SULLA DECOMPOSIZIONE E TRASFORMAZIONE DELLA FRAZIONE ALGEBRICA RAZIONALE

DELLA FORMA

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(q)}x^q+\text{ecc.}+C^{(q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}x^{q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{x^q(x-a)^p(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

MEMORIA

DEL SIGNOR MARCHESE LUIGI RANGONI

Ricevuta adì 29 Ottobre 1834.

Il soggetto di questa Memoria fu già da me trattato altrove (*), però in modo assai diverso da quello che mi propongo ora di seguire. Derivai allora, almeno per la massima parte, le formole generali che mi venne fatto di stabilire dai principj del Calcolo delle funzioni generatrici; ma mi fu in seguito facile l'avvedermi che potevano bastare i metodi dell'Algebra comune per giungere talvolta anche più semplicemente agli stessi risultati. Perciò giudicai opportuno di ripetere per altra via le stesse ricerche coll'intendimento di renderne più elementare il processo, e dotarne di più facile evidenza le conseguenze. Così presentando sotto un aspetto pure alquanto diverso le espressioni prese ad esame, spero di aver potuto conciliare alle formole quindi ottenute quell'assenso che per una parte non costi molta fatica, e per l'altra giovi ad estenderne le utili applicazioni. Abbracciando poi tali formole tutti i casi e le condizio-

(*) Veggasi la Memoria pubblicata nel 1827 *sulla Decomposizione e Trasformazione delle funzioni algebriche frazionarie* inserita nel T. I. delle *Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere e d'Arti di Modena.*

ni diverse secondo le quali può essere proposta una espressione algebrica frazionaria razionale, quando specialmente si conoscano i fattori anche semplici del suo denominatore, credo che per esse venga a perfezionarsi il lavoro da me dato nella Memoria inserita fra quelle dell' Accademia Modenese, nella quale forse venne ommessa qualche particolare considerazione cui ho dato luogo nella presente. Pertanto le applicazioni delle formole stesse alla decomposizione di una data frazione sembra che sempre meglio possano raccomandarsi non meno per la loro varietà, che facilmente si rileva, quanto per quella semplicità che a differenza di ogni altro metodo conosciuto le riduce a pure sostituzioni, ed operazioni numeriche.

1. L' espressione generale della frazione che ha per numeratore un polinomio qualunque in x con coefficienti costanti, e per denominatore un altro polinomio analogo, ed in cui la più alta potenza di x superi almeno di un' unità la più alta potenza di x nel numeratore, può, quando per $x-a, x-a'$, ecc. $x-a^{(n-1)}$ si indichino i fattori di primo grado del denominatore, rappresentarsi per

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(q)}x^q+\text{ecc.}+C^{(q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}x^{q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{x^q(x-a)^p(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

nella quale le C, C', ecc. abbiano un valore qualunque, compreso anche lo zero, e le q, p, p', ecc. sieno numeri interi e positivi qualunque, ed in parte pure possano essere eguali allo zero. Trattasi quindi di risolverla o decomporla in altre più semplici, locchè però importando soverchia complicazione a farsi nella sua maggiore generalità, richiede che ciò si operi in tutte quelle speciali generalità che corrispondono alle diverse supposizioni che essa può ammettere. Se quindi suppongasi primieramente $q=p=p'=\text{ecc.}=p^{(n-1)}=1$, l' espressione generale proposta diviene

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(n)}x^{n}}{x(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}.$$

Variando la supposizione col porre $q=0$, ritenuto però $p=p'=\text{ecc.}=p^{(n-1)}=1$ come prima, prende essa l'altra forma

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}.$$

Se poi si supponga $q=p'=p''=\text{ecc.}=p^{(n-1)}=0$, si avrà la forma

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^{p}},$$

la quale, se si pongano $=0$ i coefficienti costanti tranne uno, prende la forma

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{C^{(r)}x^{r}}{(x-a)^{p}},$$

in cui r può essere un numero qualunque $<p$ fino a zero inclusivamente.

Se anche nell' espressione generale proposta si ponga $p'=p''=\text{ecc.}=p^{(n-1)}=0$, essa prenderà la forma

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(q+p-1)}x^{q+p-1}}{x^{q}(x-a)^{p}},$$

la quale, supponendo nulli i coefficienti costanti del numeratore tranne uno, si riduce all' altra

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{C^{(r)}x^{r}}{x^{q}(x-a)^{p}},$$

in cui sempre $r<q+p$, e può anche giungere ad esser zero. Ponendo poi nella stessa espressione generale

$q = p'' = p''' = \text{ecc.} = p^{(n-1)} = 0$ la formola riesce

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(p+p'-1)} x^{p+p'-1}}{(x-a)^p (x-a')^{p'}},$$

e più semplicemente

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C^{(r)} x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$$

che abbraccia tutti i casi di $r = 0$, e di $r < p + p'$. Si potrebbero ora con nuove supposizioni estendere molto più le forme speciali che derivano dall'espressione generale proposta aumentando anche il numero de' fattori del denominatore; ma siccome, secondo ciò che si vedrà in seguito, le regole che si trovano per la decomposizione della frazione che ha la forma (7) conducono a quella di qualunque altra frazione analoga che abbia nel denominatore un maggior numero di fattori, così basterà limitarsi alla considerazione ulteriore della forma

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(p+p'+p''-1)} x^{p+p'+p''-1}}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}},$$

e della più semplice

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C^{(r)} x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}},$$

che ben facilmente si vede come nascano dalla generale. Altre due forme nascerebbero pure dal fare nell'espressione generale $p'' = p''' = \text{ecc.} = p^{(n-1)} = 0$, e dal sopprimere in seguito tutti i termini del numeratore tranne uno, che riuscirebbe al solito espresso per $C^{(r)} x^r$, ove però sarebbe $r = 0$, e sempre

$r < q + p + p'$; ma le stesse forme sono date col solo cambiamento di qualche lettera che non influisce, perchè di generale rappresentazione e col porre nelle (9), (10) $a = 0$. Resta quindi soltanto ad avvertirsi che l' espressione generale proposta si riferisce alla supposizione che tutti si conoscano i fattori del denominatore, nel qual caso come pure si vedrà, se ne ottiene la completa decomposizione. Non così avviene quando l' ostacolo dell' irresolubilità in generale delle equazioni superiori al quarto grado impedisca il conoscere tutti i fattori di un polinomio che sia il denominatore di una data frazione. Allora se niun fattore possa conoscersi, la decomposizione, come è evidente, sarà impossibile, e quando se ne conoscano alcuni, essa soltanto avrà luogo, come si vedrà parzialmente ed in corrispondenza ai fattori conosciuti. Quindi una frazione algebrica qualunque soggetta a tale condizione potrà rappresentarsi per

$$(11)\ .\ .\ \frac{C + C'x + \text{ecc.} + C^{(p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-2)}+m-1)}\, x^{p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-2)}+m-1}}{(x-a)^{p}\,(x-a')^{p'} \ldots (x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}\,(D + D'x + D''x^2 + \text{ecc.} + D^{(m)}x^{m})},$$

cambiando nell' espressione generale proposta $p^{(n-1)}$ in m, e sostituendo al fattore $(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}$ il polinomio $D + D'x + D''x^2 + \text{ecc.} + D^{(m)}x^{m}$, che si suppone risultare dal prodotto di fattori tutti sconosciuti. Supposto poi anche $p = p' = \text{ecc.} = p^{(n-2)} = 0$ si ha l' espressione ultima

$$(12)\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(m-1)}x^{m-1}}{D + D'x + D''x^2 + \text{ecc.} + D^{(m)}x^{m}},$$

la quale è indecomponibile. Variando però l' ipotesi riguardo

al polinomio $D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m$, cioè supponendo che esso sia il prodotto di altri due o più polinomj tutti di grado superiore al quarto, avrà pur luogo una decomposizione della frazione della forma (12) limitata al ritrovamento di altrettante frazioni più semplici che abbiano per rispettivi denominatori i fattori stessi, ed equivalgano nella loro somma alla frazione proposta come è facile dimostrare.

2. Prendendo ora a considerare primieramente l' espressione (1) dell' articolo precedente si può stabilire l' equazione

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(n)}x^n}{x(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}=\frac{A}{x}+\frac{A'}{x-a}+\frac{A''}{x-a'}+\text{ecc.}+\frac{A^{(n)}}{x-a^{(n-1)}},$$

in cui $A, A', \text{ecc. } A^{(n)}$ sono costanti da determinarsi, le quali realmente si determinano avendosi perciò, levate dalla proposta le frazioni, altrettante incognite quante equazioni. Moltiplicando quindi la proposta stessa per x, poi fatto $x=0$, si ha

$$A=\frac{C}{-a\,.\,-a'.\,-\text{ecc.}\,.-a^{(n-1)}},$$

e moltiplicandola per $x-a$, e fatto $x=a$ si ha pure

$$A'=\frac{C+C'a+C''a^2+\text{ecc.}+C^{(n)}a^n}{a(a-a')(a-a'')\ldots(a-a^{(n-1)})}.$$

Con metodo analogo si troverà il valore delle altre costanti A'', A''', ecc. $A^{(n)}$, e poichè ciascun termine del secondo membro dell'equazione proposta, se si eccettui il primo, può rappresentarsi per $\frac{A^{(r)}}{x-a^{(r-1)}}$ esprimendo per (r) generalmente un numero d' apici non <1, e non $<n$, si avrà sempre per ogni caso partico-

lare il valore di $A^{(r)}$ dall' espressione del primo membro dell' equazione stessa sostituendovi $a^{(r-1)}$ in luogo di x, e sopprimendo nel denominatore di essa il fattore $x-a^{(r-1)}$. Sia a cagion d' esempio l' equazione

$$\frac{7+5x+3x^2}{x^3+3x^2+2x} = \frac{7+5x+3x^2}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{A'}{x+2} + \frac{A''}{x+1},$$

che confrontata colla proposta dà $C=7$, $C'=5$, $C''=3$, ed $a=-2$, $a'=-1$. L' espressione generale trovata per A dà in questo caso $A=\frac{7}{2}$, e la sostituzione successiva di -2, -1 in luogo di x nella frazione $\frac{7+5x+3x^2}{x(x+2)(x+1)}$, considerando come non esistenti rispettivamente i fattori $x+2$, $x+1$, produce $A'=\frac{9}{2}$, $A''=-5$, onde finalmente

$$\frac{7}{2}.\frac{1}{x} + \frac{9}{2}.\frac{1}{x+2} - 5.\frac{1}{x+1} = \frac{3x^2+5x+7}{x(x+2)(x+1)}.$$

Se ora si istituisca l' equazione analoga alla precedente, cioè

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})} = \frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \text{ecc.} + \frac{A^{(n-1)}}{x-a^{(n-1)}},$$

di cui il primo membro è l' espressione (2) dell' articolo 1.°, è facile a vedersi pel già detto che ognuna delle costanti A, A', ecc. $A^{(n-1)}$ sarà rispettivamente ciò che diviene il primo membro dell' equazione stessa, se in esso si ponga successivamente a, a', ecc. $a^{(n-1)}$ in luogo di x, soppressi prima e corrispondentemente i fattori $x-a$, $x-a'$,..... $x-a^{(n-1)}$. Si ha quindi la regola sicura per decomporre una frazione della forma data dall' espressione (2) dell' articolo 1.° in altrettante

frazioni semplici quanti sono i fattori di primo grado del suo denominatore. Così se venga proposta la frazione

$$\frac{1-3x-x^2}{6-7x+x^3}=\frac{1-3x-x^2}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{A'}{x-2}+\frac{A''}{x+3},$$

si avrà, ponendo nel primo membro di essa 1 in luogo di x, soppresso prima il fattore $x-1$, $A=\frac{3}{4}$; e ponendo 2 in luogo di x, soppresso il fattore $x-2$, $A'=-\frac{9}{5}$. Da ultimo soppresso il fattore $x+3$, e fatto $x=-3$, si ha pure $A''=\frac{1}{20}$; ed in conseguenza:

$$\frac{1-3x-x^2}{6-7x+x^3}=\frac{1}{20}\left(\frac{15}{x-1}-\frac{36}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right).$$

3. Trattisi ora di risolvere l' equazione:

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p}=\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a},$$

ossia di determinarne le costanti A, A', ecc. $A^{(p-1)}$ con che si ottiene la più semplice decomposizione dell' espressione (3) dell' articolo 1.° che è il primo membro dell' equazione stessa. È facile a vedersi che avendosi da questa, levate le frazioni, altrettante incognite quante equazioni, saranno le A, A', ecc. $A^{(p-1)}$ sempre determinabili, come si rende sensibile nell' uso del metodo ordinario de' coefficienti indeterminati con cui, però anche con calcolo sommamente brigoso e prolisso, si ritrovano ne' casi particolari. A determinarli però generalmente non uno è il metodo che può seguirsi; ma quello che agli altri sembra preferibile, consiste nel prendere primieramente a

risolvere l'espressione $\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}$ che è la (4) dell'articolo 1.°, giacchè $C^{(r)}x^r$ in cui r può prendere tutti i valori da o fino a $p-1$ inclusivamente pe' due estremi, rappresenta tutti i termini del numeratore nella frazione $\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p}$, e quindi quando siasi rinvenuta l'espressione sviluppata di $\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}$, variandola dentro i limiti di r, e raccogliendone i risultamenti in somma ordinata secondo le potenze di $\frac{1}{x-a}$, si avrà l'espressione (3) dell'articolo 1.° decomposta in altrettante frazioni più semplici, cioè co' numeratori costanti, quante sono le unità in p. Ciò posto essendo

$$\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}=\frac{C^{(r)}}{(x-a)^p}\Big(a+(x-a)\Big)^r=$$

$$\frac{C^{(r)}}{(x-a)^p}\Big(a^r+r(x-a)a^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2}(x-a)^2a^{r-2}$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}(x-a)^3a^{r-3}+\text{ecc.}+(x-a)^r\Big)=$$

$$C^{(r)}\left(\frac{a^r}{(x-a)^p}+r\frac{a^{r-1}}{(x-a)^{p-1}}+\frac{r(r-1)}{2}\frac{a^{r-2}}{(x-a)^{p-2}}+\text{ecc.}+\frac{1}{(x-a)^{p-r}}\right);$$

se si ponga ora nell'espressione trovata di $\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}$ successivamente $r=0$, $r=1$, ecc. $r=p-1$, sommando i risultamenti, ed ordinando per rapporto alle potenze di $\frac{1}{x-a}$ si ha

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p}=$$

$$\frac{C}{(x-a)^p}$$

$$+\frac{C'a}{(x-a)^p}+\frac{C'}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+\frac{C''a^2}{(x-a)^p}+2\frac{C''a}{(x-a)^{p-1}}+\frac{C''}{(x-a)^{p-2}}$$

$$+\frac{C'''a^3}{(x-a)^p}+3\frac{C'''a^2}{(x-a)^{p-1}}+\frac{3.2}{2}\frac{C'''a}{(x-a)^{p-2}}+\frac{C'''}{(x-a)^{p-3}}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$+\frac{C^{(p-1)}a^{p-1}}{(x-a)^p}+(p-1)\frac{C^{(p-1)}a^{p-2}}{(x-a)^{p-1}}+\frac{(p-1)(p-2)}{2}\frac{C^{(p-1)}a^{p-3}}{(x-a)^{p-2}}+\text{ecc.}+\frac{C^{(p-1)}}{x-a}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{p-2}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a},$$

rappresentando per A, A', A'', ecc. le somme dei coefficienti parziali delle potenze di $\frac{1}{x-a}$.

