste unghie si potrà considerare come piegata ad arco circolare, colla densità del fluido dispostovi crescente successivamente coll'allontanamento da A.

Chiamiamo $\Delta\omega$ l'angolo fatto da due piani segantisi in AO e comprendenti una di esse unghie,

δ la densità massima del fluido disposto in essa unghia,

R il raggio di curvatura in A dell'arco che divide per mezzo quest'unghia,

a la comune altezza AB di tutte le unghie,

P l'azione che verrebbe esercitata su B da una massa del considerato fluido, contenuta nell'estensione superficiale 1 colla densità 1, e supposta concentrata in un punto alla distanza 1.

ΔX l'azione esercitata dalla considerata unghia verso il punto B nella direzione AO. Posta (*fig.* 13)

$$AE = x, \quad EF = y,$$

si avrà

$$\Delta X = P \int_0^a dx \left(\frac{ds}{dx}\right) \Delta\omega . y . \lambda\delta . \frac{(a-x)}{[(a-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

essendo λ una quantità compresa fra o e $+1$, e variabile con x; ossia, avendosi $y\left(\frac{ds}{dx}\right) = R$, $y^2 = 2Rx - x^2$,

$$\Delta X = P . \Delta\omega . \lambda'\delta R \int_0^a dx \frac{(a-x)}{(a^2+2Rx-2ax)^{\frac{3}{2}}},$$

dove λ' ha una grandezza intermedia fra il massimo e il minimo valore di λ, ossia è anch'essa una quantità compresa fra o e $+1$. Ed eseguendo le integrazioni sarà

$$\Delta X = PR\Delta\omega . \lambda'\delta . \left[\frac{(a-x)(a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}(2R-2a)} - \int \frac{dx . (a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}} (-1)}{-(R-a)}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta . \left[\frac{(a-x)(a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}}}{-(R-a)} - \frac{1}{R-a} \frac{(a^2+2Rx-2ax)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(2R-2a)} + \text{cost.}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta . \left[\frac{-(a-x)(a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}}}{(R-a)} - \frac{\sqrt{a^2+2Rx-2ax}}{(R-a)^2} + \text{cost.}\right];$$

ed estendendo l'integrale fra i suoi limiti o ed a,

$$\Delta X = PR\Delta\omega . \lambda'\delta \left[\frac{a}{R-a} a^{-1} - \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{(R-a)^2} + \frac{a}{(R-a)^2}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta \left[\frac{R-a}{(R-a)^2} + \frac{a}{(R-a)^2} - \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{(R-a)^2}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta \left[\frac{R-\sqrt{2Ra-a^2}}{(R-a)^2}\right].$$

Ma prendendo il punto B gradatamente più vicino ad A, la densità δ si rende successivamente più piccola sino a poter divenir minore di ogni quantità data; perciò con questo impiccolimento di AB, anche il valore di ΔX decresce sino a potersi rendere più piccolo di ogni dato. E lo stesso è dell' azione di qualsivoglia altra unghia. Dimaniera che coll' impiccolire la AB, l' azione che il fluido esistente nella calotta KAK' dopo le indicate sottrazioni, esercita verso B nella direzione AB, può divenir minore di ogni quantità assegnata. Ma ciò non può avvenire della parte di fluido repulsivo esistente, dopo le indicate sottrazioni, dall' altra banda del piano KK'. È quindi impossibile che il fluido rimasto nella superficie CC dopo le già dette sottrazioni non eserciti azione alcuna sul punto B, per tutte le posizioni di questo. Dunque è assurda la supposizione che vi possano essere due modi di distribuzione dell' indicato fluido repulsivo nella superficie CC, dotate entrambe della proprietà di non esercitare azione alcuna verso i punti contenuti al di dentro.

33. Pel caso che il fluido sia compressibile non ne saprei ancor dare dimostrazione rigorosa. Trattandosi però del fluido elettrico, il quale si distribuisce sensibilmente alla sola superficie, possiamo ritenere che la conclusione valga anche per lui.

Quello poi che sarebbe più importante, sarebbe di estendere cotali dimostrazioni alle superficie qualunque.

ARTICOLO SECONDO.

Della distribuzione dell'elettrico in un conduttore isolato soggetto all' azione di un corpo elettrizzato esterno.

34. È noto ai Fisici che se dinanzi a un corpo conduttore isolato A, elettrizzato in più o in meno o anche allo stato naturale, noi presentiamo un qualsivoglia corpo elettrizzato B, si altera sempre nel primo la distribuzione dell' elet-

trico; e ciò di tale maniera che se il corpo B è elettrizzato in più, una porzione di fluido elettrico abbandona le parti anteriori di A ossia le più vicine a B, per recarsi nelle posteriori; e all' incontro, se il corpo B è elettrizzato in meno, una porzione del fluido elettrico di A proveniente dalle parti posteriori viene a portarsi nelle parti anteriori. Io intendo ne' paragrafi seguenti di dimostrare che questi smovimenti hanno luogo unicamente alla superficie del corpo A.

Per brevità di linguaggio, il corpo presentato B verrà chiamato *corpo attuante*, ed il corpo A in cui si considera lo smovimento, *corpo attuato*.

LEMMA I.

35. *L'azione esercitata su qualsivoglia corpo* ABCD (*fig.* 14) *da una massa* MN *di materia ripulsiva situata all'esterno di esso ed operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze, può essere compiutamente equilibrata e distrutta dall' azione di un' altra massa convenientemente disposta della stessa materia ripulsiva.*

Immaginiamo che tutto all' intorno del corpo ABCD esista un grosso inviluppo di materia ripulsiva, del quale la massa MN faccia parte; e immaginiamo determinato in questo inviluppo uno strato PQRSNM comprendente la stessa massa MN, e affatto privo di azione verso i punti interni (§ 18). Egli è chiaro che l' azione della parte PQRS distruggerà compiutamente l' azione della parte MN.

Le due masse MN e PQRS noi le chiameremo *complementarie*.

36. *Osservazione* I. Nella massa PQRS sono lasciate a nostro arbitrio la figura della superficie interna, la legge della densità e la grossezza; ma determinate queste riesce altresì determinata la figura della superficie esterna.

37. *Osservazione* II. Supponiamo distribuita nel luogo PQRS or ora considerato una quantità di materia attrattiva la quale saturi o riduca *indifferente* la materia ripulsiva ivi esistente. Sarà l'azione di questa materia attrattiva sul corpo ABCD equivalente all'azione della massa ripulsiva MN; giacchè tanto l'una quanto l'altra distruggono l'azione della massa ripulsiva PQRS. Possiamo da ciò concludere che l'azione di una data massa ripulsiva verso un dato corpo ABCD può essere compiutamente supplita dall'azione di una massa attrattiva convenientemente disposta.

38. *Osservazione* III. Viceversa, una massa di materia attrattiva può essere compiutamente supplita da una di materia ripulsiva convenientemente determinata.

LEMMA II.

