MEMORIA

SUI RAPPORTI CHE ESISTONO FRA IL CALCOLO DEI RESIDUI E IL CALCOLO DEI LIMITI E SUI VANTAGGI CHE OFFRONO QUESTI DUE NUOVI CALCOLI NELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE O TRASCENDENTI

PRESENTATA ALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO IL 27 NOVEMBRE 1831.

DAL SIGNOR AGOSTINO CAUCHY

MEMBRO DELL'ISTITUTO DI FRANCIA (*)

Ricevuta adì 23. *Ottobre* 1837.

Siano r, p due variabili reali, x, y due funzioni reali di r, p

$$z = x + y\sqrt{-1} \tag{1}$$

una variabile immaginaria, e $f(z)$ una funzione reale o immaginaria di z. Si potranno considerare x, y come rappresentanti un sistema di coordinate piane, le quali, per fissar le idee, noi supporremo rettangolari ed r, p come rappresentanti un sistema di altre coordinate, per esempio di coordinate polari. Inoltre si avrà evidentemente

$$\frac{d\left[f(z)\frac{dz}{dr}\right]}{dp} = \frac{d\left[f(z)\frac{dz}{dp}\right]}{dr}. \tag{2}$$

Sia v il valor comune delle due funzioni che costituiscono li due membri della equazione precedente. Immaginiamo inoltre

(*) Questa Memoria scritta in lingua Francese è stata tradotta in Italiano dal Segretario della Società per uniformarsi agli Statuti.

che nel piano delle x, y si segni un contorno chiuso OO'O"..., e che si determinino col metodo generalmente seguito nel calcolo infinitesimale i valori degli integrali doppj

$$(3) \qquad \int\int v dp dr$$

$$(4) \qquad \int\int v dr dp;$$

supponendo estesa l' integrazione a tutti i punti contenuti in questo contorno vale a dire, a tutti i sistemi di valori di r e p che possono rappresentare delle coordinate di questi medesimi punti. Nell'integrale (3) la prima integrazione relativa a p deve essere effettuata fra limiti che saranno generalmente funzioni di r, e la seconda integrazione relativa ad r fra limiti costanti, mentre che nell' integrale (4) la prima integrazione relativa ad r devee ffettuarsi fra limiti che saranno funzioni di p e la seconda relativa a p fra limiti costanti. Ora siccome la funzione v è al tempo stesso una derivata esatta relativamente a p e relativamente ad r, egli è chiaro che gli integrali doppj quì sopra ricordati si trasformeranno in integrali semplici, in ciascuno dei quali il coefficiente di dx e di dy sarà ordinariamente la differenza fra due valori particolari della funzione

$$(5) \qquad f(z)\frac{dz}{dr}$$

o pure

$$(6) \qquad f(z)\frac{dz}{dp}$$

ridotte a non esser più che funzioni della sola variabile r o p e corrispondenti ad uno dei punti situati sul contorno OO'O".... Aggiungasi che i valori trovati degli integrali (3) e (4) saranno equivalenti fra loro, se la funzione v resta finita e continua per tutti i valori di r e di p compresi fra i limiti delle integrazioni. Ma se accade il contrario, la differenza fra l' integrale (4) e l'integrale (3) sarà una certa espressione Δ, il valore della quale potrà essere determinato sia per mezzo

della teoria degli integrali singolari, sia con l'ajuto del calcolo dei Residui.

Concepiamo, per fissar le idee, che le funzioni x, y restando finite e continue per tutti i punti contenuti nel contorno OO'O''. . . . l'equazione

$$(7) \qquad \frac{1}{f(z)} = 0$$

ammetta delle radici reali o immaginarie $z_{,}$, $z_{,,}$. . . . z_m corrispondenti ad uno o più di questi stessi punti, ma che la funzione $f(z)$ ottenga per tutti gli altri punti un valor unico e determinato fra i limiti delle integrazioni. Se d'altronde il binomio

$$(8) \qquad \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp} - \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}$$

conserva sempre un valor positivo si avrà (*)

(*) Infatti essendo z fra le radici della equazione (7) una di quelle che corrispondono a un punto contenuto nel contorno OO'O''. . . . la parte di Δ corrispondente a questa radice sarà un integrale definito singolare che si potrà ridurre al prodotto

$$K\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a-\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau)} - \frac{1}{a(+\rho\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau)}\right]da$$

indicando K il residuo parziale relativo alla radice che si considera e $\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\text{sn.}\tau)$ il valor corrispondente del rapporto

$$\frac{\left(\frac{dz}{dp}\right)}{\left(\frac{dz}{dr}\right)} = \frac{\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dx}{dp}+\frac{dy}{dr}\cdot\frac{dy}{dp}+\left(\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dy}{dr}\right)\sqrt{-1}}{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2}.$$

Ora esprimendo l'integrale

$$\int\left[\frac{1}{a-\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau)} - \frac{1}{a+\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau)}\right]da$$

$$\Delta = 2\pi\sqrt{-1}.\mathrm{E}((f(z))) \tag{9}$$

estendendo il segno E ai valori $z_{,}\ z_{,,} \ldots z_{m}$ della variabile z. Se per questi valori, o per alcuni di essi, il binomio (8) divenisse negativo converrebbe mutare i segni dei valori corrispondenti compresi nel secondo membro della equazione (7).

Si può ricorrere alla formola (9) sia per determinar Δ quando si conoscono le radici $z_{,}, z_{,,} \ldots z_{m}$; sia per determinare queste radici o delle funzioni di queste radici calcolando direttamente i valori degli integrali definiti che Δ contiene. Allora conviene rovesciar la formola (9) e scriverla così

$$\mathrm{E}((f(z))) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}\,. \tag{10}$$

Se vuolsi ottenere un limite superiore al modulo della somma rapppresentata da $\mathrm{E}((f(z)))$.

Basterà osservare 1.° che con le sostituzioni convenienti si possono trasformare gli integrali definiti contenuti in Δ per modo che trovinsi tutti presi fra gli stessi limiti, e in conseguenza esprimer Δ per mezzo di un solo integrale definito. 2.° che il modulo di quest'ultimo integrale non sorpasserà la differenza fra i due limiti dell' integrazione moltiplicata per il valor più grande che acquistar possa il modulo della funzione sotto il segno $\int$.

---

per mezzo dei logaritmi, si conoscerà tosto che questo integrale preso fra i limit $-\infty$, $+\infty$ si riduce a

$$2[\mathrm{L}(\sqrt{-1}) - \mathrm{L}(-\sqrt{-1})] = 2\pi\sqrt{-1}$$

oppure a

$$-2[\mathrm{L}(\sqrt{-1}) - \mathrm{L}(-\sqrt{-1})] = -2\pi\sqrt{-1}$$

secondo che la quantità $\rho\,\mathrm{sen}.\tau$, o ciò che si riduce allo stesso la quantità

$$\rho\,\mathrm{sen}.\tau\left[\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2\right] = \frac{dx}{dr}\ \frac{dy}{dp} - \frac{dx}{dp}\cdot\frac{dy}{dr}$$

è positiva o negativa.

Per mostrare un' applicazione dei principj che abbiamo stabiliti supponiamo tosto

$$r = x, \quad p = y$$

ed ammettiamo che essendo x, y coordinate rettangolari, il contorno OO'O''.... si riduca al sistema di quattro rette rappresentate dalle equazioni

$$(11) \qquad x = x_0, \quad x = \mathrm{X}, \quad y = y_0, \quad y = \mathrm{Y}$$

nelle quali x_0, X, y_0, Y rappresentano quantità reali soggette alle condizioni

$$(12) \qquad x_0 < \mathrm{X}, \qquad y_0 < \mathrm{Y}.$$

Si avrà

$$(13) \qquad {}^{\mathrm{X}}_{x}\mathrm{E}^{\mathrm{Y}}_{y}((f(z))) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}$$

e

$$(14) \quad \Delta = -\int_{x_0}^{\mathrm{X}} [f(x+\mathrm{Y}\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})]\, dx$$

$$+\sqrt{-1}\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} [f(\mathrm{X}+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})]\, dy.$$

D' altronde nella formola (13) si può senza inconveniente supporre x ed y fra loro vincolati dall' equazione (15)

$$\frac{y-y_0}{\mathrm{Y}-y_0} = \frac{x-x_0}{\mathrm{X}-x_0}$$

che rappresenta la retta condotta dal punto (x_0, y_0) al punto (X, Y), poichè allora ai valori estremi x_0, X della variabile x corrisponderanno i valori estremi y_0, Y della variabile y. Ciò posto, se si indica con θ il valor comune dei due rapporti che costituiscono i due membri dell' equazione (15) si troverà

$$(16)\qquad \Delta = -(X-x_0)\int_0^1 [f(x_0(1-\theta)+\theta X+Y\sqrt{-1})$$
$$-f(x_0(1-\theta)+\theta X+y_0\sqrt{-1})]d\theta$$
$$+(Y-y_0)\sqrt{-1}\int_0^1 [f(X+(y_0(1-\theta)+\theta Y)\sqrt{-1})$$
$$-f(x_0+(y_0(1-\theta)+\theta y_0)\sqrt{-1}]\,d\theta.$$

In conseguenza il modulo della espressione (13) sarà inferiore al valor più grande che acquistar possa il modulo del prodotto

$$(17)\qquad \frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}(Y-y_0)[f(X+(y_0(1-\theta)+\theta Y)\sqrt{-1})\\ \quad -f(x_0+(y_0(1-\theta)+\theta y_0)\sqrt{-1})]\\ \quad +(X-x_0)[f(x_0(1-\theta)+\theta X+Y\sqrt{-1})\\ \quad -f(x_0(1-\theta)+\theta X+y_0\sqrt{-1})]\sqrt{-1}\end{array}\right\}$$

quando ivi si fa variar θ tra i limiti 0, 1; o ciò che torna lo stesso al valor più grande che possa acquistare il modulo del rapporto

$$(18)\qquad \frac{(Y-y_0)[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]+(X-x_0)[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]\sqrt{-1}}{2\pi}$$

quando ivi si fa variare x fra i limiti x_0, X ed y fra i limiti y_0, Y, ma in maniera da verificar l'equazione (15). Dunque a più forte ragione il modulo della espressione (13) sarà inferiore al prodotto che ottiensi moltiplicando la quantità

$$(19)\qquad 2(X-x_0)+2(Y-y_0)$$

cioè a dire il perimetro del rettangolo al quale si riduce nel caso presente il contorno OO'O''. . . . . per il rapporto

$\frac{1}{2\pi}$, e per il valor più grande che possa acquistare il modulo della funzione $f(z)$ per i punti situati sul perimetro di cui trattasi.

Immaginiamo ora che il contorno OO'O''. . . . non si riduca più al sistema di quattro rette e sia una curva chiusa qualunque. Si dovranno nell' integrale

$$(20) \qquad \int_{x_0}^{X} [f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]dx$$

che racchiude l' equazione (14), rimpiazzare le costanti y_0, Y con funzioni di x, oppure se la curva cessa di essere convessa si dovrà rimpiazzare la differenza

$$f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})$$

con la somma V di più integrali della forma

$$\int f(z)dy$$

presi fra i convenienti limiti. Sia d' altronde P un punto scelto arbitrariamente nell' interno della data curva ed s l' arco di questa curva contato positivamente a partire dal punto O in un senso tale che questo arco venendo a crescere il raggio vettore condotto dal punto P all' estremità dell' arco, abbia nel piano delle x, y un movimento diretto di rotazione intorno al punto P. Denominiamo finalmente c il perimetro intiero della curva OO'O''. . . . e supponiamo che nella funzione

$$f(z)=f(x+y\sqrt{-1})$$

si sostituiscano ad x, y li suoi valori relativi a un punto qualunque di questo perimetro espressi in funzione di s. Siccome l' ordinata y di questo punto non potrà crescere, senza che la sua estremità entri nell' interno della curva se $\frac{dx}{ds}$ è

positivo, e senza che essa ne sorta se $\frac{dx}{ds}$, è negativo egli è chiaro che l'elemento Vdx dell'integrale che dovrà rimpiazzar l'espressione (20) sarà la somma di tanti elementi della forma

$$(21) \qquad -\frac{f(z)dx}{ds} \cdot ds$$

quanti saranno i punti situati nel contorno OO'O''.... nel prolungamento dell'ordinata che si considera. In conseguenza converrà nella equazione (14) rimpiazzare l'espressione (20) con l'integrale

$$(22) \qquad -\int_0^c \frac{f(z)dx}{ds}\, ds.$$

Si proverà parimente che nella ipotesi ammessa, devesi all'espressione

$$(23) \qquad \int_{y_0}^{Y} [f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]\, dy$$

sostituire l'integrale

$$(24) \qquad \int_0^c f(z)\frac{dy}{ds}\, ds;$$

essendo le coordinate x, y sempre espresse in funzione di s. In conseguenza si otterrà invece della formola (14) la seguente

$$(25) \qquad \Delta = \int_0^c f(z)\frac{dx+dy\sqrt{-1}}{ds}\, ds,$$

e l'equazione (10) potrà essere ridotta alla

$$(26) \qquad E((f(z))) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c f(z)\frac{dz}{ds}\, ds.$$

Ora il modulo dell'espressione immaginaria

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{ds}$$

essendo precisamente l' unità, poichè generalmente si ha

$$\frac{dx^2-dy^2}{ds^2}=1 \tag{27}$$

ne segue dalla formola (25) che il modulo di Δ non sorpasserà il prodotto del perimetro c per il valor più grande che acquistar possa il modulo di $f(z)$ corrispondente ad un punto situato sul contorno OO'O''. . . . se si rappresenti questo valor più grande per mezzo della lettera caratteristica Λ collocata davanti alla funzione $f(z)$, e se si generalizza così l' uso che noi abbiamo fatto di questa caratteristica in una precedente Memoria, il modulo del residuo integrale

$$\mathrm{E}((f(z))) \tag{28}$$

non sorpasserà in modo alcuno

$$\frac{c}{2\pi}\,\Lambda f(z). \tag{29}$$

Si può dunque enunciare la proposizione seguente.

Primo Teorema. Siano x, y due variabili reali considerate come rappresentanti coordinate rettangolari; $z=x+y\sqrt{-1}$ una variabile immaginaria,

$$\mathrm{E}((f(z)))$$

il residuo integrale di $f(z)$ esteso a quelle fra le radici della equazione (7) che corrispondono a punti contenuti in un contorno dato OO'O''. . . . ed il perimetro di questo contorno. Il valore esatto del residuo integrale

$$\mathrm{E}((f(z)))$$

sarà determinato dall' equazione (26), e il modulo di questo residuo avrà per limite superiore il prodotto di $\frac{1}{2\pi}$ per il perimetro c e per il più grande dei moduli di $f(z)$ che corrispondono a punti situati sopra questo perimetro.

Bisogna osservare che le formole (25) (26) ed il teorema 1.° si estendono anche al caso che il contorno OO'O''..... fosse chiuso dal sistema di molte porzioni di linee rette o curve. In questo modo specialmente il teorema 1.° continua a sussistere quando il contorno OO'O''..... è il perimetro di un rettangolo, il che combina con quanto si è detto più sopra.

Immaginiamo adesso che nella formola (20) pongasi

$$x = r\cos.p, \quad y = r\sin.p\,;$$

inoltre immaginiamo che r, p rappresentando delle coordinate polari il contorno OO'O''.... si riduca al sistema di due rette e di due archi di cerchio rappresentati dalle equazioni

$$(30) \qquad r = r_0, \quad r = \mathrm{R}, \quad p = p_0, \quad p = \mathrm{P},$$

nelle quali r, R sono quantità positive assoggettate alla condizione

$$(31) \qquad r_0 < \mathrm{R}$$

e p_0, P sono archi di circolo scelti ad arbitrio fra i limiti $-\pi$, $+\pi$ in modo da adempiere alla condizione

$$(32) \qquad p_0 < \mathrm{P}.$$

Si avrà

$$(33) \qquad z = re^{p\sqrt{-1}}$$

$$(34) \qquad {}^{(\mathrm{R})}_{(r_0)}\mathrm{E}^{(\mathrm{P})}_{(p_0)}((f(z))) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}$$

$$(35) \qquad \Delta = -\int_{r_0}^{\mathrm{R}}\left[e^{\mathrm{P}\sqrt{-1}}f(re^{\mathrm{P}\sqrt{-1}}) - e^{p_0\sqrt{-1}}f(re^{p_0\sqrt{-1}})\right]dr$$

$$+\sqrt{-1}\int_{p_0}^{\mathrm{P}}\left[\mathrm{R}f(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}) - r_0 f(r_0 e^{p\sqrt{-1}})\right]e^{p\sqrt{-1}}dp.$$

Ciò posto, ragionando come quì sopra, si proverà che il modulo della espressione (34) è inferiore al più grande dei valori che riceva il modulo del rapporto

$$(36)\qquad \frac{(\mathrm{P}-p_0)e^{p\sqrt{-1}}\left[\mathrm{R}f(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})-r_0 f(r_0 e^{p\sqrt{-1}})\right]}{2\pi}$$

$$+\frac{(\mathrm{R}-r_0)\left[e^{\mathrm{P}\sqrt{-1}}f(re^{\mathrm{P}\sqrt{-1}})-e^{p_0\sqrt{-1}}.f(re^{p_0\sqrt{-1}})\right]\sqrt{-1}}{2\pi}$$

quando si fa in esso variare r fra i limiti r_0, R e p fra i limiti p_0, P, ma in modo che si verifichi la condizione

$$(37)\qquad \frac{r-r_0}{\mathrm{R}-r_0}=\frac{p-p_0}{\mathrm{P}-p_0}.$$

Dunque a più forte ragione il modulo della espressione (34) sarà inferiore al prodotto di $\frac{1}{2\pi}$ per il perimetro

$$(38)\qquad \mathrm{R}(\mathrm{P}-p_0)+r_0(\mathrm{P}-p_0)+2(\mathrm{R}-r_0)$$

del contorno OO'O''.... e per il più gran valore $\Lambda f(z)$ che possa acquistare il modulo di $f(z)$ per dei punti situati sopra questo medesimo contorno. Del resto questa conclusione potrebbe essere dedotta immediatamente dal teorema primo.

Se si facesse

$$(39)\qquad r_0=0,\quad p_0=-\pi,\quad \mathrm{P}=\pi$$

l' espressione (36) sarebbe ridotta a

$$(40)\qquad \mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}f(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})$$

e il suo modulo massimo a

$$(41) \qquad R\Lambda f(\bar{z})$$

essendo il valore di $\bar{z}$

$$(42) \qquad z = Re^{p\sqrt{-1}}.$$

Dunque il modulo del residuo integrale

$$(43) \qquad {}^{(R)}_{(0)}E^{(\pi)}_{(-\pi)}((f(z)))$$

ha per limite superiore il prodotto (41) il che si accorda col teorema 1.° e con la proposizione stabilita nella precedente Memoria.