Ad ottenere però in modo diretto l'espressione generale di $A^{(r)}$ che può rappresentare ognuna delle costanti A, A', ecc. $A^{(p-1)}$ giova richiamare l'equazione

$$\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}=C^{(r)}\left(\frac{a^r}{(x-a)^p}+r\frac{a^{r-1}}{(x-a)^{p-1}}+\frac{r(r-1)}{2}\frac{a^{r-2}}{(x-a)^{p-2}}+\text{ecc.}+\frac{1}{(x-a)^{p-r}}\right),$$

o ponendo $r+n$ in luogo di r:

$$\frac{C^{(r+n)}\,x^{r+n}}{(x-a)^p} = C^{(r+n)}\left(\frac{a^{r+n}}{(x-a)^p} + (r+n)\,\frac{a^{r+n-1}}{(x-a)^{p-1}}\right.$$

$$+\frac{(r+n)(r+n-1)}{2}\,\frac{a^{r+n-2}}{(x-a)^{p-2}} + \frac{(r+n)(r+n-1)(r+n-2)}{2.3}\,\frac{a^{r+n-3}}{(x-a)^{p-3}} + \text{ecc.}$$

$$\left. \ldots + \frac{(r+n)(r+n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots r}\,\frac{a^{n}}{(x-a)^{p-r}} + \text{ecc.} + \frac{1}{(x-a)^{p-r-n}}\right).$$

Ora se si supponga $r+n$ posto dentro i limiti inclusivi di o, $p-1$, e si rifletta che $A^{(r)}$ rappresenta generalmente il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ nello sviluppo della frazione

$$\frac{C+C'x+\text{ecc.}+C^{(p-1)}\,x^{p-1}}{(x-a)^p}$$

secondo le potenze di $x-a$, e che perciò deve essere la somma de' coefficienti di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ nello sviluppo parziale di

$$\frac{C^{(r)}\,x^{r}}{(x-a)^p},\quad \frac{C^{(r+1)}\,x^{r+1}}{(x-a)^p},\quad \text{ecc.}\quad \frac{C^{(p-1)}\,x^{p-1}}{(x-a)^p},$$

se ne inferisce facilmente che, se nel coefficiente $C^{(r+n)}\,\frac{(r+n)(r+n-1)\ldots(n+1)a^{n}}{1.2.3\ldots r}$, che è quello di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ nello sviluppo di $\frac{C^{(r+n)}\,x^{r+n}}{(x-a)^p}$, si ponga successivamente $n=0$, $n=1$, ecc. $n=p-r-1$, sommando i risultamenti, si ha

$$A^{(r)} = C^{(r)} + (r+1)C^{(r+1)}a + \frac{(r+2)(r+1)}{2} C^{(r+2)}a^2$$

$$+ \frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{2.3} C^{(r+3)}a^3 + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-r)}{1.2.3\ldots r} C^{(p-1)}a^{p-r-1}.$$

Da questa espressione risultano quindi, posto successivamente $r=0$, $r=1$, ecc. $r=p-1$, i coefficienti dello sviluppo di una frazione qualunque della forma dell' espressione (3) dell' articolo 1.° Sia per esempio proposta la frazione

$$\frac{x^2-2}{(x-3)^3} = \frac{A}{(x-3)^3} + \frac{A'}{(x-3)^2} + \frac{A''}{x-3}.$$

L' espressione di $A^{(r)}$, avendosi in questo caso $p=3$, $a=3$, $C=-2$, $C'=0$, $C''=1$, dà, fatto $r=0$, $A=-2+9=7$; fatto $r=1$, $A'=6$; e fatto $r=2$, $A''=1$. Sarà dunque

$$\frac{x^2-2}{(x-3)^3} = \frac{7}{(x-3)^3} + \frac{6}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3},$$

come può verificarsi.

4. Prima d' inoltrare nella decomposizione delle frazioni è d' uopo quì dimostrare a guisa di lemmi due proposizioni che saranno di molto uso nel seguito. Colla prima si asserisce che supposti al solito p, r numeri interi si ha sempre l' equazione

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}$$

$$+ \frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+r-3)}{1.2.3\ldots(r-1)} + \frac{(p-2)(p-1)p\ldots(p+r-4)}{1.2.3\ldots(r-1)} + \text{ecc.} + 1.$$

Per provarlo si riflette primieramente essere

$$(1)\ldots\frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r}=\frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots r}+\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}$$

come è manifesto per un facile artificio di calcolo. Ora se si indica per $F_{p,r}$ l' espressione $\frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r}$, sarà

$$\frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots r}=F_{p-1,r},\ \text{e}$$

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}=F_{p,r-1},$$

poichè riguardo a queste tre espressioni è manifesto non essere la seconda, che la prima in cui siasi sostituito $p-1$ a p, e la terza non essere che la prima in cui siasi cambiato r in $r-1$. Si avrà dunque variando anche la sola p, cioè ponendo successivamente $p-1$, $p-2$, ecc. in luogo di p

$$\begin{aligned}
F_{p,r} &= F_{p-1,r} + F_{p,r-1}\\
F_{p-1,r} &= F_{p-2,r} + F_{p-1,r-1}\\
F_{p-2,r} &= F_{p-3,r} + F_{p-2,r-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_{p-n,r} &= F_{p-(n+1),r} + F_{p-n,r-1}.
\end{aligned}$$

Sommando quindi queste equazioni, e riguardando n come un numero qualunque intero però non $> p-1$, si ha

$$F_{p,r}=F_{p,r-1}+F_{p-1,r-1}+F_{p-2,r-1}+\text{ecc.}+F_{p-n,r-1}+F_{p-(n+1),r};$$

e quindi fatto $n=p-1$, onde $F_{p-(n+1),r}=F_{0,r}=0$, ed

$F_{p-n,r-1} = F_{1,r-1} = 1$, viene l'altra:

$$(2) \quad . \quad . \quad F_{p,r} = F_{p,r-1} + F_{p-1,r-1} + F_{p-2,r-1} + \text{ecc.} + 1,$$

che è l'equazione proposta a dimostrarsi.

La seconda proposizione che vuolsi ora dimostrare quasi come corollario della prima sta nell'asserire che l'espressione

$$(3) \ldots F_{p,r}\, x^p - bF_{p,r-1}\, x^{p-1} - b^2F_{p-1,r-1}\, x^{p-2} - b^3F_{p-2,r-1}\, x^{p-3} - \text{ecc.} - b^p,$$

nella quale $F_{p,r}$, $F_{p,r-1}$, $F_{p-1,r-1}$, $F_{p-2,r-1}$, ecc. hanno la stessa significazione che fu loro attribuita nella proposizione precedente, è generalmente divisibile per $x-b$. Sostituendo perciò ad $F_{p,r}$ il suo valore testè ritrovato per la (2) essa diviene

$$(F_{p,r-1} + F_{p-1,r-1} + F_{p-2,r-1} + \text{ecc.} + 1)\, x^p$$

$$-bF_{p,r-1}\, x^{p-1} - b^2F_{p-1,r-1}\, x^{p-2} - b^3F_{p-2,r-1}\, x^{p-3} - \text{ecc.} - b^p =$$

$$F_{p,r-1}(x-b)x^{p-1} + F_{p-1,r-1}(x^2-b^2)x^{p-2} + F_{p-2,r-1}(x^3-b^3)x^{p-3}$$

$$+ \text{ecc.} + x^p - b^p,$$

che, divisa per $x-b$, dà il quoziente

$$F_{p,r-1}\, x^{p-1} + F_{p-1,r-1}(x+b)x^{p-2} + F_{p-2,r-1}(x^2+bx+b^2)x^{p-3} + \text{ecc.}$$

$$+ x^{p-1} + bx^{p-2} + b^2x^{p-3} + \text{ecc.} + b^{p-1} =$$

$$(F_{p,r-1} + F_{p-1,r-1} + F_{p-2,r-1} + \text{ecc.} + 1)x^{p-1}$$
$$+ (F_{p-1,r-1} + F_{p-2,r-1} + F_{p-3,r-1} + \text{ecc.} + 1)bx^{p-2}$$
$$+ (F_{p-2,r-1} + F_{p-3,r-1} + F_{p-4,r-1} + \text{ecc.} + 1)b^2x^{p-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + b^{p-1}.$$

Ora essendo quì il coefficiente di x^{p-1} il secondo membro dell'equazione (2), il coefficiente di bx^{p-2} lo stesso secondo membro in cui siasi posto $p-1$ in luogo di p, il coefficiente di b^2x^{p-3} lo stesso secondo membro cambiato p in $p-2$, si fa manifesto che il ritrovato quoziente si riduce alla

$$(4) \ldots F_{p,r}\, x^{p-1} + F_{p-1,r}\, bx^{p-2} + F_{p-2,r}\, b^2x^{p-3} + \text{ecc.} + b^{p-1},$$

da cui, fatto $x=b=1$, si ha il secondo membro dell' equazione (2), cambiato in essa r in $r+1$. Perciò il quoziente medesimo viene allora espresso da

$$F_{p,r+1} = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r)}{1.2.3\ldots(r+1)},$$

e lo sarebbe da

$$F_{p,r+1}\, b^{p-1} = \frac{p(p+1)\ldots(p+r)b^{p-1}}{1.2.3\ldots(r+1)}$$

per la sola ipotesi di $x = b$.

Nella supposizione di $r = 2$ l'espressione (3) diviene

$$F_{p,2}\, x^{p} - bF_{p,1}\, x^{p-1} - b^2F_{p-1,1}\, x^{p-2} - \text{ecc.} - b^{p},$$

e quindi divisa per $x-b$ secondo la corrispondente applicazione della formola (4), dà il quoziente:

$$\mathrm{F}_{p,2}\, x^{p-1} + \mathrm{F}_{p-1,2}\, bx^{p-2} + \mathrm{F}_{p-2,2}\, b^2x^{p-3} + \text{ecc.} + b^{p-1},$$

che, posto $x=b$, risulta secondo l' equazione (2)

$$\mathrm{F}_{p,3}\, b^{p-1} = \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\, b^{p-1}.$$

Così quando si suppone $r=3$, il quoziente dell' espressione (3) applicata a questo caso e divisa per $x-b$, e fatto in seguito $x=b$, risulta

$$\mathrm{F}_{p,4}\, b^{p-1} = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4}\, b^{p-1}.$$

Resta per ciò che dee dirsi in seguito a farsi l' osservazione, che se nell'equazione (2) si ponesse $r=1$, essa più non sussisterebbe secondo il significato attribuito ad $\mathrm{F}_{p,r}$ che in questo caso risulterebbe $\mathrm{F}_{p,1}=p$, mentre il secondo membro dell' equazione stessa prenderebbe la forma di quantità infinita. Quindi in questa ipotesi non avrebbe luogo neppure ciò che si è dimostrato in generale circa la divisibilità per $x-b$ dell' espressione (3). Però supposto che essa sia

$$px^p - bx^{p-1} - b^2x^{p-2} - b^3x^{p-3} - \text{ecc.} - b^p,$$

sarà pure divisibile per $x-b$ equivalendo essa come facilmente si vede all' altra

$$x^p - bx^{p-1} + x^p - b^2x^{p-2} + x^p - b^3x^{p-3} + \text{ecc.} + x^p - b^p$$

$$= (x-b)x^{p-1} + (x^2-b^2)x^{p-2} + (x^3-b^3)x^{p-3} + \text{ecc.} + x^p - b^p$$

evidentemente divisibile per $x-b$, essendo l'espressione del quoziente che ne risulta:

$$px^{p-1} + (p-1)bx^{p-2} + (p-2)b^2x^{p-3} + \text{ecc.} + b^{p-1},$$

il quale, posto $x=b$, diviene $F_{p,2}\, b^{p-1} = \frac{p(p+1)b^{p-1}}{1.2}$.

5. Secondo l' ordine stabilito nell' articolo 1.° trattasi ora di prendere in esame l' espressione (5) dell' articolo stesso, o piuttosto la (6) che la rappresenta, come apparisce, in ciascuno de' suoi termini, cioè $\frac{C^{(r)}x^r}{x^q(x-a)^p}$, in cui $r<q+p$. Se quindi si supponga $q<r$, divenendo essa $\frac{C^{(r)}x^{r-q}}{(x-a)^p}$ ove necessariamente $r-q<p$, si riferisce all' espressione (4) dell' articolo 1.° già considerata per l' opportuno sviluppo. Se poi si supponga $q>r$ essa diviene $\frac{C^{(r)}}{x^{q-r}(x-a)^p}$, di cui potrebbe cercarsi lo sviluppo con metodo diretto perfettamente analogo a quello con cui nell'espressione (8) del suddetto articolo 1.° fatto $r=0$, si ottiene, come si vedrà in seguito, la decomposizione della frazione $\frac{C^{(0)}}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$, a cui si riduce per particolare supposizione anche la decomposizione di $\frac{C^{(r)}}{x^{q-r}(x-a)^p}$.

Torna perciò opportuno, fatto anche per semplicità $C^{(0)}=1$, ricercare la risoluzione della frazione $\frac{1}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$. Posto pertanto

$$\frac{1}{(x-a)^p(x-a')^{p'}} = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A'}{(x-a)^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a}$$

$$+ \frac{B}{(x-a')^{p'}} + \frac{B'}{(x-a')^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x-a'},$$

essendo al solito A, A', ecc. $A^{(p-1)}$, e B, B', ecc. $B^{(p'-1)}$ costanti da determinarsi; se si moltiplica l' equazione per $(x-a)^p$, poi si faccia $x=a$, si ha subito $A=\frac{1}{(a-a')^{p'}}=\frac{1}{b^{p'}}$, posto anche $a-a'=b$. Se inoltre si ponga $x-a'=x'$ e si sostituisca il valore trovato per A, l' equazione proposta dà facilmente l' altra:

$$\frac{(-1)}{b^{p'}}\frac{(x'^{p'}-b^{p'})}{(x-a)^p x'^{p'}}=\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\frac{B}{x'^{p'}}+\frac{B'}{x'^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{B^{(p'-1)}}{x'},$$

la quale, a cagione di $x'^{p'}-b^{p'}$ divisibile per $x'-b=x-a$, diviene:

$$\text{(I)}\ \ldots\ \frac{(-1)}{b^{p'}}\left(\frac{x'^{p'-1}+bx'^{p'-2}+b^2x'^{p'-3}+\text{ecc.}+b^{p'-1}}{(x-a)^{p-1}x'^{p'}}\right)=$$

$$\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\frac{B}{x'^{p'}}+\frac{B'}{x'^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{B^{(p'-1)}}{x'},$$

che moltiplicata per $(x-a)^{p-1}$, e fatto $x=a$, o ciò che è lo lo stesso $x'=b$, dà

$$A'=\frac{(-1)}{b^{p'}}\frac{p'b^{p'-1}}{b^{p'}}=\frac{(-1)p'}{b^{p'+1}},$$

valore che sostituito nella (I) dà pure:

$$\frac{p'x'^{p'}-(bx'^{p'-1}+b^2x'^{p'-2}+\text{ecc.}+b^{p'})}{b^{p'+1}(x-a)^{p-1}x'^{p'}}$$

$$=\frac{A''}{(x-a)^{p-2}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\frac{B}{x'^{p'}}+\frac{B'}{x'^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{B^{(p'-1)}}{x'}.$$

Ora il numeratore della frazione, che è il primo membro di questa equazione, avendo la forma considerata nel fine dell' articolo precedente, è pure divisibile per $x'-b$, e si ha perciò:

$$\frac{p'x'^{p'-1} + (p'-1)bx'^{p'-2} + (p'-2)b^2x'^{p'-3} + \text{ecc.} + b^{p'-1}}{b^{p'+1}(x-a)^{p-2}x'^{p'}} =$$

$$\frac{A''}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a} + \frac{B}{x'^{p'}} + \frac{B'}{x'^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x'},$$

ovvero come si ricava dall' articolo precedente

$$\text{(II).} \quad \frac{F_{p',1}\, x'^{p'-1} + F_{p'-1,1}\, bx'^{p'-2} + F_{p'-2,1}\, b^2x'^{p'-2} + \text{ecc.} + b^{p'-1}}{b^{p'+1}(x-a)^{p-2}x'^{p'}} =$$

$$\frac{A''}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a} + \frac{B}{x'^{p'}} + \frac{B'}{x'^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x'},$$

onde, moltiplicando per $(x-a)^{p-2}$ poi fatto $x'=b$, nasce

$$A'' = F_{p',2} \cdot \frac{b^{p'-1}}{b^{2p'+1}} = F_{p',2} \cdot \frac{1}{b^{p'+2}} = (-1)^2 F_{p',2} \cdot \frac{1}{b^{p'+2}}$$

$$= (-1)^2 \frac{p'(p'+1)}{1.2} \cdot \frac{1}{b^{p'+2}}.$$

Moltiplicando ora l' equazione (II) per $(x-a)^{p-2}x'^{p'}$, indicando per $S_{x'}$ la somma $B+B'x'+B''x'^2+\text{ecc.}+B^{(p'-1)}x'^{p'-1}$, e sostituito in essa il valore trovato per A'', si ottiene pur l'altra:

$$\text{(III)} \;.\;.\; \frac{(-1)^3}{b^{p'+2}}\left(F_{p',2}\,x'^{p'} - bF_{p',1}\,x'^{p'-1} - b^2F_{p'-1,1}\,x'^{p'-2} - \text{ecc.} - b^{p'}\right)$$

$$= x'^{p'}\left(A'''(x-a) + \text{ecc.} + A^{(p-1)}(x-a)^{p-3}\right) + S_{x'}(x-a)^{p-2}.$$

Ora il primo membro di questa equazione indipendentemente dal moltiplicatore $\frac{(-1)^3}{b^{p'+2}}$ riferendosi all'espressione (3) dell' articolo precedente, in cui posto p' in luogo di p, x' in luogo di x, abbiasi $r=2$, è divisibile per $x'-b=x-a$, come lo è pure il secondo membro. Effettuando però la corrispondente divisione dell'equazione, a cagione di

$$\frac{F_{p',2}\,x'^{p'} - bF_{p',1}\,x'^{p'-1} - b^2F_{p'-1,1}\,x'^{p'-2} - \text{ecc.} - b^{p'}}{x'-b} =$$

$$F_{p',2}\,x'^{p'-1} + F_{p'-1,2}\,bx'^{p'-2} + F_{p'-2,2}\,b^2x'^{p'-3} + \text{ecc.} + b^{p'-1},$$

come si ha per questo caso dall' espressione (4), e fatto inoltre $x=a$, cioè $x'=b$, si avrà:

$$A''' = \frac{(-1)^3}{b^{p'+2}.b^{p'}}\left(F_{p',2} + F_{p'-1,2} + F_{p'-2,2} + \text{ecc.} + 1\right)b^{p'-1}$$

$$= \frac{(-1)^3}{b^{p'+3}}F_{p',3} = \frac{(-1)^3}{b^{p'+3}}\,\frac{p'(p'+1)(p'+2)}{1.2.3.},$$

come si ha pure dall' equazione (2) dell' articolo precedente, ponendo in essa p' in luogo di p, e fatto $r=3$.