39. Richiamiamo la *fig.* 3 e la dimostrazione data al §. 11 e seg. Si abbia cioè ancora una qualunque superficie chiusa ABCD; si immagini condotta dentro a questa la superficie pur chiusa *abcd*. Però non siavi più la materia ripulsiva concentrata e uniformemente distribuita nella superficie sferica FGHI; ma in luogo di questa ve ne sia dell'altra distribuita in uno spazio qualunque MN, il quale non inchiuda entro di se la superficie ABCD, rimanendo ferma la supposizione che l'azione di questa materia ripulsiva varii in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

Immaginiamo dopo ciò diviso lo spazio MN in tante parti di minime dimensioni, e ciascuna delle porzioncelle di materia appartenenti a queste parti supponiamola dapprima concentrata nel rispettivo centro di massa, e poscia diffusa e uniformemente distribuita in una superficie sferica descritta intorno a un tale centro e toccante la superficie *abcd*; con che una porzione della considerata massa MN passerà nell'intervallo ABCD*abcd*, e un'altra rimarrà all'esterno della superficie ABCD. Immaginiamo ripetuta una tale operazione

su quest' ultima porzione rimasta all' esterno di ABCD; con che un' altra porzione della massa MN passerà nel detto intervallo. Sulla porzione che rimane ancora all'esterno di ABCD immaginiamo ripetuta la stessa operazione una terza volta; e così si faccia ulteriormente, procedendo nello stessissimo modo, e colle stessissime avvertenze come nel già citato § 11. Ne verremo in fine a conchiudere che nell' intervallo ABCD*abcd* potrà essere distribuita per tal modo una porzione della massa MN da esercitare verso i punti compresi dentro la *abcd* quella stessissima azione che veniva esercitata su essi dapprincipio da cotale massa MN. E potendosi prendere questo intervallo di quella sottigliezza che più piace, se ne potrà altresì conchiudere che *nella superficie* ABCD *può distribuirsi per tal modo una opportuna porzione della massa ripulsiva* MN *da esercitare verso i punti contenuti dentro essa* ABCD *quella stessa azione che viene su essi esercitata dalla intera massa* MN *colla sua distribuzione iniziale.*

40. *Osservazione.* La materia ripulsiva distribuita nella superficie ABCD nel modo or ora indicato, dee dalla banda più vicina ad MN essere più addensata e dalla banda opposta essere meno addensata di quello che porterebbe la sua distribuzione di equilibrio senza la presenza di MN. Così infatti è d' uopo che sia, se essa materia dee tendere ad allontanare da MN le molecole di simile materia contenuta dentro ad ABCD, nel modo stesso come la massa MN.

LEMMA III.

41. *Immaginiamo che all' intorno della superficie* ABCD *si trovi un ampio inviluppo formato della materia ripulsiva superiormente considerata, distribuita con qualsivoglia legge di densità. Si può sempre determinare in questo inviluppo uno strato contiguo ad* ABCD, *il quale eserciti verso i punti interni un' azione uguale a quella esercitata dalla massa ripulsiva* MN (*fig.* 3.)

Si concepisca divisa la massa MN, col mezzo, p. e., di tanti piani paralleli, in tante minime parti *mn*, *m'n'*, *m''n''* ec., e si concepisca distribuita nella superficie ABCD una porzione di materia ripulsiva equivalente alla *mn* nell' azione verso i punti interni, supponendo che questa porzione venga formata dalle molecole più prossime dell' inviluppo immaginato, mossesi all' indentro normalmente alla ABCD medesima. Verrà con ciò l' inviluppo ad avere internamente un' altra superficie A'B'C'D', nella quale pure si immagini disposta un' altra piccola porzione di materia ripulsiva formata similmente dalle molecole ad essa A'B'C'D' più prossime, mossesi normalmente a questa, e l'azione della qual porzione verso i punti interni ad essa A'B'C'D' equivalga a quella della parte *m'n'*. E così si continui sino a che sieno esaurite le parti *mn*, *m'n' m''n''* ec. Si avrà in fine una serie di superficie ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' ec., nelle quali si troverà distribuita una quantità di materia ripulsiva la cui azione verso i punti collocati al di dentro della superficie più interna equivarrà a quella della massa MN. Si supponga ora soppressa la rimanente materia dell'inviluppo, e restituita alle proprie sedi quella che si era recata nelle dette superficie ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' ec. Ne avremo uno strato il quale eserciterà verso i punti a lui interni un' azione quasi equivalente a quella della massa MN, con una differenza che potrà gradatamente impicciolirsi col diminuire più e più le grandezze delle parti *mn*, *m'n'* ec. Il che ci guida a conchiudere che all' esterno della superficie ABCD si può determinare uno strato di materia ripulsiva il quale eserciti verso i punti dentro lui contenuti quella stessissima azione che viene esercitata dalla massa MN, nel quale strato la legge della densità sia affatto arbitraria, ma la superficie esterna venga determinata a norma di questa legge.

42. *Osservazione* I. Sopra l' esterna superficie di questo strato, il quale noi chiameremo S, immaginiamo determinato un altro qualunque strato S' fatto anch' esso della materia ripulsiva del già supposto inviluppo, e anch' esso privo di

azione verso i punti contenuti dentro di lui; e immaginiamo aggiunto questo strato all' S. Così pure immaginiamo determinato al di sotto della detta esterna superficie dello strato S un altro strato S'' fatto della stessa materia ripulsiva, e privo similmente di azione verso i punti interni, ma la cui grossezza non superi in nessun luogo quella di S; e concepiamo sottratto questo nuovo strato dall' S medesimo. Noi avremo tanto la somma S+S', quanto la differenza S—S'', equivalenti ad MN nell'azione verso i punti interni. E perciò vi potranno essere all'intorno di ABCD infiniti strati equivalenti alla massa MN nell' azione verso i punti interni suddetti, de' quali strati però uno sarà il più piccolo di tutti, e sarà quello che in qualche suo punto avrà una grossezza nulla.

43. *Osservazione* II. Si può immaginare esistente anche al di dentro di ABCD della simile materia ripulsiva disposta con qualunque legge di densità, e determinare anche in essa uno strato contiguo ad ABCD il quale sia equivalente ad MN nell' azione verso i punti interni.

Si può ripetere per provarlo la stessa dimostrazione adoperatasi nel §. 41, colla sola differenza che la materia ripulsiva da distribuirsi nella superficie ABCD sia presa al di dentro di questa, e che perciò la superficie A'B'C'D' riesca dentro ad ABCD; e che lo stesso sia della materia da distribuirsi in A'B'C'D', e della superficie A''B''C''D'', rispetto ad A'B'C'D'; e così di seguito. E anche quì lo strato equivalente ad MN può avere una grossezza qualunque, cominciando da un limite in cui cotale grossezza sia in qualche luogo nulla, sino al punto in cui esso strato venga ad esaurire tutta la materia ripulsiva contenuta dentro ABCD.

44. *Osservazione* III. Se nella materia ripulsiva che poc' anzi abbiamo supposta esistente al di fuori o al di dentro di ABCD, si volesse determinare uno strato la cui azione all'interno fosse uguale ed opposta a quella della massa pur ripulsiva MN, si comincerebbe a determinare una massa complementaria ad MN (§. 35), e si cercherebbe poscia uno strato

equivalente a questa massa complementaria, nel modo indicato a' §. 41 e 43.

45. *Osservazione* IV. Se divenisse attrattiva tanto la materia di cui è formata la massa MN, quanto quella che compone lo strato sovrapposto o sottoposto alla superficie ABCD e determinato in uno de' modi precedenti, conservando però nelle singole loro parti la stessa forza verso tutti i punti come quando erano ripulsive, continuerebbero un tale strato e una tale massa MN ad essere o equivalenti nell'azione verso i punti interni, ovvero di azioni uguali ed opposte, come erano dapprima.

46. *Osservazione* V. Se divenisse attrattiva la sola materia MN, ovvero quella sola dello strato sovrapposto o sottoposto alla superficie ABCD, sempre conservando in tutte le sue parti la stessa energia di prima; in tal caso l'azione di questo strato verso i punti dentro lui contenuti diverrebbe uguale ed opposta a quella della massa MN, se prima le era equivalente, e diverrebbe equivalente se prima le era eguale ed opposta.

LEMMA IV.

47. *Sia* PQRS*pqrs* (*fig.* 15) *uno strato chiuso di materia repulsiva la cui azione verso i punti internamente contenuti sia uguale ed opposta a quella della massa pur repulsiva* MN *o a quella della massa attrattiva* M'N'. *Si desidera conoscere l' azione esercitata da questo strato, in concorso coll' una o coll' altra delle due masse* MN, M'N', *sopra un punto preso alla superficie o dentro la grossezza dello strato stesso.*

Sia PQRSP'Q'R'S' un altro strato di materia ripulsiva distribuita con qualunque legge di densità, il quale si trovi sovrapposto alla superficie PQRS ed equivalga ad MN o ad M'N' nell' azione verso i punti a lui interni. Noi possiamo immaginare sostituito ad MN o ad M'N' questo strato, senza che punto si cangino le azioni dentro la superfice PQRS, e quindi senza che nasca azione alcuna dentro *pqrs*. E perciò sarà P'Q'R'S'*pqrs* uno strato privo d'azione verso i punti contenuti al di dentro di lui.

