SULLA TEORIA DELL' AZIONE CAPILLARE

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE PROFESSORE SUPPLENTE

NELL' UNIVERSITA' DI PAVIA

GASPARE MAINARDI

Ricevuta adì 8. *Novembre* 1836.

1. Quattro grandi geometri, illustri Membri di quest' Accademia nostra, trattarono l'importante argomento de' fenomeni capillari. Young ne offrì il primo una equazione fondamentale, travveduta per lui da una mente energica assuefatta per genio ad astrazioni elevate. Laplace la corredò di una dimostrazione memorabile desunta da principj che sono per divenire il fondamento della vera scienza meccanica delle cause e degli effetti naturali: ne desunse spiegazione dei principali fenomeni, e rettificò la dottrina del barometro. L' illustre sig. Gauss con profonda sagacità maneggiando i grandiosi principj della Meccanica analitica arrichì la scienza idrostatica di un teorema singolare e confermò la equazione fondamentale della dottrina capillare. Finalmente il celebre sig. Poisson, con un'opera classica illustrò la difficile dottrina esaminando con profondità ed acume l' elevarsi dei liquidi intorno ai corpi galeggianti, le diverse pressioni, la forma delle falde liquide che si aggrappano ai solidi, e molte altre importantissime questioni.

2. Ma se male non mi appongo, penetrando addentro il problema, si offrono alcune difficoltà cui è d' uopo porgere attenzione.

3. Young ha ammesso che, attesa l' estrema piccolezza del raggio d'azione molecolare, la inclinazione delle superficie

solida e liquida punto non dipenda dalla curvatura delle medesime. Laplace mise in dubbio il teorema (1): Gauss (2) e Poisson (3) partendo dal principio di Young ne confermarono la conseguenza : il che parrebbe lasciare qualche incertezza.

4. La equazione della superficie libera di un liquido, essendo alle derivate parziali seconde, l'integrale della medesima involge due funzioni indeterminate. Una di queste si esprime per mezzo dell' altra mediante la sussistenza contemporanea di quell' integrale e della equazione alla superficie solida cui il liquido si aggrappa. Supposto costante l'angolo compreso da queste superficie in tutta la estensione del loro incontro, si ottiene una nuova equazione la quale implica le derivate prime parziali delle funzioni indeterminate. Eliminatane una, la equazione risultante non basta, per propria natura, ad esprimere l'altra funzione. Quindi sembra rilevare un difetto nella dottrina dei fenomeni capillari.

5. A tutto ciò potremmo aggiungere, che alcune sperienze di Abat (4) sembrano persuadere aver l'attrito grande influenza nel fenomeno : che le osservazioni di Clairaut (5) e Brunacci (6) indurrebbero a credere che il condensamento di un liquido prodotto dall'attrazione della materia solida possa estendersi a tutta la falda liquida elevata : e che la risoluzione di qualche problema singolare (7) importerebbe che fosse conosciuta la legge di tale condensamento.

6. Meditando queste difficoltà, senza dipartirmi dai principj fondamentali insegnati da Laplace, e ponendo mente alle giudiziose osservazioni del celebre Gauss, ho scritta la pre-

(1) Supplem: à la theorie de l' action capillaire, pag. 25.

(2) Comment. Societ. R. S. Gottingensis Sc. ec. Vol. 7. Class. math. pag. 60, 61.

(3) Nouvelle Thèorie de l' act. capill. pag. 80.

(4) Haüy. Fisica element.

(5) Thèorie de la figure de la terre.

(6) Giornale di Fisica ec. di Pavia. Tomo IX.

(7) Poisson. Opera citata, pag. 201.

sente memoria, cui volgerò nuovo studio quando i miei pensamenti ottengano l'approvazione dai geometri versati nell' importante argomento.

7. Considero un liquido aggrappato ad una superficie solida e chiamo O un punto della linea comune a questa superficie e all' altra che termina il liquido. La retta tangente a questa linea nel punto nominato la chiamerò Ox : indicherò con Oz la normale alla superficie solida e Oy la perpendicolare ad Ox, Oz; cosicchè il piano Ox, Oy sarà tangente la superficie del solido nominato.

Dall' equazione di questa superficie, riferita agli assi Ox, Oy, Oz, si finga desunto

$$\text{(I)} \quad z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3$$

trascurando le dimensioni di x, y, z superiori alla terza; e per la superficie liquida si abbia

$$\text{(II)} \quad z = ny + ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3.$$

Che tali debbano essere le forme di questi sviluppi si scorge osservando che ove $x=0$, $y=0$ devono essere per la superficie

$$\text{(I)} \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

e per la (II) soltanto $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

Il liquido compreso fra le superficie (I) (II) esercita azione sul punto O dipendentemente dalle forze molecolari. Per determinarne lo sforzo secondo una direzione R che forma cogli assi Ox, Oy, Oz, angoli i cui coseni siano α, β, γ, si consideri un punto M del liquido, determinato dalle coordinate x, y, z, tale che sia $OM = r$, ed attragga il punto O con una forza $f(r)$. Questa funzione $f(r)$ dovrà involgere la densità dei punti nominati, la quale, supposta costante in tutta la sfera d' azione, indicheremo colla lettera ρ.