S'intravede pertanto la legge che seguir debbono i coefficienti A, A', A'', A''', ecc., ed argomentandola già per induzione conviene dimostrarla direttamente ed a rigore. A ciò conduce il supporre che un coefficiente qualunque $A^{(r)}$ abbia la forma

$$\frac{(-1)^r}{b^{p'+r}}\,\frac{p'(p'+1)\ldots\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots r},$$

supposizione che come si raccoglie dal già detto si verifica rispetto ad A', A'', A'''. Quindi qualora si provi, che la stessa forma appartenga al coefficiente successivo $A^{(r+1)}$, vale a dire, che l' espressione di questo non sia che quella supposta per $A^{(r)}$, in cui ad r siasi sostituito $r+1$, sarà anche provato come facilmente si comprende, che la stessa forma appartiene a tutti gli altri cominciando però da A' inclusivamente. E poichè l' equazione (III) per cui si determina il valore di A''' può supporsi appartenente ad una forma generale, così in questa stessa supposizione quando trattisi di determinare $A^{(r)}$ deve valere l'equazione:

$$\text{(IV)}\ldots\frac{(-1)^r}{b^{p'+r-1}}\left(F_{p',r-1}\,x'^{p'}-bF_{p',r-2}\,x'^{p'-1}-b^2F_{p'-1,r-2}\,x'^{p'-2}-\text{ecc.}-b^{p'}\right)=$$

$$x'^{p'}\left(A^{(r)}(x-a)+A^{(r+1)}(x-a)^2+\text{ecc.}+A^{(p-1)}(x-a)^{p-r}\right)+S_{x'}(x-a)^{p-r+1},$$

la quale, fatto in essa $r=3$, diviene la (III), e sarà pienamente giustificata, e passerà dal supposto al dato certo quando da essa altra ne derivi perfettamente simile per determinare $A^{(r+1)}$, in cui cioè compariscano gli stessi termini in funzione non più di r, ma di $r+1$. Dividendo pertanto la (IV) per $x-a=x'-b$ dipendentemente dalle espressioni (3), (4) dell' articolo precedente, posto in esse p' in luogo di p, ed $r-1$ in luogo di r, ed x' in luogo di x, si avrà:

$$\frac{(-1)^r}{b^{p'+r-1}}\left(F_{p',r-1}\,x'^{p'-1}+F_{p'-1,r-1}\,bx'^{p'-2}+F_{p'-2,r-1}\,b^2x'^{p'-3}+\text{ecc.}+b^{p'-1}\right)=$$

$$x'^{p'}\left(A^{(r)}+A^{(r+1)}(x-a)+A^{(r+2)}(x-a)^2+\text{ecc.}+A^{(p-1)}(x-a)^{p-r-1}\right)+S_{x'}(x-a)^{p-r}.$$

Da questa equazione, fatto $x=a$, onde $x'=b$, si ricava

$$A^{(r)}=\frac{(-1)^r}{b^{p'+r-1}}\cdot\frac{b^{p'-1}}{b^{p'}}\left(F_{p',r-1}+F_{p'-1,r-1}+F_{p'-2,r-1}+\text{ecc.}+1\right)$$

$$=\frac{(-1)^r}{b^{p+r}}\cdot F_{p',r}=\frac{(-1)^r}{b^{p'+r}}\,\frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots\ldots r},$$

secondo le formole (1), (2) dell'articolo precedente. Sostituendo pertanto questo valore di $A^{(r)}$ nell'equazione ultima da cui si derivò, dopo aver posto in essa $x=a$, nasce quindi l'altra

$$\text{(V)}\ldots\frac{(-1)^{r+1}}{b^{p'+r}}\left(F_{p',r}\,x'^{p'}-bF_{p',r-1}\,x'^{p'-1}-b^2F_{p'-1,r-1}-\text{ecc.}-b^{p'}\right)=$$

$$x'^{p'}\left(A^{(r+1)}(x-a)+A^{(r+2)}(x-a)^2+\text{ecc}+A^{(p-1)}(x-a)^{p-r-1}\right)+S_{x'}(x-a)^{p-r},$$

la quale è perfettamente simile alla (IV). Quindi si conchiude, che se nella successiva eliminazione dei coefficienti indeterminati s'incontra, per determinare uno qualunque di essi $A^{(r)}$, una equazione della forma indicata dalla (IV), oltre al determinarsi per essa

$$A^{(r)}=\frac{(-1)^r}{b^{p'+r}}\,\frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots\ldots r},$$

se ne avrà sempre un'altra simile quale è appunto la (V), e da questa si ricaverà pure analogamente

$$A^{(r+1)}=\frac{(-1)^{r+1}}{b^{p'+r+1}}\,\frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots\ldots(p'+r)}{1.2.3.\ldots(r+1)},$$

finchè però sia r non $>p-1$, essendo l'ultimo de' coefficienti ricercati $A^{(p-1)}$.

Con ciò rimane dimostrata la legge de' coefficienti dipendentemente dalla supposizione della forma attribuita all'equazione (IV), la quale, come si vide, verificandosi nel caso di $r=3$, cioè quando s' incontra l' equazione (III) per cui si determina A''', dovrà pure verificarsi per ogni altra equazione analoga data dalle successive eliminazioni. Perciò ponendo nell' equazione (IV) $r=p-1$, si avrà ancora l' equazione giustificata

$$\frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-2}}\left(F_{p',p-2}\,x'^{p'}-bF_{p',p-3}\,x'^{p'-1}-b^2F_{p'-1,p-3}\,x'^{p'-2}-\text{ecc.}-b^{p'}\right)$$

$$=x'^{p'}A^{(p-1)}(x-a)+S_{x'}(x-a)^2,$$

la quale, divisa per $x-a=x'-b$, dà l' altra:

$$\frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-2}}\left(F_{p',p-2}\,x'^{p'-1}+F_{p'-1,p-2}\,bx'^{p'-2}+F_{p'-2,p-2}\,b^2x'^{p'-3}+\text{ecc.}+b^{p'-1}\right)$$

$$=x'^{p'}A^{(p-1)}+S_{x'}(x-a),$$

come si ha applicando opportunamente le espressioni (3), (4) dell' articolo precedente. E poichè

$$A^{(p-1)}=\frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}}\,\frac{p'(p'+1)\ldots\ldots(p'+p-2)}{1.2.\ldots\ldots(p-1)}=\frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}}\cdot F_{p',p-1},$$

se si sostituisca questo valore nell' equazione ultima da cui anche potrebbesi direttamente ricavare, si avrà ancora trasponendo opportunamente:

$$\frac{(-1)^{p}}{b^{p'+p-1}}\left(F_{p',p-1}\,x'^{p'}-bF_{p',p-2}\,x'^{p'-1}-b^2F_{p'-1,p-2}\,x'^{p'-2}-\text{ecc.}-b^{p'}\right)=S_{x'}(x-a),$$

equazione, che pure divisa per $x-a=x'-b$, dà:

$$\frac{(-1)^p}{b^{p'+p-1}}\left(F_{p',p-1}\,x'^{p'-1}+F_{p'-1,p-1}\,bx'^{p'-2}+F_{p'-2,p-1}\,b^2x'^{p'-3}+\text{ecc.}+b^{p'-1}\right)=S_{x'},$$

ovvero, restituendo il valore di $S_{x'}$,

$$\frac{(-1)^p}{b^{p'+p-1}}\left(F_{p',p-1}\,x'^{p'-1}+F_{p'-1,p-1}\,bx'^{p'-2}+F_{p'-2,p-1}\,b^2x'^{p'-3}+\text{ecc.}+b^{p'-1}\right)$$

$$=B^{(p'-1)}x'^{p'-1}+B^{(p'-2)}x'^{p'-2}+B^{(p'-3)}x'^{p'-3}+\text{ecc.}+B'x'+B,$$

ove è manifesto che dovendo eguagliarsi i corrispondenti coefficienti delle potenze di x' ne' due membri di quest' ultima equazione si ha

$$B^{(p'-1)}=\frac{(-1)^p}{b^{p'+p-1}}F_{p',p-1},$$

$$B^{(p'-2)}=\frac{(-1)^p}{b^{p'+p-2}}F_{p'-1,p-1},$$

$$B^{(p'-3)}=\frac{(-1)^p}{b^{p'+p-3}}F_{p'-2,p-1},$$

. . . . . .

$$B'=\frac{(-1)^p}{b^{p+1}}F_{2,p-1},$$

$$B=\frac{(-1)^p}{b^p}.$$

Per le cose dette si fa quindi manifesto, che l'equazione proposta nel principio del presente articolo rimane pienamente determinata, e si ha:

$$(\mathrm{VI})\ldots\ \frac{1}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}} = \frac{1}{b^{p'}}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p}} + \frac{(-1)}{b^{p'+1}}\mathrm{F}_{p',1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+\frac{(-1)^2}{b^{p'+2}}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-2}}\mathrm{F}_{p',2} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}}\mathrm{F}_{p',p-1}\cdot\frac{1}{x-a}$$

$$+\frac{(-1)^{p}}{b^{p}}\cdot\frac{1}{(x-a')^{p'}} + \frac{(-1)^{p}}{b^{p+1}}\mathrm{F}_{2,p-1}\cdot\frac{1}{(x-a')^{p'-1}}$$

$$+\frac{(-1)^{p}}{b^{p+2}}\mathrm{F}_{3,p-1}\cdot\frac{1}{(x-a')^{p'-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p}}{b^{p'+p-1}}\mathrm{F}_{p',p-1}\cdot\frac{1}{x-a'}.$$

6. La formola precedente (VI) presenta la forma de' coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$ diversa da quella de' coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a'}$. È però evidente che trovati gli uni, gli altri debbono essere perfettamente analoghi, e quindi determinato già il coefficiente generale di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ in

$$\mathrm{A}^{(r)} = \frac{(-1)^{r}}{b^{p'+r}}\ \frac{p'(p'+1)\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots.r},$$

se ne poteva legittimamente inferire

$$\mathrm{B}^{(r)} = \frac{(-1)^{r}}{(-b)^{p+r}}\ \frac{p(p+1)\ldots.(p+r-1)}{1.2.3.\ldots.r},$$

cioè il coefficiente generale di $\frac{1}{(x-a')^{p'-r}}$ espresso inversamente al coefficiente $\mathrm{A}^{(r)}$, quale cioè si sarebbe trovato direttamente, se invece di cercare dapprima il coefficiente di

$\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ si fosse cercato quello di $\frac{1}{(x-a')^{p'-r}}$ reciprocando la p' colla p, ed $a-a'$ con $a'-a=-b$. Ora come è facile a vedersi la detta equazione (VI) dà generalmente

$$B^{(r)}=\frac{(-1)^r}{b^{p+r}}\,F_{r+1,p-1}=\frac{(-1)^p}{b^{p+r}}\,\frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)},$$

riferendo sempre secondo la posizione delle lettere $r+1$, $p-1$, la $F_{r+1,p-1}$ alla $F_{p,r}$ dell' articolo 4.°, cioè ponendo nell' espressione di questa $r+1$ in luogo di p, e $p-1$ in luogo di r. Osservando poi essere

$$\frac{(-1)^p}{b^{p+r}}=\frac{(-1)^p}{(-1)^{p+r}(-b)^{p+r}}=\frac{1}{(-1)^r(-b)^{p+r}}=\frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}},$$

sarà pure

$$B^{(r)}=\frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}}\,\frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)};$$

ed essendo r, p indeterminate, potrà essere $r>p-1$, ovvero $r<p-1$. Nel primo caso è evidente che l' espressione di $F_{r+1,p-1}$ potrà anche indicarsi per

$$\frac{p(p+1)\ldots r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)p(p+1)\ldots r},$$

e nel secondo per

$$\frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(p-1)\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots\ldots r(r+1)\ldots(p-1)},$$

cosicchè in amendue l' espressione si riduce a

$$\frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r}.$$

D' altronde si vede anche facilmente essere

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)},$$

poichè supposta questa equazione, e levate da essa le frazioni, i due membri di essa riescono manifestamente identici, perciò sono identiche le due espressioni di $B^{(r)}$, ed adottando quella di

$$B^{(r)} = \frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}} \frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}} F_{p,r},$$

si avrà l' altra equazione

$$\text{(VII)}\ldots \frac{1}{(x-a)^p (x-a')^{p'}} = \frac{1}{b^{p'}} \cdot \frac{1}{(x-a)^p} + \frac{(-1)}{b^{p'+1}} F_{p',1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^2}{b^{p'+2}} F_{p',2} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}} F_{p',p-1} \cdot \frac{1}{x-a}$$

$$+ \frac{1}{(-b)^p} \cdot \frac{1}{(x-a')^{p'}} + \frac{(-1)}{(-b)^{p+1}} F_{p,1} \cdot \frac{1}{(x-a')^{p'-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^2}{(-b)^{p+2}} F_{p,2} \cdot \frac{1}{(x-a')^{p'-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p'-1}}{(-b)^{p+p'-1}} F_{p,p'-1} \cdot \frac{1}{x-a'}.$$

Riesce poi quì opportuno l'osservare che l'equazione già dimostrata

$$\frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots.r} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)},$$

tradotta ai segni funzionali è la stessa che

$$F_{p,r} = F_{r+1,p-1},$$

in cui il secondo membro nasce dal primo sostituendovi

$r+1$ in luogo di p, e $p-1$ in luogo di r. Se si pone per esempio $r=2$, sarà $F_{p,2} = F_{3,p-1}$, come appunto richiede l' identità de' coefficienti di $\frac{1}{(x-a')^{p'-2}}$ nelle formole (VI) dell' articolo precedente e (VII) del presente. Intanto se nella (VI) si ponga $a'=0$, onde $b=a$, ed inoltre q in luogo di p', nasce l'altra equazione

$$\text{(VIII)} \ldots\ldots \frac{1}{x^q (x-a)^p} = \frac{1}{a^q} \cdot \frac{1}{(x-a)^p} + \frac{(-1)}{a^{q+1}} F_{q,1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^2}{a^{q+2}} F_{q,2} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p-1}}{a^{q+p-1}} F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{x-a}$$

$$+ \frac{(-1)^p}{a^p} \cdot \frac{1}{x^q} + \frac{(-1)^p}{a^{p+1}} F_{2,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^p}{a^{p+2}} F_{3,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^p}{a^{p+q-1}} F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{x},$$

la quale dà lo sviluppo dell' espressione (6) dell' articolo 1.°, cioè di $\frac{C^{(r)} x^r}{x^q (x-a)^p}$, posto in essa $r=0$, e $C^{(r)} = C = 1$.

Se ora per fare un confronto colle formole assegnate nella mia Memoria *sulla Decomposizione e Trasformazione delle funzioni algebriche frazionarie* si ponga nella (VIII) a^2x in luogo di x, e si osservi che il primo membro della stessa equazione diviene allora

$$\frac{1}{a^{2q} x^q (a^2x-a)^p} = \frac{(-1)^p}{a^{2q+p}} \cdot \frac{1}{x^q (1-ax)^p},$$

e che ciascun termine del secondo membro che contenga una

delle potenze di a^2x-a può rappresentarsi generalmente per

$$\frac{(-1)^r}{a^{q+r}} F_{q,r} \cdot \frac{1}{(a^2x-a)^{p-r}} = \frac{(-1)^r}{a^{q+r}} \cdot \frac{(-1)^{p-r}}{a^{p-r}} F_{q,r} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-r}}$$

$$= \frac{(-1)^p}{a^{p+q}} F_{q,r} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-r}},$$

espressione in cui r può ricevere tutti i valori 0, 1, 2, ecc. $p-1$, purchè però si consideri $F_{q,0} = 1$, si ottiene l'altra equazione

$$\frac{(-1)^p}{a^{2q+p}} \cdot \frac{1}{(1-ax)^p \cdot x^q} =$$

$$\frac{(-1)^p}{a^{p+q}} \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{1-ax} \right)$$

$$+ \frac{(-1)^p}{a^{p+2q}} \cdot \frac{1}{x^q} + \frac{(-1)^p}{a^{p+2q-1}} F_{2,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-1}} + \frac{(-1)^p}{a^{p+2q-2}} F_{3,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-2}}$$

$$+ \text{ecc.} + \frac{(-1)^p}{a^{p+q+1}} F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{x};$$

d'onde finalmente si ricava:

$$\text{(IX)} \ldots \frac{1}{x^q (1-ax)^p} = \frac{a^q}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{a^q}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{a^q}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.}$$

$$+ F_{q,p-1} \cdot \frac{a^q}{1-ax} + \frac{1}{x^q} + F_{2,p-1} \cdot \frac{a}{x^{q-1}} + F_{3,p-1} \cdot \frac{a^2}{x^{q-2}}$$

$$+ \text{ecc.} + F_{q,p-1} \cdot \frac{a^{q-1}}{x},$$

equazione, che si vede facilmente identica a quella che fu determinata al n.° 11. della mia Memoria sovra citata stando quì x in luogo di t, e q in luogo di m.