Egli è bene l'osservare che potrebbersi facilmente dedurre dalla formola (25) le formole (14), (35) ed altre dello stesso genere. In fatti per arrivarvi basterebbe separare l'integrale che racchiude la formola (25) in più parti corrispondenti alle diverse parti delle linee rette o curve delle quali componesi il contorno OO'O''.... poscia trasformare ciascun integrale particolare sostituendo alla variabile s una delle variabili x, y, r, p ecc.

Supponiamo ora che le funzioni $f(z)$, $f'(z)$, $F(z)$ essendo finite e continue per tutti i valori di z corrispondenti a punti situati nel contorno OO'O''.... si prenda

$$(44) \qquad f(z) = \frac{f'(z)}{\underline{f}(z)} F(z),$$

l'equazione (7) sarà ridotta a

$$(45) \qquad \underline{f}(z) = 0$$

e se fra le radici della equazione (45) quelle che corrispondono a punti contenuti nel contorno OO'O''.... vengano rappresentate da

$$z_1, \; z_2 \ldots . z_m$$

si avrà

$$(46)\qquad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=E\left(\left(\frac{f'(z)}{f(z)}F(z)\right)\right);$$

poi si concluderà avuto riguardo alla formola (26)

$$(47)\qquad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c\frac{f'(z)}{f(z)}F(z)\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Inoltre in virtù del teorema 1.° la somma

$$F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)$$

determinata dalla equazione (46) avrà per limite superiore la quantità

$$(48)\qquad \frac{c}{2\pi}\Lambda\left(\frac{f'(z)}{f(z)}F(z)\right).$$

Se si prende $F(z)=1$ la formola (47) darà

$$(49)\qquad m=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{ds}\,ds.$$

e l' espressione (48) diverrà

$$(50)\qquad \frac{c}{2\pi}\Lambda\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Se al contrario si prende $F(z)=z$, la formola (47) darà

$$(51)\qquad z_1+z_2+\ldots+z_m=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{ds}\,ds,$$

e l' espressione (48) diventerà

$$(52)\qquad \frac{c}{2\pi}\Lambda\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Si può dunque enunciare la seguente proposizione.

2.° Teorema. Siano x, y due variabili reali,

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

una variabile immaginaria e

$$\underline{f}(z), \quad F(z)$$

funzioni reali o immaginarie di z, le quali restando finite e continue come pure la derivata $f'(z)$ per tutti li sistemi dei valori di x, y adatti a rappresentare le coordinate rettangolari dei punti situati in un contorno chiuso OO'O''.... Siano inoltre

$$z_1, \quad z_2 \ldots\ldots\ldots z_m$$

quelli delle radici delle equazione

$$\underline{f}(z) = 0$$

che corrispondono a simili valori delle variabili x, y; e c il perimetro del contorno OO'O''..... Il numero m di queste radici, la loro somma

$$z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_m$$

e la somma

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots\ldots + F(z_m)$$

delle funzioni simili $F(z_1)$, $F(z_2)$.... $F(z_m)$ avranno per valori esatti li secondi membri delle equazioni (49), (51), (47), e per moduli dei numeri inferiori alle tre quantità (50), (52), (48), indicando la lettera A il più gran modulo che acquistar possa una funzione di z per dei punti situati sul contorno OO'O''...

Immaginiamo ora che le variabili x, y e in conseguenza la variabile z essendo espresse in funzioni di s abbiasi

$$(53) \qquad \underline{f}(z) = \varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)$$

indicando con $\varphi(s)$, $\chi(s)$ due funzioni reali della variabile s. Si troverà in conseguenza

$$(54) \qquad \underline{f}'(z)\frac{dz}{ds} = \varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)$$

e la formola (49) darà

$$(55) \qquad m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds.$$

Ora sarà generalmente facile il determinare i valori dell'integrale

$$(56) \qquad \int_0^c \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds.$$

Per giungervi consideriamo tosto una parte di questo integrale, per esempio quella che si riferisce a valori di s contenuti fra i limiti $s=s_0$, $s=s_1$, s_0 essendo $<s_1$, ed $s_1<c$. Se la funzione $\varphi(s)$ non cambia di segno fra i limiti $s=s_0$, $s=s_1$, si avrà

$$(57) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[\varphi(s_1)+\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}(\varphi(s_0)+\sqrt{-1}\,\chi(s_0))$$

oppure

$$(58) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[-\varphi(s_1)-\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}[-\varphi(s_0)-\sqrt{-1}\,\chi(s_0)],$$

secondo che $\varphi(s_0)$ sarà positiva o negativa, cioè a dire che si avrà nell' uno o nell' altro caso

$$(59)\qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds$$

$$=\mathrm{L}\left[\frac{\phi(s_1)}{\phi(s_0)}\right]+\mathrm{L}\left[\frac{1-\chi(s_1)\sqrt{-1}}{\phi(s_0)}\right]-\mathrm{L}\left[\frac{1-\chi(s_0)\sqrt{-1}}{\phi(s_0)}\right].$$

D' altra parte essendo il contorno OO'O''..... per ipotesi chiuso, le variabili reali x, y, in conseguenza anche la variabile immaginaria z e la funzione $\underline{f}(z)$ riprenderanno per $s=c$ gli stessi valori che per $s=0$, di modo che si avrà in generale

$$\phi(0)+\sqrt{-1}\,\chi(0)=\phi(c)+\sqrt{-1}\,\chi(c)$$

$$\phi(0)=\phi(c),\ \chi(0)=\chi(c).$$

Dunque se la funzione $\phi(s)$ che rappresenta la parte reale della $\underline{f}(z)$ non cambia di segno fra i limiti $s=0, s=c$, la formola (59) darà

$$(60)\qquad \int_0^c \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds=0$$

e si avrà perciò

$$m=0.$$

D' altronde $\underline{f}(z)$ essendo funzione continua di z, $\phi(s)$ non potrà cambiar di segno fra i limiti $s=0$, $s=c$, senza diventar nullo nell' intervallo. Dunque il numero m svanirà allorquando l' equazione

$$(61)\qquad \phi(s)=0$$

non ammetterà punto radici reali.

Immaginiamo adesso che l' equazione (61) ammetta radici reali. Supponiamo inoltre l' intervallo dei limiti s_0, s_1 piccolo abbastanza, affinchè la funzione $\phi(s)$ svanisca una sola volta in questo intervallo e chiamiamo ς il valore di s che essendo compreso fra s_0 ed s_1 coincide con una radice reale

semplice o con molte radici reali eguali dell' equazione (61). Allora rappresentando con ε un numero piccolissimo si troverà

$$(62)\qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}\,ds = \int_{s_0}^{\varsigma-\varepsilon} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}\,ds$$
$$+\int_{\varsigma+\varepsilon}^{s_1} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}\,ds\,;$$

poi si concluderà

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[\phi(s_1)+\sqrt{-1}\chi(s_1)] - \mathrm{L}[-\phi(s_0)-\sqrt{-1}\chi(s_0)]$$
$$-\mathrm{L}[\phi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\chi(\varsigma+\varepsilon)] + \mathrm{L}[-\phi(\varsigma-\varepsilon)-\sqrt{-1}\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\phi(s)$ passa dal negativo al positivo, e

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[-\phi(s_1)-\sqrt{-1}\chi(s_1)]$$
$$-\mathrm{L}[\phi(s_0)+\sqrt{-1}\chi(s_0)] - \mathrm{L}[-\phi(\varsigma+\varepsilon)-\sqrt{-1}\chi(\varsigma+\varepsilon)]$$
$$+\mathrm{L}[\phi(\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\phi(s)$ passa dal positivo al negativo. Si troverà al contrario

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[\phi(s_1)+\sqrt{-1}\chi(s_1)]$$
$$-\mathrm{L}[\phi(s_0)+\sqrt{-1}\chi(s_0)] - \mathrm{L}[\phi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\chi(\varsigma+\varepsilon)]$$
$$+\mathrm{L}[\phi[\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\phi(s)$ è costantemente positiva o nulla fra i limiti s_0, s_1, e

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[-\phi(s_1)-\sqrt{-1}\chi(s_1)]$$
$$-\mathrm{L}[\phi(s_0)-\sqrt{-1}\chi(s_0)] - \mathrm{L}[-\phi(\varsigma+\varepsilon)-\sqrt{-1}\chi(\varsigma+\varepsilon)]$$
$$+\mathrm{L}[-\phi(\varsigma-\varepsilon)-\sqrt{-1}\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\varphi(s)$ è costantemente positiva o nulla fra gli stessi limiti.

Ciò posto chiamiamo E la parte dell' integrale

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)} ds$$

che contiene il numero ε. Siano inoltre z_0, z_1 i valori di z corrispondenti ai valori s_0, s_1 della variabile s. Si avrà in generale

$$(63) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)} ds = \mathrm{L}(\pm f(z_1)) - \mathrm{L}(\pm f(z_0)) + \mathrm{E}$$

e

$$(64) \qquad \begin{aligned} \mathrm{E} = {} & \mathrm{L}[\pm(\varphi(\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\chi(\varsigma-\varepsilon))] \\ & - \mathrm{L}[\pm(\varphi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\chi(\varsigma+\varepsilon))], \end{aligned}$$

dovendo ciascuno dei due segni doppi che contengono i logaritmi essere ridotto al segno + od al segno —, e dovendo essere effettuata questa riduzione in modo che la parte reale della espressione affetta di doppio segno diventi positiva. Sotto questa condizione la formola (64) potrà essere ridotta a

$$(65) \qquad \mathrm{E} = \mathrm{L}\left[\frac{1+\chi(\varsigma-\varepsilon)\sqrt{-1}}{\varphi(\varsigma-\varepsilon)}\right] - \mathrm{L}\left[\frac{1+\chi(\varsigma+\varepsilon)\sqrt{-1}}{\varphi(\varsigma+\varepsilon)}\right].$$

Ora risulta da quest' ultima che E svanirà se la radice ς essendo comune alla equazione (61) ed alla seguente

$$(66) \qquad \chi(s) = 0$$

il valore del rapporto

$$(67) \qquad \frac{\chi(s)}{\varphi(s)}$$

corrispondente ad $s = \varsigma$ è nullo o solamente finito. Se questo valore divenisse infinito, il che accade per esempio, allorchè

$s = \varsigma$ non è radice della equazione (66), e se il rapporto (67) non cangiasse di segno passando per l' infinito, E svanirebbe ancora. Ma se passando per l' infinito il rapporto (67) cangia di segno, si ricaverà dalla formola (65)

$$(68) \qquad E = L(-\sqrt{-1}) - L(\sqrt{-1}) = -\pi\sqrt{-1}$$

oppure

$$(69) \qquad E = L(\sqrt{-1}) - L(-\sqrt{-1}) = \pi\sqrt{-1}$$

secondo che questo stesso rapporto passerà dal negativo al positivo o dal positivo al negativo.

Supponiamo ora che la funzione $\varphi(s)$ svanisca più volte fra i limiti $s = s_0$, $s = s_1$. Allora dai principj che noi abbiamo stabiliti si dedurrà la formola

$$(70) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\chi(s)} ds = L(\pm f(z_1)) - L(\pm f(z_0)) + \pi(m'' - m')\sqrt{-1}$$

m', m'' essendo numeri intieri che indicano, il primo quante volte il rapporto (67) passi divenendo infinito, dal negativo al positivo, il secondo quante volte questo rapporto passi divenendo infinito dal positivo al negativo.

Potrebbesi ancora alla formola (70) evidentemente sostituir la seguente

$$(71) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\chi(s)} ds$$

$$= L \frac{\sqrt{\varphi(s_1)^2}}{\sqrt{\varphi(s_0)^2}} + L\left[\frac{1 + \chi(s_1)\sqrt{-1}}{\varphi(s_1)}\right] - L\left[\frac{1 + \chi(s_0)\sqrt{-1}}{\varphi(s_0)}\right] + \pi(m'' - m')\sqrt{-1}.$$

Allorchè si prende $s_0 = 0$, $s_1 = c$ si ha

$$\underline{f}(z_1) = \underline{f}(z_0).$$

In conseguenza di che la formola (70) dà semplicemente

$$(72) \qquad \int_0^c \frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \pi(m''-m')\sqrt{-1}$$

e il valore di m determinato dall'equazione (55) si riduce a

$$(73) \qquad m = \frac{m''-m'}{2}.$$

Egli è bene l'osservare 1°, che se si fa per brevità

$$(74) \qquad -\frac{\phi(s)}{\chi(s)} = f(s),$$

il valore di E determinato dall'equazione (65) sarà sempre il prodotto dell'espressione imaginaria

$$(75) \qquad \pi\sqrt{-1}$$

per la semidifferenza

$$(76) \qquad \frac{1}{2}\left[\frac{f(\varsigma+\varepsilon)}{\sqrt{(f(\varsigma+\varepsilon))^2}} - \frac{f(\varsigma-\varepsilon)}{\sqrt{(f(\varsigma-\varepsilon))^2}}\right]$$

essendo ε un numero infinitamente piccolo: 2.° che l'espressione (76) non differisce da zero se non nel caso in cui si prende per ς un valore di s capace di rendere la funzione $f(s)$ infinita, vale a dire nel caso in cui prendesi per s una radice reale dell'equazione

$$(77) \qquad \frac{1}{f(s)} = 0,$$

e che allora questa espressione riducesi sempre all'una delle tre quantità -1, 0, $+1$. Ora essendo s una variabile reale, e $f(s)$ una funzione reale di s, il valore della espressione (76) corrispondente ad una radice reale ς dell'equazione (77), sarà ciò

che noi chiameremo ormai, l' *indice* della funzione relativo a questa radice. Noi chiameremo *indice integrale* della funzione la somma degli indici relativi ai diversi valori di s che rendono la funzione infinita, e noi indicheremo questa somma collocando la lettera caratteristica I davanti la funzione racchiusa fra doppia parentesi così come segue

$$(78) \qquad I((f(s))).$$

Se la funzione si presenta sotto la forma di una frazione, un termine solo dovrà essere racchiuso fra doppia parentesi allorchè indicar vorrassi la somma degli indici corrispondenti ai valori reali di s che rendono questo termine nullo se è il denominatore, o infinito se è il numeratore. Finalmente se uno dei termini è decomposto in fattori, uno solo di questi fattori dovrà essere racchiuso fra doppia parentesi, allorchè si vorrà esprimere la somma degli indici corrispondenti ai valori reali di s che rendono questo fattore nullo od infinito. Di più, se fra le radici reali dell' equazione (77) si considerino unicamente quelle che si trovano comprese fra due limiti dati s_0, s_1, la somma dei valori corrispondenti nella espressione (76) sarà indicata da

$$(79) \qquad I_{s_0}^{s_1}(((fs))).$$

Ciò posto ciascuna delle espressioni (78), (79) sarà formata dalla riunione di molti termini corrispondenti a diverse radici della equazione (77), e delle quali una qualunque sarà equivalente a $+1$, se la funzione $f(s)$ passi dal negativo al positivo, a zero, se questa funzione diventando infinita non cambia di segno, ed a -1 se questa passa dal positivo al negativo. Aggiungasi che se il limite s_0 divenga una radice dell' equazione (77), il termine corrispondente ad $s=s_0$ nella somma rappresentata dalla notazione (79) dovrà esser ridotto ad

$$(80) \qquad \frac{1}{2}\frac{f(s_0+\varepsilon)}{\sqrt{(f(s_0+\varepsilon))^2}}$$

cioè a dire a $\frac{1}{2}$ o a $-\frac{1}{2}$, secondo chè la funzione $f(s)$ diverrà positiva o negativa per dei valori di s superiori a s_0. Parimente se il limite s_1 divenga una radice della equazione (77), il termine corrispondente ad $s=s_1$ nella somma (79) dovrà essere ridotto a

$$(81) \qquad -\frac{1}{2}\frac{f(s_1-\varepsilon)}{\sqrt{(f s_1-\varepsilon))^2}}$$

cioè a dire a $-\frac{1}{2}$, od a $+\frac{1}{2}$ secondo che la funzione $f(s)$ diverrà positiva o negativa per dei valori di s inferiori ad s_1. Queste diverse convenzioni sono analoghe a quelle che noi abbiamo ammesse nel calcolo dei residui, e così da analoghe considerazioni sarebbesi condotto ad adottarle. Se nella notazione (79) si suppone $s_0=-\infty$, $s_1=\infty$ si avrà evidentemente

$$(82) \qquad I_{-\infty}^{\infty}((f(s)))=I((f(s))).$$

In virtù delle convenzioni che abbiamo ammesse le formole (70), (72), (73) diverranno

$$(83) \qquad \int_{s_0}^{s_1}\frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}ds=\mathrm{L}[\pm f(z_1)]-\mathrm{L}[\pm f(z_0)],$$
$$-\pi\sqrt{-1}\,I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right).$$

$$(84) \qquad \int_0^c\frac{\phi'(s)+\sqrt{-1}\chi'(s)}{\phi(s)+\sqrt{-1}\chi(s)}ds=-\pi\sqrt{-1}\,I_0^c\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right)$$

$$(85) \qquad m=-\frac{1}{2}I_0^c\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right)=\frac{1}{2}I_0^c((f(s))).$$

Si può dunque enunciare la proposizione seguente.

3.° Teorema. Poste le stesse cose che nel teorema 1.°, Se si suppone z espressa in funzione di s e

$$f(z) = \phi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)$$

indicando con $\phi(s)$, $\chi(s)$ funzioni reali di s, il numero delle radici dell' equazione (45) che corrispondono a dei punti collocati nell' interno del contorno OO'O''.... saranno precisamente la metà dell' indice integrale

$$-I_0^c\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right)$$

essendo c il perimetro dello stesso contorno.