8. Surrogando coordinate polari alle rettilinee, poniamo

$$x = r\cos.\theta.\cos.\omega, \quad y = r\cos.\theta.\mathrm{sen}.\omega, \quad z = r\,\mathrm{sen}.\theta$$

e considerato l' elemento liquido

$$\rho r^2 \cos.\theta d\omega.\, dr.\, d\theta$$

sarà $\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{r} f(r) \rho r^2 \cos.\,\theta d\omega.\, dr.\, d\theta$

(III)

$$= [(\alpha\cos.\omega + \beta\,\mathrm{sen}.\omega)\cos.\theta + \gamma\,\mathrm{sen}.\theta]\, \rho r^2 f(r) \cos.\theta.\, d\omega.\, dr.d\theta$$

l' attrazione che esercita verso O secondo la direzione R.

Le molecole alle quali si estende l' azione sensibile su quel punto O sono racchiuse nello spazio terminato dalla sfera d' azione di questo punto e dalle superficie (I) (II); cosicchè per effettuare il calcolo di tale azione, immaginate una serie di superficie sferiche consecutive aventi il centro in O, e considerate le aree sferiche intercette fra le superficie (I) (II), basterà calcolare l' azione che esercitano sul centro nominato i punti di una di queste aree, integrarne la funzione per rispetto al raggio ed estenderla debitamente.

Integrata la formola (III) per rispetto a θ ed estesa ai limiti corrispondenti alle superficie più volte nominati, i quali rappresenterò con θ_1, θ_2, si ottiene

(IV) $\frac{1}{2}\rho r^2 f(r)[\alpha\cos.\omega + \beta\,\mathrm{sen}.\omega)(\theta_2 + \mathrm{sen}.\theta_2 \cos.\theta_2 - \theta_1 - \mathrm{sen}.\theta_1 \cos.\theta_2)$

$$+ \gamma(\mathrm{sen}.^2\theta_2 - \mathrm{sen}.^2\theta_1)]\, dr d\omega.$$

9. Intraprendiamo ora la ricerca degli angoli θ_1, θ_2. La equazione (I) supposti per brevità

$$A\cos.^2\omega + B\,\mathrm{sen}.\omega\cos.\omega + C\,\mathrm{sen}.^2\omega = P$$

$$D\cos.^3\omega + E\cos.^2\omega\,\mathrm{sen}.\omega + F\cos.\omega\,\mathrm{sen}.^2\omega + G\,\mathrm{sen}.^3\omega = Q$$

fornisce $$\text{sen.}\theta_1 = r\text{P}\cos.^2\theta_1 + r^2\text{Q}\cos.^3\theta_1$$

dalla quale trascurando le potenze di r superiori alla seconda si desumono

$$\text{sen.}\theta_1 = r\text{P} + r^2\text{Q} = \theta_1\,;\quad \cos.\theta_1 = 1 - \tfrac{1}{2}r^2\text{P}^2$$

$$\theta_1 + \text{sen.}\theta_1\cos.\theta_1 = 2(r\text{P} + r^2\text{Q}).$$

10. Supposti $$n\,\text{sen.}\omega = h$$

$$a\cos.^2\omega + b\,\text{sen.}\omega\cos.\omega + c\,\text{sen.}^2\omega = p$$

$$d\cos.^3\omega + e\cos.^2\omega\,\text{sen.}\omega + f\cos.\omega\,\text{sen.}^2\omega + g\,\text{sen.}^3\omega = q\,,$$

dalla equazione (II) caveremo

$$\text{sen.}\theta_2 = h\cos.\theta_2 + rp\cos.^2\theta_2 + r^2q\cos.^3\theta_2\,.$$

Per desumerne θ_2 espresso per r fingiamo

$$\text{sen.}\theta_2 = m_0 + m_1 r + m_2 r^2$$

$$\cos.\theta_2 = n_0 + n_1 r + n_2 r^2$$

$$\theta_2 = \text{Ang.sen.}m_0 + k_1 r + k_2 r^2$$

e tratto dalla prima espressione

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - m_0^2} - \frac{m_0\,m_1}{\sqrt{1-m_0^2}}\,r - \tfrac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{(1-m_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2m_0\,m_2}{\sqrt{1-m_0^2}}\right)r^2\,;$$

formati $\cos.^2\theta_2$, $\cos.^3\theta_2$ sostituiti gli sviluppi ed il supposto valore di $\text{sen.}\theta_2$ nella equazione (II) otterremo

$$m_0 = \frac{h}{\sqrt{(1+h^2)}}, \quad m_1 = \frac{p}{(1+h^2)^2}$$

$$m_2 = \frac{q}{(1+h^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{5hp^2}{2(1+h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

e quindi

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}, \quad n_1 = -\frac{hp}{(1+h^2)^2}$$

$$n_2 = -\frac{1-4h^2}{2(1+h^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot p^2 - \frac{hq}{(1+h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Finalmente siccome dalla formola

$$\theta_2 = \text{Ang.sen.}\, m_0 + k_1 r + k_2 r^2$$

passando ai seni, si trae

$$\text{sen.}\,\theta_2 = m_0 + rk_1\sqrt{(1-m_0^2)} + r^2\left(k_2\sqrt{(1-m_0^2)} - \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2\right)$$

ne verranno

$$k_1 = \frac{p}{(1+h^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = -\frac{2hp^2}{(1+h^2)^3} + \frac{q}{(1+h^2)^2}$$