Se ora essa si moltiplica per x^q si ha:

$$\frac{1}{(1-ax)^p} = 1 + F_{2,p-1}\, ax + F_{3,p-1}\, a^2x^2 + \text{ecc.} + F_{q,p-1}\, a^{q-1}\, x^{q-1}$$

$$+ \frac{a^q x^q}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{a^q x^q}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{a^q x^q}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q,p-1} \cdot \frac{a^q x^q}{1-ax},$$

ossia, rammentando che come si è dimostrato in generale $F_{p,r} = F_{r+1,p-1}$, si avrà ancora:

$$(X) \ldots \frac{1}{(1-ax)^p} = 1 + F_{p,1}\, ax + F_{p,2}\, a^2x^2 + F_{p,3}\, a^3x^3 + \text{ecc.} + F_{p,q-1}\, a^{q-1}\, x^{q-1}$$

$$+ a^q x^q \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{1-ax} \right),$$

equazione, la quale può ottimamente servire in molti casi per determinare la somma di q termini della serie infinita in cui si svolge l' espressione $\frac{1}{(1-ax)^p}$ secondo il canone newtoniano. Di fatto i primi q termini del secondo membro dell' equazione (X) sono gli stessi di quelli che dà lo svolgimento della potenza negativa

$$\frac{1}{(1-ax)^p} = 1 + pax + \frac{p(p+1)}{2} a^2x^2 + \text{ecc.} + \frac{p(p+1)\ldots(p+q-2)}{1.2.3\ldots(q-1)} x^{q-1}\, a^{q-1} + \text{ecc.}$$

Dunque se per R si indichi il residuo di questa serie infinita, e per

$$\underset{q}{S} = 1 + \underset{p,1}{F}\, ax + \underset{p,2}{F}\, a^2x^2 + \underset{p,3}{F}\, a^3x^3 + \text{ecc.} + \underset{p,q-1}{F}\, a^{q-1}x^{q-1},$$

la somma de' primi q termini di essa, si avrà anche:

$$R = a^q x^q \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + \underset{q,1}{F} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + \underset{q,2}{F} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + \underset{q,p-1}{F} \cdot \frac{1}{1-ax} \right),$$

ed

$$\underset{q}{S} = \frac{1}{(1-ax)^p} - R,$$

ovvero

$$\underset{q}{S} = \frac{1}{(1-ax)^p}$$

$$- a^q x^q \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + \underset{q,1}{F} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + \underset{q,2}{F} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + \underset{q,p-1}{F} \cdot \frac{1}{1-ax} \right).$$

Per fare un esperimento di questa formola, oltre $a=1$, si supponga $p=2$, e lasciando indeterminata la q, per questa ipotesi e per le cose dette si ha

$$\underset{q}{S} = 1 + 2x + 3x^2 + \text{ecc.} + qx^{q-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - x^q \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{q}{1-x} \right)$$

$$= \frac{1 - x^q - qx^q + qx^{q+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 + x + x^2 + \text{ecc.} + x^{q-1} - qx^q}{1-x}$$

$$= \frac{qx^q - (x^{q-1} + x^{q-2} + \text{ecc.} + x + 1)}{x-1}.$$

Questa espressione diventa $\frac{0}{0}$ quando si suppone inoltre $x=1$, quantunque si sappia d'altronde che essa deve essere $\frac{q(q+1)}{2}$. Si ottiene però questo stesso risultato riflettendo che

$$qx^q - (x^{q-1} + x^{q-2} + \text{ecc.} + x + 1),$$

è, cambiato p in q, e fatto $b = 1$, l'espressione medesima

$$px^p - bx^{p-1} - b^2 x^{p-2} - b^3 x^{p-3} - \text{ecc.} - b^p,$$

divisibile per $x - b$, e considerata sul fine dell'articolo 4.°; poichè essendosi trovato il quoziente di tale divisione espresso da $\frac{p(p+1)}{2} b^{p-1}$, che, posto anche $b=1$, si riduce a $\frac{p(p+1)}{2}$; se ne raccoglie che nella stessa ipotesi risulta similmente $S_q = \frac{q(q+1)}{2}$. Però ad evitare generalmente l'incontro della frazione $\frac{0}{0}$ che sempre ha luogo qualunque sieno i valori di p, q nel caso di $x = a = 1$, basta osservare che si ha sempre allora

$$S_q = 1 + p + \frac{p(p+1)}{2} + \text{ecc.} + \frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+q-2)}{1.2.3\ldots(q-1)} =$$

$$1 + F_{p,1} + F_{p,2} + \text{ecc.} + F_{p,q-1} = F_{q,p-1} + F_{q-1,p-1} + F_{q-2,p-1} + \text{ecc.} + 1,$$

ossia S_q nel caso presente si riduce alla forma dell'espressione (4) dell'articolo 4.° posto in essa q in luogo di p, e $p-1$ in luogo di r, e fatto inoltre $x = b = 1$; e poichè per la somma de' termini della stessa si trovò nell'ipotesi pure di $x=b=1$,

$$F_{p,r+1} = \frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+r)}{1.2.3\ldots.(r+1)},$$

sarà al presente

$$S_q = F_{q,p} = \frac{q(q+1)\ldots\ldots(q+p-1)}{1.2.3\ldots.p}.$$

Sia per esempio $p = 2$, $q = 3$, e sarà $F_{3,2} = \frac{3.4}{2} = 6$.

Sia ancora $p=4$, $q=2$, e sarà $F_{2,4} = \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4} = 5$.

7. Ripigliando l'espressione (8) dell'articolo 1.°, cioè $\frac{C^{(r)} x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$, e supposto per maggiore semplicità $C^{(r)}=1$, ed inoltre $r>0$, $r<p+p'$, cioè essendo r numero intero e minore almeno di un' unità di $p+p'$, trattasi pure di risolverla in questa più generale condizione. Ponendo pertanto $r=r'+r''$ si può anche supporre r' non $>p$, $r''<p'$, locchè equivale al dire che essendo il maggior valore che possa darsi ad r quello di $p+p'-1$, è anche evidente che r potrà sempre partirsi in due numeri l'uno r' non maggiore di p, l'altro r'' minore di p', come viceversa. Ciò premesso, secondo la prima di queste supposizioni, applicando quì la formola di sviluppo di $\frac{x^r}{(x-a)^p}$ data all'articolo 3.°, e posto in essa successivamente r', r'' in luogo di r, se inoltre vengano indicati per D, D', D'', ecc. $D^{(r')}$ i coefficienti costanti ne' termini dello sviluppo di $\frac{x^{r'}}{(x-a)^p}$, e per E, E', ecc. $E^{(r'')}$ gli analoghi coefficienti nello sviluppo di $\frac{x^{r''}}{(x-a')^{p'}}$, si vede facilmente essere:

$$\text{(XI)} \quad \ldots \quad \frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}} = \frac{x^{r'}}{(x-a)^p} \cdot \frac{x^{r''}}{(x-a')^{p'}} =$$

$$\left(\frac{D}{(x-a)^p} + \frac{D'}{(x-a)^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{D^{(r')}}{(x-a)^{p-r'}}\right)\left(\frac{E}{(x-a')^{p'}} + \frac{E'}{(x-a')^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{E^{(r'')}}{(x-a')^{p'-r''}}\right).$$

Quindi è chiaro che la decomposizione di $\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$ si ri-

duce a quella di $\frac{1}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}}$, essendo di questa forma moltiplicata per una costante tutti i prodotti parziali in che essa si risolve secondo l'espressione data dall'equazione (XI). Ora siccome ciascuno di questi prodotti parziali può generalmente esprimersi per $\frac{D^{(q)}E^{(q')}}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, in cui q, q' sono numeri interi che rispettivamente possono ricevere tutti i valori 0, 1, 2, ecc. r', e 0, 1, 2, ecc. r'', si tratterà pure di trovare generalmente il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{D^{(q)}E^{(q')}}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, essendo n un numero intero tale che $p-n$ non sia $>$ di $p-q$, cioè n non $<$ di q, poichè lo sviluppo medesimo non può contenere una potenza maggiore di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}}$. Ponendo pertanto nell' equazione (VI) dell'articolo 5.° $p-q$ in luogo di p, e $p'-q'$ in luogo di p', si ha

$$\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}} = \frac{1}{b^{p'-q'}}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-q}} + \frac{(-1)}{b^{p'-q'+1}}\,F_{p'-q',1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-q-1}}$$

$$+\frac{(-1)^2}{b^{p'-q'+2}}\,F_{p'-q',2}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-q-2}} + \text{ecc.}$$

$$+\frac{(-1)^{p-q-1}}{b^{p'-q'+p-q-1}}\,F_{p'-q',p-q-1}\cdot\frac{1}{x-a} + \text{ecc.}$$

omettendo di notare i termini contenenti le potenze di $x-a'$; onde si comprende facilmente che il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$

in questo sviluppo è $\frac{(-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}} F_{p'-q',n-q}$, cosicchè il ricercato è

$$\frac{D^{(q)} E^{(q')} (-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}} F_{p'-q',n-q} = \frac{D^{(q)} (-1)^{n-q}}{b^{p'+n-q}} b^{q'} E^{(q')} . F_{p'-q',n-q} .$$

Perciò qualunque de' coefficienti delle potenze di $x - a$ nello sviluppo di $\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$ ordinato secondo quelle essendo la somma de' coefficienti parziali rispettivi delle potenze medesime che si ottengono dallo sviluppo de' prodotti indicati dal secondo membro dell' equazione (XI), si rende evidente, che l' espressione trovata pel coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{D^{(q)} E^{(q')}}{(x-a)^{p-q} (x-a')^{p'-q'}}$ servirà a trovare generalmente la somma di tali coefficienti parziali, quando sempre si supponga n non $< q$, e si attribuiscano successivamente a q, q' tutti i valori de' quali sono suscettibili entro i limiti già stabiliti. Quindi fatto successivamente nell' espressione medesima $q' = 0, = 1, = 2$, ecc. $= r''$, si avrà la somma de' coefficienti parziali richiesti, dipendentemente dalle variazioni della q', espressa per

$$(1) \ldots \frac{D^{(q)} (-1)^{n-q}}{b^{p'+n-q}} \left(EF_{p',n-q} + bE'F_{p'-1,n-q} + b^2E''F_{p'-2,n-q} + \text{ecc.} + b^{r''} E^{(r'')} F_{p'-r'',n-q} \right),$$

la quale poi dà la totalità dei coefficienti parziali di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$ eguale alla somma di tutti

i risultati che derivano dal porre in essa successivamente $q=0$, $q=1$, ecc. $q=r'$. Così il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ si troverà generalmente espresso da

$$(2)\ldots\ldots \frac{D^{n}(-1)}{b^{p'+n}}\left(EF_{p',n} + bE'F_{p'-1,n} + b^2E''F_{p'-2,n} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n}\right)$$

$$+\frac{D'^{n-1}(-1)}{b^{p'+n-1}}\left(EF_{p',n-1} + bE'F_{p'-1,n-1} + b^2E''F_{p'-2,n-1} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n-1}\right)$$

$$+\frac{D''^{n-2}(-1)}{b^{p'+n-2}}\left(EF_{p',n-2} + bE'F_{p'-1,n-2} + b^2E''F_{p'-2,n-2} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n-2}\right)$$

. . . . . .

$$+\frac{D^{(r')}(-1)^{n-r'}}{b^{p'+n-r'}}\left(EF_{p',n-r'} + bE'F_{p'-1,n-r'} + b^2E''F_{p'-2,n-r'} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n-r'}\right).$$

Prima di venire all' applicazione di questa formola per la risoluzione della proposta frazione conviene primieramente avvertire che posto $n=0$, trattandosi allora di determinare il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^{p}}$, la formola stessa diviene

$$\frac{D}{b^{p'}}\left(EF_{p',0} + bE'F_{p'-1,0} + b^2E''F_{p'-2,0} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',0}\right),$$

la quale, considerando $F_{p',0}$, $F_{p'-1,0}$, ecc. $F_{p'-r'',0}$ come esprimenti l'unità, secondo ciò che fu stabilito nell'articolo precedente, si riduce a

$$\frac{DE}{b^{p'}} + \frac{DE'}{b^{p'-1}} + \frac{DE''}{b^{p'-2}} + \text{ecc.} + \frac{DE^{(r'')}}{b^{p'-r''}},$$

come appunto deve essere, giacchè il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^p}$ in $\frac{D^{(q)}E^{(q')}}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$ non può aversi quando non sia $q=0$, e quindi solamente in $\frac{DE^{(q')}}{(x-a)^p(x-a')^{p'-q'}}$, da cui ricavasi espresso per $\frac{DE^{(q')}}{b^{p'-q'}}$, cosicchè la somma dei coefficienti parziali che derivano dal fare successivamente $q'=0$, $q'=1$, $q'=2$, ecc. $q'=r''$, cioè il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^p}$ è appunto $\frac{DE}{b^{p'}} + \frac{DE'}{b^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{DE^{(r'')}}{b^{p'-r''}}$. Qualunque poi sia n, incontrandosi nelle particolari applicazioni l'espressione funzionale $F_{p'-r''',0}$, in cui r''' può ricevere tutti i valori da o fino ad r'' inclusivamente pe' due estremi, essa deve considerarsi come esprimente l'unità. Questa regola è conforme al significato che fu attribuito di sopra ad $F_{p'-q',n-q}$ nell'espressione $\frac{(-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}} F_{p'-q',n-q}$ che rappresenta il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, da cui fu dedotta la legge de' coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$ dopo quello di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}}$ che è $\frac{1}{b^{p'-q'}}$. Ma quando si suppone $n=0$, trattasi allora di determinare il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^p}$ in $\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, locchè non può farsi senza sup-

porre $q=0$, perciò in tal caso si avranno due espressioni diverse di tale coefficiente, cioè si avrà:

$$\frac{1}{b^{p'-q'}}=\frac{(-1)^{0}}{b^{p'-q'}}\cdot F_{p'-q',0}\text{, onde } F_{p'-q',0}=1.$$

Lo stesso si dimostra facilmente qualunque volta sia $n=q$. Resta ora solamente da osservarsi che l' espressione (2) si adatta anche alla ricerca del coefficiente generale e totale di $\frac{1}{(x-a')^{p'-n}}$, essendo n un numero qualunque non $>p'-1$, nello sviluppo di $\frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}}$, giacchè basta sostituire in essa p in luogo di p', r'' in luogo di r' e viceversa, e $-b$ in luogo di $b=a-a'$, e supponendo pure a vicenda r'' non $>p'$ ed $r'<p$, reciprocando inoltre fra loro le D, D', ecc. $D^{(r')}$ e le E, E', ecc. $E^{(r'')}$, intorno alle quali, per l' articolo 3.° e per le fatte supposizioni, si sa essere:

$$D=a^{r'},\ D'=r'a^{r'-1},\ D''=\frac{r'(r'-1)}{2}a^{r'-2},\text{ ecc. } D^{(r')}=1$$

$$E=a'^{r''},\ E'=r''a'^{r''-1},\ E''=\frac{r''(r''-1)}{2}a'^{r''-2},\text{ ecc. } E^{(r'')}=1.$$

Sia ora proposta la frazione

$$\frac{x^3}{(x-2)^3(x-1)}=\frac{x^3}{(x-2)^3}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{A'}{(x-2)^2}+\frac{A''}{x-2}+\frac{B}{x-1},$$

essendo A, A', A'' e B i rispettivi coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-2}$ e di $\frac{1}{x-1}$ che debbono determinarsi mediante la formola (2). Posto perciò $p=3$, $p'=1$, $r'=3$, $r''=0$, $a=2$, $a'=1$, e quindi $b=a-a'=1$; e fatto successivamente $n=0$, $n=1$,

$n=2$ in $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}=\frac{1}{(x-2)^{3-n}}$, si ottiene dalla (2)

$$A=DE=2^3.1^0=2^3$$

$$A'=-DEF_{1,1}+D'E=-2^3+3.2^2=2^2$$

$$A''=DEF_{1,2}-D'EF_{1,1}+D''E=2^3-3.2^2+6=2.$$

Resta ora a trovarsi soltanto il valore del coefficiente B, il quale può ottenersi col mezzo della formola (2) cambiando le supposizioni, cioè ponendo $p=1$, $p'=3$, $r'=1$, $r''=2$, $a=1$, $a'=2$ ed $a-a'=b=-1$. Per tal modo, fatto $n=0$, riesce:

$$B=-DE+DE'-DE''=-2^2+2^2-1=-1.$$

Conseguentemente, fatte le sostituzioni, si ha:

$$\frac{x^3}{(x-2)^3(x-1)}=\frac{2^3}{(x-2)^3}+\frac{2^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1},$$

come può verificarsi.