Prendendo ora a considerare un punto fisico collocato o alla superficie PQRS qual è il punto *m*, o dentro la grossezza dello strato PQRS*pqrs* qual è il punto *n*, si immagini condotta per esso punto una superficie chiusa la quale distingua il detto strato in due parti S, S' delle quali la più esterna S' sia priva di azione verso i punti ad essa interni, e sia perciò tale anche la più interna S verso i punti interni a essa. Il detto punto non soffrirà altra azione che quella spingente all'infuori dipendente dalla parte più interna S. L'azione pertanto sofferta da un tale punto e che da noi si ricerca, si avrà immaginando disposta intorno a PQRS dell'altra materia ripulsiva con una legge qualunque, e concependo condotta per esso punto una superficie che lasci fra se e la *pqrs* uno strato privo di azione verso i punti interni.

48. *Osservazione* I. Volendo la grandezza di qnest'azione nel caso che il punto *m* o l'*n* fosse vicinissimo alla superficie *pqrs*, si farebbe uso de' calcoli esposti nella Proposizione XII.

49. *Osservazione* II. L'azione sul punto considerato sarebbe ancora la stessa se dopo aggiunta la nuova materia intorno alla superficie PQRS, si conducesse, non già pel detto punto, ma più all'esterno, una superficie che lasciasse fra se e la *pqrs* uno strato privo d'azione verso i punti interni.

50. *Osservazione* III. Tutto quello che or ora si è detto può essere eziandio applicato al caso che lo strato PQRS*pqrs* sia di materia attrattiva, essendo pure attrattiva la massa MN, e ripulsiva in vece la M'N'.

PROPOSIZIONE XIV.

51. *Avendosi un corpo conduttore* ABCD (*fig.* 16) *allo stato naturale, si vuole lo smovimento prodotto nel suo fluido naturale dalla presenza di un corpo* MN *elettrizzato in più.*

Immagineremo levato tutto all'intorno del corpo uno strato ABCD*abc*D di fluido naturale equivalente al corpo MN

nell' azione verso lo spazio interno, prendendo questo strato della minima grandezza possibile, cioè tale che in qualche luogo la sua grossezza sia nulla; e supposto immobile il fluido rimanente, concepiremo restituito il fluido levato, lasciandogli prendere quella disposizione che verrà determinata e dalla sua attrazione verso la materia rimasta deficiente e dalla sua ripulsione fra le proprie parti e verso il corpo MN e dalla compressibilità di cui per avventura egli fosse dotato. Questo elettrico così restituito formerà uno strato privo di azione verso l'interno; e con esso si avrà la distribuzione d'equilibrio pel caso presente, ossia lo smovimento che si ricerca.

Sia infatti *abc*D la superficie della parte del corpo ABCD, la quale rimane allo stato naturale dopo fatta la indicata sottrazione; e immaginiamo che il fluido stato levato venga restituito a varie piccole successive dosi nella maniera seguente. Cioè immaginiamo prima distribuita nella superficie *abc*D una piccola quantità P' di fluido, in modo tale da non esercitare azione alcuna verso i punti interni; e quindi concepiamo che questa quantità P' si rigonfii con movimenti normali alla *abc*D, movendosi verso l' interno le porzioni di esso situate in que' luoghi ove la superficie *abc*D fosse in contatto colla ABCD, e disponendosi per ora queste porzioni al di dentro di *abc*D secondo una legge di densità scelta anticipatamente a piacere per tutti i punti situati entro ABCD; e le porzioni situate negli altri luoghi movendosi all'infuori, e saturando per via tutta la materia deficiente che viene incontrata, e così continuando sino a che il fluido venga in qualche luogo esaurito prima di arrivare alla superficie ABCD, e in qualche luogo arrivi a cotal superficie; e la quantità che di esso avanza in questi ultimi luoghi dopo raggiunta la ABCD e dopo saturata la materia deficiente incontrata, immaginiamo che retroceda lungo le normali già percorse, disponendosi colla già detta legge di densità scelta anticipatamente. E si chiami Q' lo strato nato da un tale rigonfiamento. Dopo ciò si immagini che nella superficie libera di Q', cioè in quella superficie ove vennero a ter-

minare i movimenti del fluido P', si distribuisca un'altra piccola quantità P'' del fluido medesimo, in modo da non esercitare azione alcuna dentro di se. E di poi per mezzo di movimenti normali alla suddetta superficie di Q' si immagini rigonfiata questa quantità P'' nel modo stesso della P', vale a dire con movimenti rivolti interamente all'indentro in que' luoghi ove la superficie ABCD era già stata occupata o raggiunta precedentemente, disponendosi quì pure secondo la già menzionata legge anticipatamente scelta; e negli altri luoghi con movimenti verso l'infuori, saturando la materia deficiente che s'incontra, e proseguendo innanzi o in sino a che il fluido venga esaurito prima di arrivare alla superficie ABCD, o in sino a che sia raggiunta questa superficie, venendo in questo ultimo caso il fluido che sopravvanza a retrocedere lungo le normali già percorse e a disporsi secondo la già scelta legge. E si chiami Q'' lo strato ottenuto dopo questo secondo rigonfiamento. Nella superficie libera di Q'' si immagini disposta un'altra piccola porzione P''' del medesimo fluido da restituirsi, sempre in guisa da non avere azione sui punti interni, e la si immagini quindi rigonfiata in un modo affatto simile a quello della quantità P'', in uno strato che diremo Q'''. E così si continui sino a che venga tutto esaurito il fluido da restituirsi.

La somma degli strati Q', Q'', Q''' ec. eserciterà all'interno di se una qualche piccola azione nata dai diversi rigonfiamenti, la quale però sarà tanto minore quanto più numerosi saranno questi strati, e potrà ridursi minore di ogni minima quantità assegnata col prendere cotali strati in un numero abbastanza grande. Perciò qualunque legge di densità siasi scelta pei punti ove il fluido restituito riesce sovrabbondante, lo strato totale potrà avere una siffatta disposizione da non esercitare azione sui punti interni. Supponiamogli data una tale disposizione, e tratteniamoci un momento a farvi alcune considerazioni.

Ciascuno degli strati Q', Q'', Q''' ec. sarà formato di due distinte parti, come mostra quello compreso fra la superficie

indicata dalla linea continua AB'C*ca*A e la superficie indicata dalla linea punteggiata $\alpha\beta\gamma\alpha$; delle quali parti l'una simile alla αAB'C$\gamma\beta\alpha$ si troverà all'esterno degli strati restituiti precedentemente, avrà la densità del fluido naturale, e saturerà una corrispondente quantità di materia deficiente esistente nello stesso spazio; l'altra parte analoga alla αA*ac*C$\gamma\alpha$ sarà formata di fluido sovrabbondante, disposto colla più volte nominata legge di densità scelta anticipatamente, e si troverà collocata al di dentro della parte di fluido sovrabbondante spettante agli strati già restituiti, appoggiandosi però per poco tratto nel contorno, come si scorge in Aα, Cγ, alla superficie ABCD. E di queste due parti andrà la prima diminuendo continuamente di estensione superficiale dall'uno strato al successivo, e la seconda in vece andrà continuamente crescendo. E la somma di tutti i detti strati restituiti Q', Q'', Q''' ecc. formerà un inviluppo consistente similmente in due parti, cioè in una di fluido naturale limitata internamente dalla superficie *abc*D ed esternamente dalla superficie AB'CDA; e in una di fluido sovrabbondante disposta nel menisco ADC*ca*A, colla legge già scelta e tante volte menzionata.