e però

$$\theta_2 + \text{sen.}\,\theta_2 \cos.\theta_2 = \frac{n\,\text{sen.}\,\omega}{1+n^2\text{sen.}^2\omega} + \text{Ang.sen.}\, \frac{n\,\text{sen.}\,\omega}{\sqrt{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)}}$$

$$+ \frac{2pr}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^{\frac{3}{2}}} + r^2\left[\frac{2q}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^2} - \frac{2.3.n\,\text{sen.}\,\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^4} p^2\right]$$

$$\text{sen.}^2\theta_2 = \frac{n^2\text{sen.}^2\omega}{1+n^2.\text{sen.}^2\omega} + \frac{2n\,\text{sen.}\,\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^{\frac{3}{2}}}\, pr$$

$$+ r^2\left[\frac{1-5n^2\text{sen.}^2\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^4} p^2 + \frac{2n\,\text{sen.}\,\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^3} q\right].$$

11. La formola (IV) si deve integrare rispetto ad ω ed estendere debitamente. Per stabilirne i limiti è duopo trovare i valori di quell' angolo che corrispondono ai punti comuni

alle superficie (I) (II) ed alla sferica di raggio r, eguagliando per esempio fra loro i valori di sen.θ_1, sen.θ_2, cioè mediante la equazione

$$m_0 + m_1 r + m_2 r^2 = \mathrm{P}r + \mathrm{Q}r^2$$

e supposto

$$\mathrm{sen}.\omega = l_1 r + l_2 r^2$$

per cui

$$\cos.\omega = \pm(1 - \tfrac{1}{2} l_1^2 r^2),$$

indicati con ω_1, ω_2, il più piccolo ed il più grande valore di ω, e supposti

$$l_1 = \frac{\mathrm{A}-a}{n},\quad l_2 = \frac{\mathrm{D}-d}{n} + \frac{(\mathrm{A}-a)(\mathrm{B}-b)}{n^2}$$

avremo

$$\mathrm{sen}.\omega_1 = \omega_1 = l_1 r + l_2 r^2,\quad \cos.\omega_1 = 1 - \tfrac{1}{2} l_1^2 r^2$$

$$\mathrm{sen}.\omega_2 = l_1 r - l_2 r^2,\quad \cos.\omega_2 = -(1 - \tfrac{1}{2} l_1^2 r^2)$$

$$\omega_2 = \pi - l_1 r + l_2 r^2$$

giacchè

$$\omega_2 - \omega_1 = \pi \text{ allorchè } r = 0.$$

12. Intraprese le integrazioni rispetto ad ω trascurando le potenze di r maggiori della seconda si trovano

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} (\alpha\cos\omega + \beta\,\mathrm{sen}.\omega)(\theta_1 + \mathrm{sen}.\theta_1 \cos.\theta_1)\,d\omega$$

$$= \frac{4r}{3}(\mathrm{B}\alpha + \mathrm{A}\beta + 2\mathrm{C}\beta) + \frac{\pi}{4}\left[\alpha(3\mathrm{D}+\mathrm{F}) + \beta(3\mathrm{G}+\mathrm{E})\right]r^2,$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma\,\mathrm{sen.}^2\theta_1\,d\omega = \frac{\pi\gamma r^2}{8}\left[3(\mathrm{A}^2 + \mathrm{C}^2) + 2\mathrm{AC} + \mathrm{B}^2\right].$$

La funzione

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}(\alpha\cos.\omega+\beta\,\mathrm{sen}.\omega)(\theta_2+\mathrm{sen}.\theta_2\cos.\theta_2)d\omega$$

si compone delle parti seguenti

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{sen}.\omega\,\mathrm{Ang.sen}.\frac{n\,\mathrm{sen}.\omega}{\sqrt{1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega}}d\omega=-\cos.\omega\,\mathrm{Ang.sen}.\frac{n\,\mathrm{sen}.\omega}{\sqrt{1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega}}-\beta\frac{\omega}{n}$$

$$+\frac{\sqrt{1+n^2}}{n}\,\mathrm{Ang.\,tang}.(\sqrt{1+n^2}\mathrm{tang}.\omega)+\mathrm{cost}.=$$

$$=-\frac{\pi}{n}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos.\omega.\mathrm{Ang.sen}.\frac{n\,\mathrm{sen}.\omega}{\sqrt{1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega}}d\omega=0$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{n\,\mathrm{sen}.\omega\cos.\omega}{1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega}d\omega=0$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{n\,\mathrm{sen}.^2\omega}{\sqrt{1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega}}d\omega=\frac{\pi}{n}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{2pr}{(1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega)^{\frac{3}{2}}}(\alpha\cos.\omega+\beta\,\mathrm{sen}.\omega)d\omega=\frac{4r}{3(1+n^2)^2}[(1+n^2)(a\beta+b\alpha)+2c\beta]$$

al calcolo della quale funzione giova supporre

$$n\cos.\omega=\sqrt{1+n^2\cos.\varphi}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{2q(\alpha\cos.\omega+\beta\,\mathrm{sen}.\omega)}{(1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega)^3}r^2d\omega$$

$$=\frac{\pi r^3}{4(1+n^2)^{\frac{5}{2}}}[\alpha(1+n^2)(f+3d(1+n^2))+\beta(3g+e(1+n^2))]$$

che si integra facilmente ponendo

$$\cot.\omega=\sqrt{1+n^2\mathrm{tang}.\varphi}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{2.3.n\,\mathrm{sen}.\omega}{(1+n^2\mathrm{sen}.^2\omega)^4}(\alpha\cos.\omega+\beta\,\mathrm{sen}.\omega)r^2p^2d\omega=$$

$$\frac{3n\pi r^3}{8(1+n^2)^{\frac{7}{2}}}[2\alpha(1+n^2)(c+a(1+n^2))b+\beta[(b^2+2ac)(1+n^2)+a^2(1+n^2)^2+5c^2]]$$