Sia ancora, per altro esempio, la frazione

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{x^3}{(x-1)^3}\cdot\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}.$$

Si ponga primieramente $a=1$, $a'=-1$, $p=3$, $p'=2$, $r'=3$, $r''=1$ e $b=a-a'=2$, e fatto successivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$ nella formola (2), si ha:

$$A=\frac{DE}{2^2}+\frac{DE'}{2}=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$A'=-\frac{DE}{2^3}-\frac{DE'}{2^2}+\frac{D'E}{2^2}+\frac{D'E'}{2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{4},$$

$$A''=\frac{3DE}{2^4}+\frac{DE'}{2^3}-\frac{D'E}{2^2}-\frac{D'E'}{2^2}+\frac{D''E}{2^2}+\frac{D''E'}{2}=\frac{11}{16}.$$

Trovati questi coefficienti, si potrebbe compiere la risoluzione della proposta frazione determinando per mezzo della formola (2) anche quelli delle potenze di $\frac{1}{x+1}$ in modo analogo al praticato nell' esempio precedente; ma in molti casi, come appunto nel presente, si possono questi ottenere più semplicemente per altra via. Di fatti, sostituiti i valori di A, A', A'', dall' equazione

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}$$

moltiplicata per $(x+1)^2$ e fatto $x=-1$, si ha $B=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$; e quindi sostituendo questo valore nell'equazione stessa si ha

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1},$$

onde, fatto $x=0$, viene:

$$B'=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{11}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16};$$

perlocchè si conchiude

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

A questo stesso risultamento avrebbesi potuto pervenire non impiegando la formola (2) che per la determinazione dei soli due coefficienti A', A'', giacchè anche la A poteva determinarsi in modo analogo all' adoperato per determinare la B.

8. La risoluzione della frazione $\frac{x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$, per cui sempre vuolsi intendere la determinazione di una nuova espres-

sione ordinata secondo le p potenze di $\frac{1}{x-a}$, e successivamente secondo le p' potenze di $\frac{1}{x-a'}$, conduce facilmente ad una analoga decomposizione dell'espressione (10) dell'art. 1.°, cioè di $\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}}$, fatto per semplicità $\overset{(r)}{C}=1$ e supposto $r<p+p'+p''$. Si vede pertanto che può farsi $r=r'+r''+r'''$ ed inoltre stabilirsi r' non $>p$, $r''<p'$, r''' non $>p''$. Ciò posto, si ha:

$$\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}} = \frac{x^{r'+r''}}{(x-a)^p (x-a')^{p'}} \cdot \frac{x^{r'''}}{(x-a'')^{p''}}$$

$$=\left(\frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A'}{(x-a)^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a} \right.$$

$$\left. + \frac{B}{(x-a')^{p'}} + \frac{B'}{(x-a')^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x-a'} \right) \cdot \frac{x^{r'''}}{(x-a'')^{p''}},$$

indicando genericamente per A, A', ecc. e per B, B', ecc. i rispettivi coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-a'}$ in qualunque sviluppo, dopo di avere osservato che in questo caso essi possono considerarsi determinati mediante la formola (2) dell'art.° precedente, essendo $\frac{x^{r'+r''}}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$ l'identica frazione, il cui sviluppo fu considerato nell'articolo stesso. È quindi chiaro che quello della frazione ora proposta dipenderà primieramente dalla determinazione generale del coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$, indicando per n un numero qualunque intero non $>p-1$, nei parziali prodotti

$$\frac{Ax^{r'''}}{(x-a)^{p}(x-a'')^{p''}},\quad \frac{A'x^{r'''}}{(x-a)^{p-1}(x-a'')^{p''}},\ \text{ecc.}\quad \frac{A^{(p-1)}x^{r'''}}{(x-a)(x-a'')^{p''}}.$$

Ora questi, come è visibile, non sono che altrettante frazioni della forma di quella considerata nell'art.° precedente, verificandosi anche $r''' < p - q + p''$, espresso per $p-q$ uno qualunque degli esponenti p, $p-1$, ecc. $p-(p-1)=1$; poichè essendo per ipotesi r''' non $> p''$, sarà $r''' < p''+1$, e molto più $r''' < p''+2$, $p''+3$, ecc.; dunque il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ sarà la somma dei coefficienti della stessa potenza nello sviluppo di ciascuno di detti prodotti parziali ricavato dalla ripetuta applicazione della stessa formola (2). Torna quì opportuno l'osservare che se nella frazione proposta si supponga $r=0$, si ha:

$$\frac{1}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}} = \left(\frac{A}{(x-a)^{p}} + \frac{A'}{(x-a)^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a}\right.$$

$$\left. + \frac{B}{(x-a')^{p'}} + \frac{B'}{(x-a')^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x-a'}\right) \cdot \frac{1}{(x-a'')^{p''}};$$

ma allora i coefficienti A, A', ecc. B, B', ecc. appartengono allo sviluppo di $\frac{1}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}}$ e sono perciò dati dall'equazione (VII) dell'art. 6.°; e lo stesso dicasi de' coefficienti corrispondenti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$ nello sviluppo de' prodotti parziali

$$\frac{A}{(x-a)^{p}(x-a'')^{p''}},\quad \frac{A'}{(x-a)^{p-1}(x-a'')^{p''}},\ \text{ecc.}\quad \frac{A^{(p-1)}}{(x-a)(x-a'')^{p''}},$$

de' quali la somma dà gli analoghi coefficienti totali nello sviluppo della frazione $\frac{1}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}}$.

Passando agli esempj, sia proposta la frazione

$$\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2} \cdot \frac{x}{x-2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} \cdot \frac{x}{x-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x}{x-2} + \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x}{x-2}$$

$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x}{x-2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{x-2},$$

sostituito quì lo sviluppo della frazione $\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}$ ottenuto nell' articolo precedente. Si ponga primieramente

$$\frac{x}{(x-1)^3 (x-2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A'}{(x-1)^2} + \frac{A''}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

trattandosi di determinare A, A', A'', B col mezzo della formola (2) dell'art.° precedente. Posto in essa $p'=1$, $r'=1$, $r''=0$, essendo in questo caso l'esponente di x nel numeratore della frazione proposta $r=1$ ed inoltre $a=1$, $a'=2$ ed $a-a'=-1=b$, $D=a^{r'}=1$, $D'=r'a^{r'-1}=1$, $D''=\frac{r'(r'-1)}{2}a^{r'-2}=0$ ed $E=a'^{r''}=1$, $E'=r''a'^{r''-1}=0$, $p=3$, e fatto successivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$, si avranno i valori

$$A = \frac{1}{(-1)^1} \cdot 1 \cdot F_{1,0} = -1$$

$$A' = \frac{-1}{1} \cdot 1 \cdot F_{1,1} + \frac{1}{-1} \cdot 1 \cdot F_{1,0} = -2$$

$$A'' = \frac{1}{-1} \cdot F_{1,2} + \frac{-1}{1} \cdot 1 \cdot F_{1,1} = -2.$$

Resterebbe a determinarsi la B, locchè si otterrebbe cambiando opportunamente i valori nella formola (2) succitata, ma è più semplice il ricavarla immediatamente dall'equazione stessa

$$\frac{x}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A'}{(x-1)^2} + \frac{A''}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

la quale moltiplicata per $x-2$, poi fatto $x=2$, dà $B=2$, e diviene anche perciò

$$\frac{x}{(x-1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Decomposta così una delle parti della proposta espressione $\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$, potrebbero determinarsi anche le altre col sussidio della detta formola (2), ma essendo esse tutte decomponibili con facile artificio, sembra questo preferibile nel caso al metodo generale. Si ha di fatto secondo la regola data nell'art.° 2.°

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}, \quad \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Posto poi

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A'}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

e moltiplicando successivamente questa equazione per $(x-1)^2$, $x-2$, e fatto pure successivamente $x=1$, $x=2$, $x=0$, si ha

$$A=-1, \quad B=2, \quad A'=A-\frac{B}{2}=-2,$$

e quindi

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Similmente si ha per analoghe operazioni dalla posizione

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{A'}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{9}, \quad A' = \frac{B}{2} - A = -\frac{2}{9},$$

e perciò

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Riassumendo pertanto tutti gli sviluppi parziali e sostituendoli nella proposta equazione, si ha:

$$\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)$$

$$+ \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right) + \frac{11}{16}\left(-\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x-2}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-2}\right) =$$

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{43}{16} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3.8} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{19}{9.16} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{128}{4.9} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Per provare l' esattezza di questa formola non sembra inopportuno di cimentarla con un esempio. Si ponga pertanto $x = 3$, e si avrà

$$\frac{3^5}{2^3.4^2.1} = -\frac{1}{4.2^3} - \frac{5}{4.2^2} - \frac{43}{4.2^3} - \frac{1}{3.8.2^4} + \frac{19}{9.16.2^2} + \frac{128}{4.9},$$

ovvero

$$3^5 = -4 - 40 - 172 - \frac{1}{3} + \frac{38}{9} + \frac{32}{9} \cdot 2^3.4^2 = 243,$$

come deve essere riuscendo appunto l' equazione identica.

Sia ora l'altra frazione

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)},$$

che è pure della forma della proposta al principio di questo articolo, quando si suppone $r=0$. Essendo per l'equazione (VII) dell'art. 6.°

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{(-1)}{2^3}\,F_{2,1}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$+\frac{(-1)^2}{2^4}\,F_{2,2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(-2)^3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{(-1)}{(-2)^4}\,F_{3,1}\cdot\frac{1}{x+1},$$

posto cioè in essa $p=3$, $p'=2$, $a=1$, $a'=-1$, $b=a-a'=2$, si ha pure:

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Quindi la risoluzione dell' equazione proposta si riduce alla determinazione dei coefficienti di $\frac{1}{(x-1)^3}$, $\frac{1}{(x-1)^2}$, $\frac{1}{x-1}$ nello sviluppo dei parziali prodotti

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3(x-2)},\quad -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2(x-2)},\quad \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{(x-1)(x-2)},$$

come anche dei coefficienti di $\frac{1}{(x+1)^2}$, $\frac{1}{x+1}$ nello sviluppo dei prodotti

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2(x-2)},\quad -\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

Ora il valore di tali coefficienti si ottiene facilmente sviluppando i prodotti stessi con nuove applicazioni dell' equazione (VII) dell' art. 6.° Di fatti posto in essa $a=1$, $a'=2$, $p'=1$ e $b=a-a'=-1$, e fatto successivamente $p=3$, $p=2$, $p=1$, si ha

$$\frac{1}{(x-1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Se ora si pone nella detta equazione (VII) dell'art. 6.° $a=-1$, $a'=2$, onde $b=a-a'=-3$, $p'=1$, e successivamente $p=2$, $p=1$, si ha pure

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-2},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Sostituendo pertanto nella proposta equazione lo sviluppo de' prodotti parziali sopraccennati, si ha

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) + \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-2}\right) - \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3.8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{16.9}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Anche quì ponendo a cagion d' esempio $x=3$, e sostituito questo valore e levate le frazioni, si ha per l' appunto un' equazione identica.

Sia ancora la frazione

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})},$$

e fatto per maggiore semplicità $\sqrt{-1} = a$, si ha pure $\frac{1}{x^3(x+a)(x-a)}$ per esprimere la proposta frazione, che a cagione di $\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x+a}$, si riduce ad $\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x^3(x-a)} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x^3(x+a)}$. Si tratterà dunque di applicare ad $\frac{1}{x^3(x-a)}$, $\frac{1}{x^3(x+a)}$ la formola generale (VIII) dell'articolo 6.°, fatto in essa $q=3$, $p=1$ e posto $-a$ in luogo di a per l'applicazione riguardante $\frac{1}{x^3(x+a)}$. Così si ha, avvertendo che $a^2=-1$, $a^4=1$;

$$\frac{1}{x^3(x-a)} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{x-a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x^3(x+a)} = \frac{1}{(-a)^3} \cdot \frac{1}{x+a} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x^3(x-a)} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x^3(x+a)} = \frac{1}{x^3(x^2+1)} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-\sqrt{-1}}.$$

9. Per generalizzare il modo di decomposizione della frazione $\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}}$ giova considerare la più generale

$$\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'} \ldots (x-a^{(n-2)})^{(n-2)p}}$$

per cui può asserirsi che essendo per supposizione $r < p + p' +$ ecc. $+ p^{(n-2)}$ ed essa decomponibile in tanti termini frazionarj che col numeratore costante abbiano una delle potenze di $x-a$ fino alla p^{esima} inclusivamente o una di quelle di $x-a'$ fino alla p'^{esima}, ecc. per denominatore, se si moltiplichi per

$$\frac{x^{r'}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

supposto che sia r' non $> p^{(n-1)}$, la nuova frazione che nascerà sarà riducibile alla stessa forma, cioè sarà essa pure decomponibile in analoghi termini frazionarj. Di fatti essendo

$$\frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}} \cdot \frac{x^{r'}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

$$= \frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}} \cdot \left(\frac{a^{(n-1)^{r'}}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}} + \right.$$

$$\left. r' \frac{a^{(n-1)^{r'-1}}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-1}} + \frac{r'(r'-1)}{2} \frac{a^{(n-1)^{r'-2}}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-2}} + \text{ecc.} + \frac{1}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-r'}} \right)$$

secondo l' articolo 3.°, è chiaro che i prodotti parziali ne' quali si decomporrà il secondo membro di questa equazione, anche per le fatte supposizioni, saranno tutti della forma

$$\frac{M}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}},$$

qualunque sia M, purchè costante, e qualunque sieno le a, a', p, p'. Dunque ciascuno degli stessi prodotti potrà secondo la formola (VII) dell' art.° 6.° risolversi in altrettante frazioni col numeratore costante, quante sieno le unità in $p+p'$, le quali abbiano per rispettivi loro denominatori le potenze di $x-a$, $x-a'$, ecc. Per tal modo, e supposto sempre r' non $>p^{(n-1)}$, si vede subito che

$$\frac{x^{r+r'}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

sarà decomponibile in modo analogo ad

$$\frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}}.$$

Quando poi fosse $r'=p^{(n-1)}$, riducendosi allora $\frac{1}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-r'}}$ ad 1, i prodotti parziali ove può entrare questo termine non avranno d' uopo di ulteriore sviluppo, perchè saranno già della forma $\frac{1}{(x-a)^{p}}$ moltiplicata per una costante. Osservando poi che l' ipotesi assunta a fondamento di questa dimostrazione si verifica quando viene proposta la frazione $\frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}}$, essendo $r<p+p'$, essa si verificherà in ogni altro caso di un numero maggiore di fattori nel denominatore sempre che l'es-

ponente di x nel numeratore sia minore della somma degli esponenti de' fattori del denominatore.

Intanto un altro esempio potrà rendere più chiara ove occorresse la precedente dimostrazione. Sia la frazione $\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$, il cui sviluppo colla separazione de' fattori fu già trovato nell' art.° precedente; se essa si moltiplichi per $\frac{x^2}{(x+2)^2}$, e le si sostituisca la sua espressione pure determinata nell' art.° stesso, si avrà

$$\frac{x^5 . x^2}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2} = \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{43}{16}\cdot\frac{1}{x-1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3.8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{19}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{128}{4.9}\cdot\frac{1}{x-2}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}+1\right),$$

ove si vede che il secondo membro di questa equazione non è che la somma di parziali prodotti della forma $\frac{M}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$, eccettuando i termini ne' quali entra il fattore 1, che possono considerarsi della forma $\frac{M}{(x-a)^p}$. Ora se da questi prodotti parziali si prendano i coefficienti di

$$\frac{1}{(x-1)^3},\quad \frac{1}{(x-1)^2},\quad \frac{1}{x-1},\quad \frac{1}{(x+1)^2},\quad \frac{1}{x+1},\quad \frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{x+2},$$

le somme di essi relativamente a ciascuna di dette potenze saranno i coefficienti dello sviluppo di

$$\frac{x^5 . x^2}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2}$$

a cui compete, come è evidente anche per le cose dette, la forma

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{D'}{x+2}.$$

Ora, come si è veduto in analoghi casi e come meglio eziandio si vedrà in seguito, facilmente si determinano A, B, C, D, ed anche una delle quattro A', A'', D', B', quando sieno determinate le altre. Perciò meglio conviene di ricercare primieramente i valori di A', A'', B', cioè di prendere i coefficienti di $\frac{1}{(x-1)^2}$ in

$$(1) \ldots \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}\right)-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2},$$

i coefficienti di $\frac{1}{x-1}$ in

$$(2) \ldots\ldots \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{43}{16}\cdot\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}\right)-\frac{43}{16}\cdot\frac{1}{x-1},$$

e finalmente i coefficienti di $\frac{1}{x+1}$ in

$$(3) \ldots \left(-\frac{1}{3.8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{19}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}\right)+\frac{19}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Ora i coefficienti parziali ricercati sono rispetto alla (1) quelli che si ricavano dallo sviluppo dei prodotti

$$\frac{1}{(x-1)^3}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)^3(x+2)},\quad \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Rammentando poi quì secondo l'articolo 7.° che in generale il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$ è $\frac{(-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}}F_{p'-q',n-q}$, se si ponga $a=1$, $a'=-2$, onde $b=a-a'=3$, ed inoltre $n=1$, $p=3$, $p'=2$, e successivamente $q=q'=0$; $q=0$, $q'=1$; $q=1$, $q'=0$; $q=q'=1$; i coefficienti richiesti saranno secondo l' ordine de' prodotti da' quali nascono

$$-\frac{1}{3^3}F_{2,1}=-\frac{2}{3^3},\ -\frac{1}{3^2}F_{1,1}=-\frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3^2}F_{1,0}=\frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3}F_{1,0}=\frac{1}{3}.$$