Cerchiamo ora di determinare questa legge di densità del menisco ADC*ca*A nel modo più conveniente per l'equilibrio. Immaginiamo condotta attraverso al detto menisco una normale Sτ alla superficie ABCD, e consideriamo l'azione sofferta dalle varie molecole d'elettrico situate in siffatta normale. Sia pertanto una di queste molecole situata nel punto p, fra gli strati Q', Q''.... $Q^{(m)}$ collocati più infuori, e gli strati $Q^{(m+1)}$, $Q^{(m+2)}$ ecc. collocati più indentro; i quali strati si suppongano quì stati suddivisi ciascuno in un grandissimo numero di altri, e dotati di quella distribuzione a cui continuamente si avvicinano con tali suddivisioni, di maniera che separatamente considerati non abbiano azione alcuna verso l'interno. Non sentirà una tale molecola nessuna azione dai primi, trovandosi questi all'esterno di essa, ma verrà spinta all'infuori

dai secondi, con una forza tanto più grande quanto più essa si troverà all'esterno. E lo stesso avverrà di tutte le altre molecole esistenti nella retta $S\tau$, sì appartenenti al fluido naturale che al sovrabbondante. Ond'è che quando si ammetta essere l'elettrico un fluido compressibile e formato di molecole prementisi vicendevolmente come quelle de' fluidi ordinarii, tutte quelle fra esse molecole le quali si troveranno nella retta $p\tau$ premeranno quelle esistenti nella pS; e la pressione verrà resistita compiutamente, quando in p vi sia una densità opportuna; in caso diverso ella troverà una reazione o più o meno grande di se, e con cui non potrà fare equilibrio. Converrà adunque osservare se la densità ne' varii punti della normale $S\tau$ sarà adattata pel preciso equilibrio, cioè per resistere appieno ma non essere superiore alla pressione esercitata dalla colonna delle molecole situate più internamente; e se lo stesso avrà luogo per tutte le altre normali. Quando ciò sia, la legge di densità sceltasi sarà quella conveniente. Nel caso contrario converrà cercarne un'altra più adattata. Il che, nel supposto che si possano esaminare in tutte le loro particolarità le forze operanti, riescirà facile a ottenersi dopo avere incominciato a disporre il fluido con una legge anche presa a caso; poichè dopo ciò si saprà presso a poco quanto elettrico sovrabbondante si dee trovare in qualsivoglia sottilissimo prisma normale alla superficie ABCD e che attraversi il menisco ADC*ca*A, e perciò quale densità giovi assegnare a ciascuno de' punti di esso prisma. Stabilita poi a questo modo una legge più conveniente, si tornerà di nuovo a disporre con essa tutto il fluido restituito. E non trovandosi ancora pienamente adattata per l'equilibrio la nuova legge assuntasi, vi si andrà ancora più vicino con una terza operazione. Con che si andrà gradatamente verso un limite, il quale sarà la distribuzione conveniente al perfetto equilibrio e da adottarsi definitivamente.

52. Mostriamo ora come effettivamente con una siffatta distribuzione tutte le molecole d'elettrico del corpo ABCD si debbano trovare in equilibrio.

La cosa è affatto chiara per quelle molecole che vengono a trovarsi al di dentro dello strato restituito, trovandosi esse in equilibrio prima della restituzione, e non soffrendo azione alcuna da un siffatto strato restituito.

Per riguardo alle altre molecole, supponiamo presi nello strato restituito considerato a parte, diversi punti m, n, q, (*fig.* 17) situati in diversi luoghi; e indichiamo con m', n', q', i punti corrispondenti del corpo ABCD supposto privato di nuovo di un tale strato. E cerchiamo quale azione soffrirebbe una molecola d' elettrico collocata in ciascuno di cotali punti.

Cominciamo dal punto m situato fuori del menisco CDA*ac*C. Una molecola esistente in questo punto, supponendo ch' ella si trovi fra gli strati Q', Q'', ... $Q^{(k)}$, e gli strati $Q^{(k+1)}$, $Q^{(k+2)}$ ecc. non sentirà azione alcuna dai secondi, e sarà spinta dai primi all'infuori con una forza determinata e dalla distanza fra esso punto m e la superficie *abc*D, e dalla densità del fluido naturale interposto fra questo punto e una tale superficie (§. 29). E una molecola situata in m', per la combinata azione del corpo MN e dello strato deficiente ABCD*abc*D (*fig.* 18.) sarà attirata all' indentro colla stessa forza come se all' intorno della superficie ABCD si ponesse uno strato indefinito ABCDPQRS di materia deficiente, si conducesse per m' una superficie che lasciasse fra se e la *abc*D uno strato privo di azione verso l'interno, e si considerasse unicamente l'attrazione di questo strato verso la m' (§. 47 e seg.); e questa forza sarebbe determinata dalla distanza fra m' ed *abc*D, e dalla densità della materia deficiente collocata in questo intervallo; e sarebbe perciò uguale alla forza con cui la molecola m viene spinta in direzione contraria. Applicato perciò al corpo ABCD lo strato *abc*DAB'CD, e unite in una sola le molecole m, m', sarà quest' unica molecola tanto attirata all'indentro dal corpo ABCD spogliato come sopra d' elettrico ma con insieme l' MN, quanto è spinta all' infuori dallo strato restituito, e si troverà perciò in equilibrio.

Si può opporre che la conclusione trovata al §. 29 non è che approssimata, e che potrebbe essere soltanto approssimato anche l' equilibrio di cui si tratta. Io credo però ch'esso abbia luogo rigorosamente. Infatti sotto l'azione combinata del corpo MN, della materia deficiente *abc*DABCD (*fig.* 16) e dello strato restituito, tutte le molecole del fluido naturale situate dentro la superficie *abca* si trovano in perfetto equilibrio, ed esse si troverebbero in questo stato anche quando si levasse il corpo MN, la materia ABCB'A rimasta deficiente e il menisco sovrabbondante ADC*ca*A ; giacchè dopo questa sottrazione non avanzerebbe che della materia allo stato naturale incapace di esercitare alcuna azione nè dentro lo spazio *abca* nè altrove. Adunque un siffatto menisco sovrabbondante e una siffatta materia deficiente formano col corpo MN un sistema il quale, tanto lasciato sussistere quanto levato, lascia le molecole contenute dentro *abca* in equilibrio, e non esercita perciò azione dentro a questo spazio. Ma un tale sistema chiude insieme coll' *abca* anche lo spazio *a*AB'C*cba*, e anche a questo è da credere che si debba estendere la detta nullità d'azione; poichè se noi fingiamo che una molecola d' elettrico si muova dentro lo spazio totale chiuso dentro questo sistema, passando con moto continuo da un punto preso entro *abca* ad un punto qualsivoglia preso entro *a*AB'C*cba*, le azioni che, soffrirà essa molecola dai diversi punti fisici del detto sistema varieranno tutte secondo la legge di continuità per tutto il movimento di essa molecola, e tanto esse azioni quanto tutte le successive derivate de' loro valori algebraici, non essendovi in tutto questo movimento circostanza alcuna in forza della quale essa legge di continuità possa essere interrotta. E però e da credere che una tal legge debba valere anche per l'azione totale esercitata dall'intero sistema; e se questo esercita invariabilmente un' azione nulla per tutte le posizioni della molecola dentro lo spazio *abca*, è affatto credibile che l'azione debba mantenersi nulla anche passando essa molecola entro allo spazio *a*AB'C*cba*. Ma in questo spazio vi ha nullità di azione quando

manca il sistema summenzionato; dunque è credibilissimo che questa nullità debba sussistere anche quando esso sistema vi sia; vale a dire, che debbe la molecola *mm'*, dopo la restituzione del fluido levato, trovarsi in perfetto equilibrio. Non ho però ancora potuto trovare di ciò una dimostrazione veramente rigorosa.