Supponiamo ora che la funzione $\underline{f}(z)$ sia il prodotto di più altre funzioni $\underline{f}_1(z)$, $\underline{f}_2(z)$, ec. delle quali ciascuna resti finita e continua, come la sua derivata per tutti i punti racchiusi nel contorno OO'O''..... Si avrà

$$\underline{f}(z) = \underline{f}_1(z) \cdot \underline{f}_2(z) \cdots \tag{86}$$

e per conseguenza

$$\frac{\underline{f}'(z)}{\underline{f}(z)} = \frac{\underline{f}'_1(z)}{\underline{f}_1(z)} + \frac{\underline{f}'_2(z)}{\underline{f}_2(z)} + \cdots\cdots \tag{87}$$

Dunque la formola (49) diverrà

$$m = m_1 + m_2 + \text{ecc.} \tag{88}$$

essendo i numeri m_1, m_2 ec. determinati rispettivamente dalle formole

$$(89)\quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{\underline{f}_1'(z)}{\underline{f}_1(z)} \frac{dz}{ds} ds, \\ m_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{\underline{f}_2'(z)}{\underline{f}_2(z)} \frac{dz}{ds} ds, \\ \text{ecc.} \end{array} \right\}$$

ed indicanti in conseguenza quante radici le equazioni

$$(90)\qquad \underline{f}_1(z) = 0,\ \underline{f}_2(z) = 0,\ \text{ecc.}$$

considerate l' una dopo l' altra offrano corrispondenti a dei punti contenuti nel contorno OO'O''.... Era d'altronde facile il prevedere che la somma dei numeri m_1, m_2.... così determinati riprodurrebbe precisamente il numero m. Se uno dei fattori $\underline{f}_1(z)$, $\underline{f}_2(z)$.... si riduce ad una costante reale o immaginaria, la sua derivata sarà nulla, e fra i numeri m_1, m_2..... quello che corrisponderà al fattore di cui trattasi, svanirà. Ora se si indica per τ un arco reale e costante si avrà identicamente

$$f(z) = (\cos.\tau + \sqrt{-1}\sin.\tau)\frac{\underline{f}(z)}{\cos.\tau + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau}.$$

Dunque stabilendo

$$(91)\qquad \underline{f}_1(z) = \frac{\underline{f}(z)}{\cos.\tau + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau},\quad \underline{f}_2(z) = \cos.\tau + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau,$$

si troverà $m = m_1$. D'altra parte se si metta invece di $\underline{f}(z)$, $\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)$ nella prima delle equazioni (91), se ne caverà

$$(92)\qquad \underline{f}_1(z) = \varphi(s)\cos.\tau + \chi(s)\text{sen.}\tau + [\chi(s)\cos.\tau - \varphi(s)\text{sen.}\tau].\sqrt{-1}$$

ed in conseguenza la formola (85) darà

$$m_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{\phi(s)\text{sen.}\tau - \chi(s)\cos.\tau}{\phi(s)\cos.\tau + \chi(s)\text{sen.}\tau}\right)\right).$$

Si avrà dunque anche

$$(93) \qquad m = \tfrac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{\phi(s)\text{sen.}\tau - \chi(s)\cos.\tau}{\phi(s)\cos.\tau + \chi(s)\text{sen.}\tau}\right)\right).$$

In quest' ultima formola l' arco reale τ può essere scelto ad arbitrio. Se si prende $\tau = 0$ si sarà evidentemente ricondotto alla formola (85). Al contrario se si prende $\tau = \frac{\pi}{2}$ si troverà

$$(94) \qquad m = \tfrac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{\phi(s)}{\chi(s)}\right)\right) = -\tfrac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right).$$

Supponiamo ancora che la funzione $\underline{f}(z)$ essendo divisa in due parti $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, il modulo del rapporto

$$(95) \qquad \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$$

resti inferiore all' unità per tutti i valori di z corrispondenti a dei punti situati sul contorno OO'O''. . . . per modo che si abbia al tempo stesso

$$(96) \qquad \underline{f}(z) = \Pi(z) + \varpi(z)$$

e

$$(97) \qquad \Lambda\, \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} < 1.$$

Per tutti i punti dei quali si tratta, la parte reale del binomio

$$(98) \qquad 1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$$

conserverà lo stesso segno del primo termine 1. Dunque se si faccia

(99) $$\underline{f}_1(z) = \Pi(z), \quad \underline{f}_2(z) = 1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$$

si avrà $$m_2 = 0$$

in conseguenza $$m = m_1.$$

Si può quindi enunziare la proposizione seguente.

4.° Teorema. Poste le stesse cose come nel teorema 2.°: se la funzione $f(z)$ è divisa in due altre $\Pi(z)$, $\varpi(z)$ per modo che si abbia

$$\Lambda \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} < 1,$$

le radici corrispondenti a dei punti racchiusi nell' interno del contorno OO'O''..... saranno dello stesso numero per l' equazione (45) e per la seguente

(100) $$\Pi(z) = 0.$$

Nell' ipotesi che abbiamo ammessa l' equazione (86) ridotta a

(101) $$\underline{f}(z) = \Pi(z)\left[1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]$$

darà evidentemente

(102) $$\frac{\underline{f}'(z)}{\underline{f}(z)} = \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} + d\,\mathrm{L}\frac{\left(1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)}{dz}.$$

In conseguenza se si dicano

$$\xi_1, \quad \xi_2, \ldots\ldots \xi_m$$

quelle radici della equazione (100) che corrispondono a dei punti situati sul contorno OO'O''.....

$$z_1, \; z_2 \ldots\ldots z_m$$

essendo sempre quelle radici che adempiono la stessa condizione per l'equazione (45), si ricaverà dalla formola (46)

$$(103) \qquad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=F(\xi_1)+F(\xi_2)+\ldots+F(\xi_m)$$

$$+\varphi\left(\left(dL\frac{\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]}{dz}F(z)\right)\right).$$

D' altronde per tutti i punti situati sul contorno OO'O''.... il logaritmo

$$(104) \qquad L\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]$$

sarà sviluppabile in serie convergente con la formola

$$(105) \qquad L\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]=\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}-\frac{1}{2}\left[\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]^2+\frac{1}{3}\left[\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]^3-\text{ec.}$$

Dunque se col mezzo della equazione (26) si trasforma l'espressione

$$(106) \qquad E\left(\left(F(z)dL\frac{\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]}{dz}\right)\right)$$

in un integrale definito, la funzione sotto il segno integrale $\int$ sarà essa pure sviluppabile in una serie simile essendo il termine generale di quest' ultima serie

$$(107) \qquad \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{1}{n}\int_0^c F(z)dL\frac{\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]}{ds}\,ds$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n}E\left(\left(F(z)\,d\frac{\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n}{dz}\right)\right),$$

o ciò che torna lo stesso

$$(108)\qquad \frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{E}\left(\left(\mathrm{F}'(z)\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n\right)\right)$$

si avrà dunque

$$(109)\qquad \mathrm{F}(z_1)+\mathrm{F}(z_2)+\ldots+\mathrm{F}(z_m)=\mathrm{F}(\xi_1)+\mathrm{F}(\xi_2)+\ldots+\mathrm{F}(\xi_m)$$

$$-\mathrm{E}\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\mathrm{F}(z)\right)\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^2\mathrm{F}(z)\right)\right)-\text{ecc.}$$

Aggiungiamo che in virtù del primo teorema il modulo del termine generale, vale a dire del nesimo termine della serie sarà più piccolo della quantità

$$(110)\qquad \frac{c}{2n\pi}\,\Lambda\left[\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n\mathrm{F}'(z)\right]$$

e per conseguenza del prodotto

$$(111)\qquad \frac{c}{2n\pi}\,\Lambda\mathrm{F}'(z).\left[\Lambda\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]^n.$$

Dunque se si fa per brevità

$$(112)\qquad \Lambda\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}=\mathrm{M},\quad \Lambda\mathrm{F}'(z)=\mathrm{N},$$

il nesimo termine della serie che rappresenta lo sviluppo della espressione (106) avrà un modulo inferiore a

$$(113)\qquad \frac{c\mathrm{N}}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{M}^n}{n}$$

e la somma formata con questo termine e con quelli che lo seguono, ossia il rimanente della serie offrirà un modulo inferiore al prodotto

$$(114)\qquad \frac{cN}{2\pi}\left[\frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\ldots\ldots\right].$$

Per altra parte essendo $M<1$, la somma

$$(115)\qquad \frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\ldots\ldots$$

è evidentemente inferiore non solo alla seguente (116)

$$(116)\qquad \frac{M^n}{1}+\frac{M^{n+1}}{2}+\frac{M^{n+2}}{3}+\ldots\ldots=M^n\,L\left(\frac{1}{1-M}\right)$$

ma ancora a quest' altra

$$(117)\qquad \frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\ldots\ldots=\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Dunque il resto delle serie che contiene il secondo membro della formola (109) avrà per modulo un numero che non supererà alcuno dei prodotti

$$(118)\qquad \frac{cN}{2\pi}\,.\,M^n\,L\left(\frac{1}{1-M}\right),\quad \frac{cN}{2\pi}\,\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Se si prenda $F(z)=z$, la formola (109) darà

$$(119)\qquad z_1+z_2+\ldots+z_m=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m$$

$$-E\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)\right)+\tfrac{1}{2}E\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^2\right)\right)-\tfrac{1}{3}E\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^3\right)\right)+\text{ec.}$$

ed il resto di qnest' ultima serie avrà per modulo un numero che non supererà alcuno dei prodotti

$$(120)\qquad \frac{1}{2\pi}M^n\,L\left(\frac{1}{1-M}\right),\quad \frac{c}{2\pi}\,\frac{M^n}{n(1-M)}$$

si può dunque enunciare la proposizione seguente.

5.° Teorema. Fatte le stesse supposizioni come nel Teo-

rema 4.°, se si chiamino $z_1, z_2 \ldots z_m$ quelle fra le radici dell' equazione (45), e $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ quelle fra le radici dell'equazione (100), che corrispondono a dei punti contenuti nell'interno del contorno OO'O''..., la differenza fra le due somme

$$(121) \qquad z_1 + z_2 + \ldots + z_m, \quad \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$$

oppure anche fra le due seguenti

$$(122) \quad F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m), \quad F(\xi_1) + F(\xi_2) + \ldots + F\xi(_m)$$

sarà sviluppabile con la formola (109) o (119) in una serie convergente, di cui i differenti termini potranno essere espressi in funzione delle radici $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ ed i residui di queste due serie offriranno dei moduli inferiori a ciascuno dei prodotti (118) o (120).

Se prendasi

$$\Pi(z) = (z - a)^m$$

indicando a una costante scelta ad arbitrio, l' equazione (45) si ridurrà a

$$(123) \qquad (z - a)^m + \varpi(z) = 0$$

e le formole (109), (119) daranno

$$(124) \qquad F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m)$$

$$= mF(a) + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2.\ldots(mn-1)} \cdot \frac{d^{mn-1}[((\varpi a))^m F(a)]}{da^{mn-1}}.$$

$$(125) \qquad z_1 + z_2 + \ldots + z_m$$

$$= ma + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2.\ldots(mn-1)} \cdot \frac{d^{mn-1}[\varpi(a)^m]}{da^{mn-1}}$$

purchè sia

(126) $$\Lambda \frac{\varpi(z)}{(z-a)^m} < 1.$$

Se l' esponente m si riduce all'unità l'equazione (123) diventerà

(127) $$z - a + \varpi(z) = 0$$

e per determinare la radice z di quest' ultima equazione, o una funzione $F(z)$ di questa radice si avranno invece delle formole (124), (125) quelle che Lagrange ha dato, cioè

(128) $$F(z) = F(a) + \Sigma^{n=\infty}_{n=1} \frac{(-1)^n}{1.2.3..n} d^{n-1} \left[\frac{[\varpi(a)]^n F'(a)}{da^{n-1}} \right]$$

(129) $$z = a + \Sigma^{n=\infty}_{n=1} \frac{(-1)^n}{1.2.3..n} d^{n-1} \frac{[\varpi(a)]^n}{da^{n-1}}.$$

Queste ultime sussisteranno purchè abbiasi

(130) $$\Lambda \frac{\varpi(z)}{z-a} < 1.$$

Finalmente se si faccia $a=0$ l' equazione (123) e le formole (124), (125) daranno

(131) $$z^m + \varpi(z) = 0$$

(132) $$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = mF(0)$$
$$+ \Sigma^{n=\infty}_{n=1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\ldots(mn-1)} d^{mn-1} \left[\frac{[\varpi(\varepsilon)]^n F(\varepsilon)}{d\varepsilon^{mn-1}} \right]$$

(133) $$z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_m$$
$$= \Sigma^{n=\infty}_{n=1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\ldots(mn-1)} d^{mn-1} \frac{[\varpi(\varepsilon)]^n}{d\varepsilon^{mn-1}}$$

indicando ε un numero infinitamente piccolo che dovrà ridursi

a zero dopo che si sarà effettuata la differenziazione, e la condizione (126) diventerà

$$(134) \qquad \Lambda \frac{\varpi(z)}{z^m} < 1.$$

Allora anche l'equazione (127), le formole (128), (129) e la condizione (130) si ridurranno a

$$(135) \qquad z + \varpi(z) = 0$$

$$(136) \qquad F(z) = F(0) + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2...n} d^{n-1} \left[\frac{[\varpi(s)]^n F(s)}{ds^{n-1}} \right]$$

$$(137) \qquad z = \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2...n} d^{n-1} \frac{[\varpi(s)]^n}{ds^{n-1}}$$

$$(138) \qquad \Lambda \frac{\varpi(z)}{z} < 1.$$

Per facilitare l'applicazione dei teoremi 1, 2, 3, 4, 5 noi ci occuperemo adesso a determinare delle quantità della forma $\Lambda f(z)$ e $I_{s_0}^{s_1}((f(s)))$ supponendo che la funzione $f(z)$ resti finita e continua per tutti i punti situati sul contorno OO'O''. . . . . .

Noi osserveremo tosto che se si rappresenti con $f(s)$ la funzione di s in cui si trasforma

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}),$$

quando per uno qualunque dei punti situati sul contorno OO'O''... si esprime

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

in funzione di s, la quantità

$$\Lambda f(z)$$

cioè a dire il più grande dei moduli di $f(z)$ che corrispondono ai punti di cui trattasi, sarà al tempo stesso il più grande dei moduli di $f(s)$ che corrispondono a dei valori reali di s compresi fra i limiti $s=0$, $s=c$. Dunque se si rappresenti con la notazione

$$\Lambda_{s_0}^{s_1} f(s) \tag{139}$$

il più grande dei moduli di $f(s)$ che corrispondono a dei valori reali di s compresi fra i limiti $s=s_0$; $s=s_1$, si avrà generalmente

$$\Lambda f(z) = \Lambda_0^c f(s). \tag{140}$$

Sia ora t una variabile che cresca o decresca costantemente, mentre si fa crescere o decrescere l'arco s fra i limiti, $s=s_0$, $s=s_1$. Rappresentiamo con

$$s = \mathrm{T}$$

il valore s espresso in funzione di t_1, e con

$$t_0, t_1$$

i valori estremi di t, essendo $t_0 < t_1$ così che si abbia

$$t=t_0 \text{ per } s=s_0; \text{ e } t=t_1 \text{ per } s=s_1,$$

oppure

$$t=t_0 \text{ per } s=s_1; \text{ e } t=t_1 \text{ per } s=s_0,$$

secondo che $\frac{d\mathrm{T}}{dt}$ sarà positivo o negativo entro i limiti

$$t=t_0, \quad t=t_1.$$

Si troverà evidentemente

$$\Lambda_{s_0}^{s_1} f(s) = \Lambda_{t_0}^{t_1} f(\mathrm{T}) \tag{141}$$

e

$$(142) \qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s))) = \pm I_{t_0}^{t_1}((f(\mathrm{T}))),$$

dovendosi ridurre il doppio segno al segno + o al segno — secondo che la variabile T crescerà, o decrescerà per dei valori crescenti di t. Aggiungasi che se $f(s)$ rappresenta ciò che diviene una funzione reale

$$\Psi(x, y)$$

delle coordinate x, y, quando si suppone che queste coordinate siano espresse per mezzo dell'arco s, $f(\mathrm{T})$ rappresenterà ciò che diviene la stessa funzione reale, quando si suppone che le stesse coordinate siano espresse in funzione della variabile t. D' altra parte, se fra i limiti $s=0$, $s=c$ si introducono nuovi valori di s che siano rappresentati da

$$(143) \qquad s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s_i,$$

e formino una serie crescente, il perimetro c del contorno OO'O''.... si troverà diviso in molte parti

$$OO' = s_0, \quad O'O'' = s_1 - s_0, \quad O''O''' = s_2 - s_1, \text{ ecc.}$$

e si riconoscerà facilmente 1.° che il massimo modulo

$$(144) \qquad \Lambda_0^c f(s)$$

è la più piccola delle quantità positive

$$(145) \qquad \Lambda_0^{s_0} f(s), \quad \Lambda_{s_0}^{s_1} f(s) \ldots \Lambda_{s_i}^{c} f(s):$$

2.° che l' indice

$$(146) \qquad I_0^c((f(s)))$$

si decompone in molti indici simili col mezzo della formola

$$(147)\quad I_0^c((f(s))) = I_0^{s_0}((f(s))) + I_{s_0}^{s_1}((f(s))) + \ldots + I_{s_i}^c((f(s))).$$

Si potrà dunque ridurre la determinazione delle quantità (144), (145) a quella di altre quantità della stessa forma corrispondenti a dei valori ultimi di s, dei quali la differenza sarà minore, ed applicare alla valutazione di queste ultime quantità le formole (141), (142). Si potrà pure nell' applicazione di cui trattasi, prendere successivamente per t diverse variabili reali distinte le une dalle altre, il che abbrevierà di molto i calcoli, come noi lo dimostreremo con degli esempi.

Immaginiamo in primo luogo che il contorno OO'O''.... si riduca al sistema di quattro rette rappresentate dalle equazioni (11).

I valori di z corrispondenti ai punti situati sopra quattro rette saranno

$$(148)\quad z = x + y\sqrt{-1},\ z = X + y\sqrt{-1},\ z = x + Y\sqrt{-1},\ z = x_0 + y\sqrt{-1}.$$

e se si prendono per valori corrispondenti di t quelli che seguono

$$(149)\qquad t = x,\quad t = y,\quad t = x_0,\quad t = y_0,$$

allora supponendo l'arco s compito a partire dal punto (x_0, y_0), si troverà successivamente

$$(150)\quad t = x_0 + s,\ t = -X + x_0 + y_0 + s,\ t = 2X - x_0 + Y - y_0 - s,$$
$$t = 2X - 2x_0 + 2Y - y_0 - s;$$

in conseguenza la variabile t crescerà o decrescerà per dei valori crescenti di s, secondochè si considererà un punto situato sull' una delle due prime rette o sopra l' una delle due ultime. Ciò posto il modulo (140) sarà la più piccola delle

quantità positive

$$(151)\qquad \Delta^{X}_{x_0} f(x+y_0\sqrt{-1}),\ \Delta^{Y}_{y_0} f(X+y\sqrt{-1}),\ \Delta^{X}_{x_0} f(x+Y\sqrt{-1}),$$
$$\Delta^{Y}_{y_0} f(x_0+y\sqrt{-1}),$$

ed ammettendo che abbiasi per tutti i punti situati sul contorno OO'O''.....

$$(152)\qquad f(s)=\Psi(x,y),$$

si caverà dalle formole (147), (151) riunite

$$(153)\qquad I^{c}_{0}((f(s)))=I^{X}_{x_0}((\Psi(t,y_0)))+I^{Y}_{y_0}((\Psi(X,t)))$$
$$-I^{X}_{x_0}((\Psi(t,Y)))-I^{Y}_{y_0}((\Psi(x_0,t))),$$

o ciò che torna lo stesso

$$(154)\qquad I^{c}_{0}((f(s)))=I^{X}_{x_0}((\Psi(x,y_0)))+I^{Y}_{y_0}((\Psi(x,y)))$$
$$-I^{X}_{x_0}((\Psi(x,Y)))-I^{Y}_{y_0}((\Psi(x_0,y))).$$

Imaginiamo per fissare le idee che τ indicando un arco reale si abbia

$$(155)\qquad f(s)=\frac{\phi(s)\text{sen.}\tau-\chi(s)\cos.\tau}{\phi(s)\cos.\tau+\chi(s)\text{sen.}\tau},$$

essendo le funzioni reali $\phi(s)$ $\chi(s)$ dedotte dalla funzione imaginaria

$$f(z)=f(x+y\sqrt{-1})$$

col mezzo della equazione (53).