Calcolando quindi la funzione

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma \text{sen.}^2\theta_2 \, d\omega$$

si trovano

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{n^2\text{sen.}^2\omega}{1+n^2\text{sen.}\omega} d\omega = \pi$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{2npr\text{sen.}\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^{\frac{5}{2}}} d\omega = \frac{4nr}{3(1+n^2)^2} (a(1+n^2)+2c)$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{r^2(1-5n^2\text{sen.}^2\omega)}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^4} p^2 d\omega$$

$$= \frac{\pi r^2}{8(1+n^2)^{\frac{5}{2}}} [3a^2(1+n^2)^2+(b^2+2ac)(1+n^2)(1-2n^2)+3c^2(1-4n^2)]$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{2nr^2\text{sen.}\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^3} q d\omega = \frac{n\pi r^2}{4(1+n^2)^{\frac{5}{2}}} (3g + e(1+n^2)).$$

e per tali formole resta pienamente determinata la forza (IV) che denomineremo F_1.

13. Il punto O è pure soggetto all'attrazione che vi esercita il solido. Per calcolare la componente di questa forza che si dirigge secondo la retta R, la quale indicheremo con F_2, rappresentata con $\phi(r)$ l' azione verso O di un punto M del solido, essendo $MO=r$, e supposto che la densità del corpo attraente sia eguale a σ in tutta la sfera d' azione; noteremo che il piano xOy divide quel corpo in due parti, cioè la metà di quella sfera, ed un solido intercetto fra il piano xOy e la superficie (I). La forza che proviene dall' emisfero si desume dalla formola (III) integrandola fra i limiti

$$\theta=0, \quad \theta=\tfrac{1}{2}\pi; \quad \omega=0, \quad \omega=2\pi$$

per il che si riduce a

$$-\gamma\pi\int r^2\phi(r)dr$$

avuto riguardo alla propria direzione che è opposta a quella di F_1.

L' azione dell' altro solido si ottiene colla formola (IV) cambiando θ_2 in θ_1 poi supponendo $\theta_1 = 0$; sarà cioè l' integrale della funzione

$$\tfrac{1}{2}\sigma r^2\phi(r)[2(\alpha\cos.\omega + \beta\,\text{sen}.\omega)(Pr + Qr^2) + \gamma r^2 P^2]$$

e siccome

$$\int_0^{2\pi} (\alpha\cos.\omega + \beta\,\text{sen}.\omega)P.d\omega = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{2} r^4\phi(r).P^2 d\omega = \frac{\gamma\pi}{8}[3(A^2 + C^2) + 2AC + B^2]\int r^4\phi(r)dr$$

$$\int_0^{2\pi} (\alpha\cos.\omega + \beta\,\text{sen}.\omega)Qr^4\phi(r)d\omega = \frac{\pi}{4}[\alpha(3D + F) + \beta(3G + E)]\int r^4\phi(r)dr;$$

raccolti questi termini ne verrà

$$\text{(V)}\quad \begin{aligned} F_2 &= \alpha(3D + F)S + \beta(3G + E)S \\ &+ \alpha\left[\frac{S}{2}(3(A^2 + C^2) + B^2 + 2AC) - T\right] \end{aligned}$$

supposti

$$\frac{\pi\sigma}{4}\int r^4\phi(r)dr = S,\quad \pi\sigma\int r^2\phi(r)dr = T.$$

14. Altre forze ancora operano sul punto O, fra le quali la gravità. Si indichi con τ la intensità di questa forza, con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, i coseni degli angoli che la direzione di essa comprende cogli assi Ox, Oy, Oz, e ne verrà secondo la retta R lo sforzo

$$F_3 = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\tau.$$

La reazione della superficie solida produce nello stesso verso una forza che rappresento con $F_4 = \sigma.R$.

Vi sarà a calcolare l'attrito da cui per ora farò astrazione. Finalmente chiamata Π la pressione barometrica che corrisponde alla elevazione del punto O ne verrà secondo la solita direzione R la forza

$$F_5 = \frac{\Pi}{\sqrt{1+n^2}}(n\beta - \gamma).$$

15. L' equilibrio del punto O importa che siano nulli separatamente i coefficienti delle indeterminate α, β, γ nella funzione

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$$

per il che si avranno le equazioni

$$\text{(VI)}\quad Q\left(B + \frac{b}{1+n^2}\right) + \frac{R}{(1+n^2)^{\frac{5}{2}}}[(1+n^2)[f+3d(1+n^2)] - 3nb(c+a(1+n^2))]$$
$$+ (3D+F)(R+S) + \alpha_1 \tau = 0$$

$$\text{(VII)}\quad Q\left(A + 2C + \frac{a(1+n^2)+2c}{(1+n^2)^2}\right) + \frac{R}{2(1+n^2)^{\frac{5}{2}}}[2(1+n^2)^2)(3g+e(1+n^2))$$
$$-3n[a^2(1+n^2)^2 + (b^2+2ac)(1+n^2) + 5c^2]]$$
$$+ (3G+E)(R+S) + \beta_1 \tau + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\Pi = 0$$

avendo per brevità supposti

$$\frac{2}{3}\rho \int r^3 f(r) dr = Q, \quad \frac{\pi}{8}\rho \int r^4 f(r) dr = R$$

evitando di estendere fra i limiti zero ed infinito gli integrali rispetto ad r, e per la natura incognita delle funzioni ϕ ed f, e perchè le molecole materiali non si trovano in contatto.