Passiamo ora al punto *n* (*fig.* 17) situato dentro al menisco A*ac*CDA, ma al di fuori della superficie *abc*D. Questo punto avrà al di dentro di se alcuni de' primi fra gli strati Q', Q'', Q''' ecc., i quali primi strati noi indicheremo con Q', Q''.... $Q^{(h)}$ ed alcuni degli ultimi, che noi indicheremo con $Q^{(h+1)}$, $Q^{(h+2)}$ ecc. ma avrà al di fuori alcuni degli intermedii, cioè gli strati $Q^{(h+1)}$, $Q^{(h+2)}$ ..... $Q^{(h)}$. Ora questi strati intermedii non eserciteranno azione alcuna su d'una molecola d'elettrico situata in *n*, ma tanto i primi quanto gli ultimi ne eserciteranno una diretta all' infuori, cioè i primi una determinata dalla distanza fra *n* e *abc*D e dalla densità del fluido naturale interposto; e gli ultimi, una determinata dalla grossezza e densità media dello strato di fluido sovrabbondante esistente fra *n* e la superficie interna C*ca*A del menisco. E una molecola situata in *n'*, per l'azione de' corpi ABCD ed MN sarà attirata all'indentro con una forza determinata dalla grossezza e dalla densità dello strato deficiente interposto fra *n'* ed *abc*D, forza che sarà uguale e contraria a quella esercitata su *n* dagli strati Q', Q''..... $Q^{(k)}$ già menzionati. La quale uguaglianza non sarà già approssimata, io credo ma bensì rigorosa. Poichè dopo restituiti gli strati Q', Q''... $Q^{(k)}$ e qualcuno degli intermedii, il punto *n* si trova nella stessa condizione in cui è il punto *m* dopo la restituzione di tutti quanti questi strati; talchè dopo restituita quella porzione è da credere che il punto *nn'* si debba trovare in perfetto equilibrio fra l'azione di ABCD e di MN, e l'azione degli strati restituiti. E la restituzione degli altri strati fa che esso punto *n* venga spinto all'infuori come se sopra di esso operassero soltanto gli ultimi $Q^{(k+1)}$,

$Q^{(k+2)}$ ecc.; e però con una forza determinata dalla grossezza e dalla densità media del fluido sovrabbondante interposto fra *nn'* ed A*ac*C ed appartenente a questi ultimi strati. E una tale tendenza all' infuori con insieme quella di tutte le altre molecole situate più internamente nella stessa normale ad ABCD, sì appartenenti al fluido naturale che al sovrabbondante, si troverà pienamente resistita dalla reazione del fluido più esteriore, esistente nella stessa normale, essendosi appunto scelta pel menisco A*ac*CDA una legge di densità a ciò conveniente.

Una molecola finalmente situata in *q* nella parte di menisco collocata al di dentro di *abc*D è spinta all' infuori dal solo fluido sovrabbondante collocato più internamente ed appartenente ad alcun degli ultimi fra gli strati Q', Q'', Q''' ec., e questa è la sola forza che opererà sulla molecola *qq'* dopo l' applicazione dello strato totale al corpo ABCD; e anche questa forza con insieme quella operante su tutte le altre molecole situate più internamente, cioè fra il punto *qq'* e la superficie A*ac*C, sarà pienamente resistita dalla reazione del fluido collocato fra *qq'* e la superficie ABCD.

Pertanto, quando il fluido restituito sia disposto nel modo indicato al §. 51.

1.° Tutte le molecole situate nello spazio occupato da questo fluido si troveranno in equilibrio;

2.° Tutte quelle collocate al di dentro si troveranno pure in equilibrio.

OSSERVAZIONI.

53. *Osservazione* I. Il fluido sovrabbondante appartenente al menisco A*ac*CDA (*fig.* 16) ha in ciascuna delle normali condotte alla superficie ABCD quella stessa, o prossimamente quella stessa disposizione, come se levato il corpo attuante MN, si elettrizzasse in più il corpo ABCD a tal segno da avere, sotto una data minima porzioncella di superficie collocata in-

torno alla base di quella normale, la stessa quantità d' elettrico che si ha ora colla presenza del corpo MN.

54. *Osservazione* II. Se il corpo MN fosse elettrizzato in meno, si avrà l'effetto della sua azione attuante sul corpo ABCD, sostituendo ad esso MN un corpo elettrizzato in più convenientemente disposto; il che è sempre possibile per quello che si è detto al §. 37.

55. *Osservazione* III. Avendosi molti corpi attuanti, altri elettrizzati in più, ed altri in meno, ed essendo l'attuato sempre dotato della dose naturale d' elettrico, l'azione di tutti i corpi attuanti si può ridurre a quello di un sistema di corpi tutti elettrizzati in più; e questo sistema si può riguardare come un unico corpo elettrizzato in più.

56. *Osservazione* IV. Supponiamo ora che il corpo attuato ABCD, oltre all' essere esposto all'azione di uno o più corpi elettrizzati, abbia un' elettricità sua propria, e primieramente ch' esso sia elettrizzato in più. In questo caso cominceremo a ridurre l' azione attuante, quando nol sia, a quella di un unico corpo elettrizzato in più. Quindi immagineremo levata ad ABCD la quantità d' elettrico sovrabbondante, e ridotto dappertutto esso ABCD allo stato naturale, e poscia, come al §. 51, immaginiamo a lui tolto uno strato ABCD*abcd* di fluido naturale equivalente all' azione del corpo attuante; e in fine concepiremo restituita a piccole dosi, nel modo veduto al §. 51 medesimo, tanto quest' ultima quantità d'elettrico quanto quella sovrabbondante levata prima. Con che si avrà o un menisco elettrizzato in più maggiore di quello considerato precedentemente, o una sovrabbondanza d' elettrico in tutta la superficie del corpo ABCD. Ma si avrà sempre l' equilibrio sì in tutto lo spazio occupato dal fluido restituito, come in tutto lo spazio da esso abbracciato. Il che si può dimostrare ripetendo quello che s'è detto al §. 52.

57. *Osservazione* V. Abbia in vece il corpo attuato una quantità d' elettrico minore della dose naturale. In questo caso dopo trovata la distribuzione d' equilibrio che avrebbe luogo

se il corpo avesse la dose naturale d'elettrico e fosse soggetto alla stessa azione attuante, si concepirà tolto ad esso corpo del fluido elettrico cominciando a detrarre gli ultimi degli strati Q', Q'', Q''' ecc. e venendo per ordine ai precedenti, e se tutti questi non bastano, venendo in fine a levare una sufficiente porzione del fluido naturale contenuto sotto la superficie *abc*D, togliendone uno strato superficiale privo d'azione verso i punti interni. E questa sarà la distribuzione d'equilibrio pel caso presente; il che si può dimostrare nel modo del §. 52, quando rimangono superstiti alcuni degli strati Q', Q'', ecc., ed è ancora più facile a vedersi, quando convenga altresì levare del fluido naturale sotto la superficie *abc*D.

58. *Osservazione* VI. In tutti questi casi, stabilito che siasi l'equilibrio, il corpo ABCD è formato da una quantità di materia allo stato naturale, abbracciata o da uno strato superficiale sovrabbondante, o da uno strato superficiale deficiente, o da uno strato sovrabbondante in una parte della superficie e deficiente nell'altra. E ne' luoghi ove è sovrabbondante si può ripetere quanto abbiam detto al §. 53.

Consideriamo ora di nuovo i diversi casi particolari già esaminati, guardandoli da altri aspetti. E cominciamo dal caso d'un corpo dotato della dose naturale d'elettrico e sottoposto all'azione attuante di un corpo elettrizzato in più.

59. *Osservazione* VII. In un siffatto corpo, se la materia deficiente e il fluido sovrabbondante che dopo stabilito l'equilibrio si trovano adjacenti da bande opposte alla superficie ABCD, venissero projettati e condensati su questa per mezzo di movimenti ad essa normali, pochissima azione nascerebbe con ciò verso i punti interni, attesa la piccolezza de' movimenti operatisi; e pochissimo cangiamento si esigerebbe nella distribuzione di esso elettrico e di essa materia deficiente, mantenuti in questa superficie, perchè si riavesse l'esatto equilibrio.

Si otterrebbe poi una distribuzione superficiale veramente equilibrata immaginando disposta nella superficie ABCD una quantità di materia deficiente distribuita in modo da compensare l'azione del corpo MN verso i punti interni ad essa ABCD, e una quantità di fluido sovrabbondante che basti, per riguardo alla massa, a saturare questa materia e sia disposta in modo da non esercitare azione alcuna verso i punti interni. E anche questa distribuzione ipotetica sarebbe pochissimo diversa dalla distribuzion reale che prende l'elettrico nel corpo ABCD alla presenza di MN: le diverse porzioni cioè della superficie ABCD conterrebbero con questa distribuzione ipotetica prossimamente quella stessa quantità di materia deficiente o di fluido sovrabbondante le quali si trovano loro rispettivamente sottoposte colla distribuzione reale. Perocchè nella distribuzione reale la materia deficiente e il fluido sovrabbondante formano sempre, sotto la superficie de' corpi, degli strati estremamente sottili.