Allora se si dicano

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y)$$

le due funzioni reali di x, y, che determina la formola

$$(156) \qquad f(x+y\sqrt{-1})=\varphi(x,y)+\sqrt{-1}\,\chi(x,y),$$

di modo che $\varphi(s)$, e $\chi(s)$ siano precisamente ciò che divengono $\varphi(x,y)$ e $\chi(x,y)$ quando si esprima x ed y in funzione di s. Si avrà evidentemente

$$(157) \qquad \Psi(x,y)=\frac{\varphi(x,y)\,\mathrm{sen.}\,\tau-\chi(x,y)\cos.\tau}{\varphi(x,y)\cos.\tau+\chi(x,y)\,\mathrm{sen.}\,\tau}.$$

se si riduce l'arco τ a zero o a $\frac{\pi}{2}$ l'equazione

(157) diverrà semplicemente

$$(158) \qquad \Psi(x,y)=-\frac{\chi(x,y)}{\varphi(x,y)}$$

oppure

$$(159) \qquad \Psi(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}.$$

Allorchè la funzione $\underline{f}(z)$ si presenta sotto forma reale, l'equazione (156) seco trascina generalmente la seguente

$$(160) \qquad \underline{f}(x-y\sqrt{-1})=\varphi(x,y)-\sqrt{-1}\,\chi(x,y);$$

si ha dunque allora

$$(161) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x,y)=\dfrac{\underline{f}(x+y\sqrt{-1})+\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}{2} \\[2ex] \chi(x,y)=\dfrac{\underline{f}(x+y\sqrt{-1})-\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \end{array}\right\}$$

e in conseguenza

$$(162)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x,y)\cos.\tau+\chi(x,y)\text{sen}.\tau=\dfrac{e^{\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x-y\sqrt{-1})-e^{-\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x+y\sqrt{-1})}{2} \\ \varphi(x,y)\text{sen}.\tau-\chi(x,y)\cos.\tau=\dfrac{e^{\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x-y\sqrt{-1})+e^{-\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x+y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \end{array}\right\}$$

di modo che le equazioni (157), (158), (159) possono scriversi così

$$(163)\quad \Psi)x,y)=\frac{e^{-\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x+y\sqrt{-1})-e^{\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}{e^{-\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x+y\sqrt{-1})+e^{\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}$$

$$(164)\qquad \Psi(x,y)=\frac{\underline{f}(x+y\sqrt{-1})-\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}{\underline{f}(x+y\sqrt{-1})+\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}$$

$$(165)\qquad \Psi(x,y)=\frac{\underline{f}(x+y\sqrt{-1})+\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}{\underline{f}(x+y\sqrt{-1})-\underline{f}(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}.$$

Immaginiamo adesso che r e p essendo coordinate polari il contorno OO'O''..... si riduca al sistema di due rette OO', O''O''', e di due archi di cerchio O'O'', O'''O rappresentati dalle equazioni (30). I valori di z corrispondenti alle quattro linee OO', O'O'', O''O''', O'''O saranno rispettivamente

$$(166)\quad z=re^{p_0\sqrt{-1}},\quad z=\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}},\quad z=re^{\mathrm{P}\sqrt{-1}},\quad z=r_0e^{p\sqrt{-1}},$$

e se si prendono per valori corrispondenti di t li seguenti

$$(167)\qquad t=r,\quad t=p,\quad t=r_0,\quad t=p_0,$$

allora supponendo l'arco s contato a partire dal punto O, che ha per coordinate polari r_0, p_0 si troverà successivamente

$$(168)\quad t=r_0+s_0,\ t=-1+\frac{r_0}{\mathrm{R}}+p_0+\frac{s}{\mathrm{R}},\ t=2\mathrm{R}-2r_0+\mathrm{R}(\mathrm{P}-p_0)-s,$$

$$t=2\left(\frac{\mathrm{R}}{r_0}-1\right)+\frac{\mathrm{R}}{r_0}(\mathrm{P}-p_0)+\mathrm{P}-\frac{s}{r};$$

in conseguenza la variabile t crescerà o decrescerà per dei valori crescenti di s, secondochè si considererà un punto situato sopra l' una delle due prime linee OO', O'O'', o sopra l' una delle due ultime O''O''', O'''O.

Ciò posto il modulo (140) sarà la più piccola delle quantità positive

$$(169)\quad \Lambda^{R}_{r_0} f(re^{p_0\sqrt{-1}}),\ \Lambda^{P}_{p_0} f(Re^{p\sqrt{-1}}),\ \Lambda^{R}_{r_0} f(re^{P\sqrt{-1}}),$$
$$\Lambda^{P}_{p_0} f(r_0 e^{p\sqrt{-1}}),$$

ed ammettendo che la funzione $f(s)$ verifichi per tutti i punti situati sul contorno OO'O'' la formola (152), si caverà dalle equazioni (147), (151)

$$(170)\quad I^{c}_{0}((f(s))) = I^{R}_{r_0}((\Psi(r\cos.p_0,\ r\mathrm{sen}.p_0)))$$
$$+ I^{P}_{p_0}((\Psi(R\cos.p,\ R\mathrm{sen}.p))) - I^{R}_{r_0}((\Psi(r\cos.P,\ r\mathrm{sen}.P)))$$
$$- I^{P}_{p_0}((\Psi(r_0\cos.p,\ r_0\mathrm{sen}.p))).$$

Se la funzione $\underline{f}(z)$ presentandosi sotto una forma reale il valor generale di $\Psi(x, y)$ è determinato dal sistema delle formole (156), (157), (160), o ciò che torna lo stesso dall' equazione (163) si avrà evidentemente

$$(171)\quad \Psi(r\cos.p, r\mathrm{sen}.p) = \frac{e^{-\pi\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{p\sqrt{-1}}) + e^{\pi\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{-p\sqrt{-1}})}{e^{-\pi\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{p\sqrt{-1}}) - e^{\pi\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{-p\sqrt{-1}})}\sqrt{-1}.$$

Si può facilmente esprimere con l' ajuto delle notazioni di cui abbiamo fatto uso il numero m delle radici della equazione (45), che corrispondono a dei punti racchiusi nel contorno OO'O''. . . . allorchè questo contorno è formato dalle

quattro rette, o dalle due rette e dai due archi di cerchio qui sopra ricordati.

In fatti dall' equazione (85) congiunta alla formola (153) o (170) si ottiene nel primo caso

$$(172)\qquad m=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} I^{X}_{x_0}((\Psi(x,y_0)))+I^{Y}_{y_0}((\Psi(X,y))) \\ -I^{X}_{x_0}((\Psi(x,Y)))-I^{Y}_{y_0}((\Psi(x_0,y))) \end{array}\right\}$$

e nel secondo caso

$$(173)\ m=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} I^{R}_{r_0}((\Psi(r\cos.p_0,\ r\mathrm{sen}.p_0)))+I^{P}_{p_0}((\Psi(R\cos.p,\ R\mathrm{sen}.p))) \\ -I^{R}_{r_0}((\Psi r\cos.P,\ r\mathrm{sen}.P)))-I^{R}_{r_0}((\Psi(r_0\cos.p_0,\ r_0\mathrm{sen}\,p_0))) \end{array}\right\}$$

essendo i valori di $\Psi(x,y)$ determinati dal sistema delle equazioni (156), (157), che potranno venir rimpiazzate, se la funzione $f(z)$ si presenta sotto forma reale dalla sola equazione (163).

Se si vuole determinare il numero delle radici reali, o immaginarie della equazione (45), che offrono dei moduli inferiori a R, bisognerà ridurre il contorno OO'O''.... alla circonferenza d'un cerchio descritto dall'origine delle coordinate col raggio R e la formola (173) darà

$$(174)\qquad m=\tfrac{1}{2}I^{\pi}_{-\pi}((\Psi(R\cos.p,\ R\mathrm{sen}.p))).$$

Se vogliasi determinare il numero delle radici reali o immaginarie che offrono moduli inferiori ad R ad un tempo e parti positive reali, bisognerà ridurre il contorno OO'O''.... a un semicerchio descritto col raggio R, dalla parte delle x positive ed appoggiato sopra quello de' suoi diametri che coincide con l' asse delle y. In conseguenza si dovrà porre

$$p=-\frac{\pi}{2},\ P=\frac{\pi}{2},\ r_0=0,$$

nella formola (173) dalla quale si otterrà

$$m=\tfrac{1}{2}\left\{ I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\Psi(R\cos.p,\ R\operatorname{sen}.p)))+I_0^R((\Psi(0,-r)))-I_0^R((\Psi(0,r)))\right\}$$

o ciò che torna lo stesso

$$(175)\quad m=\tfrac{1}{2}I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\Psi(R\cos.p,\ R\operatorname{sen}.p)))-\tfrac{1}{2}I_{-R}^{R}((\Psi(0,y))).$$

Se al contrario vuolsi determinare il numero delle radici reali o immaginarie che offrono ad un tempo moduli inferiori ad R, e parti reali negative, si dovrà far successivamente nella formola (173)

$$p_0=-\pi,\ P=-\frac{\pi}{2},\ r_0=0,\ \text{e}\ p_0=\frac{\pi}{2},\ P=\pi,\ r_0=0,$$

poi sommare i risultati così ottenuti, o ciò che torna lo stesso, fare immediatamente $p_0=\frac{\pi}{2}$, $P=\frac{3\pi}{2}$, $r_0=0$, e in questo modo si troverà

$$(176)\quad m=\tfrac{1}{2}I_{-R}^{R}((\Psi(0,y)))+\tfrac{1}{2}I_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}((\Psi(R\cos.p,\ R\operatorname{sen}.p))).$$

Se si volesse ottenere il numero delle radici, nelle quali le parti reali, ed i coefficienti di $\sqrt{-1}$ sono, astrazione fatta dal segno, inferiori ad R, bisognerebbe mettere nella formola (172)

$$x_0=-R,\quad X=R,\quad y_0=-R,\quad Y=R$$

e troverebbesi in conseguenza

$$(177)\qquad m=\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(x,-R)))+\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(R,y)))$$
$$-\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(x,R)))-\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(-R,y))).$$

Se fra le stesse radici considerar si volessero soltanto quelle nelle quali la parte reale è positiva o negativa, si avrebbe nel primo caso

$$(178)\qquad m=\tfrac{1}{2}I^{R}_{0}((\Psi(x,-R)))+\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(R,y)))$$
$$-\tfrac{1}{2}I^{R}_{0}((\Psi(x,R)))-\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(0,y)))$$

e nel secondo caso

$$(179)\qquad m=\tfrac{1}{2}I^{0}_{-R}((\Psi(x,-R)))+\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(0,y)))$$
$$-\tfrac{1}{2}I^{0}_{-R}((\Psi(x,R)))-\tfrac{1}{2}I^{R}_{-R}((\Psi(-R,y))).$$

Allorchè il numero R è scelto tale che superi tutte le radici della equazione (45), ciascuna delle formole (174), (177) determina il numero totale delle radici reali o immaginarie; ciascuna delle formole (175), (178) determina il numero totale delle radici nelle quali la parte reale è positiva, al che aggiunger devesi, se le parti reali di alcune radici svaniscono, la metà del numero di queste ultime; finalmente ciascuna delle formole (176), (179) determina il numero totale delle radici nelle quali la parte reale è negativa, aggiunte, se vi è luogo, alla metà del numero di quelle di cui la parte reale si ridurrebbe a zero.

Se si volesse determinare il numero delle radici reali, di

cui il valor numerico è inferiore ad R, bisognerebbe mettere nella equazione (172)

$$x_0 = -\mathrm{R}, \quad \mathrm{X}_0 = \mathrm{R}, \quad \text{ed} \quad y = -\varepsilon, \quad \mathrm{Y} = \varepsilon$$

significando ε un numero infinitamente piccolo di modo che si avrebbe

$$(180) \quad m = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}((\Psi(x,-\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(\mathrm{R},y))) \\ -I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}((\Psi(x,\varepsilon))) - I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(-\mathrm{R},y))) \end{matrix}\right\}.$$

Parimente il numero delle radici positive, e il numero delle radici negative accresciuti ciascuno della metà del numero delle radici reali, se ne esistono, saranno determinati dalle equazioni

$$(181) \quad m = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} I_{0}^{\mathrm{R}}((\Psi(x,-\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(\mathrm{R},y))) \\ -I_{0}^{\mathrm{R}}((\Psi(x,\varepsilon))) - I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(0,y))) \end{matrix}\right\},$$

$$(182) \quad m = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} I_{-\mathrm{R}}^{0}((\Psi(x,-\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(0,y))) \\ -I_{-\mathrm{R}}^{0}((\Psi(x,\varepsilon))) - I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(-\mathrm{R},y))) \end{matrix}\right\};$$

se vogliasi limitare a considerare le radici il cui modulo è inferiore ad R. Poichè le formole (180), (181), (182) si estendono, la prima a tutte le radici reali, e le due altre a tutte le radici positive o negative, basta che il numero R superi il valore numerico di tutte le radici reali.

Del resto le formole (180), (181), (182) si trovano comprese nella seguente

$$(183)\quad m=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} I_{x_0}^{X}((\Psi(x,-\varepsilon)))+I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(X,y))) \\ -I_{x_0}^{X}((\Psi(x,\varepsilon)))-I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(x_0,y))) \end{array}\right\}$$

che si deduce immediatamente dalla formola (172), mettendo $y_0=-\varepsilon$, $Y=\varepsilon$, e che dà il numero m delle radici reali della equazione (45) comprese fra i limiti x_0, X.

I valori di m che si determinano con le formole (181), (182) sono equivalenti a quelli che si dedurrebbero dalla formola (172), riducendo r_0 a zero, e mettendo

$$p_0=-\varepsilon,\quad P=\varepsilon$$

o

$$p_0=\pi-\varepsilon,\quad P=\pi+\varepsilon.$$

In conseguenza il numero delle radici positive inferiori ad R è ancora dato dall' equazione

$$(184)\ m=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} I_0^{R}((\Psi(r\cos.\varepsilon,\ -r\mathrm{sen}.\varepsilon)))+I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(R\cos.p,\ R\mathrm{sen}.p))) \\ \qquad -I_0^{R}((\Psi(r\cos.\varepsilon,\ r\mathrm{sen}.\varepsilon))), \end{array}\right\}$$

ed il numero delle radici negative, i valori numerici delle quali sono inferiori ad R dall' equazione

$$m=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} I_0^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon,\ r\mathrm{sen}.\varepsilon)))+I_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon}((\Psi(R\cos.p,\ R\mathrm{sen}.p))) \\ \qquad -I_0^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon,\ -r\mathrm{sen}.\varepsilon))) \end{array}\right\}$$

o ciò che torna lo stesso, dalla seguente

$$(185)\quad m=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} I_{0}^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon, r\operatorname{sen}.\varepsilon)))-I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(-R\cos.p, -R\sin.p)) \\ \qquad\qquad -I_{0}^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon, -r\operatorname{sen}.\varepsilon))). \end{array}\right\}$$

Sommando il secondo membro delle formole (184), (185) si riprodurrebbe il numero totale delle radici reali della equazione (45) o almeno di quelle il valor numerico delle quali è inferiore ad R.

Allorchè la funzione $\underline{f}(z)$ presentandosi sotto forma reale l'equazione

$$(186)\qquad \underline{f}(x)=0$$

non offre radici reali eguali fra loro, questa stessa equazione non ha radice alcuna che gli sia comune con la seguente

$$(187)\qquad \underline{f}'(x)=0,$$

e in conseguenza $\underline{f}'(x)$ non svanisce allorquando si attribuiscano ad x valori reali che facciano svanire $\underline{f}(x)$. Egli è facile il concludere che il valore di $\Psi(x,y)$ determinato dalla formola (164) potrà nelle formole (183), (184), (185) dove la quantità $y=r\sin.p$ diventa infinitamente piccola, essere rimpiazzata da quest' altro valore

$$(188)\qquad \Psi(x,y)=\frac{\gamma\,\underline{f}'(x)}{\underline{f}(x)}.$$

Ciò posto il numero m delle radici reali dell'equazione (186) dedotto dalla formola (183) sarà nell' ipotesi ammessa

$$(189)\qquad m=I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{\underline{f}'(x)}{\underline{f}(x)}\right)\right)$$

mentre che si ricaverà dalle formole (184), (185)

$$m = I_{0}^{R}\left(\left(\frac{rf'(r\cos.\varepsilon)}{\underline{f}(r\cos.\varepsilon)}\right)\right), \quad m = -I_{0}^{R}\left(\left(\frac{rf'(-r\cos.\varepsilon)}{\underline{f}(-r\cos.\varepsilon)}\right)\right)$$

o ciò che torna lo stesso

$$(190) \qquad m = I_{0}^{R}\left(\left(\frac{xf'(x)}{\underline{f}(x)}\right)\right),$$

$$(191) \qquad m = -I_{-R}^{0}\left(\left(\frac{xf'(x)}{\underline{f}(x)}\right)\right).$$

Se si sottragga l' ultimo valore di m dal penultimo, la differenza che io chiamerò μ sarà

$$(192) \qquad \mu = I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{xf'(x)}{\underline{f}(x)}\right)\right),$$

e rappresenterà l' eccesso del numero delle radici positive sul numero delle radici negative, supponendo che si considerino soltanto le radici i cui moduli sono inferiori ad R. Del resto per stabilire direttamente le formole (189), (192) basta osservare che se si dica a una radice reale semplice dell' equazione (186), prendendo per ε un numero infinitamente piccolo si avrà

$$\frac{\underline{f}'(a+\varepsilon)}{\underline{f}(a+\varepsilon)} = \frac{\underline{f}'(a)}{\varepsilon \underline{f}'(x)} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\underline{f}'(a-\varepsilon)}{\underline{f}(a-\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

e che in conseguenza venendo a crescere x, la funzione

$$(193) \qquad \frac{\underline{f}'(x)}{\underline{f}(x)}$$

passerà divenendo infinita dal positivo al negativo. Se l' equazione (186) ammettesse un numero i di radici eguali aventi a per valor comune, si troverebbe

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} = \varepsilon^{i-1} \frac{\frac{f^{(i)}(a)}{1.2.....(i-1)}}{\frac{\varepsilon^i}{1.2...i} f^{(i)}(a)} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{f'(a-\varepsilon)}{f(a-\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Dunque divenendo infinita la funzione (193) passerebbe dal negativo al positivo. Si deve concludere che generalmente il valore di m determinato dalla formola (189) rappresenta non già il numero totale delle radici reali dell'equazione (186) contenuto fra i limiti x_0, X, ma solamente il numero di quelle che essendo comprese fra questi limiti sono le une dalle altre diverse. Parimente il valore di m determinato dalla formola (192) rappresenterà generalmente la differenza fra il numero delle radici positive diverse e il numero delle radici negative differenti, se si limitiamo a considerar quelle fra le radici positive e negative che danno dei valori numerici inferiori ad R.