16. Se al liquido considerato un altro ne sovrastasse, il punto O soffrirebbe un' azione opposta ad F_1 dipendente dall' attrazione di quel liquido, per cui volendo introdurre nei calcoli questa forza, espressa con $f_1(r)$ l'azione molecolare nelle equa-

zioni del paragrafo antecedente dovremo supporre

$$Q=\frac{2}{3}\left[\int r^3 f(r)dr-\int r^3 f_1(r)dr\right]$$

$$R=\frac{\pi}{8}\left[\int r^4 f(r)dr-\int r^4 f_1(r)dr\right].$$

17. L'uso delle formole (VI) (VII) richiede che agli assi particolari cui sono attualmente riferite quelle proprietà un altro ne venga sostituito, e, siccome torna più comodo nelle applicazioni, assumeremo l'asse z opposto alla direzione della gravità.

Nella trasformazione che siamo per effettuare indicherò con Op, Oq, Or gli assi sul principio rappresentati con Ox, Oy, Oz; ritenendo che queste denominazioni si riferiscano al nuovo sistema di rette ortogonali coordinate. Il punto O verrà determinato dalle nuove coordinate x, y, z; e saranno X, Y, Z le coordinate attuali del punto cui dapprima corrispondevano p, q, r: siano

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{aligned} X&=x+a_0p+a_1q+a_2r\\ Y&=y+b_0p+b_1q+b_2r\\ Z&=z+c_0p+c_1q+c_2r \end{aligned}$$

le equazioni di relazione fra i due sistemi coordinati. Supponiamo che i simboli $z, z', z_1, z'', z'_1 \ldots$, secondo il metodo delle funzioni analitiche, rappresentino l'ordinata della superficie (I) e le derivate parziali di essa, e $\xi, \xi', \xi_1 \ldots$ siano le analoghe espressioni per la superficie (II), si finga che l'equazione

$$Y-y=y'(X-x)$$

appartenga alla linea comune alle superficie nominate, e facilmente comprenderemo dover essere

$$a_0=\frac{1}{\Delta_1},\ b_0=\frac{y'}{\Delta_1},\ c_0=-\alpha_1=\frac{z'+z_1y'}{\Delta_1}$$

ove

$$\Delta_1^2=1+y'^2+(z'+z_1y')^2$$

$$a_1=\frac{y'+z_1(z'+z_1y'_1)}{\Delta_2},\ b_1=-\frac{1+z'(z'+z_1y')}{\Delta_2},\ c_1=-\beta_1=\frac{z'y'-z_1}{\Delta_2}$$

essendo

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$$

$$a_2=-\frac{z'}{\Delta_3},\ b_2=-\frac{z_1}{\Delta_3},\ c_2=-\gamma_1=\frac{1}{\Delta_3},$$

ove

$$\Delta_3^2=1+z'^2+z_1^2.$$

Si finga che

$$\mathrm{Z}=F(\mathrm{X},\mathrm{Y})$$

rappresenti la superficie (I) riferita al nuovo sistema di coordinate, e sostituiti ad X, Y, Z i loro valori (VIII) la equazione risultante dovrà essere identica colla (I). Dunque prese di quella equazione le derivate parziali rispetto a p, q considerando X, Y, Z ed r quali funzioni di queste variabili indipendenti, e notato che per la superficie (I) a $p=q=0$ corrispondono

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)=0,\quad \left(\frac{dr}{dq}\right)=0$$

$$\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)=2\mathrm{A},\ \left(\frac{d^2r}{dpdq}\right)=\mathrm{B},\ \left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)=2\mathrm{C},\ \text{ecc.}$$

conseguiremo le formole seguenti:

$$2\mathrm{A}(c_2-a_2z'-b_2z_1)=a_0^2z''+2a_0b_0z'_1+b_0^2z_{11}$$

(IX) $$\mathrm{B}(c_2-a_2z'-b_2z_1)=a_0a_1z''+(a_0b_1+a_1b_0)z_1'+b_0b_1z_{11}$$

$$2\mathrm{C}(c_2-a_2z'-b_2z_1)=a_1^2z''+2a_1b_1z'_1+b_1^2z_{11},$$

. . . .