Sostituendo dunque nell' espressione (1) ai mentovati prodotti i rispettivi coefficienti da essi derivati, si otterrà

$$A'=\frac{2}{3^3}-\frac{1}{3^2}-\frac{5}{3^2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}=-\frac{19}{3^3.4}.$$

Per la determinazione degli analoghi coefficienti della espressione (2) osservando che i prodotti sono

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)^3(x+2)},\quad \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)},\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)},$$

si farà $p=3$, $p'=2$, $a=1$, $a'=-2$, onde $b=3$, $n=2$, e successivamente $q=q'=0$; $q=0$, $q'=1$; $q=1$, $q'=0$; $q=q'=1$; $q=2$, $q'=0$; $q=2$, $q'=1$; ed i coefficienti ora richiesti secondo la regola data di sopra e per ordine sono:

$$\frac{1}{3^3},\quad \frac{1}{3^3},\quad -\frac{2}{3^3},\quad -\frac{1}{3^2},\quad \frac{1}{3^2},\quad \frac{1}{3},$$

valori, i quali opportunamente sostituiti nell' espressione (2) danno

$$A''=-\frac{209}{4^2.3^3}.$$

Finalmente ad ottenere il valore di B' si dovranno prendere i coefficienti parziali di $\frac{1}{x+1}$ nei prodotti

$$\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x+1)^2(x+2)},\quad \frac{1}{(x+1)(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x+1)(x+2)},$$

che si contengono nell'espressione (3), e perciò, posto $p=2$, $p'=2$, $a=-1$, $a'=-2$, onde $b=a-a'=1$, $n=1$, e successivamente $q=q'=0$; $q=0$, $q'=1$; $q=1$, $q'=0$; $q=q'=1$; conformemente alla regola data di sopra tali coefficienti saranno per ordine

$$-2, \quad -1, \quad 1, \quad 1.$$

Così l'espressione (3), sostituiti ai prodotti parziali suaccennati i rispettivi coefficienti di $\frac{1}{x+1}$ nel loro sviluppo, dà finalmente

$$B'=\frac{43}{9.16}.$$

Ora è d'uopo sostituire i valori per A', A'', B' nell'equazione di sopra

$$\frac{x^5.x^2}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2}=$$

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{D'}{x+2},$$

e di sostituirvi pure quelli di A, B, C, D che si ritrovano facilmente e senza dipendenza dell'un valore dall'altro. Di fatti coll'artificio altra volta praticato di moltiplicare tutta l'equazione per $(x-1)^3$, poi di porre $x-1=0$ ovvero $x=1$, si ha

$$A=-\frac{1}{2^2.3^2};$$

e similmente

$$B=-\frac{1}{3.2^3}, \qquad C=\frac{2^3}{3^2}, \qquad D=-\frac{2^5}{3^3}.$$

Fatte perciò tutte le sostituzioni si ha

$$\frac{x^7}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2}=-\frac{1}{2^2.3^2}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{19}{3^3.2^2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{209}{4^2.3^3}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$-\frac{1}{3.2^3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{43}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2^3}{3^2}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{2^5}{3^3}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{D'}{x+2}.$$

Fatto ora $x=0$ si determina anche D′ coll' equazione

$$0=\frac{1}{2^2.3^2}-\frac{19}{3^3.2^2}+\frac{209}{2^4.3^3}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{43}{3^2.2^4}-\frac{2^5}{3^5}-\frac{2^3}{3^3}+\frac{D'}{2},$$

e si trova

$$D'=\frac{8}{3^3};$$

cosicchè, determinati tutti i coefficienti che si ricercavano, l' equazione proposta è pienamente risoluta.

10. Si raccoglie dall' art.° precedente essere sempre possibile coll' uso del metodo in esso spiegato la risoluzione della frazione

$$\frac{C^{(r)}\,x^{r}}{(x-a)^{p}\,(x-a')^{p'}\,\ldots\,(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

e per conseguenza anche della frazione

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}\,x^{p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{(x-a)^{p}\,(x-a')^{p'}\,\ldots\,(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

giacchè questa, come è evidente, è la somma di altrettante frazioni della forma

$$\frac{C^{(r)}\,x^{r}}{(x-a)^{p}\,(x-a')^{p'}\,\ldots\,(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

quanti sono i termini del suo numeratore, e quindi potendo anche rappresentare la generalissima proposta nell' art.° 1.°, solo che in essa si faccia una o più delle a, a', a'' ecc. eguale allo zero, la risoluzione dell'una involverà quella dell'altra.

Essendo però d' uopo il riconoscere che il metodo fin quì spiegato per risolverle può riuscire in molti casi complicato e prolisso, giova quì soggiungerne altro egualmente generale e sicuro. Se pertanto si ponga nella frazione

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}x^{p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{(x-a)^p(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

$x-a=z$, onde $x=z+a$, $x-a'=z+a-a'=z+b$, $x-a''=z+a-a''=z+b'$, ecc. $x-a^{(n-1)}=z+a-a^{(n-1)}=z+b^{(n-2)}$, fatto pure $a-a'=b$, $a-a''=b'$, ecc. $a-a^{(n-1)}=b^{(n-2)}$, essa si trasformerà in un' altra della forma

$$\frac{P_z}{z^p(z+b)^{p'}(z+b')^{p''}\ldots(z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}}},$$

in cui il numeratore è un polinomio in z che non può eccedere il grado $p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1$ esimo. Ora la frazione proposta può rappresentarsi anche per

$$\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A}{(x-a)^{p-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{p-2}}+\ldots+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\text{ecc.}+S_x,$$

indicando per S_x la somma degli altri termini corrispondenti alle p' potenze di $\frac{1}{x-a'}$, alle p'' di $\frac{1}{x-a''}$, ecc. alle $p^{(n-1)}$ di $\frac{1}{x-a^{(n-1)}}$, che debbono essere rispettivamente di forma analoga ad

$$\frac{A}{(x-a)^p},\quad \frac{A'}{(x-a)^{p-1}},\quad \text{ecc.}\quad \frac{A^{(p-1)}}{x-a}.$$

Ponendo quindi anche z in luogo di $x-a$ in S_x ossia $z+a$ in luogo di x, può istituirsi l' equazione

$$\frac{P_z}{z^p (z+b)^{p'} \ldots (z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}}} = \frac{A}{z^p} + \frac{A'}{z^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{z} + S_{z+a}.$$

Moltiplicandola per $z^p (z+b)^{p'} \ldots (z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}}$, che per brevità può esprimersi per $z^p Q_z$, si toglieranno le frazioni, perchè rappresentando S_{z+a} la somma di frazioni con numeratori costanti e con denominatori che sono le potenze di $x-a'$, $x-a''$, ecc. ovvero di $z+b, z+b'$, ecc. niuna delle quali oltrepassa rispettivamente la p'^{esima}, la p''^{esima}, ecc., il prodotto

$$z^p (z+b)^{p'} \ldots (z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}} S_{z+a}$$

deve essere una funzione intera di x. Ciò posto, si ha

$$\text{(I)} \ldots\ldots P_z = Q_z (A + A'z + \text{ecc.} + A^{(p-1)} z^{p-1} + z^p S_{z+a}),$$

dalla quale, fatto $z = 0$, si ottiene

$$A = \frac{P_0}{Q_0}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione dopo la trasposizione del termine $Q_z A$, essa si renderà divisibile per z, poichè il valore di A è determinato in modo che la quantità costante che può essere nel primo membro dell'equazione (I) si eguagli colla quantità costante del secondo membro, e con esso si elida per la trasposizione. Ciò premesso, si vede che effettuando

l'attuale divisione per z nascerà l'altra equazione

$$\text{(II)} \ldots\ldots P'_z = Q_z (A' + A''z + \text{ecc.} + A^{(p-1)} z^{p-2} + z^{p-1} S_{z+a}),$$

in cui P'_z è un altro polinomio in z. Anche dalla (II), fatto $z = 0$, si ricaverà

$$A' = \frac{P'_0}{Q_0}.$$

Trasposto poi il termine $Q_z A'$ e sostituito nell'espressione di esso il valore ritrovato per A', l'equazione sarà pure divisibile per z, cosicchè, fatta la divisione, si avrà una nuova equazione di cui il primo membro sarà un altro polinomio in z che può indicarsi per P''_z. Si avrà quindi

$$P''_z = Q_z (A'' + A'''z + \text{ecc.} + A^{(p-1)} z^{p-3} + z^{p-2} S_{z+a}),$$

per la quale analogamente si determina A''. Proseguendo con questo metodo è facile a vedersi che si giungerà ad un'equazione

$$P^{(p-1)}_z = Q_z (A^{(p-1)} + zS_{z+a})$$

con cui si determinerà l'ultimo coefficiente $A^{(p-1)}$. Resteranno perciò a determinarsi i coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a'}$, $\frac{1}{x-a''}$, ecc. quali si richiedono ad un perfetto sviluppo della frazione proposta, locchè si otterrà con metodo simile, e reciprocando le posizioni come meglio si vedrà per gli esempj seguenti.

Sia la frazione $\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^3}$, che per avvertirlo quì

di passaggio e come facilmente si rileva dalle cose già dette, potrebbe risolversi in molte maniere. Volendo però applicare ad essa il metodo precedentemente spiegato, si avrà

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A'}{x-1}+S_x,$$

indicando per S_x la somma delle frazioni che nello sviluppo della proposta corrispondono ai denominatori $(x+1)^2$, $x+1$, x, ovvero posto $x-1=z$, onde $x=z+1$, $x+1=z+2$, nascerà la trasformata

$$\frac{(z+1)^3+(z+1)^2+2}{z^2(z+1)(z+2)^2}=\frac{A}{z^2}+\frac{A'}{z}+S_{z+1},$$

e quindi

$$z^3+4z^2+5z+4=(z+1)(z+2)^2(A+A'z+z^2S_{z+1}),$$

onde, fatto $z=0$, si ricava $A=1$. Sostituito questo valore nell' equazione, dopo di averla ridotta e divisa per z, si ha ancora:

$$-z-3=(z+1)(z+2)^2(A'+z\,S_{z+1}),$$

ove, fatto $z=0$, si raccoglie $A'=-\frac{3}{4}$. Collo stesso metodo potrebbero trovarsi i numeratori delle frazioni $\frac{B}{(x+1)^2}$, $\frac{B'}{x+1}$, che si suppongono far parte dello sviluppo totale della frazione proposta, bensì con una posizione diversa, facendo cioè $x+1=z$, onde $x=z-1$, $x-1=z-2$, e supponendo S_x rappresentare la somma delle frazioni che nello sviluppo della proposta corrispondono ai denominatori $(x-1)^2$, $x-1$, x. Nel presente caso però l' uso che si è fatto del metodo stesso per determinare i coefficienti A, A' basta per risolvere pienamente la proposta frazione, determinandosi molto facilmente gli altri. Di fatti istituendo l' equazione

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}+\frac{C}{x},$$

se essa si moltiplichi per x e poscia si faccia $x=0$, si ha $C=2$; e moltiplicandola per $(x+1)^2$ e fatto $x=-1$, si ha $B=-\frac{1}{2}$. Fatto poi $x=2$, l'equazione precedente diviene

$$\frac{7}{9}=\frac{5}{4}-\frac{1}{18}+\frac{B'}{3},$$

da cui si ricava

$$B'=-\frac{5}{4};$$

e perciò sarà finalmente

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x}.$$

Si può applicare utilmente il presente metodo alla frazione

$$\frac{x^7}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2}$$

anche per confermarne la risoluzione data nell'art.° precedente. Si supponga che essa sia pure rappresentata da

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+S_x,$$

indicando per S_x la somma delle frazioni corrispondenti ai denominatori $(x+1)^2$, $x+1$, $(x+2)^2$, $x+2$ ed $x-2$. Posto pertanto $x-1=z$, onde $x-2=z-1$, $x+1=z+2$, $x+2=z+3$, si ha, fatte le opportune sostituzioni,

$$(z+1)^7=(z+2)^2(z-1)(z+3)^2(A+A'z+A''z^2+z^3S_{z+1}),$$

cosicchè, fatto $z=0$, si ha $A=-\frac{1}{2^2 3^2}$, valore che sostituito

nella proposta coll' opportuna trasposizione la riduce a

$$\frac{36z^7+25az^6+757z^5+1269z^4+1287z^3+779z^2+228z}{2^2.3^2}$$

$$=(z+2)^2(z-1)(z+3)^2(A'z+A''z^2+z^3S_{z+1}),$$

equazione, che divisa per z e fatto $z=0$, dà

$$A'=-\frac{228}{2^2.3^2.2^2 3^2}=-\frac{19}{3^3.2^2}.$$

Se nell' equazione stessa già divisa per z si sostituisca il valore di A', e si eseguisca la solita trasposizione e riduzione, si ha

$$\frac{3(36z^6+25az^5+757z^4+1269z^3+1287z^2+779z+228)}{3^3.2^2}+\frac{19(z+2)^2(z-1)(z+3)^2}{3^3.2^2}$$

$$=(A''z+z^2S_{z+1})(z+2)^2(z-1)(z+3)^2,$$

la quale, divisa per z e fatto $z=0$, dà

$$A''=-\frac{2337-456}{3^3.2^2.3^2.2^2}=-\frac{209}{24.3^3}.$$

A determinare i coefficienti di $\frac{1}{(x+1)^2}$, $\frac{1}{x+1}$ nello sviluppo totale della proposta frazione, che trattasi di compiere nel modo il più semplice anche secondo il presente metodo, è d' uopo, cambiando posizione, istituire la nuova equazione

$$\frac{x^7}{(x+1)^2(x-1)^3(x-2)(x+2)^2}=\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}+S'_x,$$

indicando per S'_x la somma delle frazioni alle quali corrispondono rispettivamente i denominatori $(x-1)^3$, $(x-1)^2$, $x-1$, $x-2$, $(x+2)^2$, $x+2$. Ciò posto, se si pone $x+1=z$, onde $x=z-1$, $x-1=z-2$, $x-2=z-3$, $x+2=z+1$, sostituendo questi valori, si ha la trasformata

$$\frac{(z-1)^7}{z^2(z-2)^3(z-3)(z+1)^2} = \frac{B}{z^2} + \frac{B'}{z} + S'_{z-1},$$

ovvero

$$(z-1)^7 = (B+B'z+z^2S'_{z-1})(z-2)^3(z-3)(z+1)^2,$$

da cui, fatto $z=0$, si ha subito $B = -\frac{1}{3.2^3}$, e sostituito questo valore nell' equazione e trasponendo, si ha pure

$$(z-1)^7 + \frac{1}{3.2^3}(z-2)^3(z-3)(z+1)^2 = (B'z+z^2S'_{z-1})(z-2)^3(z-3)(z+1)^2,$$

la quale, divisa per z e fatto $z=0$, dà $B' = \frac{43}{3^2.2^4}$.

Per ricavare più facilmente questo valore nella pratica è opportuno riflettere, che trovato nel primo membro dell'ultima equazione in z il coefficiente di z, è inutile cercar gli altri delle potenze superiori a z, poichè appartenenti a termini che debbono annullarsi col porre $z=0$. Ora in $(z-1)^7 = (-1)^7 + 7(-1)^6 z +$ ecc. il coefficiente di z è 7; e nel prodotto $(z-2)^3(z-3)(z+1)^2$ questo si troverà prendendo primieramente il coefficiente di z, e di z^0 in $(z-2)^3(z-3)$. Ma questi coefficienti sono rispettivamente $-3.12z-8z = -44z$ e 24; e moltiplicando $-44z+24$ per z^2+2z+1, e prendendo i coefficienti parziali di z, il totale risulta $-44z+48z=4z$. Trovati pertanto pei coefficienti A, A', A'' e B, B', gli stessi valori che si ebbero nell' art.° precedente, si determineranno anche gli altri D, D', C corrispondentemente ai denominatori $(x+2)^2$, $x+2$, $x-2$, e così sarà pienamente risoluta la proposta frazione.