Ritorniamo ora alle formole (85) e (94). Da queste formole paragonate fra loro risulta che il contorno OO'O''.... essendo qualunque, e indicando con la lettera c il perimetro di questo contorno si avrà

$$(194) \qquad I_0^c((f(s))) = -I_0^c\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right).$$

Ora egli è facile di generalizzare la formola (194), e di stabilire la seguente proposizione.

6.° Teorema. Indicando $f(s)$ una funzione reale di s, che ottiene sempre un valore unico e determinato fra i limiti

$$s = s_0, \quad s = s_1,$$

ed essendo $s_0 < s_1$ la somma delle due radici

$$(195) \qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s))), \quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)$$

sarà equivalente a $+1$, od a -1, o a zero secondo che le due quantità

$$(196) \qquad f(s_1), \quad -f(s_0)$$

saranno amendue negative, o amendue positive, o l' una positiva e l' altra negativa, di modo che si avrà

$$(197) \qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s))) + I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left[I\frac{f(s_1)}{((s))} - I\frac{f(s_0)}{((s))} \right].$$

Dimostrazione. Infatti se si applicano alla determinazione degli integrali equivalenti

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)\sqrt{-1}}{1+f(s)\sqrt{-1}}\, ds, \int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)}{f(s)-\sqrt{-1}}\, ds$$

i ragionamenti di cui abbiamo fatto uso per determinare le formole (70), (71), (83), si troverà immediatamente

$$(198) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)\sqrt{-1}}{1+f(s)\sqrt{-1}}\, ds = \mathrm{L}[1+f(s_1)\sqrt{-1}]$$

$$-\mathrm{L}[1+f(s_0)\sqrt{-1}] - \pi\sqrt{-1}\, I_{s_0}^{s_1}((f(s))),$$

$$(199) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)}{f(s)-\sqrt{-1}}\, ds = \mathrm{L}[\pm[f(s_1)-\sqrt{-1}]]$$

$$-\mathrm{L}[\pm[f(s_0)-\sqrt{-1}]] + \pi\sqrt{-1}\, I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right),$$

dovendosi poi ridurre ciascuno dei segni doppj al segno $+$ od al segno $-$, e dovendo essere sempre effettuata questa riduzione, in modo che la parte reale della espressione affetta di doppio segno divenga positiva. Ora sotto questa condizione la differenza

$$L[1+f(s_1)\sqrt{-1}]-L[\pm[f(s_1)-\sqrt{-1}]]$$

si riduce ora a

$$L(\sqrt{-1})=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

ora a

$$L(-\sqrt{-1})=-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

secondo che $f(s)$ sarà una quantità positiva o negativa; di modo che si avrà

$$(200)\quad L[1+f(s_1)\sqrt{-1}]-L[\pm[f(s_1)-\sqrt{-1}]]=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\,I\frac{f(s_1)}{((s))};$$

si troverà parimente

$$(201)\quad L[1+f(s_0)\sqrt{-1}]-L[\pm[f(s_0)-\sqrt{-1}]]=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\,I\frac{f(s_0)}{((s))}.$$

Dunque se dalla formola (198) si sottragga la formola (199) si concluderà dividendo i due membri per $\pi\sqrt{-1}$

$$(202)\qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s)))+I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[I\frac{f(s_1)}{((s))}-I\frac{f(s_0)}{((s))}\right]=0.$$

Ora l' equazione (202) che può scriversi ancora come segue

$$(203)\qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s)))=-I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)+\frac{1}{2}\left[I\frac{f(s_1)}{((s))}-I\frac{f(s_0)}{((s))}\right]$$

non differisce dalla formola (197).

Se coll' ajuto dell' equazione (203) si trasformano li secondi membri delle equazioni (189), (192), esse diventeranno rispettivamente

$$(204)\quad m = -I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{\underline{f}(x)}{\underline{f}'(x)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{\underline{f}(X)}{((x))\underline{f}(X)} - I\frac{\underline{f}(x_0)}{((x))\underline{f}'(x_0)}\right]$$

$$(205)\quad \mu = -I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{\underline{f}(x)}{x\underline{f}(x)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{\underline{f}(R)}{((x))\underline{f}'(R)} + I\frac{\underline{f}(-R)}{((x))\underline{f}'(-R)}\right].$$

Se d' altronde il rapporto

$$\frac{\underline{f}(R)}{\underline{f}'(R)}$$

cangia di segno quando si sostituisce $-R$ ad R in modo che si abbia

$$(206)\qquad \frac{\underline{f}(R)}{\underline{f}'(R)} + \frac{\underline{f}(-R)}{\underline{f}'(-R)} = 0$$

la formòla (205) si ridurrà a

$$(207)\qquad \mu = -I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{\underline{f}(x)}{x\underline{f}'(x)}\right)\right).$$

Le formole (204), (205) che potrebbero anche dedursi dalle equazioni (183), (184), (185) unite alla formola (165) racchiudono due teoremi degni di osservazione, di cui ecco l'enunziato.

7.° Teorema. Se la funzione reale $\underline{f}(x)$ resta finita o continua fra i limiti $x = x_0$, $x = X$, per conoscere quante radici reali abbia l' equazione

$$\underline{f}(x) = 0$$

diverse fra loro comprese fra questi limiti, basterà cercare la differenza fra i due numeri, che indicano il primo, quante volte per dei valori crescenti di x contenuti fra i limiti x_0, X la funzione

$$(208)\qquad \frac{\underline{f}(x)}{\underline{f}'(x)}$$

passa divenendo infinita dal positivo al negativo; il secondo quante volte la stessa funzione passa divenendo infinita dal negativo al positivo, poi aggiungere a qnesta differenza $1, -1$, o zero secondoche le due quantità

$$(209) \qquad \frac{f(X)}{f'(X)}, \; -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

saranno amendue negative, o tutte due positive, o l' una positiva, e l' altra negativa.

8.° Teorema. Se la funzione reale $f(x)$ resta finita e continua fra i limiti $x = x_0$, $x = X$, per determinare la differenza fra il numero delle radici positive, e il numero delle radici negative della equazione (186), che essendo diverse le une delle altre, ci offriranno dei moduli inferiori ad R, basterà cercare la differenza fra li due numeri che indicano, il primo, quante volte la funzione

$$(210) \qquad \frac{f(x)}{xf'(x)}$$

per dei valori crescenti di x contenuti fra i limiti x_0, X, passa divenendo infinita dal positivo al negativo; il secondo quante volte la stessa funzione passa divenendo infinita, dal negativo al positivo poi aggiungere a questa differenza 1, -1 o zero secondo che le due quantità

$$(211) \qquad \frac{f(R)}{f'(R)}, \; \frac{f(-R)}{f'(-R)}$$

saranno tutte due positive, o tutte due negative, o l' una positiva e l' altra negativa.

Il teorema 7.° applicato all' equazioni algebraiche è stato per la prima volta enunciato dall'Abate Degua nelle Memorie dell'Accademia Reale delle Scienze. Io ho enunciato per le stesse equazioni supponendo $R = \infty$ il teorema 8.° nel Giornale della Scuola politecnica, e partendo da questo teorema ho dimostrato io per il primo, che per qualunque equazione algebraica si potranno trovare delle funzioni razionali dei coefficienti, i segni delle quali somministrino il mezzo di determinare il numero delle radici reali positive, e il numero delle

radici reali negative. Mettendo nel teorema 7.° $x_0=0, X=\infty$, si conclude che il numero delle radici positive di una equazione algebraica non può superare il numero delle radici positive della equazione derivata che di una sola unità, e nel caso soltanto, che il termine costante e il coefficiente della prima potenza della variabile x siano affetti di segni contrarj. Mettendo $-x$ in vece di x si conclude che il numero delle radici negative della proposta non può superare il numero delle radici negative della derivata che di una sola unità e nel caso soltanto, che il termine costante e il coefficiente della prima potenza della variabile siano affetti dallo stesso segno. Da queste due osservazioni deducesi immediatamente il teorema di Cartesio, in virtù del quale il numero delle radici positive di una equazione algebraica è eguale, o minore del numero delle variazioni di segno, che può offrire il primo membro; e il numero delle radici negative è uguale o minore del numero delle permanenze di segno. Se i coefficienti di molte potenze della variabile di un grado inferiore a quello della equazione data si riducono a zero, basterà per impedire che svaniscano, di sostituire ad x, $x+\varepsilon$, indicando ε un numero infinitamente piccolo, e in questo modo si proverà facilmente che nell'applicazione del teorema di Cartesio si possono trascurare i termini che scompariscono, quando trattasi di valutare il numero totale delle variazioni di segno. Risulta ancora dal teorema 7.° che il numero delle radici reali di una equazione algebraica comprese fra due limiti dati x_0, X non può superare il numero delle radici reali della derivata comprese fra gli stessi limiti, che di una sola unità, e nel caso soltanto in cui, dei due rapporti

$$(212) \qquad \frac{f(X)}{f'(X)}, \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

il primo è positivo, ed il secondo negativo, cioè a dire, nel caso in cui sostituendo $x+z$ ad x si ottiene una trasformata

in z, nella quale il termine indipendente da z e il termine proporzionale a z sono affetti di segno contrario, o dallo stesso segno, secondochè si suppone $x=x_0$, ed $x=X$. Egli è facile di concluderne che il numero delle radici reali comprese fra i limiti x_0, X, è sempre eguale od inferiore al numero delle variazioni di segno che prende la trasformata in z, quando si passa dalla supposizione $x=x_0+z$ alla supposizione $x=X+z$. Questa conclusione contiene il teorema che il sig. Budan ha dato nella sua Memoria pubblicata nel 1806 e che trovasi nell' opera postuma del Sig. Fourier intitolata: *Analisi delle equazioni determinate*. Del resto osserviamo che seguendo per dimostrare questo teorema e quello di Cartesio il metodo quì sopra indicato, si suppongono tacitamente le radici reali della equazione (186) semplici e diverse le une dalle altre. Ma per far vedere che gli stessi teoremi estendonsi al caso in cui l' equazione (186) dà delle radici uguali, basta sostituire alla formola (204) quella che si dedurrebbe dall' equazione (183) combinata con le equazioni (164) e (203), oppure anche, attribuire alle radici reali che fossero fra loro eguali, degli aumenti infinitamente piccoli e disuguali in modo di rendere tutte le radici reali diverse. Poichè operando così, non si altererebbero che infinitamente poco i coefficienti positivi o negativi della equazione in x, o delle sue trasformate in z, e per conseguenza non si altererebbero i segni di questi coefficienti.

Aggiungasi che se nelle equazioni in x e z di cui trattasi, alcuni dei coefficienti si riducessero a zero, converrebbe mettere invece di x, x_0, X; $x+\varepsilon$, $x_0+\varepsilon$, $X+\varepsilon$, essendo il numero ε infinitamente piccolo, e poscia prendere gli aumenti infinitamente piccoli delle radici, in modo che potessero venir trascurati in confronto di ε e delle potenze di ε delle quali si dovesse tener conto. Si potrebbe a cagion d'esempio, supporre questi aumenti proporzionali ad una potenza di ε di cui l' esponente superasse il grado della data equazione.

Del resto la formola (205) somministra il mezzo per determinar facilmente l' indice

$$I_{s_0}^{s_1}((f(s)))$$

ogni volta che la funzione $f(s)$ si riduce ad una frazione razionale. Infatti supponiamo

$$(212) \qquad f(s) = \frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}$$

$\Phi(s)$, $\Phi_1(s)$ essendo due funzioni intiere e reali di s. Se $\Phi(s)$ è divisibile esattamente per $\Phi_1(s)$ si potrà ridurre $f(s)$ a un polinomio intiero, e per conseguenza si avrà

$$(213) \qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s))) = 0\,;$$

se al contrario non essendo $\Phi(s)$ esattamente divisibile per $\Phi_1(s)$ si chiami

$\Phi_2(s)$ il resto della divisione di $\Phi(s)$ per $\Phi_1(s)$,

$\Phi_3(s)$ il resto della divisione di $\Phi_1(s)$ per $\Phi_2(s)$,

$\Phi_4(s)$ il resto della divisione di $\Phi_2(s)$ per $\Phi_3(s)$, ecc.

l' ultima delle funzioni

$$\Phi(s),\quad \Phi_1(s),\quad \Phi_2(s),\quad \Phi_3(s),\quad \Phi_4(s) \text{ ecc.}$$

che indicherò per

$$\Phi_i(s)$$

sarà il divisor comune più grande dei due polinomj

$$\Phi(s),\quad \Phi_1(s),$$

e si ridurrà se questi polinomj non hanno divisor comune ad una quantità costante.

Allora si avrà pure evidentemente

$$(214)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s_0)}{\Phi_1(s_0)}\right)\right) = I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right)$$

e si caverà dalla formola (214) congiunta alla formola (205)

$$(215)\left\{\begin{array}{l}
I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_1(s_1)}{((s))\Phi_2(s_1)} - I\frac{\Phi_1(s_0)}{((s))\Phi_2(s_0)}\right] \\
\text{Si avrà parimente} \\
I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_3(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_2(s_1)}{((s))\Phi_3(s_1)} - I\frac{\Phi_2(s_0)}{((s))\Phi_3(s_0)}\right] \\
I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_3(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_3(s)}{\Phi_4(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_3(s_1)}{((s))\Phi_4(s_1)} - I\frac{\Phi_3(s_0)}{((s))\Phi_4(s_0)}\right] \\
\text{ecc.} \\
I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-2}(s)}{\Phi_{i-1}(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-1}(s)}{\Phi_i(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_{i-1}(s_1)}{((s))\Phi_i(s_1)} - I\frac{\Phi_{i-1}(s_0)}{((s))\Phi_i(s_0)}\right]
\end{array}\right.$$

Finalmente essendo $\Phi_i(s)$ il più gran divisore algebraico delle due funzioni $\Phi(s)$, $\Phi_1(s)$, dividerà $\Phi_{i-1}(s)$ e si avrà in conseguenza

$$(216)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-1}(s)}{\Phi_i(s)}\right)\right) = 0.$$

Ciò posto è chiaro che dalle formole (215) moltiplicate alternativamente per i fattori $+1$, e -1, poi sommate insieme si concluderà definitivamente

$$(217)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_1(s_1)}{((s))\Phi_2(s_1)}-I\frac{\Phi_2(s_1)}{((s))\Phi_3(s_1)}+\ldots+(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_1)}{((s))\Phi_i(s_1)}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_1(s_0)}{((s))\Phi_2(s_0)}-I\frac{\Phi_2(s_0)}{((s))\Phi_0(s_0)}+\ldots+(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_0)}{((s))\Phi_i(s_0)}\right].$$

Se si volesse ottenere il valore di

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi(s)}\right)\right)$$

essendo il grado di $\Phi(s)$ superiore a quello di $\Phi_1(s)$, allora alle formole (215) bisognerebbe aggiungere la seguente

$$(218)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{(\Phi s)}\right)\right)=-I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right)+\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi(s_1)}{((s))\Phi_1(s_1)}-I\frac{\Phi(s_0)}{((s))\Phi_1(s_0)}\right]$$

e si avrebbe in conseguenza

$$(219)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi(s)}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi(s_1)}{((s))\Phi_1(s_1)}-I\frac{\Phi_1(s_1)}{((s))\Phi_2(s_2)}+\ldots+(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_1)}{((s))\Phi_1(s_1)}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi(s_0)}{((s))\Phi_1(s_0)}-I\frac{\Phi_1(s_0)}{((s))\Phi_2(s_0)}+\ldots-(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_0)}{((s))\Phi_i(s_0)}\right]$$

Se di più calcolar si volesse il valore di

$$(220)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{s\Phi_1(s)}{\Phi(s)}\right)\right)$$

vi si potrebbe arrivare sia immediatamente, sostituendo la funzione $s\Phi_1(s)$ alla funzione $\Phi(s)$ nella formola (219), sia combinando l'equazione (203) con altre equazioni dell' una delle forme

$$(221)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{s\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) = I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{s\Phi_3(s)}{\psi_2(s)}\right)\right)$$

$$(222)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right) - I_{s_0}^{s_1}\frac{\Phi(0)}{((s))\Phi_1(0)} =$$

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{s\psi_1(s)}\right)\right) - I_{s_0}^{s_1}\frac{\Phi_2(0)}{((s))\Phi_1(0)}.$$

Allorchè $\underline{f}(x)$ è un polinomio intiero, basta sostituire nella formola (219) la variabile x' alla variabile s_1, ed alle funzioni $\Phi(s)$, $\Phi_1(s)$ le funzioni $\underline{f}(x)$, $\underline{f}'(x)$ per ottenere il numero intiero m che determina l' equazione (189), cioè a dire il numero delle radici reali e diverse dell' equazione

$$\underline{f}(x) = 0$$

comprese fra i limiti $x = x_0$, $x = X$. Così ci troviamo ricondotti al teorema che il ch. Sig. Sturm ha dato in una Memoria presentata all'Accademia delle Scienze il 13 Maggio 1829.

Osserviamo ancora che se la funzione $\underline{f}(z)$ è algebraica, si potrà calcolare con l' ajuto della formola (217) i valori di m somministrati dalle equazioni (172), (173), (174), (175), (176), (177), (178), (179) ecc. e per conseguenza il numero delle radici della equazione

$$\underline{f}(z) = 0$$

che corrispondono a due punti compresi in un rettangolo, o in un settor circolare. Infatti nel caso di cui trattasi, il valore di $\chi(x, y)$ determinato dalla formola (163), (164) o (165) sarà evidentemente una funzione razionale di ciascuna delle variabili x, y, e se si ponga

$$(223)\qquad \text{tang.}\,\frac{p}{2} = t$$

il valore di

$$\chi(r\cos.p\,,\quad r\mathrm{sen}.p\,)$$

determinato dalla formola (171) sarà ancora una funzione razionale non solamente della variabile r, ma anche della variabile t. Avvi di più: con l'ajuto delle formole (85), o (94), (142), (147) e (217), o (219) si potrà calcolare immediatamente il numero $\overset{\circ}{n}$ delle radici reali della equazione

$$\underline{f}(z) = 0$$

corrispondenti a dei punti contenuti nel contorno OO'O''... sempre quando questo contorno sia soltanto composto di linee rette e d'archi circolari. Infatti in virtù di queste formole si potrà scomporre il numero cercato

$$m = \tfrac{1}{2}\, I_{0}^{c}\,((f(s)))$$

in molte parti della forma

$$\tfrac{1}{2}\, I_{s_0}^{s_1}\,((f(s)))$$

corrispondenti ai diversi punti del contorno OO'O''.... D'altra parte la funzione $\underline{f}(z)$ essendo per ipotesi algebraica, $f(s)$, ossia il rapporto fra il coefficiente di $\sqrt{-1}$ nella funzione $\underline{f}(z)$, e la parte reale presa col segno — sarà una funzione razionale di x, y. Ora per ciascuna delle porzioni rette del contorno OO'O''.... le variabili x, y, s saranno fra loro vincolate da due equazioni di primo grado; in conseguenza $f(s)$ diverrà una funzione razionale di s e si potrà ancora mettere in suo luogo una funzione razionale di x o di y.