Per la superficie (II) a $p=q=0$ corrisponderanno

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)=0,\ \left(\frac{dr}{dq}\right)=n,\ \left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)=2a,\ldots\ldots$$

Per ottenere tutte le derivate parziali Z', Z'', Z''',.... espresse per le derivate X', X''.... Y', Y''... rispetto a p, e per le $X_{,}$, $X_{,,}$.... derivate rispetto a q possiamo far uso della regola seguente, la quale con lieve modificazione si applica alle derivate di ordine superiore al terzo. La funzione $Z_s^{(r)}$ è la somma di tanti termini contenenti z', $z_{,}$; z'', $z_{,}'$; $z_{,,}$.... fino a tutte le derivate parziali dell'ordine $r+s$. Il coefficiente di una derivata qualunque $z_n^{(m)}$ sarà la somma di tutti i termini che si possono formare prendendo m fattori che siano tante derivate di X, n che siano tante derivate di Y, e tali che gli apici indicanti derivazione in tutti i fattori sommino r in alto, ed s in basso. Il coefficiente di ogni termine si ottiene dividendo il prodotto $1.2.3.\ldots.r \times 1.2.3.\ldots.s$ per altri della forma $1.2.\ldots.a \times 1.2.\ldots.b \times \ldots.$ essendo $a, b, \ldots$ gli esponenti delle potenze o gli apici di omologa derivazione da cui si trovano affette le X e le Y. In queste formole dovremo poi mettere

$$X'=a_0+a_1\left(\frac{dr}{dp}\right),\quad X''=a_2\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right),\ \ldots\ldots$$

Tralascio la dimostrazione di questo canone e la sua generalizzazione, perchè mi allontanerebbero dall' argomento.

18. Mediante la funzione F_2 e le formole del paragrafo antecedente possiamo raggiungere la nota equazione della superficie libera di un liquido, in modo analogo a quello seguito da Laplace (1). Infatti si finga il punto O collocato nella su-

---

(1) Supplemento citato, pag. 4.

perficie (I) per cui si troverà soggetto alle forze F_3 F_5 ed a quella del liquido circostante, che si desume dalla F_2 cambiando A, B. . . . rispettivamente in a, b. . . . . φ in f, σ in ρ' relativo alla detta superficie, ond' è che supposto

$$\frac{\Pi}{8}\rho' \int r^4 f(r) dr = \mathrm{R}',$$

ne verranno le equazioni

$$2\mathrm{R}'(3d+f)+\tau\alpha_1=0$$

$$2\mathrm{R}'(3g+e)+\tau\beta_1=0$$

ossiano

$$\text{(X)}\qquad \begin{aligned} \mathrm{R}'\frac{d}{dp}\left[\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)\right]&=\tau c_0 \\ \mathrm{R}'\frac{d}{dq}\left[\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)\right]&=\tau c_1 \end{aligned}$$

e siccome

$$(c_2-a_2 z'-b_2 z_1)\left[\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)\right]$$

$$=(a_0^2+a_1^2)z''+2(a_0 b_0+a_1 b_1)z_1'+(b_0^2+b_1^2)z_{11}$$

indicati con Λ, Λ_1 i raggi dei principali incurvamenti della superficie che si considera, ne verrà

$$\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)=\Delta=\frac{(1+z_1^2)z''-2z'z_1z_1'+(1+z'^2)z_{11}}{(1+z'^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\Lambda}+\frac{1}{\Lambda_1}.$$

Essendo poi

$$\left(\frac{d\Delta}{dp}\right)=a_0\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)+b_0\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\Delta}{dq}\right)=a_1\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)+b_1\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)$$

alle equazioni (X) equivarranno le seguenti

$$a_0\left[\mathrm{R}'\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)-\tau z'\right]+b_0\left[\mathrm{R}'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)-\tau z_{,}\right]=0$$

$$a_1\left[\mathrm{R}'\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)-\tau z'\right]+b_1\left[\mathrm{R}'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)-\tau z_{,}\right]=0$$

da cui, attesa la direzione arbitraria degli assi x, y, p, q, derivano

$$\mathrm{R}'\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)-\tau z'=0$$

$$\mathrm{R}'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)-\tau z_{,}=0$$

quindi

$$\mathrm{R}'.d\Delta=\tau dz$$

e finalmente, posto $\frac{\tau}{\mathrm{R}'}=\frac{2}{a_1^{\,2}}$, si trae

(XI) $$\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\Delta_1}=\frac{2}{a_1^{\,2}}z+\text{costante}$$

che è la equazione originariamente dovuta a Young.

19. Ma veniamo ora a discorrere sull' uso delle equazioni (VI) (VII), e primamente noteremo che quando la curvatura delle superficie (I) (II) non avesse influenza sensibile ad alterare le azioni molecolari sul punto O, supposti

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}=\ldots\ldots=\mathrm{G}=0$$

$$a=b=\ldots\ldots=g=0$$

nelle equazioni del paragrafo 15 ne verrebbero

$$a_1=0,\ \beta_1\tau=\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\,\Pi=0$$

cioè la linea comune a quelle superficie sarebbe piana ed orizzontale; ma la inclinazione delle medesime sarebbe variabile, eccettuati pochi casi particolari.