Ne' prossimi paragrafi 60, 61, 62, 63, 64 si espongono de' risultamenti che si verificherebbero appuntino nel caso che la distribuzione delle due elettricità fosse puramente superficiale, che e hanno luogo soltanto per approssimazione, ma approssimazione grandissima, nel caso reale di una distribuzione che occupi qualche minima grossezza.

60. *Osservazione* VIII. Se l' elettricità positiva del corpo MN si cangiasse in negativa conservando la medesima intensità, in tutti i punti della superficie ABCD verrebbesi ad avere uno stato contrario al precedente ed ugualmente intenso. Infatti così avvenendo, si equilibrerebbero ancora fra loro le azioni esercitate su ciascuna molecola del fluido interno sì per parte del corpo MN che delle elettricità superficiali del corpo ABCD.

61. *Osservazione* IX. Trovandosi a fronte del corpo ABCD parecchi corpi attuanti, elettrizzati alcuni in più ed altri in meno, lo smovimento prodotto in esso corpo ABCD si avrà col determinare le distribuzioni che verrebbero separatamente in esso cagionate dalla presenza de' diversi corpi attuanti, e

coll'immaginare quindi sovrapposte e compenetrate tutte le distribuzioni separate; di maniera che in un punto qualsivoglia della superficie del corpo attuato si avrà quella specie e quella intensità di elettricità che risulta dal sommare insieme tutte le intensità positive relative a quel punto, e tutte le intensità negative, e dal sottrarre l'una somma dall'altra. Con questa distribuzione in fatti si equilibreranno a vicenda tutte le azioni operanti su ciascuna molecola d'elettrico esistente nell'interno del corpo.

A questo caso si riduce evidentemente quello in cui si ha un unico corpo attuante elettrizzato in alcune sue parti in più e in altre in meno.

62. *Osservazione* X. Se il corpo attuato, oltre all'esser soggetto all'azione di uno o più corpi attuanti, ha altresì un'elettricità propria, la distribuzione che dee in esso avere l'elettrico si può determinare cercando separatamente la distribuzione dell'elettricità propria, e le distribuzioni che verrebbero separatamente cagionate in esso, supposto allo stato naturale, da ciascuno de' corpi attuanti, e quindi immaginando compenetrate insieme tutte queste distribuzioni.

63. *Osservazione* XI. Se il corpo attuato è in comunicazione col terreno, si ha la distribuzione dell'elettricità in esso corpo, riguardando questo siccome formante una massa unica col globo terrestre. Donde si ricava che anche in questo caso la distribuzione è meramente superficiale; e che essendo parecchi i corpi attuanti, ella si può ancora dterminare coll'immaginar compenetrate insieme quelle separate relative a ciascuno di essi.

64. *Osservazione* XII. Allorquando son più d'uno anche i corpi attuati, la distribuzione dell'elettricità in ciascuno di essi, separatamente considerato, si ha riguardando lui solo come attuato e tutti gli altri come attuanti. Ond'è che anche in questo caso l'elettricità de' detti corpi attuanti è tutta superficiale.

65. *Osservazione* XIII. A compimento delle cose precedentemente esposte richiamerò il caso contemplato al §. 17, cioè di un corpo il quale, levandogli successivamente degli strati di materia repulsiva privi di azione verso i punti interni, si venga in fine a ridurre a più parti discontinue. In qual modo potrassi dopo ciò continuar ancora tale sottrazione?

Noi possiamo distinguere in cotale questione tre casi. Sia infatti PQ (*fig.* 19) un corpo formato di una materia ripulsiva respingentesi al solito in ragione inversa de' quadrati delle distanze; e levati da esso diversi strati privi di azione verso l'interno, siasi egli ridotto alle due parti A e B toccantisi in un unico punto C:

1.° Si potrà in primo luogo supporre cessata di esistere una delle due parti, p. e. la parte B, e continuar a levare all'altra A degli strati privi d'azione verso l'interno, come se questa parte A fosse sola.

2.° Si potrà in secondo luogo considerare la parte B come sussistente per intero; e immaginare levati alla sola A degli strati per tal maniera da essere nulla l'azione dentro di essi, avuto riguardo anche all'azione attuante della B. E in questo caso il primo strato da levarsi dovrebbe esser tale da compensare, per rispetto ai punti a lui interni, l'azione della parte B; essendo poi gli strati successivi mancanti d'azione verso l'interno considerati da se soli.

3.° Si potranno in terzo luogo determinare tanto in A quanto in B degli strati di materia ripulsiva per tal maniera, che riesca nulla l'azione sì dentro a quelli di A che dentro a que' di B. In questo caso saranno arbitrarie, dentro certi limiti, le quantità da prendersi in A e in B; e assegnate ch' esse sieno, si comincerà a dare una figura a piacimento alla interna superficie della quantità *b* che si vuol prendere in B, e si determinerà la figura che dee darsi all'interna superficie della quantità *a* che si vuol levare da A, affinchè riesca nulla l'azione all'interno di essa *a*, avuto riguardo anche all'azione attuante di *b* (le esterne superficie di *a* e di *b* sono quelle

stesse di A e di B). Di poi, lasciata in questo stato la materia *a*, si aggiusterà la *b* in guisa, che computata l'azione di *a* riesca nullo l'effetto nell' interno di *b*. In appresso, siccome con quest' ultima operazione verrà a sconcertarsi l'azione al di dentro di *a*, converrà aggiustare di nuovo la materia di questa *a*. Poi si aggiusterà nuovamente quella di *b*; e così di seguito. Con che si andrà sempre più presso a due limiti, nei quali non vi sarebbe più azione nè all'interno di *a* nè all'interno di *b*. È però d' uopo, per la possibilità della soluzione, che assegnata, p. e., la quantità *a*, non sia la *b* più piccola di un certo limite, e nemmeno più grande di un altro limite, essendo però essa a nostro pieno arbitrio dentro cotali due limiti; i quali si verranno a conoscere nel tentare l' operazione. È questo un caso identico con quello di due corpi vicendevolmente attuantisi.

ARTICOLO TERZO.

Della distribuzione dell' elettricità negli inviluppi conduttori racchiudenti de' corpi elettrizzati.

66. Se un corpo elettrizzato si trova collocato al di dentro di un inviluppo conduttore chiuso tutto all' intorno e comunicante col terreno, rimanendo il corpo rinchiuso perfettamente isolato da cotale inviluppo, si stabilisce nell' interna superficie di quest' ultimo un' elettricità contraria a quella del detto corpo racchiuso, rimanendo però allo stato naturale tutta la grossezza dell' inviluppo medesimo e tutta la superficie esterna. Il quale effetto, allorquando il corpo rinchiuso è elettrizzato in più, nasce da ripulsione del fluido sovrabbondante di quest' ultimo verso il fluido naturale dell' inviluppo; e quando esso corpo rinchiuso è elettrizzato in meno, nasce da attrazione della materia deficiente di un tal corpo verso il fluido naturale de' corpi circostanti. Io esporrò nelle Proposizioni seguenti alcune particolarità di questa elettricità dell'in-

viluppo; e primieramente dell' esser ella unicamente disposta alla superficie interna.

PROPOSIZIONE XV.

67. *Sia* ABCD (*fig.* 20) *la superficie interna di un inviluppo, dentro al quale si contenga una determinata quantità di una materia ripulsiva, distribuita comunque nello spazio* MN, *e la cui ripulsione operi in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Si asserisce che una tale quantità di materia ripulsiva può essere distribuita e condensata per tal modo nella superficie* ABCD, *da esercitare verso lo spazio esterno la stessa azione come quando si trova ancora distribuita in* MN.