Finalmente se nel contorno OO'O''.... si considera una porzione circolare che sia precisamente un arco di cerchio descritto con un dato raggio ρ, le x, y diventeranno funzioni lineari di

$$\cos.\frac{s-s_0}{\rho} \quad \text{e} \quad \text{sen.}\frac{s-s_0}{\rho}$$

indicando s_0 il valore di s che corrisponde all'origine di quest' arco. Dunque se si fa

$$(224) \qquad \text{tang.}\frac{s-s_0}{2\rho} = t,$$

$f(s)$ si trasformerà per la porzione di cui trattasi, in una funzione razionale di t. Così in tutti i casi allorchè la funzione $\underline{f}(z)$ sarà algebraica ed il contorno OO'O''.... unicamente composto di rette o di archi circolari, la determinazione del numero delle radici della equazione

$$\underline{f}(z) = 0$$

corrispondenti a punti contenuti in questo contorno potrà essere ridotta alla determinazione di indici di funzioni razionali, o ciò che torna lo stesso, avuto riguardo alla formola (217) alla ricerca del massimo comun divisore algebraico delle funzioni intiere di una sola variabile.

Generalmente, se il contorno OO'O''.... è composto di molte parti di linee di una natura tale che, l'ascissa x e l'ordinata y di ciascuna d'esse parti possano essere rappresentate da funzioni razionali di una terza variabile t, la determinazione del numero m delle radici corrispondenti a punti contenuti in questo contorno, si ricondurrà immediatamente al calcolo degli indici di molte funzioni razionali di t, e se per ciascuna porzione del contorno OO'O''.... la variabile t cresce o decresce costantemente, mentre l' arco si aumenta, allora per ottenere l' indice della frazione razionale relativa ad una data porzione, basterà cercare il massimo comun divisore algebraico delle funzioni intiere di t che rappresentano i due termini di questa frazione razionale, poi sostituire questi due termini, ed i resti delle divisioni parziali alle funzioni indicate nella formola (217) da

$$\Phi(s),\quad \Phi_{,}(s),\quad \Phi_{,,}(s) \text{ ec.}$$

Ritorniamo ora alla condizione (97), alla quale è ben sovente utile il ricorrere nella teoria delle equazioni algebraiche e trascendenti, atteso che si è sicuri, quando è adempita questa condizione, che il numero m delle radici corrispondenti a punti compresi nel contorno OO'O''.... resta lo stesso per le due equazioni (45) e (100), o

$$(225)\qquad \Pi(z) = 0, \quad \text{e} \quad \Pi(z) + \varpi(z) = 0.$$

Da quanto si è detto qui sopra, se il contorno OO'O''.... si riduce al rettangolo formato dalle rette che rappresentano l'equazione (11), la condizione (97) si verificherà quando si avrà al tempo stesso

$$(226)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^{X}_{x_0} \dfrac{\varpi(x+y_0\sqrt{-1})}{\Pi(x+y_0\sqrt{-1})} < 1, \quad \Lambda^{Y}_{y_0} \dfrac{\varpi(X+y\sqrt{-1})}{\Pi(X+y\sqrt{-1})} < 1 \\ \Lambda^{X}_{x_0} \dfrac{\varpi(x+Y_0\sqrt{-1})}{\Pi(x+Y_0\sqrt{-1})} < 1, \quad \Lambda^{Y}_{y_0} \dfrac{\varpi(x_0+y\sqrt{-1})}{\Pi(x_0+y\sqrt{-1})} < 1 \end{array} \right\}$$

Allora il numero m sarà quello delle radici nelle quali la parte reale è compresa fra i limiti x_0 X, ed il coefficiente di $\sqrt{-1}$ fra i limiti y_0 Y. Se il contorno OO'O''.... si riduce al sistema di due rette, e di due archi di cerchio, rappresentati dalle equazioni (30), la condizione (97) si verificherà quando si avrà

$$(227)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^{R}_{r_0} \dfrac{\varpi(re^{p_0\sqrt{-1}})}{\Pi(re^{p_0\sqrt{-1}})} < 1, \quad \Lambda^{P}_{p_0} \dfrac{\varpi(Re^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(Re^{p\sqrt{-1}})} < 1 \\ \Lambda^{R}_{r_0} \dfrac{\varpi(re^{P\sqrt{-1}})}{\Pi(re^{P\sqrt{-1}})} < 1, \quad \Lambda^{P}_{p_0} \dfrac{\varpi(r_0e^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(r_0e^{p\sqrt{-1}})} < 1 \end{array} \right\}$$

ed allora il numero m sarà quello delle radici per le quali

il modulo r è compreso fra i limiti r_0, R, e l'angolo p fra i limiti p_0, P. Se il contorno OO'O''.... si riducesse alla circonferenza del circolo descritto col raggio R le condizioni (227) dovrebbero essere rimpiazzate da una sola cioè

$$(228) \qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi} \frac{\varpi(Re^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(Re^{p\sqrt{-1}})} < 1,$$

e il numero m sarebbe quello delle radici che offrono un modulo inferiore ad R.

Allorchè si fa successivamente

$$\Pi(z) = z, \quad \Pi(z) = z^m,$$

rappresentando m un numero intiero qualunque, la condizione (228) si trasforma in queste due altre

$$(229) \qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi} \frac{\varpi(Re^{p\sqrt{-1}})}{R} < 1,$$

$$(230) \qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi} \frac{\varpi(Re^{p\sqrt{-1}})}{R^m} < 1,$$

che si possono egualmente dedurre dalle formole (138) e (134). Se d'altronde la funzione $\varpi(z)$ è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di z di modo che si abbia

$$(231) \qquad \varpi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$$

e se si dicano

$$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots$$

i valori numerici, o i moduli dei coefficienti reali o immaginarj

$$a_0, a_1, a_1, \ldots\ldots$$

si troverà

$$(232) \qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi} \varpi(Re^{\mu\sqrt{-1}}) = \text{oppur} < A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \ldots.$$

In conseguenza la condizione (229), o (230) sarà verificata se si avrà

$$(233) \qquad \frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2}{R} + \ldots\ldots < 1$$

o

$$(234) \qquad \frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2}{R^m} + \ldots\ldots < 1.$$

D'altra parte se lo sviluppo di $\varpi(z)$ contenga al tempo stesso dei termini d'un grado inferiore, e dei termini di un grado superiore ad m, il rapporto

$$(235) \qquad \frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2}{R^m} + \ldots\ldots$$

$$= A_0 R^{-m} + R n^{-m+1} + \ldots. + A_{m-1} R^{-1} + A_m + A_{m+1} R + \ldots.$$

otterrà un valor infinito positivo per $R = 0$, decrescerà inseguito per dei valori crescenti di R e crescerà di nuovo indefinitamente mentre R si accosterà al limite ∞, o almeno al limite per il quale la serie

$$(236) \qquad A_0, A_1 R, A_2 R^2 \text{ ecc.} \ldots.$$

cessa di essere convergente. Dunque nell' intervallo questo rapporto che varia con R per gradi insensibili diverrà un minimo per un certo valore di R. Ora questo valore di R potrà facilmente essere calcolato, poichè sarà la radice positiva unica della equazione

$$(237)\quad -mA_0R^{-m-1}-(m-1)A_1R^{-m}-\ldots A_{m+1}R^{-2}+A_{m+1}+A_{m+2}R+\ldots=0$$

di cui il primo membro crescerà incessantemente con R. Se si suppone in particolare $m=1$, l' equazione (237) ridotta alla

$$(238)\quad \frac{A_0}{R^2}-A_2-A_3R-\text{ecc.}\ldots=0$$

somministrerà il valore di R corrispondente al valor minimo del rapporto

$$(239)\quad \frac{A_0+A_1R+A_2R^2}{R}+\ldots=\frac{A_0}{R}+A_1+A_2R+\text{ecc.}\ldots$$

Allorchè facendo

$$z=Re^{p\sqrt{-1}}$$

si può scegliere l'angolo p in modo che abbiasi identicamente

$$(240)\quad a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots\ldots$$
$$=(A_0+A_1R+A_2R^2+\text{ecc.})(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen.}\tau);$$

rappresentando τ un arco reale, la formola (232) si riduce alla

$$(241)\quad \Lambda_{-\pi}^{\pi}\varpi(Re^{p\sqrt{-1}})=A_0+A_1R+A_2R^2+\ldots,$$

e il valore del rapporto (235) oppure (239) corrispondente alla radice positiva dell' equazione (237) oppure (238) è precisamente il modulo principale della funzione

$$\frac{\varpi(z)}{z^m}\quad\text{o}\quad\frac{\varpi(z)}{z}.$$

Questo è ciò che accaderà particolarmente se li coefficienti

$$a_0, a_1, a_2 \text{ ecc.} \ldots$$

sono quantità reali dello stesso segno, o alternativamente positive e negative, poichè si verificherà la formola (240) nel primo caso ponendo

$$z = R, \quad \tau = 0, \quad \text{oppure a } \pi;$$

nel secondo caso prendendo

$$z = -R, \quad \tau = 0, \text{ oppure a } \pi.$$

Concepiamo, per fissare le idee, che si prenda

$$\varpi(z) = a\cos.z$$

essendo a un coefficiente reale e positivo.

L' equazione (238) ridotta a

$$(242) \quad 1 = \frac{R^2}{2} + \frac{1}{1.2}\frac{R^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{R^6}{6} + \frac{1}{1.2.3.4.6}\frac{R_2}{8} + \ldots$$

ammetterà una sola radice positiva cioè

$$(243) \qquad R = 1{,}199678\ldots$$

e il modulo principale della funzione

$$\frac{\varpi(z)}{z} = \frac{a\cos.(z)}{z}$$

sarà

$$(244) \qquad \frac{a}{0{,}662742\ldots}$$

Dunque la radice z della equazione

$$(245) \qquad z - a\cos.z = 0$$

e le funzioni di questa radice saranno sviluppabili in serie

convergenti per mezzo della formola di Lagrange sempre quando si abbia

$$(246) \qquad a < 0,662742 \ldots$$

il che già sapevasi.

Immaginiamo ora che nei teoremi 4.° e 5.° si riduca $f(z)$ ad una funzione intiera di z, di modo che abbiasi

$$(247) \qquad f(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

rappresentando m un numero intiero qualunque; allora prendendo per $\Pi(z)$ uno dei termini dei quali si compone quella funzione intiera, si stabilirà facilmente la seguente proposizione.

9.° Teorema sia

$$(248) \qquad z^m + a^{m-1} z_{m-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

una equazione in z di grado m nella quale i coefficienti a_0, a_1, a_2, ... a_{m-1} possono essere reali o immaginarj. Se per un certo modulo R attribuito alla variabile z il modulo di un termine diventi maggiore della somma dei moduli di tutti gli altri, l' esponente di z in questo termine sarà precisamente il numero delle radici della equazione (248), le quali offrono dei moduli inferiori ad R, e si calcoleranno facilmente con l' ajuto di serie convergenti i coefficienti di una nuova equazione che non avrà altre radici che quelle di cui trattasi.

Dimostrazione. Infatti siano

$$A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$$

i valori numerici, o i moduli dei coefficienti

$$a_0, a_1, \ldots\ldots a_{m-1},$$

e supponiamo che per il modulo R di z il modulo $A_l R^l$ del termine $a_l z^l$ divenga superiore alla somma dei moduli, ed a maggior ragione al modulo della somma di tutti gli altri termini, così che abbiasi

$$(249)\quad A_l R^l > A_0 + A_1 R + \ldots + A_{l-1} R^{l-1} + A_{l+1} R^{l+1} + A_{m-1} R^{m-1} + R^m.$$

Se si riduce il contorno OO'O''..... al cerchio descritto dall' origine delle coordinate col raggio R e se si ponga

$$\Pi(z) = a_l z^l,$$

il numero delle radici della equazione (248) le quali offrono dei moduli inferiori ad R sarà in virtù del teorema 4.° eguale al numero l delle radici dell' equazione

$$(250)\quad z^l = 0,$$

se d' altronde si indicano le prime con

$$(251)\quad z_1, z_2, \ldots\ldots z_l$$

si potrà in virtù del teorema 5.° calcolare con l' ajuto delle serie convergenti le somme

$$(252)\quad \begin{cases} z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_l \\ z_1^2 + z_2^2 + \ldots\ldots + z_l^2 \\ \text{ecc.} \\ z_1^l + z_2^l + \ldots\ldots + z_l^l, \end{cases}$$

e per conseguenza i coefficienti della equazione che avrebbe soltanto le radici $z_1, z_2 \ldots z_l$. D'altronde si potrà con l'ajuto delle formole (118), o (120) fissare i limiti degli errori commessi nel calcolo numerico delle somme (252).

Corellario 1.° Siccome la differenza

$$(253)\qquad R^m - (A_0 + A_1 R + \ldots + A_{m-1} R^{m-1})$$
$$= R^m \left(1 - \frac{A_{m-1}}{R} - \frac{A_{m-2}}{R^2} \ldots - \frac{A_1}{R^{m-1}} - \frac{A_0}{R^m}\right)$$

è evidentemente positiva allorchè il numero R supera la radice positiva unica dell' equazione

$$(254)\qquad 1 = \frac{A_{m-1}}{R} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{R^{m-1}} + \frac{A_0}{R^m},$$

di cui il secondo membro decresce incessantemente e passa da un valore infinito a un valor nullo, mentre che si fa crescere R entro i limiti $R = 0$, $R = \infty$. Egli è chiaro che se il modulo di z diviene superiore a questa radice, il modulo R^m del primo termine supererà la somma dei moduli di tutte le altre. Dunque l' equazione (248) ammette sempre m radici reali o imaginarie, ciascuna delle quali ha per modulo un numero inferiore o tutto al più eguale alla radice positiva della equazione (254).

Corollario 2.° Siccome il modulo A_0 del termine costante supera la somma dei moduli di tutti gli altri termini, quando il modulo R di z diventa minore della radice positiva unica dell' equazione

$$(255)\qquad A_0 - A_1 R - A_2 R^2 \ldots - A_{m-1} R^{m-1} - R^m = 0,$$

dal teorema 9.° ne segue che tutte le radici della equazione

(248) offrono dei moduli superiori alla radice positiva della equazione (255).

Corollario 3.° allorchè per

$$z = \mathrm{R}, \quad \text{o} \quad z = \mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}$$

il modulo del termine $a_1 z$ supera la somma dei moduli di tutti gli altri, una sola radice dell' equazione (248) offre un modulo inferiore ad R. Questa radice può essere immediatamente determinata con l' ajuto della formola,

$$(256) \qquad z = \Sigma^{n=\infty}_{n=1} \frac{(-1)^n}{1.2..n a_1^m} \frac{d^{n-1}(a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m)^n}{dz^{n-1}}$$

che deducesi dall' equazione (237) in y mettendo invece della funzione $\varpi(z)$ il rapporto

$$(257) \qquad \frac{a_0 + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m}{a_1},$$

e nel quale z rappresenta un numero infinitamente piccolo che devesi ridurre a zero dopo la differenziazione. Aggiungiamo che se si limiti a calcolare gli n primi termini della somma che costituisce il secondo membro della formola (256), l' errore commesso non sarà maggiore del più piccolo dei valori che acquistano le espressioni (120) quando si suppone $c = 2\pi\mathrm{R}$, vale a dire della più piccola delle due quantità

$$(258) \qquad \mathrm{RM}^n \mathrm{L}\left(\frac{1}{1-m}\right), \quad \frac{\mathrm{RM}^n}{n(1-\mathrm{M})}$$

essendo il valore di M

$$(259) \qquad \mathrm{M} = \Lambda \frac{a_0 + a_2 z^{-2} + \ldots\ldots + a_{m-1} z^{-(m-1)} + z^{-m}}{a_1 z}.$$

A maggior ragione l' errore commesso non supererà i

valori delle espressioni (258) corrispondenti al valore di M determinato dalla formola

$$(260)\qquad M = \frac{A_0 + A_2 R^2 + \ldots + A_{m-1} R^{m-1} + R^m}{A_1 R}.$$

Affinchè la formola (256) sia applicabile alla determinazione di una radice della equazione (248), basta che il più piccolo dei valori di M dedotti dalla formola (259), cioè a dire il modulo principale della funzione (257) sia inferiore all' unità. Del resto quando l' unità è maggiore del valor minimo del rapporto, che forma il secondo membro della formola (260), cioè del valore corrispondente alla radice positiva unica dell' equazione

$$(261)\qquad A_0 = A_2 R^2 + 2A_3 R^3 + \ldots + (m-1)R^m,$$

può limitarsi a prendere per R la radice di cui trattasi. Per mostrare un' applicazione delle formole precedenti consideriamo in particolare l' equazione

$$(262)\qquad z^5 + 10z - 1 = 0,$$

siccome in questa equazione il coefficiente 10 della prima potenza di z supera la somma dei valori numerici degli altri coefficienti 1 ed 1, si può affermare che una sola radice offrirà un modulo inferiore all' unità. Per determinare questa radice col mezzo di una serie convergente basterà ricorrere alla formola (256), in cui

$$(263)\qquad z = \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1.2.3\ldots n} \left(\frac{1}{10}\right)^n d^{n-1} \frac{(1-z^5)^n}{dz^{n-1}}$$

dalla quale si ricava

$$(264)\qquad z=\frac{1}{10}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^5+\frac{10}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{10}-\frac{15.14}{2.3}\left(\frac{1}{10}\right)^{15}\right.$$

$$\left.+\frac{20.19.18}{2.3\,4}\left(\frac{1}{10}\right)^{20}-\ldots\right]$$

e per conseguenza

$$(265)\qquad z=0,0999990000499996500094\ldots$$

D' altronde siccome le formole (259), (260) daranno l' una e l' altra

$$M=\frac{1+R^5}{10R},$$

si potrà prendere per M e per R nelle formole (258) il modulo principale della funzione

$$\frac{1-z^5}{10z}$$

e il valore corrispondente di R, cioè la radice positiva unica dell' equazione (261) ossia

$$1=4R^5.$$

Così si troverà

$$R=\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}}=0,7578\ldots\quad e\quad M=0,1649\ldots$$

Ora il secondo membro della formola (265) essendo il valore approssimato di z che somministra l' equazione (263), quando si trascura nella somma indicata dal segno Σ il termine corrispondente ad $n\pm 26$ e quelli che seguono, l' errore che si commetterà prendendo per z il numero

$$0,0999990000499996500094\ldots\ldots$$

composto di ventidue cifre decimali sarà più piccolo della

seconda delle espressioni (258) nella quale il prodotto

$$\frac{0,7578}{26(0,8350....)}(0,16493...)^{26}=(0,0349...)(0,10493...)^{26}.$$

Ora il logaritmo decimale di questo prodotto essendo

$$-22+0,1926....$$

ne risulta che l' errore commesso sarà minore di

$$\frac{1,6.....}{(10)^{22}}.$$

In conseguenza nel secondo membro della formola (265) la 21ª cifra decimale è anche esatta.