20. La superficie solida sia cilindrica, verticale, a base circolare. La superficie (II) sarà di rotazione conassica alla (I); l' asse Ox sarà orizzontale, e la stessa equazione (I) si caverà dalla seguente

$$z^2 - 2rz + x^2 = 0$$

ove r è il raggio della superficie cilindrica, per cui ne verranno

$$A = \frac{1}{2r}, \quad B = C \ldots = G = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -1.$$

La equazione della superficie liquida libera sarà della forma

$$r - \sqrt{x^2 + (r-z)^2} = \xi(y)$$

indicando la ξ una funzione di y. Dalla equazione (II) spariranno i termini affetti da potenze dispari della x, cioè saranno

$$b = d = f = 0,$$

la equazione (VI) è soddisfatta identicamente, e la (VII) si trasforma nella

$$\text{(XII)} \quad \left(\frac{1}{2r} + \frac{a(1+n^2)+2c}{(1+n^2)^2}\right)Q + \frac{R}{2(1+n^2)^{\frac{5}{2}}}\Big[2(1+n^2)(3g+e(1+n^2)) - 3n[a^2(1+n^2)^2 + 2ac(1+n^2) + 5c^2]\Big] - \tau + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\Pi = 0.$$

Si supponga $2r\xi + x^2 - \xi^2 = \Delta$ per cui sarà

$$z = \frac{\Delta}{2r} + \frac{\Delta^2}{8r^3} + \frac{\Delta^3}{16r^5}$$

e siccome

$$\xi(y) = \xi(0) + y\xi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\xi''(0) + \frac{y^3}{1.2.3}\xi'''(0)$$

trascurando i termini che a noi non importa di considerare, essendo

$$\xi(0) = 0, \quad \xi'(0) = n$$

e supposti

$$\frac{1}{1.2}\xi''(0) = p, \quad \frac{1}{1.2.3}\xi'''(0) = q$$

si avrà

$$\Delta = 2nry + x^2 + y^2(2pr - n^2) + 2y^3(rq + np)$$

$$z = ny + \frac{1}{2r}x^2 + py^2 + \frac{n}{2r^2}yx^2 + qy^3$$

quindi

$$a = \frac{1}{2r}, \; c = p, \; e = \frac{n}{2r^2}, \; g = q.$$

Dalla equazione (XI) con processo noto (1) si desume

$$\frac{\xi'' + \frac{1}{r-\xi}\left(1 + \xi'^2\right)}{\left(1 + \xi'^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(l-y)}{a_1^2} = 0$$

essendo l l'altezza cui il liquido in contatto col tubo si eleva oltre il livello libero esteriore: e da quella equazione poi si traggono

$$p = -(1+n^2)\left(\frac{1}{2r} + \frac{l}{a_1^2}\sqrt{1+n^2}\right).$$

$$q = (1+n^2)\left[\frac{2l^2}{a_1^4}n(1+n^2) + \frac{n}{2.3r^2} + \frac{\sqrt{1+n^2}}{3a_1^2}\left(1 + \frac{5ln}{r}\right)\right].$$

$$2(1+n^2)(3g + e(1+n^2)) = 2(1+n^2)^2\left[\frac{n}{r^2} + \frac{6l^2}{a_1^4}n(1+n^2)\right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{5ln}{r}\right)\frac{\sqrt{1+n^2}}{a_1^2}\right].$$

$$a^2(1+n^2)^2 + 2ac(1+n^2) + 5c^2 = (1+n^2)^3\left[\frac{1}{r^2} + \frac{4l}{ra_1^2}\sqrt{1+n^2} + \frac{5l^2}{a_1^4}(1+n^2)\right].$$

(1) Poisson pag. 108. Laplace Theor. pag. 20.

Col mezzo di queste formole, trascurate nella equazione (XII) le forze τ, e Π e supposto

$$\frac{R}{2Q} = K$$

si ha

$$\text{(XIII)} \quad \frac{2l}{a_1^2}(1+n^2)+\frac{K}{r^2}n+\frac{3Kl^2}{a_1^4}n(1+n^2)$$
$$+\left[\frac{2K}{a_1^2}\left(\frac{ln}{r}-1\right)-\frac{n^2}{2r}\right]\sqrt{1+n^2}=0.$$

21. Dall' opera del celebre sig. Poisson (pag. 111) assumiamo le seguenti formole

$$l=h+\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-r^2}+\frac{2\gamma^3}{3a_1^2}\log.\frac{\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-r^2}}{2\gamma}.$$

$$h=-\frac{a_1^2}{r\sqrt{1+n^2}}-\gamma'+\frac{2}{3r^2}\left[\gamma'^3-(\gamma'^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$-\frac{2\gamma'^3}{3a_1^2r^2}\left[\gamma'(\gamma'-\sqrt{r^2-\gamma'^2})-\frac{r^2}{2}+r^2\log.\frac{\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-r^2}}{2\gamma'}\right].$$

$$\gamma'=-r\sqrt{1+n^2}+\frac{2r^3}{3a_1^2}n^2(1+n^2)(\sqrt{1+n^2}-n)$$

dove ho cambiati α in r, e β in $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$, essendo h la elevazione del liquido sopra il proprio livello. Da quelle equazioni si traggono

$$\sqrt{\gamma'^2-r^2}=nr-\frac{2r^3}{3a_1^2}n(1+n^2)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+n^2}-n),$$

$$\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-r^2}=-r(n+\sqrt{1+n^2})+\frac{2r^3}{3a_1^2}n(1+n^2),$$

$$(\gamma'^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\gamma'^3=r^3[(1+n^2)^{\frac{3}{2}}+n^3]-\frac{2r^5}{a_1^2}n^2(1+n^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$l = -\frac{a_1^2}{r\sqrt{1+n^2}} - r\left[n + \frac{2}{3}\left(n^3 + (1+n^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$+\frac{r^3}{3a_1^2}(1+n^2)^{\frac{1}{2}}\left[1 + 4n\left(n+\sqrt{1+n^2}\right)\right];$$