Si immagini descritta all' esterno di ABCD un' altra superficie chiusa *abcd*, che non tocchi la prima in nessun punto. Si concepisca divisa la materia ripulsiva distribuita in MN in un grandissimo numero di parti di minime dimensioni, e ciascuna di queste parti si supponga prima concentrata nel suo rispettivo centro di massa, e poscia diffusa e uniformemente distribuita in una superficie sferica descritta intorno a cotal centro e toccante la superficie *abcd*; con che una porzione di siffatta materia ripulsiva passerà nell'intervallo ABCD*abcd*. Sull' altra porzione che rimane ancor compresa al di dentro di ABCD supponiamo eseguita un' operazione simile a quella indicata or ora, con che sia fatta passare una nuova quantità di detta materia ripulsiva nel medesimo intervallo. Immaginiamo replicata la stessa operazione sulla parte di materia ripulsiva che rimane ancora dentro ABCD; e così proseguiamo fino a che entro ad ABCD non ne resti più che una quantità piccolissima. Noi avremo alla fine la massima parte della materia ripulsiva proposta ridotta nell' intervallo anzidetto, con un cangiamento estremamente piccolo nell'azione di essa materia verso i punti collocati all' esterno di *abcd*. E questo cangiamento, come anche la quantità di materia lasciata dentro ABCD si potranno rendere minori di ogni quantità

assegnata, quando si continuino a sufficienza le operazioni, e si prendano di dimensioni sufficientemente piccole le parti in cui si viene ciascuna volta a dividere la materia ripulsiva che era rimasta dentro ABCD. Dal che possiamo conchiudere che alla materia ripulsiva disposta primitivamente nello spazio MN può essere data una tale disposizione entro l'intervallo ABCD*abcd* da esercitare ancora la medesima azione verso i punti collocati all'esterno di *abcd*. E siccome la superficie *abcd* si può prendere vicina quanto si vuole alla ABCD, senza che cessi la verità di questa Proposizione, così, col metodo usato al §. 13, possiamo altresì conchiudere che tutta la suddetta materia ripulsiva si può immaginare per tal modo condensata e distribuita nella superficie ABCD, da esercitare ancora la medesima azione di prima verso i punti collocati all'esterno di questa superficie.

PROPOSIZIONE XVI.

68. *All'esterno della superficie* ABCD *precedentemente menzionata, si trovi disposta secondo una qualsivoglia legge di densità una quantità indefinita di una materia ripulsiva simile a quella contenuta nello spazio* MN. *Si asserisce potersi determinare all'esterno di* ABCD *una tale altra superficie che lo strato di materia ripulsiva compreso nell'intervallo frapposto eserciti all'esterno la medesima azione, come la materia disposta in* MN.

Si supponga divisa questa materia disposta in MN in tante minime porzioni p, p', p'', ec. Si immagini condensata e distribuita in ABCD una porzione della menzionata materia esterna, uguale in quantità alla p, ed equivalente a questa per riguardo agli effetti esercitati all'esterno, e formata da molecole dell'inviluppo vicinissime alla superficie ABCD e venute su quest'ultima per mezzo di movimenti ad essa normali. Verrà con ciò la residua materia del detto inviluppo ad avere un'altra superficie interna, la quale chiameremo A'B'C'D'.

Immaginiamo distribuita in questa un' altra porzione della medesima materia dell' inviluppo, uguale in quantità a p', equivalente a questa nelle azioni verso l' esterno, e formata da molecole dell' inviluppo vicinissime ad A'B'C'D' mossesi dai proprii luoghi in direzioni normali ad essa A'B'C'D'. Nella nuova superficie interna dell' inviluppo, la quale noi diremo A"B"C"D", s' immagini condensata in modo simile una quantità di materia ripulsiva uguale a p''. E così si prosegua finchè siansi tutte esaurite le parti p, p', p'', ec. E dopo tutto ciò si suppongano restituite alle proprie sedi le molecole di materia ripulsiva state trasportate nelle suddette superficie ABCD, A'B'C'D', A"B"C"D" ecc. Si avrà con ciò uno strato di materia ripulsiva, formato da una porzione della materia dell'inviluppo collocata ancora a proprio luogo, il quale strato uguaglierà in massa la quantità di materia distribuita in MN, ed avrà un' azione verso i punti esterni pochissimo diversa da quella esercitata da essa materia di MN, e tanto meno diversa quanto più piccole e più numerose saranno le parti p, p', p'', ecc., ossia quanto più vicine saranno le dette superficie vicendevolmente includentisi. Dal che si può conchiudere potersi un tale strato terminare esternamente in siffatto modo da avere verso i punti esteriori un' azione perfettamente equivalente a quella della materia distribuita in MN.

69. *Osservazione.* I varii movimenti che si sono supposti nella materia repulsiva distribuita in MN, nella Proposizione XV, non cangiano per nulla il luogo del centro di massa di questa materia; di manierachè dopo essersi questa condensata e distribuita nella superficie ABCD, un siffatto centro di massa è ancora nello stesso luogo di prima. Nella XVI Proposizione poi il comun centro di massa delle porzioni di materia repulsiva distribuite nelle varie superficie ABCD, A'B'C'D', ecc. è lo stesso di quello della materia distribuita in MN. Si può perciò conchiudere che quest' ultimo coincide altresì con quello dello strato di materia determinato intorno ad ABCD nella Proposizione XVI medesima.

PROPOSIZIONE XVII ED ULTIMA.

70. Sia MN un corpo elettrizzato in più dove l'elettrico abbia una distribuzione qualunque; e all' esterno abbia esso un inviluppo conduttore, la cui interna superficie ABCD sia di una forma qualunque. Determiniamo in quest' inviluppo uno strato contiguo ad ABCD, tale che il suo fluido naturale sia uguale in quantità ed equivalente nelle azioni verso l'esterno, al fluido sovrabbondante di MN; e quindi immaginiamo levato tutto l' elettrico di un tale strato. Verranno con ciò le molecole d' elettrico esteriori allo strato deficiente, per l' azione combinata della materia lasciata deficiente e del fluido sovrabbondante di MN, a trovarsi perfettamente in equilibrio. E perciò la distribuzione di equilibrio nell' inviluppo suddetto, supposto comunicante col suolo, sarà quella di avere contiguo all' interna superficie l' anzidetto strato deficiente, essendo nel rimanente tutto allo stato naturale.

Sia invece MN un corpo elettrizzato in meno; e si supponga distribuito nella superficie ABCD uno strato di fluido sovrabbondante uguale in quantità al fluido che manca in MN, ed equivalente a questo nelle azioni verso l'esterno, essendo allo stato naturale tutto il resto dell' inviluppo. Anche questa sarà una distribuzione in cui tutte le molecole d' elettrico esteriori alla superficie ABCD si troveranno equilibrate; e sarà essa perciò la distribuzione che avrà luogo nell'inviluppo medesimo quando sia messo in comunicazione col terreno. Veramente, nel caso reale, l' elettricità indotta dell'inviluppo consisterà in uno strato di qualche piccola grossezza. Ma riferendo tutte le molecole d'elettrico sovrabbondanti ai punti normalmente sottoposti della superficie ABCD, si avrà una distribuzione pochissimo differente da quella considerata al §. 67.

Da quanto poi abbiamo veduto al §. 69 possiamo dedurre che il centro di massa dello strato d' elettrico che manca o

che sovrabbonda sopra la superficie ABCD, coincide col centro di massa dell' elettrico che viceversa sovrabbonda o manca nel corpo elettrizzato MN.

71. *Osservazione* I. Supposta in MN prima una sovrabbondanza e poscia una deficienza, uguali in grandezza e simili nella distribuzione, si avranno similissime le maniere di distribuzione delle elettricità indotte nella superficie ABCD; giacchè la diversa sottigliezza degli strati elettrizzati non può arrecare che una differenza impercettibile.

72. *Osservazione* II. L'accumulamento dell'elettricità indotta, sia positiva, sia negativa, nella superficie ABCD, è maggiore in quelle parti di questa che sono più sporgenti verso il vano interno, minore in quelle meno sporgenti, e minima nelle parti cave o rivolte verso l' esterno; tutto al contrario di quanto avverrebbe se ABCD fosse la superficie esterna di un corpo elettrizzato di elettricità propria, e non soggetto ad alcuna azione straniera.