Corollario 4.° Allorchè per

$$z=\mathrm{R},\quad \text{o}\quad z=\mathrm{R}e^{-p\sqrt{-1}}$$

il modulo AR^2 del termine $a_2 z^2$ supera la somma dei moduli di tutti gli altri termini, due sole radici dell' equazione (248) offrono dei moduli inferiori ad R. Se si dicano z_1, z_2 queste due radici, la loro somma, e la somma dei loro quadrati potranno essere immediatamente espresse in serie convergenti col mezzo delle formole

$$(266)\quad z_1+z_2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{na_2^n}\frac{1}{1.2...(2n-1)}\frac{d^{2n-1}(a_0+a_1\varepsilon+a_3\varepsilon^3+...+a_{m-1}\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^m)^n}{d\,\varepsilon^{2n-1}}$$

$$(267)\quad z_1^2+z_2^2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{na_2^n}\frac{2}{1.2..(2n-1)}\frac{d^{2n-1}[\varepsilon(a_0+a_1\varepsilon+a_3\varepsilon^3+..+a_{m-1}\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^m)^n]}{d\,\varepsilon^{2n-1}}$$

che si deducono dalle formole (132), (133) sostituendo alla funzione $\varpi(z)$ il rapporto

$$(268)\qquad \frac{a_0+a_1z+a_3z^3+\ldots+a_{m-1}z^{m-1}+z^m}{a_2z^2},$$

e nelle quali ε rappresenta un numero infinitamente piccolo che deve ridursi a zero dopo la differenziazione. Aggiungiamo che se ci limitiamo a calcolare gli n primi termini delle due somme che costituiscono i secondi membri delle formole (266), (267), l' errore commesso non supererà riguardo alla prima somma il più piccolo dei valori che ricevono le espressioni (120) quando vi si faccia $c = 2\pi R$, vale a dire la più piccola delle quantità

$$(269)\qquad RM^nL\left(\frac{1}{1-M}\right),\ \frac{RM^n}{n(1-M)}$$

essendo il valore di M

$$(270)\qquad M = \Lambda\frac{a_0+a_1\bar{z}+a_3\bar{z}^3+\ldots+a_{m-1}\bar{z}^{m-1}+\bar{z}^m}{a_2\bar{z}^2},$$

e riguardo alla seconda somma il più piccolo dei valori che acquistano le espressioni (118) quando vi si faccia

$$c = 2\pi R;\quad N = \Lambda(2\bar{z}) = 2R$$

cioè a dire la più piccola delle quantità

$$(271)\qquad 2R^2M^nL\left(\frac{1}{(1-M)}\right),\ \frac{2R^2M^n}{n(1-M)}.$$

A più forte ragione gli errori di cui trattasi, non supereranno i valori che ricevono le espressioni (270), (271) quando si attribuisca ad M il valore determinato dalla formola

$$(272)\qquad M = \frac{A_0+A_1R+A_3R^3+\ldots+A_{m-1}R^{m-1}+R^m}{A_2R^2}.$$

Dopo di aver calcolato con l'ajuto delle equazione (266), (267) le somme $z_1 + z_2$, $z_1^2 + z_2^2$ si determinerà facilmente il valore del prodotto $z_1 z_2$ per mezzo della formola

$$(273) \qquad z_1 z_2 = \frac{(z_1 + z_2)^2 - (z^2_1 + z^2_2)}{2}$$

si conosceranno dunque allora i coefficienti della equazione di secondo grado

$$(274) \qquad z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0,$$

la soluzione della quale somministrerà immediatamente i valori delle radici z_1, z_2. Osserviamo d'altronde che potrebbesi determinare immediatamente il valore della differenza $z_1 - z_2$ per mezzo della formola

$$(275) \qquad (z_1 - z_2)^2 = 2(z_1 + z_2)^2 - (z_1 + z_2)^2,$$

e calcolare in seguito z_1, z_2 per mezzo delle due seguenti

$$(276) \qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} + \dfrac{z_1 - z_2}{2} \\[2ex] z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} - \dfrac{z_1 - z_2}{2}. \end{cases}$$

Affinchè sussistano le formole (266), (267) basta che il più piccolo dei valori di M dedotti dalle formole (270), cioè il modulo principale della funzione (268) sia minore della unità. Del resto quando l' unità supera il valor minimo del rapporto che forma il secondo membro della formola (272), vale a dire il valor corrispondente alla radice positiva unica dell'equazione

abcdhi. Ora questa superficie *abcd* è facile a determinarsi relativamente a quella dell' intiera mezza sfera. Prenderemo perciò per unità il raggio della sfera, e indicheremo con π il rapporto del diametro alla circonferenza facendo passare pei punti *a*, *c* l' arco di circolo massimo *ac*, si avrà $abcd = abc + acd$. Ora *abc*, è la superficie d' una porzione di segmento sferico, che sta a quella del segmento sferico intiero $(1 - \cos.s').2\pi$, come l' arco *bc* stà al circolo *bcehf*, o come *ml* sta a 2π, o come l' angolo sferico *abc* o l' arco che lo misura sta allo stesso 2π. Quest' angolo *abc* è il complemento dell' angolo *dac*, e l' angolo *dac* si determina per mezzo del triangolo sferico *dac*, rettangolo in *d*, in cui si conosce il lato $ac = s'$, e il lato $ad = s$, d'onde $\cos.dac = \cot.s' \tang.s = \frac{\tang.s}{\tang.s'}$, e per conseguenza anche $\sen.abc = \frac{\tang.s}{\tang.s'}$, ossia $bac = \arc.\left(\sen. = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right)$. Si ha dunque, secondo quello che sopra si è detto,

$$2\pi : \arc.\left(\sen. = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right) :: (1 - \cos.s')2\pi : \text{superficie } abc,$$

e quindi questa superficie

$$= (1 - \cos.s')\arc.\left(\sen. = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right).$$

Quanto alla superficie del triangolo sferico *dac*, essa si troverà osservando che si ha l'angolo *adc*, retto, ossia $= \frac{1}{2}\pi$; l'angolo $dac = \arc.\left(\cos. = \frac{\tang.s}{\tang.s'}\right)$ come sopra abbiamo veduto; e per mezzo dello stesso triangolo sferico *acd*, l' angolo

$$acd = \arc.\left(\sen. = \frac{\sen.s}{\sen.s'}\right);$$

poichè la superficie di qualunque triangolo sferico è rappresentata dalla somma degli archi che misurano i suoi tre angoli, meno la semicirconferenza;
avremo la superficie di questo triangolo

$$(277)\qquad \frac{A_0}{R}+A_1=A_3R^2+2A_4R^3+\ldots+(m-3)A_{m-1}R^{m-2}+(m-2)R^{m-1},$$

si potrà limitare a prendere per R la radice di cui trattasi. Per mostrare una applicazione delle formole precedenti consideriamo in particolare l' equazione

$$(278)\qquad z^5+10z^2-1=0.$$

Siccome in questa equazione il coefficiente 10 di z^2 supera la somma dei valori numerici 1, ed 1 degli altri coefficienti, si può accertare che due sole radici z_1, z_2 offriranno dei moduli inferiori all' unità. Per determinare queste radici per mezzo delle serie convergenti basterà ricorrere alle formole (266), (267) nelle quali

$$(279)\qquad \begin{cases} z_1+z_2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{2}{1.2\ldots(2n-1)\,n}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\dfrac{d^{2n-1}(1-\varepsilon^5)^n}{d\,\varepsilon^{2n-1}} \\[2ex] z_1^2+z_2^2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{4}{1.2\ldots(2n-1)2n}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\dfrac{d^{2n-1}(\varepsilon(1-\varepsilon^5)^n)}{d\,\varepsilon^{2n-1}} \end{cases}$$

dai quali si ricaverà

$$(280)\qquad \begin{cases} z_1+z_2=-\left(\dfrac{1}{10}\right)^3-\dfrac{7.6}{2.3}\left(\dfrac{1}{10}\right)^8-\dfrac{12.11.10.9}{2.3.4.5}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{13}-\text{ec.} \\[2ex] z_1^2+z_2^2=\dfrac{1}{10}+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^6+\dfrac{10.9.8}{2.3.4}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{11}+\text{ec.} \end{cases}$$

e per conseguenza

$$(281)\qquad \begin{aligned} z_1+z_2&=-0{,}0010000700099\ldots\ldots \\ z_1^2+z_2^2&=0{,}1000025003 0\ldots\ldots, \end{aligned}$$

si avrà dunque

$$(z_1 - z_2)^2 = 2(z_1^2 + z_2^2) - (z_1 + z_2)^2 = 0{,}20000400060\ldots$$

e supponendo $z_1 < z_2$

$$(282) \qquad z_1 - z_2 = -0{,}447218068284\ldots,$$

poi si concluderà dalle formole (281), (282) congiunte alle formole (276)

$$(283) \qquad \begin{cases} z_1 = -0{,}223559030637\ldots\ldots \\ z_2 = +0{,}223659037646\ldots\ldots \end{cases}$$

Per altra parte siccome le formole (270), (272) daranno l'una e l'altra

$$M = \frac{1+R^5}{10R^4}$$

si potrà nelle espressioni (269), (271) prendere per M e per R il modulo principale della frazione

$$\frac{1-z^5}{10z^4}$$

e il valore corrispondente di R vale a dire l'unica radice positiva della equazione (277), ossia

$$1 = 3R^5$$

si troverà così

$$R = \sqrt[5]{\tfrac{1}{3}} = 0{,}8027\ldots, \quad M = 0{,}2069\ldots$$

In conseguenza la seconda delle espressioni (271) ed a maggior ragione la seconda delle espressioni (269) non supereranno il prodotto

$$(284) \qquad (0,1625.....)\frac{(0,2069.....)^n}{n}.$$

Ora i secondi membri delle formole (281) sono i valori approssimati che le equazioni (279) somministrano per le quantità $z_1 + z_2$, $z_1^2 + z_2^2$, quando si trascurano nelle somme indicate dal segno Σ i termini corrispondenti ad $n = 16$ e li susseguenti, ed allorchè nel prodotto (284) si fa $n = 16$, esso diventa

$$\frac{3,9...}{(10)^{12}}.$$

Dunque nel secondo membro di ciascuna delle formole (281) e in conseguenza nel secondo membro di ciascuna delle formole (283) l' undecima cifra decimale è ancora esatta.

Egli è importante l' osservare che se la fuzione $\underline{f}(z)$ algebraica o trascendente è il prodotto di molti fattori

$$\underline{f}_1(z),\ \ f_2(z), \ldots.$$

le formole (86), (87) trarranno seco non solamente l'equazione (88) ma ancora la seguente

$$(285) \quad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'(z)}{\underline{f}(z)} \frac{dz}{ds}\, ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_1(z)}{\underline{f}_1(z)} \frac{dz}{ds}\, ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_2(z)}{\underline{f}_2(z)} \frac{dz}{ds}\, ds \ldots$$

Ciò posto immaginiamo che le variabili reali x, y, e quindi la variabile immaginaria $z = x + y\sqrt{-1}$ essendo espressa in funzione dell' arco s si abbia non solo (53)

$$\underline{f}(z) = \phi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s),$$

ma ancora

$$(286)\qquad \begin{cases} \underline{f}_1(z) = \phi_1(s) + \sqrt{-1}\,\chi_1(s), \\ \underline{f}_2(z) = \phi_2(s) + \sqrt{-1}\,\chi_2(s), \\ \text{ecc.} \end{cases}$$

rappresentando

$$\phi_1(s),\quad \phi_2(s)\ldots\ldots\chi_1(s),\quad \chi_2(s)\ldots\ldots$$

come pure $\phi(s)$, $\chi(s)$ funzioni reali di s. Siano d' altronde z_0 e z_1, i valori di z corrispondenti ad $s = s_0$, ed $s = s_1$. Dalla formola (83) si ricaverà non solamente

$$(287)\qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'(z)}{\underline{f}(z)} \frac{dz}{ds}\, ds = \mathrm{L}[\pm \underline{f}(z_1)] - \mathrm{L}[\pm f(z_0)]$$

$$- \pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right);$$

ma ancora

$$(288)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_1(z)}{\underline{f}_1(z)} \frac{dz}{ds}\, ds = \mathrm{L}[\pm \underline{f}_1(z_1)] - \mathrm{L}[\pm \underline{f}_1(z_0)] \\ \qquad - \pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}\right)\right), \\ \displaystyle\int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_2(z)}{\underline{f}_2(z)} \frac{dz}{ds}\, ds = \mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_1)] - \mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_0)] \\ \qquad - \pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s)}{\phi_2(s)}\right)\right) \\ \text{ecc.,} \end{cases}$$

ed in conseguenza l' equazione (285) darà

$$(289)\qquad \mathrm{L}[\pm \underline{f}(z_1)]-\mathrm{L}[\pm \underline{f}(z_0)]-\pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right)$$

$$=\mathrm{L}[\pm \underline{f}(z)]+\mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_1)]+\ldots\ldots-\mathrm{L}[\pm \underline{f}_1(z_0)]$$

$$-\mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_0)]-\ldots\ldots-\pi\sqrt{-1}\left[I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}\right)\right)+I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s)}{\phi_2(s)}\right)\right)\right].$$

D' altra parte si caverà dall' equazione (86)

$$(290)\qquad \underline{f}(z_0)=\underline{f}_1(z_0)\cdot \underline{f}_2(z_0)\cdot\ldots\ldots$$

e in conseguenza

$$(291)\qquad \mathrm{L}[\pm \underline{f}(z_0)]=\mathrm{L}[\pm \underline{f}_1(z_0)]+\mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_0)]+\ldots\ldots;$$

purchè la somma

$$(292)\qquad \text{arc. tang.}\,\frac{\chi_1(s_0)}{\phi_1(s_0)}+\text{arc. tang.}\,\frac{\chi_2(s_0)}{\phi_2(s_0)}+\ldots\ldots$$

resti compresa fra i limiti $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ si troverà parimente

$$(293)\qquad \mathrm{L}[\pm \underline{f}(z_0)]=\mathrm{L}[\pm \underline{f}_1(z_1)]+\mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_2)]+\ldots\ldots$$

purchè la somma

$$(294)\qquad \text{arc. tang.}\,\frac{\chi_1(s_0)}{\phi_1(s_0)}+\text{arc. tang.}\,\frac{\chi_2(s_1)}{\phi_2(s_1)}+\ldots\ldots$$

sia pur essa compresa fra i limiti $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$.

Dunque se le somme (292), (294) offrono valori numerici inferiori a $\frac{1}{2}\pi$, l' equazione (287) potrà ridursi a

$$(295)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right) = I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}\right)\right) + I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s)}{\phi_2(s)}\right)\right) + \ldots\ldots$$

Imaginiamo per fissare le idee, che la funzione $\underline{f}(z)$ venendo spezzata in due parti $\Pi(z)$. $\varpi(z)$, si prenda

$$\underline{f}_1(z) = \Pi(z)\,,\quad \underline{f}_2(z) = 1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\,.$$

Se i valori di $\Pi(z)$ corrispondenti a $z = z_0$, ed a $z = z_1$ sono tutti due reali si avrà

$$\chi_0(s_0) = 0,\quad \chi_1(s_1) = 0,$$

e in conseguenza ciascuna delle somme (292), (294) essendo ridotta ad un solo termine offrirà un valore numerico più piccolo di $\frac{\pi}{2}$. Se d' altronde la condizione (97) si verifica per i valori di s contenuti fra i limiti $s = s_0$, $s = s_1$ si avrà

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s_1)}{\phi_2(s_1)}\right)\right) = 0,$$

e in conseguenza la formola (295) darà

$$(296)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right) = I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}\right)\right)$$

essendo $\phi_1(s)$, $\chi_1(s)$ funzioni reali di s determinate dalla formola

$$(297)\qquad \Pi(z) = \phi_1(s) + \sqrt{-1}\,\chi_1(s).$$

Se essendo la condizione (97) adempita dai valori di s compresi fra i limiti s_0, s_1, i valori di $\Pi(z)$ corrispondenti a questi limiti, non presentassero parti reali, allora sostituendo a

$$\underline{f}(z)=\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s),\quad \underline{f}(z)\sqrt{-1}=-\chi(s)+\sqrt{-1}\,\varphi(s),$$

a

$$\Pi(z)=\varphi_1(s)+\sqrt{-1}\,\chi_1(s),\quad \Pi(z)\sqrt{-1}=-\chi_1(s)+\sqrt{-1}\,\varphi_1(s),$$

e sostituendo in conseguenza alle fuzioni reali

$$\varphi(s),\quad \chi(s),\quad \varphi_1(s),\quad \chi_1(s),$$

le seguenti

$$-\chi(s),\quad \varphi(s),\quad -\chi_1(s),\quad \varphi_1(s)$$

si otterrebbe invece dell' equazione (296) quest'altra formola

$$(298)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\varphi(s)}{\chi(s)}\right)\right)=I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\varphi_1(s)}{\chi_1(s)}\right)\right).$$

Imaginiamo ora che essendo $\underline{f}(z)$ una funzione intiera di z determinata dalla equazione (247) si prenda

$$(299)\qquad \Pi(z)=z^m,\quad \sigma(z)=a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_1z+a_0.$$

Il numero μ delle radici che offriranno contemporaneamente i moduli minori di R e delle radici reali positive sarà rappresentato dal secondo membro della formola (175), nella quale si potrà prendere per valore di $\chi(x,y)$ uno qualunque di quelli che somministrano le formole (158), (159), per conseguenza uno qualunque dei due rapporti

$$-\frac{\chi(s)}{\varphi(s)},\quad \frac{\varphi(s)}{\chi(s)}.$$

D' altronde se il modulo R supera la radice positiva unica dell' equazione (254), la condizione (97) si troverà adempiuta da tutti i punti situati sulla circonferenza del circolo descritto dall' origine col raggio R, cioè per tutti i punti corrispondenti a coordinate della forma

$$x = \mathrm{R}\cos.p, \quad y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}.p.$$

Finalmente egli è chiaro che a quei punti che saranno situati sull' asse delle y corrisponderanno dei valori di z della forma

$$z = -\mathrm{R}\sqrt{-1}, \qquad z = \mathrm{R}\sqrt{-1};$$

in conseguenza valori reali di z^m o valori imaginarj di z^m senza parti reali secondo che m sarà un numero pari o un numero dispari. Dunque in virtù delle formole (296), (298) unite alla formola (175) si avrà primo

$$(300) \qquad \mu = -\tfrac{1}{2} I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\mathrm{sen}.mp}{\cos.mp}\right)\right) + \tfrac{1}{2} I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\phi(0,y)}\right)\right)$$

se m è numero pari: secondo

$$(301) \qquad \mu = \tfrac{1}{2} I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\cos.mp}{\mathrm{sen}.mp}\right)\right) - \tfrac{1}{2} I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\left(\left(\frac{\phi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right)$$

se m è un numero dispari. Ora nel primo caso si troverà

$$(302) \qquad I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\mathrm{sen}.mp}{\cos.mp}\right)\right) = -m$$

e nel secondo

$$(303) \qquad I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\cos.mp}{\mathrm{sen}.mp}\right)\right) = m.$$

Dunque si avrà per dei valori pari di m

$$(304) \qquad \mu = \frac{m}{2} + \tfrac{1}{2} I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\phi(0,y)}\right)\right),$$

e per dei valori dispari di m

$$(305)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{\phi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right).$$

Tali sono le formole, che per una equazione algebraica di grado pari o dispari determinano il numero delle radici delle quali la parte reale è positiva. Il valore di R che in queste medesime formole superar deve la radice positiva unica della equazione (254) può essere, se si vuole, supposto infinito. Si avrà dunque ancora per dei valori pari di m

$$(306)\qquad \mu = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\phi(0,y)}\right)\right),$$

e per dei valori dispari di m

$$(307)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\phi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right).$$

In queste diverse formole

$$\phi(0,y),\quad \chi(0,y)$$

sono funzioni reali di y determinate dall' equazione

$$(308)\qquad f(y\sqrt{-1}) = \phi(0,y) + \sqrt{-1}\,\chi(0,y).$$

Aggiungiamo che dalla formola (197) si ricaverà

$$(309)\qquad I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\phi(0,y)}\right)\right) + I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\phi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right) = \pm 1,$$

dovendosi il doppio segno ridursi al segno + o al segno − secondo che il rapporto

$$\frac{\phi(0,y)}{\chi(0,y)}$$

sarà positivo o negativo quando $y = \infty$.