quindi affine di sviluppare la n in serie di potenze della r osservata la equazione (XIII) ed il valore di l facilmente riconosceremo che detta serie arrestata alle quarte potenze di r avrà la forma

$$n = \alpha r + \beta r^2 + \gamma r^3 + \delta r^4$$

per cui saranno

$$\text{(XIV)} \qquad b = 1 - \frac{\alpha^2 r^2}{2} - \alpha\beta r^3 - \left(\frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2} - \frac{3\alpha^4}{8}\right) r^4;$$

$$(1+n^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\alpha^2 r^2}{2} + \alpha\beta r^3 + \left(\frac{\beta^2+2\alpha\gamma}{2} - \frac{\alpha^4}{8}\right) r^4.$$

$$l = -\frac{a_1^2}{r} + \left(\frac{\alpha^2 a_1^2}{2} - \frac{2}{3}\right) r + \alpha(a_1^2\beta - 1) r^2$$

$$+\left[\left(\frac{\beta^2+2\alpha\gamma}{2} - \frac{3\alpha^4}{8}\right) a_1^2 - \beta - \alpha^2 + \frac{1}{3a_1^2}\right] r^3;$$

e col mezzo della equazione (XIII) conseguiremo

$$\alpha = \frac{1}{K},\ \beta = \frac{1}{a_1^2},\ \gamma = \frac{1}{2K}\left(\frac{3}{2K^2} - \frac{4}{3a_1^2}\right)$$

$$\delta = \left(\frac{1}{K^2} - \frac{4}{3a_1^2}\right)\frac{1}{a_1^2}$$

$$\text{(XV)} \qquad l = -\frac{a_1^2}{r} + \left(\frac{a_1^2}{2K^2} - \frac{2}{3}\right) r - \left(\frac{1}{6a^2} - \frac{3a^2}{8K^4} + \frac{5}{3K^2}\right) r^3$$

$$h = -\frac{a_1^2}{r} + \left(\frac{a_1^2}{2K^2} + \frac{1}{3}\right) r + \frac{r^2}{K} + \left(\frac{3a^2}{8K^4} - \frac{7}{6K^2} + \frac{5}{6a^2} - \frac{2}{3a^2}\log.2\right) r^3$$

ove i parametri a_1 e K si dovranno determinare col mezzo delle sperienze.

Se per l'acqua in riguardo al vetro fosse trascurabile la quantità $\frac{1}{K}$, dalle formole (XIV) (XV) cambiati i segni ne verrebbero

$$b = -1 + \frac{r^4}{2a_1^4}$$

$$h = \frac{a_1^2}{r} - \frac{1}{3}r + \frac{1}{3a_1^2}\left(\log.4 - \frac{5}{2}\right)r^3$$

i quali risultamenti paragonati con quelli del celebre Poisson (pag. 112) apprendono essere $b = -1$, quando vengano ommessi i termini divisi per a_1^4; e che il valore di h pochissimo differisca da quello calcolato dal valente geometra, il quale trova

$$\frac{1}{3a_1^2}(\log.4 - 1).$$

22. Due osservazioni ci permetteremo ancora. Un bel esperimento del sig. Hauy (1) dimostra che due lamine l'una d'avorio l'altra di talco si respingono fintanto che siano l'una dall' altra alquanto discoste, ma si veggono attrarre allorchè sono molto vicine. Che la falda liquida inflessa per l'azione opposta di quelle lamine possa perdere il contorcimento coll' avvicinare le lamine medesime, non sembra ben chiaro: dacchè nel discorso del celebre sig. Poisson (pag. 196) non è considerata l'azione che eserciterebbe sulla materia liquida il prolungamento del cilindro liquido interiore che si suppone consolidato. Se però vorremo ammettere che nella stessa maniera con la quale l'azione conspirante di due lamine innalza sempre più un liquido intraposto quant'è minore la loro distanza, la opposizione di quelle azioni valga a deprimere il liquido che si aggrappa al corpo umettato, modificati i calcoli

(1) Poisson pag. 201. Laplace supp. pag. 47.

delle pagine 170, 193, ne verrebbe forse spiegazione al curioso fenomeno.

Il Consocio valentissimo Profess. Belli osservò, che nei *livelli a bolla d' aria* un parziale riscaldamento del vetro mette la bolla in movimento (1). Ripetendo la bella esperienza ebbi campo ad osservarla allorchè il liquido è lo spirito di vino, ma impiegando l'acqua la bolla restò sempre immobile, quand' anche la temperatura dell' aria ambiente fosse molto elevata. Il Profess. Chiar. ripete il fenomeno dalla forza capillare: rinnovando la sperienza notai un sensibilissimo movimento idraulico, prodotto dalla parziale elevazione di temperatura; e che ha luogo il movimento della bolla alloraquando qualche polvere galeggiante o le galozzole di vapore giungono appunto là dove si trova la bolla medesima.

23. Riservo per altra Memoria le applicazioni numeriche, e lo studio di quelle modificazioni che potrebbero forse venire utilmente introdotte in taluno dei problemi che il celebre sig. Poisson ha considerati nel sesto Capitolo dell' opera memorabile sulla teoria dell' azione capillare.

(1) Memorie della Società Italiana. Tomo XX. Anno 1829.