11. Nella materia fin quì trattata essendosi considerati come conosciuti i fattori semplici de' denominatori delle proposte frazioni, rimane a prendere in esame quelle che secondo la formola (11) dell'art.° 1.° hanno tra i fattori del loro denominatore un polinomio realmente irresolubile o che non vogliasi risolvere. Questa formola potrà rappresentarsi anche nella forma più semplice benchè essa pure generale

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}}{(x-a)^p(D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)},$$

essendo le C, C', ecc. e le D, D', ecc. quantità note, giacchè si può supporre $D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m$ o irresolubile affatto, o anche risolubile in fattori fra i quali alcuni sieno della forma $(x-a)^p$. In amendue i casi si potrà ottenere la decomposizione della frazione proposta in altre più semplici secondo ciò che ora è d'uopo di dichiarare. Si istituisca pertanto l'equazione

$$(1)\ldots\ldots\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}}{(x-a)^p(D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)}=$$

$$\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{B+B'x+\text{ecc.}+B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)(x-a)^{p-1}},$$

dalla quale primieramente ricavasi, moltiplicandola per $(x-a)^p$ e fatto $x=a$,

$$A=\frac{C+C'a+C''a^2+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}a^{p+m-1}}{D+D'a+D''a^2+\text{ecc.}+D^{(m)}a^m}.$$

Considerando ora la A come determinata si ottiene facilmente l'altra

$$C+C'x+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}-A(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)$$

$$=(B+B'x+\text{ecc.}+B^{(p+m-2)}x^{p+m-2})(x-a),$$

e ponendo ulteriormente

$$C-AD=E, \quad C'-AD'=E', \text{ ecc. } C^{(m)}-AD^{(m)}=E^{(m)},$$

si ha pure

$$(2)\ldots E+E'x+\text{ecc.}+E^{(m)}x^{m}+C^{(m+1)}x^{m+1}+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}$$

$$=(B+B'x+\text{ecc.}+B^{(p+m-2)}x^{p+m-2})(x-a),$$

equazione, la quale se dee sussistere, richiede che i coefficienti delle stesse potenze di x ne' due suoi membri si eguaglino fra loro. Perciò, ordinato pure secondo le potenze di x il secondo membro dell' equazione medesima, si avranno le altre

$$E=-Ba, \quad \text{onde} \quad B=-\frac{E}{a}$$

$$E'=B-B'a, \quad \text{onde} \quad B'=\frac{B-E'}{a}=-\frac{E+E'a}{a^2}$$

$$E''=B'-B''a, \quad \text{onde} \quad B''=\frac{B'-E''}{a}=-\frac{E+E'a+E''a^2}{a^3}$$

. . . . . .

$$E^{(m)}=B^{(m-1)}-B^{(m)}a, \text{ onde } B^{(m)}=\frac{B^{(m-1)}-E^{(m)}}{a}=-\frac{E+E'a+\text{ecc.}+E^{(m)}a^m}{a^{m+1}}.$$

Sono con ciò determinati i coefficienti B, B', ecc. $B^{(m)}$; ma, come è visibile, restano a determinarsi gli altri corrispondenti a potenze superiori di x, i quali seguono una legge diversa e dipendono tutti dall' equazione

$$C^{(m+r)}=B^{(m+r-1)}-aB^{(m+r)},$$

supposto che r rappresenti un numero qualunque non <1, e non $>p-2$, poichè questa equazione rappresenta appunto l'eguaglianza

richiesta dei coefficienti corrispondenti delle potenze di x superiori ad x^{m} fino ad x^{m+p-2} inclusivamente ne' due membri dell' equazione (2), come è facile di rilevare per l' ispezione della stessa. Riguardo però ai coefficienti corrispondenti di x^{m+p-1}, si ha

$$C^{(p+m-1)} = B^{(p+m-2)}.$$

Quindi per questa equazione e per l' altra stabilita di sopra, che vale per tutti gli altri coefficienti delle potenze superiori ad x^{m} e si verifica ponendo successivamente $r = p - 2$, $r = p - 3$, ecc. $r = 1$, si avranno le seguenti equazioni

$$(3) \ldots \begin{cases} C^{(p+m-1)} = B^{(p+m-2)} \\ C^{(p+m-2)} = B^{(p+m-3)} - aB^{(p+m-2)} \\ C^{(p+m-3)} = B^{(p+m-4)} - aB^{(p+m-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C^{(m+1)} = B^{(m)} - aB^{(m+1)}, \end{cases}$$

le quali servono a determinare tutti i coefficienti $B^{(p+m-2)}$, ecc. $B^{(m+1)}$ e danno ancora un' altra espressione di $B^{(m)}$. Di fatti, è primieramente visibile, che da esse si ricava facilmente

$$B^{(p+m-2)} = C^{(p+m-1)}$$

$$B^{(p+m-3)} = C^{(p+m-2)} + aC^{(p+m-1)}$$

$$B^{(p+m-4)} = C^{(p+m-3)} + aC^{(p+m-2)} + a^2C^{(p+m-1)}.$$

Questi tre valori bastano a rilevare per induzione la legge

che seguono i ricercati coefficienti dopo il primo $B^{(p+m-2)}$, la quale può eziandio provarsi rigorosamente. Di fatti, ponendo per brevità $p+m=n$, potrà supporsi che essendo anche n' un numero non <3 e non $>p-1$, si abbia

$$B^{(n-n')} = C^{(n-n'+1)} + aC^{(n-n'+2)} + a^2C^{(n-n'+3)} + \text{ecc.} + a^{n'-2}C^{(n-1)},$$

equazione la quale, quando si faccia in essa $n'=4$, dà il valore sopra trovato di $B^{(p+m-4)}$. Pertanto avendosi per le equazioni (3)

$$C^{(n-n')} = B^{(n-n'-1)} - aB^{(n-n')},$$

sarà anche, secondo l'assunta ipotesi,

$$B^{(n-n'-1)} = C^{(n-n')} + aB^{(n-n')} = C^{(n-n')} + aC^{(n-n'+1)} + a^2C^{(n-n'+2)} + \text{ecc.} + a^{n'-1}C^{(n-1)},$$

e quindi dipendentemente da essa la forma del coefficiente $B^{(n-n'-1)}$ è simile a quella del coefficiente $B^{(n-n')}$. Perciò verificandosi l'espressione supposta di $B^{(n-n')}$ nel caso di $n'=4$, si verificherà anche quella di $B^{(n-n'-1)}$ nella stessa ipotesi riguardo ad n', cioè $B^{(n-5)}$ sarà della stessa forma di di $B^{(n-4)}$. Se ora in $B^{(n-n')}$ si faccia $n'=5$, se ne inferirà legittimamente essere $B^{(n-6)}$ della stessa forma di $B^{(n-5)}$, e così successivamente finchè si ponga $n'=p-2$, onde pure si conchiude che essendo sempre $B^{(m+1)}$ della stessa forma, essa appartiene in ultimo anche a $B^{(m)}$, e sarà perciò, posto $n'=p-1$,

$$B^{(m)} = C^{(m+1)} + aC^{(m+2)} + a^2C^{(m+3)} + \text{ecc.} + a^{p-2}C^{(p+m-1)}.$$

Giova ora dimostrare l'identità di questa formola coll'altra

$$B^{(m)} = -\frac{E + E'a + E''a^2 + \text{ecc.} + E^{(m)}a^m}{a^{m+1}}.$$

Di fatti, sostituendo i valori attribuiti ad E, E', ecc. $E^{(m)}$, si ha

$$B^{(m)} = -\frac{C - AD + (C' - AD')a + \text{ecc.} + (C^{(m)} - AD^{(m)})a^m}{a^{m+1}}$$

$$= -\frac{C + C'a + \text{ecc.} + C^{(m)}a^m}{a^{m+1}} + \frac{(D + D'a + \text{ecc.} + D^{(m)}a^m)A}{a^{m+1}}$$

$$= -\frac{C + C'a + \text{ecc.} + C^{(m)}a^m}{a^{m+1}} + \frac{C + C'a + \text{ecc.} + C^{(m+p-1)}a^{p+m-1}}{a^{m+1}}$$

$$= C^{(m+1)} + aC^{(m+2)} + a^2C^{(m+3)} + \text{ecc.} + a^{p-2}C^{(m+p-1)},$$

dopo aver posto anche in luogo di A il suo valore trovato di sopra; locchè rende, come è manifesto, quest' ultima equazione identica.

Si conoscono pertanto tutte le quantità che erano da determinarsi nell' espressione

$$\frac{A}{(x-a)^p} + \frac{B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D + Dx' + \text{ecc.} + D^{(m)}x^m)(x-a)^{p-1}}$$

a cui si è cercato ridurre la proposta frazione. Considerando quindi ora le B, B', ecc. come date, la frazione

$$\frac{B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)}x^m)(x-a)^{p-1}}$$

potrà decomporsi anch'essa in altre due della forma di quelle, nelle quali fu risoluta la proposta, cosicchè potrà verificarsi l' equazione

$$\frac{B+B'x+B''x^2+\text{ecc.}+B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m})(x-a)^{p-1}}=$$

$$\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\frac{G+G'x+G''x^2+\text{ecc.}+G^{(p+m-3)}x^{p+m-3}}{(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m})(x-a)^{p-2}}.$$

Quindi anche la frazione

$$\frac{G+G'x+\text{ecc.}+G^{(p+m-3)}x^{p+m-3}}{(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m})(x-a)^{p-2}}$$

può essere decomposta in altre due rispettivamente della forma di quelle, nelle quali fu risoluta la proposta e che riusciranno egualmente determinate, essendo poi affette nel loro denominatore dai fattori $(x-a)^{p-2}$, $(x-a)^{p-3}$ rispettivamente. Procedendo con operazioni analoghe, è facile a vedersi come si giungerà al risultamento di due frazioni, l'una delle quali abbia il numeratore costante col denominatore $x-a$, e l'altra che abbia per numeratore un polinomio in x, in cui la massima potenza dell' incognita sia la $m-1^{esima}$, e $D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m}$ per denominatore. Perciò col metodo spiegato e colle formole generali già determinate, si perviene alla verificazione dell' equazione

$$\frac{C+C'x+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}}{(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m})(x-a)^{p}}=$$

$$\frac{A}{(x-a)^{p}}+\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\frac{M+M'x+\text{ecc.}+M^{(m-1)}x^{m-1}}{D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m}}.$$

Per meglio far conoscere la verità e lo spirito di questo metodo, giova cimentarlo con qualche esempio. Sia perciò l' equazione

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}.$$

Applicando le formole ritrovate, e trascurando le lettere che in questo caso esprimono quantità che sono lo zero, si avrà

$$p=2,\quad m=3,\quad a=-2,\quad C^{(p+m-1)}=1,\quad D=1,\quad D'=3,\quad D''=1;$$

e quindi

$$A=\frac{C'v.(-2)^4}{1-3.2-8}=-\frac{16}{13},\quad E=\frac{16}{13},\quad E'=\frac{48}{13},\quad E''=0,\quad E'''=\frac{16}{13}.$$

Perciò

$$B=\frac{8}{13},\quad B'=\frac{20}{13},\quad B''=-\frac{10}{13},\quad B'''=1.$$

Ora l' equazione proposta diviene per le sostituzioni

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2}=-\frac{16}{13}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}.$$

Si tratterà dunque di decomporre ancora la frazione

$$\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)},$$

come se dapprima fosse stata proposta l' equazione

$$\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B+B'x+B''x^2}{x^3+3x+1}$$

da risolversi col mezzo delle formole generali già ritrovate. Essendo pertanto le D, D', ecc. le stesse che nella risoluzione precedente, ed eziandio le a, m, si ha ora

$$p=1,\quad C=\frac{8}{13},\quad C'=\frac{20}{13},\quad C''=-\frac{10}{13},\quad C'''=1,$$

onde

$$A=\frac{\frac{8}{13}-\frac{40}{13}-\frac{40}{13}-\frac{8.13}{13}}{-13}=\frac{176}{13^2}.$$

Inoltre è pure

$$E=-\frac{72}{13^2},\quad E'=-\frac{268}{13^2},\quad E''=-\frac{10}{13}.$$

Perciò

$$B=-\frac{36}{13^2},\quad B'=-\frac{116}{13^2},\quad B''=-\frac{7}{13^2}.$$

Si raccoglie perciò facilmente

$$\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}=\frac{176}{13^2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{13^2}\cdot\frac{36+116x+7x^2}{x^3+3x+1},$$

ed

$$\frac{x^4}{x^3+3x+1)(x+2)^2}=-\frac{16}{13}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{176}{13^2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{13^2}\cdot\frac{36+116x+7x^2}{x^3+3x+1}.$$

Questa decomposizione della frazione

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2}$$

può però ottenersi più direttamente, e forse con maggior semplicità, usando di un metodo analogo allo spiegato nell'art.° precedente. Sia perciò

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{A'}{x+2}+\frac{B+B'x+B''x^2}{x^3+3x+1},$$

e posto

$$x+2=z \quad \text{e} \quad B+B'x+B''x^2=S_x$$

si ha l' altra

$$\frac{(z-2)^4}{(z^3-6z^2+15z-13)z^2}=\frac{A}{z^2}+\frac{A'}{z}+\frac{S_x}{z^3-6z^2+15z-13},$$

ovvero

$$(z-2)^4=(A+A'z)(z^3-6z^2+15z-13)+S_x z^2,$$

onde, fatto $z=0$, si ricava $A=-\frac{16}{13}$, e perciò si ha, riducendo e dividendo per z,

$$z^3-8z^2+24z-32=A(z^2-6z+15)+A'(z^3-6z^2+15z-13)+S_x z,$$

d' onde pure, fatto $z=0$, si ricava $A'=\frac{176}{13^2}$, e quindi, riducendo pure e dividendo per z,

$$z^2-8z+24=A(z-6)+A'(z^2-6z+15)+S_x,$$

ovvero, restituendo a z il suo valore $x+2$,

$$(x+2)^2-8(x+2)+24-A(x+2)+6A-A'(x+2)^2+6A'(x+2)-15A'=S_x$$

$$(1-A')x^2+(2A'-A-4)x+12-7A'+4A=B+B'x+B''x^2.$$

Perciò eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x ne'

due membri dell'equazione che deve sussistere qualunque sia x, si ha dipendentemente dai valori già trovati per A, A',

$$B = 12 - 7A' + 4A = -\frac{36}{13^2},$$

$$B' = 2A' - A - 4 = -\frac{116}{13^2},$$

$$B'' = 1 - A' = -\frac{7}{13^2}.$$

Essendo perciò identici i risultamenti che si sono ottenuti per la decomposizione della proposta frazione da due metodi diversi, l'uno serve di prova all'altro.

Intanto potrebbe sembrare che le formole generali sopra ritrovate per la verificazione dell'equazione (1) dell'art.° presente potessero pure servire alla verificazione dell'altra equazione

$$(4)\ldots \frac{C + C'x + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)} x^{p+m-1}}{x^p (D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)} x^m)} = \frac{A}{x^p} + \frac{B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)} x^{p+m-2}}{(D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)} x^m) x^{p-1}}$$

derivata dal porre $a = 0$ nella stessa (1). Volendosi però in questo caso determinare colle formole mentovate le B, B', ecc. fino a $B^{(m)}$, esse tutte avrebbero l'espressione dell'infinito, come è manifesto per l'ispezione della formola

$$B^{(m)} = -\frac{E + E'a + E''a^2 + \text{ecc.} + E^{(m)} a^m}{a^{m+1}},$$

che ha luogo anche pe' valori di $B^{(m-1)}$, $B^{(m-2)}$, ecc., B. Ciò posto, conviene determinare direttamente i coefficienti dell'equazione (4), la quale, tolte le frazioni, si riduce all'altra

$$C + C'x + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}\, x^{p+m-1} =$$

$$A(D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)}\, x^{m}) + (B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}\, x^{p+m-2})\, x,$$

equazione la quale, posto $x=0$, dà $A = \frac{C}{D}$; e quindi, riducendo e dividendo per x,

$$C' + C''x + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}\, x^{p+m-2} =$$

$$A(D' + D''x + \text{ecc.} + D^{(m)}\, x^{m-1}) + B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}\, x^{p+m-2},$$

ovvero, ritenute le significazioni di sopra date ad E', E'', ecc., cioè posto $C' - AD' = E'$, $C'' - AD'' = E''$, ecc. si avrà ancora

$$E' + E''x + \text{ecc.} + E^{(m)}\, x^{m-1} + C^{(m+1)}\, x^{m} + C^{(m+2)}\, x^{m+1} + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}\, x^{p+m-2}$$

$$= B + B'x + B''x^2 + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}\, x^{p+m-2},$$

equazione da cui si ricava

$$B = E', \quad B' = E'', \quad B'' = E''', \text{ ecc. } B^{(m-1)} = E^{(m)}$$

$$B^{(m)} = C^{(m+1)}, \quad B^{(m+1)} = C^{(m+2)}, \text{ ecc. } B^{(p+m-2)} = C^{(p+m-1)}.$$

Anche questo metodo può applicarsi ad un esempio, quale fra i molti che potrebbero aver luogo è quello che fu proposto dal Padre Vincenzo Riccati (*) per la decomposizione della frazione $\frac{a^6}{x(x-a)^5}$ in due altre che abbiano per rispettivi denominatori

(*) *V. Institutiones Analyticae. Bononiae;* 1767. T. II. pag. 125.

x, $(x-a)^p$. Volendo perciò riferirla all'equazione (4) converrà sviluppare la potenza $(x-a)^5$ per ricavarne un polinomio corrispondente a $D+D'x+$ ecc. $+D^{(m)}x^m$, ed avendosi qui $m=5$, $p=1$, si avrà perciò

$$(5)\ldots\frac{a^6}{x(-a^5+5a^4x-10a^3x^2+10a^2x^3-5ax^4+x^5)}=\frac{A}{x}+\frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B^{\text{v}}x^4}{(x-a)^5},$$

e $D=-a^5$, $D'=5a^4$, $D''=-10a^3$, $D'''=10a^2$, $D^{\text{v}}=-5a$, $D^{\text{v}}=1$; ed inoltre $C=a^6$ $C'=C''=$ ecc. $=C^{(m)}=0$; onde $A=\frac{a^6}{-a^5}=-a$, $B=-AD'=5a^5$, $B'=-AD''=-10a^4$, $B''=-AD'''=10a^3$, $B'''=-AD^{\text{v}}=-5a^2$, $B^{\text{v}}=-AD^{\text{v}}=a$, secondo le formole ritrovate. Sostituendo dunque questi valori, si ha finalmente

$$\frac{a^6}{(xx-a)^5}=-\frac{a}{x}+\frac{5a^5-10a^4x+10a^3x^2-5a^2x^3+ax^4}{(x-a)^5}.$$

Indipendentemente però dal metodo con cui si è ottenuta la verificazione dell'equazione (5), può essa rendersi identica con semplici artificj. Di fatti, se essa si moltiplichi per x e poi si ponga $x=0$, si avrà subito $A=-a$; e sostituendo questo valore di A e trasponendo il termine $\frac{A}{x}$ nella stessa (5), poi liberandola dalle frazioni, nasce l'altra

$$5a^5x-10a^4x^2+10a^3x^3-5a^2x^4+ax^5=Bx+B'x^2+B''x^3+B'''x^4+B^{\text{v}}x^5,$$

per cui vengono determinate le B, B', ecc. come prima, dovendo eguagliarsi i coefficienti delle stesse potenze di x ne' due membri dell' equazione.