Per mezzo di raziocinj simili ai precedenti potrebbesi determinar anche facilmente il numero delle radici della equazione (248), delle quali la parte reale è superiore a un valor dato x_0 della variabile x. Del resto siccome ponendo

$$z = x_0 + u,$$

si stabilisce fra le variabili u e z una relazione tale che la parte reale di u diviene positiva o negativa, secondochè la parte reale di z è maggiore o minore di x_0, egli è chiaro che per ottenere il numero cercato basterà sostituire nella formola (306) o (307) alle due funzioni

$$\phi(0, y), \qquad \chi(0, y)$$

le seguenti

$$\phi(x_0, y), \qquad \chi(x_0, y).$$

Dunque il numero μ delle radici della equazione (248) che offriranno delle parti reali maggiori di x_0, sarà per i valori pari di m

$$(310) \qquad \mu = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(x_0, y)}{\phi(x_0, y)}\right)\right),$$

e per i valori dispari di m

$$(311) \qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\phi(x_0, y)}{\chi(x_0, y)}\right)\right).$$

D' altronde si avrà, qualunque sia il numero intiero m,

$$(312) \qquad I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(x_0, y)}{\phi(x_0, y)}\right)\right) + I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\phi(x_0, y)}{\chi(x_0, y)}\right)\right) = \pm 1,$$

dovendosi prendere il segno + o il segno — secondo che il rapporto

$$\frac{\phi(x_0 y)}{\chi(x_0 y)}$$

diverrà positivo o negativo per dei valori infiniti di y. Per mostrare una applicazione delle formole che abbiamo stabilite consideriamo l' equazione del 7.° grado, che il Sig. Fourier ha presa ad esempio nella prima parte del suo trattato di analisi cioè

$$(313) \qquad z^7 - 2z^5 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 = 0,$$

e proponghiamoci di trovare il numero μ delle radici che offrono parti reali positive. Questo numero dedotto dalle formole (307), (309) sarà

$$(314) \quad \mu = 3 + \tfrac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty} \frac{y(y^6+2y^4-3y^3+5)}{((4y^2-6))} = 3 + \tfrac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty} \frac{y(y^6+5)}{((4y^2-6))} = 4.$$

Dunque quattro radici offriranno delle parti reali positive, e le tre altre delle parti reali negative. Fra queste ultime si troverà necessariamente una radice reale negativa. Si potrebbe parimente con l' ajuto della formola (311) determinare il numero delle radici della equazione (313), di cui la parte reale non superi un dato valore di x.

In generale se la funzione $\underline{f}(z)$ essendo reale e determinata dalla formola (247) si chiami $\underline{f}_n(x)$ il coefficiente di y^n nello sviluppo della funzione $\underline{f}(x+y)$, per modo che si abbia

$$(315) \qquad \underline{f}(x+y) = \underline{f}(x) + y\underline{f}_1(x) + y^2\underline{f}_2(x) + \ldots + y^{m-1}\underline{f}_{m-1}(x) + y^m$$

si concluderà

$$(316) \qquad \underline{f}(x+y\sqrt{-1}) = \underline{f}(x) + y\sqrt{-1}\,\underline{f}_1(x) - y^2\underline{f}_2(x) + \ldots\ldots$$

$$+ (y\sqrt{-1})^{m-1}\underline{f}_{m-1}(x) + (y\sqrt{-1})^m.$$

In conseguenza si troverà per dei valori pari di m

$$(317)\quad \begin{cases} \varphi(x,y)=[\underline{f}(x)-y^2\underline{f}_2(x)+\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}y^m \\ \chi(x,y)=y[\underline{f}_1(x)-y^2\underline{f}_3(x)+\ldots-(-1)^{\frac{m}{2}}y^{m-1}\underline{f}_{m-1}(x)] \end{cases}$$

E per dei valori dispari di m

$$(318)\quad \begin{cases} \varphi(x,y)=\underline{f}(x)-y^2\underline{f}_2(x)+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}y^{m-1}\underline{f}_{m-1}(x) \\ \chi(x,y)=y[\underline{f}_1(x)-y^2\underline{f}_3(x)+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}y^{m-1}]. \end{cases}$$

Ciò posto se si rappresenta con

$$\underline{f},\ \underline{f}_1,\ \underline{f}_2\ \ldots\ \underline{f}_{m-1}$$

ciò che diventano le funzioni

$$f(x),\ \underline{f}_1(x),\ \underline{f}_2(x)\ \ldots\ \underline{f}_{m-1}(x)$$

per un valore dato di x, il numero μ delle radici che offrono parti reali superiori al valore di cui trattasi sarà in virtù delle formole (310), (311), (312) per dei valori pari di m

$$(319)\quad \mu=\frac{m}{2}-\tfrac{1}{2}I\frac{\underline{f}_{m-1}}{((y))}$$

$$+\tfrac{1}{2}I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{y^m-y^{m-2}\underline{f}_{m-2}+y^{m-4}\underline{f}_{m-4}+\ldots\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}}{y(y^{m-2}\underline{f}_{m-1}-y^{m-4}\underline{f}_{m-3}+\ldots\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}}\right)\right)$$

e per dei valori dispari di m

$$(320)\quad \mu=\frac{m}{2}-\tfrac{1}{2}I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{y^{m-1}\underline{f}_{m-1}-y^{m-3}\underline{f}_{m-3}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}}{y(y^{m-1}-y^{m-3}\underline{f}_{m-2}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}_1)}\right)\right);$$

si può d'altronde ridurre la formola (319) alla

$$(321)\qquad \mu=\frac{m}{2}-\tfrac{1}{2}I\frac{\underline{f}_{m-1}}{((y))}-\tfrac{1}{2}I\frac{\underline{f}}{((y))\underline{f}_1}$$

$$+I_{0}^{\infty}\frac{y^{\frac{m}{2}}-y^{\frac{m}{2}-1}\underline{f}_{m-2}+\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}}{((y^{\frac{m}{2}-1}\underline{f}_{m-1}-y^{\frac{m}{2}-2}\underline{f}_{m-3}+\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}_1))}$$

e la formola (320) alla

$$(322)\qquad \mu=\frac{m}{2}-\tfrac{1}{2}I\frac{\underline{f}}{((y))\underline{f}_1}$$

$$-I_{0}^{\infty}\frac{y^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}_{m-1}-y^{\frac{m-3}{2}}\underline{f}_{m-3}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}}{((y^{\frac{m-1}{2}}-y^{\frac{m-3}{2}}\underline{f}_{m-2}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}_1))}.$$

Ora da queste ultime formole si concluderà attribuendo ad m successivamente i valori particolari 3, 4, 5, 6, 7, che il numero μ delle radici delle quali la parte reale supera il valore dato di x è per una equazione di terzo grado

$$(323)\qquad \mu=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}I\frac{\underline{f}}{((y))\underline{f}_1}-I_{0}^{\infty}\frac{y\underline{f}_2-\underline{f}_1}{((y-\underline{f}_1))},$$

per una equazione di quarto grado

$$(324)\qquad \mu = 2 - \tfrac{1}{2} I \frac{f_3}{((y))} - \tfrac{1}{2} I \frac{f}{((y))\underline{f}_1} + I_0^\infty \frac{y^3 - \underline{y}\underline{f}_2 + \underline{f}}{((\underline{y}\underline{f}_3 - \underline{f}_1))},$$

per una equazione di quinto grado

$$(325)\qquad \mu = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2} I \frac{f}{((y))\underline{f}_1} - I_0^\infty \frac{y^3\underline{f}_4 - \underline{y}\underline{f}_2 + \underline{f}}{((y^3 - \underline{y}\underline{f}_3 + \underline{f}_1))},$$

per una equazione di sesto grado

$$(326)\qquad \mu = 3 - \tfrac{1}{2} I \frac{f_5}{((y))} - \tfrac{1}{2} I \frac{f}{((y))\underline{f}_1} + I_0^\infty \frac{y^5 - y^3\underline{f}_4 + \underline{y}\underline{f}_2 - \underline{f}}{((y^3\underline{f}_5 - \underline{y}\underline{f}_3 + \underline{f}_1))};$$

finalmente per una equazione di settimo grado

$$(327)\qquad \mu = \tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{2} I \frac{f}{((y))\underline{f}_1} - I_0^\infty \frac{y^3\underline{f}_6 - \underline{y}^3\underline{f}_4 + \underline{y}\underline{f}_2 - \underline{f}}{((y^3 - y^3\underline{f}_5 + \underline{y}\underline{f}_3 - \underline{f}_1))};$$

o ciò che torna lo stesso

$$(328)\qquad \mu = \tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{2} I \frac{f}{((y))\underline{f}_1} - \tfrac{1}{2} I \frac{\underline{f}_5\underline{f}_6 - \underline{f}_2}{((y))} - \tfrac{1}{2} I \frac{\underline{f}_1\underline{f}_6 - \underline{f}}{((y))\underline{f}_1}$$

$$+ I_0^\infty \frac{y^3 - y^3\underline{f}_5 + \underline{y}\underline{f}_3 \cdot \underline{f}_1}{((y^3(\underline{f}_5\underline{f}_6 - \underline{f}_4) - \underline{y}(\underline{f}_3\underline{f}_6 - \underline{f}_2) + \underline{f}_1\underline{f}_6 - \underline{f}))}.$$

Se si voglia applicare la formola (328) all'equazione (313) si troverà,

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$

$$f_1(x) = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5,$$

$$f_2(x) = 21x^5 - 20x^3 - 9x + 4,$$

$$f_3(x) = 35x^4 - 20x^2 - 3,$$

$$f_4(x) = 35x^3 - 10x$$

$$f_5(x) = 21x^2 - 2$$

$$f_6(x) = 7x;$$

si osserverà d' altronde che le diverse radici della equazione (313) devono offrire dei moduli inferiori alla radice positiva unica della equazione

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0 \tag{329}$$

e per conseguenza superando il numero 2 quest' ultima radice, avranno tutte delle parti reali comprese fra i limiti -2, $+2$.

Ora se si faccia successivamente

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1$$

si otterrà 1.° dalla formola (328) per $x = -1$.

$$\mu = 5 - I_0^\infty \frac{y^3 - 19y^2 + 12y + 25}{12((9y^2 - 8y - 13))} = 6;$$

2.° dalla formola (327) per $x = 0$

$$\mu = 4 - I_0^\infty \frac{4y - 6}{((y^3 + 2y^2 - 3y + 5))} = 3 + I_0^\infty \frac{y^3 + 5}{2((2y - 3))} = 4.$$

3.° Dalla formola (328) per $x = 1$

$$\mu = 3 + I_0^{\infty} \frac{y^3 - 19y^2 + 12y + 9}{4((27y^2 - 22y - 16))} = 2.$$

Dunque l'equazione (313) ammetterà una radice reale negativa contenuta fra i limiti -2, -1, e delle altre sei radici, due offriranno delle parti reali negative comprese fra i limiti -1, 0, due offriranno delle parti reali positive comprese fra i limiti 0, 1; finalmente due offriranno delle parti reali positive comprese fra i limiti 1, 2. Ritorniamo ancora all'equazione (248), e supponiamo che il primo membro o la funzione $\underline{f}(z)$ essendo decomposta in due parti $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, si indichi con $z = a$ una delle radici della equazione

$$(100) \qquad \Pi(z) = 0;$$

se si faccia $z = a + u$, l'equazione (248) diventerà

$$(330) \qquad \Pi(a + u) + \varpi(a + u) = 0;$$

se d'altronde per un certo modulo V della variabile imaginaria $\bar{u}$ la condizione

$$(331) \qquad \Lambda \frac{\varpi(a + \bar{u})}{\Pi(a + \bar{u})} < 1$$

si verifichi, il numero delle radici che renderanno il modulo della differenza $z - a$ inferiore ad V sarà lo stesso per l'equazione (248), e (100). Ciò posto ammettiamo che tutte le radici della equazione (100) diverse da a rendano il modulo della differenza $z - a$ superiore ad V, una sola sadice della equaziono (248) sarà della forma

$$a + u$$

essendo il modulo di u inferiore ad V, e questa radice potrà essere sviluppata in serie convergente dalla formola

$$(332) \qquad z = a + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \mathrm{E}\left(\left(\left(\frac{v(a+u)}{\Pi(a+u)}\right)^n\right)\right)$$

essendo il segno E relativo al solo valore $u=0$ della variabile u; o ciò che torna lo stesso dalla formola

$$(333) \qquad z = a + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{d^{n-1}\left[\frac{uv(a+u)}{\Pi(a+u)}\right]^n}{du^{n-1}}.$$

Aggiungiamo che se si esprime la variabile u in funzione di un'altra variabile v di modochè abbiasi

$$(334) \qquad u = \mathrm{V}$$

rappresentando V una funzione di v, all'equazione (332) potrà sostituirsi la seguente

$$(335) \qquad z = a + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2....n} \mathrm{E}\left(\left(\left(\frac{v(a+v)}{\Pi(a+v)}\right)^n \frac{d\mathrm{V}}{dv}\right)\right)$$

essendo E il segno relativo al solo valore di v che si ricava mettendo nella formola (334), $u=0$. In quanto all' errore che si commetterà se nelle somme che contengono le formole (332), (333), (335) si trascuri il termine nesimo ed i seguenti esso non sorpasserà il prodotto

$$(336) \qquad \frac{\mathrm{VM}^n}{n(1-\mathrm{M})}$$

essendo il valore di M

$$(337) \qquad \mathrm{M} = \Lambda \frac{v(a+\overline{u})}{\Pi(a+\overline{u})}.$$

Torino, 8 *Agosto* 1832.

Postscriptum. Applicando all' equazione (313) le formole (327), (328), noi abbiamo concluso che questa equazione ammetterà una radice negativa compresa fra i limiti -2, -1 e che delle altre sei radici due solamente offrivano parti reali comprese sia fra i limiti -1, 0, sia fra i limiti 0, 1, sia fra i limiti 1, 2. Se saper si volesse quali sono fra queste ultime radici quelle che restano reali, basterebbe ricorrere alla formola (189). In fatti in virtù di questa formola il numero m delle radici reali della equazione (313) minori di un dato numero X sarà

$$(338)\qquad m = I_{-\infty}^{X} \frac{7x^6-10x^4-9x^3+8x-5}{((x^7-2x^5-3x^3+4x^2-5x+6))},$$

o ciò che torna lo stesso riguardo alla formola (203)

$$(339)\qquad m = I_{-\infty}^{X} \frac{62x^4-70x^3+123x^2-163x+10}{((629x^3-1266x^2+2830x-2933))} + 1$$

$$+\tfrac{1}{2} I \frac{7X^6-10X^4-9X^3+8X-5}{X^7-2X^5-3X^3+4X^2-5X+6} \cdot \frac{1}{((x))} + \tfrac{1}{2} I \frac{2X^5+6X^3-10X^2-15X-21}{7X^6-10X^4-9X^3+8X-5} \cdot \frac{1}{((x))}$$

$$+\tfrac{1}{2} I \frac{62X^4-70X^3+123X^2-163X+10}{2X^5+6X^3-10X^2-15X-21} \cdot \frac{1}{((x))} - \tfrac{1}{2} I \frac{629X^3-1266X^2+2830X-2933}{62X^4-70X^3+123X^2-163X+10} \cdot \frac{1}{((x))}.$$

D' altronde l' equazione

$$(340)\qquad 629X^3-1266X^2+2830X-2933=0$$

non ha che una sola radice reale atteso che le due radici della derivata sono imaginarie; e questa radice reale minore del numero 2 supera il rapporto $\frac{4}{3}$, la sostituzione del quale in luogo di x rende negativo il primo membro. Ora, siccome questa medesima sostituzione rende positivi li due binomj

$$62x^4-70x^3,\quad 123x^2-163x$$

ne risulta che si avrà

$$(341)\qquad I_{-\infty}^{X}\frac{62x^4-70x^3+123x^2-163x+10}{((629x^3-1266x^2+2830x-2933))}=0,$$

se il numero X è minore della radice positiva della equazione (340); e

$$(342)\qquad I_{-\infty}^{X}\frac{62x^4-70x^3+123x^2-163x+10}{((629x^3-1266x^2+2830x-2933))}=1.$$

nel caso contrario. Dunque se nella formola (339) si ponga successivamente X=1, X=2, se ne concluderà

per X=1, m=1, e per X=2, m=3.

Dunque l' equaziene (313) ammette solamente tre radici reali, cioè una radice negativa compresa fra i limiti — 2, — 1, e due radici positive comprese fra i limiti 1 e 2, oppure fra i limiti 1, ed 1,55, a motivo che il polinomio

$$(343)\qquad f(z)=z^7-2z^5-3z^3+4z^2-5z+6$$

che resta positivo per $z=1$, e $z=2$ e diviene negativo per $z=\frac{1+2}{2}=1,5$, riconduce un valor positivo per $z=1,6$ ed anche per $z=\frac{1,5+1,6}{2}=1,55$.

Ciò posto siccome indicando con a una delle tre quantità

— 2; 1; 1,55

e prendendo $\Pi(z)=f(a)$, $\varpi(z)=\underline{f}(z)-\underline{f}(a)$, basterà attribuire il modulo $\frac{1}{5}$ o $\frac{1}{10}$ alla variabile $u=z-a$ per verificare la condizione (331), così le tre radici reali della equazione (313) potranno essere sviluppate in serie convergenti col mezzo della formola (333) o

$$(344) \qquad z = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{2f'(a)}\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2$$

$$- \left[2\left(\frac{f''(a)}{2f'(a)}\right)^2 - \frac{f'''(a)}{6f'(a)}\right]\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^3 - \text{ec.}$$

dalla quale si ricaverà per $a = -2$, $z = 1{,}9625\ldots$ per $a = 1$, $z = 1{,}107\ldots$, per $a = 1{,}55$, $z = 1{,}5378\ldots$