73. *Osservazione* III. Se dentro alla superficie ABCD si trovassero contenuti parecchii corpi MN, M'N', M''N'', ecc. elettrizzati alcuni in più ed altri in meno, si avrebbe per induzione nella ABCD una distribuzione d'elettrico equivalente a una compenetrazione di tutte le distribuzioni corrispondenti ai diversi separati corpi interni (1).

---

(1) In questa Proposizione io sono stato prevenuto dal celebre Poisson, il quale nella sua prima Memoria intorno al magnetismo, inserita fra quelle dell' Accademia di Parigi per gli anni 1821 e 1822, dimostra che in un corpo magnetico di qualunque figura e magnetizzato comunque, purchè di uniforme natura e di temperatura uniforme (le quali due ultime condizioni però io trovo superflue), al magnetismo reale distribuito nelle diverse parti esterne ed interne si può sostituire un magnetismo ipotetico puramente superficiale opportunamente disposto, senza che venga minimamente alterata l' azione magnetica verso i corpi esterni. (Vedi le suddette Memorie di Parigi p. 261). A una simile conclusione arrivò posteriormente altresì Gauss (*Ann. Chim. Phys.* T. 57. p. 16). E qui è da notare che anche le azioni magnetiche variano in ragione inversa de' quadrati delle distanze.

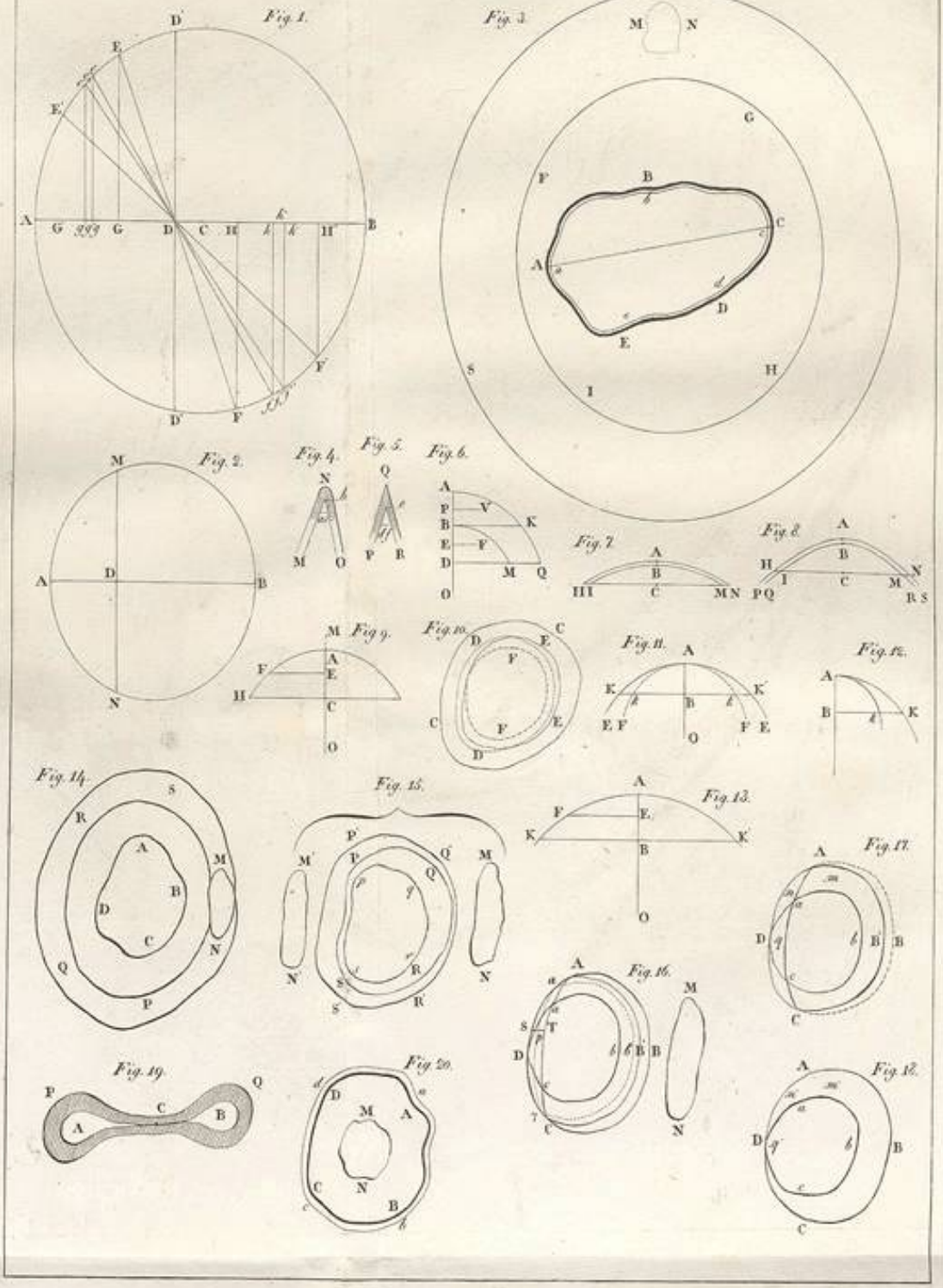
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

74. *Osservazione* IV. Se oltre alla elettricità indotta di cui si è parlato poc'anzi, venisse comunicata all'inviluppo, dopo averlo isolato dal terreno, un' altra elettricità o positiva o negativa, questa si distribuirebbe alla superficie esterna di esso inviluppo con quella stessa legge come se nell' interno non vi fosse nè il corpo elettrizzato racchiuso nè la contraria elettricità indotta, ma quella superficie appartenesse a un corpo pieno, tutto allo stato naturale. Talchè se si mettesse in comunicazione il corpo rinchiuso colla interna superficie dell'inviluppo, e l' elettrico potesse liberamente tragittare fra l'uno e l'altra, si ridurrebbero questa e quello allo stato naturale, senza che alla superficie esteriore avvenisse mutamento alcuno.

E se l' inviluppo, essendo isolato e contenendo il corpo elettrizzato, avesse tutta la sua natural dose d'elettrico, esso nella superficie interna si troverebbe elettrizzato di elettricità indotta precisamente allo stesso modo come se si trovasse in comunicazione col terreno; e alla superficie esterna presenterebbe una elettricità attuata uguale in quantità e simile di natura a quella del corpo racchiuso e disposta allo stesso modo, come se questa superficie esterna fosse la superficie di un corpo pieno, avente prima lo stato naturale, e arricchito di poi ovvero privato di quella quantità d' elettrico.

75. *Osservazione.* V. Dalle cose dette nel secondo e in questo terzo articolo noi possiamo conchiudere che un inviluppo conduttore il quale circondi un corpo, impedisce sempre che questo corpo soffra le azioni elettriche esteriori; e se esso inviluppo è in comunicazione col suolo, impedisce altresì ai corpi esterni le azioni elettriche esercitate dal corpo contenuto.

76. *Osservazione* VI. Non espongo in questa Memoria risultamenti particolari riguardanti la distribuzione dell' elettrico in uno o in altro corpo, in una od in altra circostanza. Su di che, quando si tratti di conduttori elettrizzati non soggetti ad azioni attuanti straniere, o di conduttori soggetti all'azione di corpi attuanti esterni, possono vedersi trattati alcuni casi in due

belle memorie di Poisson (1), delle quali la presente si potrebbe riguardare come una Prefazione. Per rispetto ai corpi elettrizzati collocati nell'interno di inviluppi conduttori, sarebbe degno d'essere trattato il caso di un punto elettrizzato collocato dentro un inviluppo limitato internamente da una superficie sferica, pel quale caso si ha una legge di distribuzione elegantissima (2). Ma lo riserbo ad altra occasione.

(1) Sono esse quelle citate nel §. 1. di questa mia Memoria.

(2) Viene cioè determinata nella detta superficie un' elettricità contraria la cui intensità è in ragione inversa de' cubi delle distanze dal punto attuante. V. il mio *Corso di Fisica* T. III. p. 180.