12. Passando ora a considerare l' espressione (12) dell' art.° 1.°, cioè la

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(m-1)}x^{m-1}}{D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m},$$

suppongo che il denominatore di essa sia un polinomio superiore al quarto grado, ma che possa risolversi in altri due di grado comunque maggiore o minore del quarto, e si tratta perciò di decomporla in due altre nel modo che viene indicato dalla seguente equazione

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(m-1)}x^{m-1}}{D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m}} =$$

$$\frac{A+A'x+\text{ecc.}+A^{(r-1)}x^{r-1}}{E+E'x+\text{ecc.}+E^{(r)}x^{r}} + \frac{B+B'x+\text{ecc.}+B^{(m-r-1)}x^{m-r-1}}{G+G'x+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r}},$$

in cui le sole costanti A, A', ecc. $A^{(r-1)}$ e B, B', ecc. $B^{(m-r-1)}$ sono da determinarsi, essendo date tutte le altre. Se pertanto i due fattori del denominatore della proposta frazione siano superiori al quarto grado, e come tali generalmente irresolubili, oppure, non essendo superiori al quarto grado, non si ami di decomporli per non cadere nell' inciampo delle radici immaginarie, di cui si parlerà in seguito, l' equazione testè istituita non sembra potersi verificare o rendersi identica che con artificj, che per una parte si riducano al metodo ordinario de' coefficienti indeterminati, locchè non sarebbe quando uno de' polinomj, il cui prodotto costituisce il denominatore della proposta frazione, fosse esso pure risolubile o piacesse di risolverlo ne' suoi fattori più semplici, giacchè, come è evidente, la decomposizione dipenderebbe dalle regole già date. Ho detto doversi solamente in parte ricorrere al metodo ordinario de' coefficienti indeterminati per tale decomposizione, giacchè per mezzo di altro che mi fo ad esporre, le quantità da determinarsi nell' equazione proposta esigono solo parzialmente per essere conosciute l'uso del metodo comunemente fin quì adottato. A questo si supplisce almeno per la metà delle quantità da determinarsi col seguente

processo. È facile a vedersi che l'equazione proposta, in cui si suppone che il polinomio $D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m$ sia il prodotto degli altri due $E+E'x+E''x^2+\text{ecc.}+E^{(r)}x^r$ e $G+G'x+G''x^2+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r}$, si riduce all'altra

$$\frac{C+C'x+\text{ecc.}+C^{(m-1)}x^{m-1}-(A+A'x+\text{ecc.}+A^{(r-1)}x^{r-1})(G+G'x+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r})}{D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m}$$

$$=\frac{B+B'x+\text{ecc.}+B^{(m-r-1)}x^{m-r-1}}{G+G'x+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r}}.$$

Ora si scorge che essendo il denominatore del primo membro dell' equazione divisibile per $E+E'x+E''x^2+\text{ecc.}+E^{(r)}x^r$, se si renda tale anche il numeratore, l'equazione potrà subito ridursi a quella di due frazioni che abbiano eguali i loro denominatori. Ciò si ottiene, se si divida per $E+E'x+\text{ec.}+E^{(r)}x^r$ il polinomio

$$C-AG+(C'-AG'-A'G)x+(C''-AG''-A'G'-A''G)x^2+\text{ec.}+(C^{(m-1)}-A^{(r-1)}G^{(m-r)})x^{m-1},$$

perlocchè riesce il quoziente un polinomio del grado $m-r-1^{esimo}$, e si eguagli a zero il residuo che sarà funzione delle A, A', ecc. come il quoziente stesso, e sarà pure un polinomio del grado $m-r-2^{esimo}$. Si determineranno quindi le stesse A, A', ecc. eguagliando pure parzialmente a zero i coefficienti delle potenze di x nel detto residuo. Con ciò saranno determinati anche i coefficienti delle potenze di x nel quoziente, cosicchè, fatte le debite operazioni per ridurre il primo membro dell' equazione coll' accennata divisione, i coeffi-

cienti delle potenze di x che esso darà, si eguaglieranno ai corrispondenti nel secondo membro dell'equazione, locchè farà conoscere anche le B, B', ecc. e verificarsi l'equazione stessa.

Affinchè il metodo si renda più chiaro con qualche esempio, sia l'equazione

$$\frac{x^4+3x^3+5x+9}{(x^2+4x-6)(x^3-7x+2)}=\frac{A+A'x}{x^2+4x-6}+\frac{B+B'x+B''x^2}{x^3-7x+2},$$

ovvero l'altra

$$\frac{x^4+3x^3+5x+9-(A+A'x)(x^3-7x+2)}{(x^2+4x-6)(x^3-7x+2)}=\frac{B+B'x+B''x^2}{x^3-7x+2}.$$

Quindi secondo il metodo spiegato, fatto

$1-A'=P$, $A=P'$, $7A'+3=P''$, $5+7A-2A'=P'''$, $9-2A=P^{iv}$,

si tratterà di dividere

$$Px^4-P'x^3+P''x^2+P'''x+P^{iv} \quad \text{per} \quad x^2+4x-6,$$

d'onde si trarrà il quoziente

$$Px^2-(4P+P')x+22P+4P'+P'',$$

ed il residuo

$$(P'''-4P''-112P-22P')x+P^{iv}+6P''+132P+24P',$$

ovvero, sostituendo in questo i valori di P, P', ecc. P^{iv} ed eguagliando a zero nello stesso i coefficienti di x e di x^0, si hanno le due equazioni

$$82A'-15A-119=0, \qquad -90A'+22A+159=0,$$

dalle quali facilmente si ricava

$$A=-\frac{1164}{227}, \qquad A'=\frac{233}{454}.$$

Avendosi perciò

$$P=1-A'=\frac{221}{454}, \quad P'=A=-\frac{1164}{227}, \quad P''=7A'+3=\frac{2993}{454},$$

sarà

$$Px^2-(4P+P')x+22P+4P'+P''=$$

$$\frac{221}{454}x^2+\frac{1444}{454}x-\frac{1457}{454}=B+B'x+B''x^2,$$

e quindi

$$B=-\frac{1457}{454},\quad B'=\frac{1444}{454},\quad B''=\frac{221}{454}.$$

Pertanto i valori trovati per A, A' e B, B', B'' debbono verificare la proposta equazione, la quale, sostituiti tali valori e fatto in essa $x=1$, diviene per l'appunto identica. La frazione proposta rimane quindi risoluta nel modo che si voleva col metodo precedentemente spiegato, il quale è lo stesso che può adoperarsi quando i fattori di un'altra frazione che pur venga proposta sieno due polinomj di grado superiore al quarto.

Abbiasi perciò la frazione

$$\frac{1}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)},$$

e pongasi l'equazione

$$\frac{1}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)}=\frac{A+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{iv}x^4}{x^5+3x+1}+\frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B^{iv}x^4}{x^5+4x+3},$$

e quindi

$$\frac{1-(A+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{iv}x^4)(x^5+4x+3)}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)}=\frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B^{iv}x^4}{x^5+4x+3}.$$

Perciò se si istituisca la divisione di

$$1-(A+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{iv}x^4)(x^5+4x+3)$$

per x^5+3x+1, si ha il quoziente

$$-A^{iv}x^4-A'''x^3-A''x^2-A'x-(A+A^{iv})$$

ed il residuo

$$-(2A'^{v}+A'''')x^4-(2A'''+A'')x^3-(2A''+A')x^2-(A+2A'-3A'^{v})x+1-2A+A'^{v};$$

onde le equazioni

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad -2A'^{v}-A''''=0,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad -2A'''-A''=0,$$

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad -2A''-A'=0,$$

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad -A-2A'+3A'^{v}=0$$

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad 1-2A+A'^{v}=0.$$

Ricavando pertanto dalla (5) il valore di $A=\frac{1+A'^{v}}{2}$ e sostituendolo nella (4), si ha pure da essa $A'=-\frac{1-5A'^{v}}{4}$, valore che posto nella (3) dà $A''=\frac{1-5A'^{v}}{8}$. Così per la sostituzione di questa espressione di A'' nella (2) si ha $A'''=-\frac{1-5A'^{v}}{16}$, e finalmente ponendo $-\frac{1-5A'^{v}}{16}$ in luogo di A''' nella (1) si determina $A'^{v}=\frac{1}{37}$: perciò

$$A=\frac{19}{37}, \quad A'=-\frac{8}{37}, \quad A''=\frac{4}{37}, \quad A'''=-\frac{2}{37}.$$

Si avrà dunque per le cose già dette

$$-\frac{1}{37}x^4+\frac{2}{37}x^3-\frac{4}{37}x^2+\frac{8}{37}x-\frac{20}{37}=B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B'^{v}x^4;$$

onde

$$B=-\frac{20}{37}, \quad B'=\frac{8}{37}, \quad B''=-\frac{4}{37}, \quad B'''=\frac{2}{37}, \quad B'^{v}=-\frac{1}{37};$$

e finalmente l'equazione da principio istituita diviene, fatte

le necessarie sostituzioni,

$$\frac{1}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)} =$$

$$\frac{\frac{19}{37}-\frac{8}{37}x+\frac{4}{37}x^2-\frac{2}{37}x^3+\frac{1}{37}x^4}{x^5+3x+1}-\frac{\frac{20}{37}-\frac{8}{37}x+\frac{4}{37}x^2-\frac{2}{37}x^3+\frac{1}{37}x^4}{x^5+4x+3}.$$

Questa equazione di fatto si scorge identica quando si ponga $x=1$, $x=2$, come appunto dev' essere.

13. Esaminate già particolarmente tutte le modificazioni che può ricevere la frazione generalmente proposta da principio secondo le diverse ipotesi che intorno a quella possono aver luogo, non è forse inopportuno, prima di dar termine alla presente trattazione, di applicare i metodi fin quì esposti ad altri esempj per rendere anche sensibili gli artificj speciali che possono rendere più semplice ed accomodata la risoluzione delle frazioni ne' casi particolari, ne' qnali può essere varia od ambigua la scelta del metodo più opportuno, ove si renda eziandio meno utile il ricorrere alle formole generali, o nel cercare l'espressione delle frazioni componenti si voglia facilitare il calcolo degli irrazionali e degli immaginarj od anche evitarli.

Sia perciò la frazione

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)^2(1-x)\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{-2x^2+x-1}{x(1+x)^2(x-1)\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)},$$

la quale può riferirsi alla formola generale dell'art.° 1.° e per cui, come è facile a vedersi, essa si trasformerebbe in

$$\left(\frac{A}{x}+\frac{A'}{x-1}+\frac{A''}{x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}+\frac{A'''}{x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\right)\cdot\frac{1}{(x+1)^2},$$

espressione, nella quale per le cose dette le A, A', A'', A''' essendo facilmente determinabili e quindi potendosi supporre note, non lascia che a determinare il parziale sviluppo, o decomposizione delle frazioni

$$\frac{A}{x(x+1)^2},\ \frac{A'}{(x-1)(x+1)^2},\ \frac{A''}{\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)(x+1)^2},\ \frac{A'''}{\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)(x+1)^2},$$

che pure si riferiscono ad una delle considerate ipotesi sulla formola generale dell' art.° 1.° Però siccome questa risoluzione, oltre la prolissità cui anderebbe soggetta, involverebbe eziandio il maneggio degli immaginarj, de' quali sarebbero affetti i risultati finali, così volendosi questi eliminare, è d'uopo ricorrere ad altro metodo di decomposizione, trasformando la proposta in un' espressione più compendiata ed immune da tali inconvenienti. Si ponga pertanto

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{A}{x}+\frac{A'}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{A''}{(1-x)^2}+\frac{A'''}{1-x}.$$

Moltiplicando questa equazione per x, poi fatto $x=0$, se ne ricava $A=1$; moltiplicandola per $1+x$, poi fatto $x=-1$, risulta $A'=-1$; e moltiplicandola per $(1-x)^2$, poi fatto $x=1$, viene $A''=\frac{1}{3}$. Sostituiti questi valori e trasposto nell' equazione il termine $\frac{A''}{(1-x)^2}$, si ha l' altra

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1-x+2x^2-\frac{1}{3}(x^2+x)(1+x+x^2)}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}x+1}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{A'''}{1-x};$$

e moltiplicando questa equazione per $1-x$ e fatto $x=1$, si ottiene $A'''=\frac{1}{3}$. Sostituendo anche questo valore nell'ultima equazione e trasponendone il termine $\frac{1}{x}$, si ha:

$$\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}x+1-(1-x^2)(1+x+x^2)}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}=$$

$$\frac{x^3+\frac{4}{3}x^2+x-\frac{4}{3}}{(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}=-\frac{1}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x},$$

equazione, in cui trasponendo il termine $-\frac{1}{1+x}$, dà

$$\frac{x^3+\frac{4}{3}x^2+x-\frac{4}{3}+(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}=\frac{\frac{4}{3}x^2+x-\frac{1}{3}}{(1+x)(1+x+x^2)(1-x)},$$

e quindi

$$\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{(1+x+x^2)(1-x)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x)}$$

$$=\frac{\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}{1+x+x^2}=\frac{B+B'x}{1+x+x^2},$$

onde

$$B=-\frac{2}{3},\qquad B'=\frac{1}{3},$$

e finalmente

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2-x}{1+x+x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Si perviene allo stesso risultato se, dopo avere determinati come sopra i coefficienti A, A', A'', si prosegue a determinare gli altri con metodo diverso ed indipendente dalle divisioni che rendono forse alquanto più brigoso il calcolo. Sostituendo pertanto nell'equazione proposta i valori di A, A', A'', si ha:

$$(1)\ldots \frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{A'''}{1-x},$$

dalla quale, ponendo $\frac{1}{x}$ in luogo di x, viene l'altra

$$\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^6-x^5+2x^4}{(x+1)(x^2+x+1)(x-1)^2}$$

$$=x-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{B+B'.\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{A'''}{1-\frac{1}{x}}$$

$$=x-\frac{x}{x+1}+\frac{Bx^2+B'x}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{A'''x}{x-1},$$

equazione, che divisa per x e fatto $x=0$, dà $B'=A'''$. Se ora ripigliando la (1), posto in essa B' in luogo di A''', successivamente si faccia $x=2$, $x=-2$, si hanno le equazioni

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{B+2B'}{7}+\frac{1}{3}-B',$$

$$\frac{11}{2.3.9}=-\frac{1}{2}+1+\frac{B-2B'}{3}+\frac{1}{3.9}+\frac{B'}{3},$$

onde

(2) . . . . $B-5B'=-\frac{7}{3}$,

(3) . . . . $B-B'=-1$.

Sottraendo la (3) dalla (2), si ha

$$-4B' = -\frac{4}{3},$$

e perciò

$$B' = \frac{1}{3},$$

e conseguentemente anche

$$B = -\frac{2}{3},$$

come si era trovato dapprima.

Sia ancora la frazione

$$\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^3(x^3-1)}$$

equivalente all'altra

$$\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)},$$

a cagione di

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Fra le molte maniere nelle quali può decomporsi questa frazione, la più semplice ed opportuna ad evitare possibilmente il calcolo degli immaginarj sembra la seguente, che richiede una sola operazione di divisione. Si ponga quindi, esprimendo per α, β le due radici immaginarie dell' equazione $x^2+x+1=0$,

$$(4)\cdots\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^3(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C+C'x}{x^2+x+1}.$$

Moltiplicando tutto per $(x-1)^3$, poi fatto $x=1$, si ottiene $A=-\frac{1}{2.3}$, essendo $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x+1$. Se ora si

trasponga il termine $\frac{A}{(x-1)^3}$, sostituito prima in esso il trovato valore di A, nasce l'altra equazione

$$(5)\ldots\frac{-\frac{5x^3}{6}-\frac{3}{6}x-\frac{1}{6}}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C+C'x}{x^2+x+1},$$

che, moltiplicata per $(x-1)^2$ e fatto $x=1$, dà $A'=-\frac{1}{4}$. La stessa moltiplicata per $x+1$, e fatto $x=-1$, dà pure $B=-\frac{1}{8}$.

Per determinare le C, C', è d'uopo osservare, che annullandosi pe' due valori $x=\alpha$, $x=\beta$ l'espressione x^2+x+1, se per questa si moltiplichi l'equazione (4), poi si ponga $x=\alpha$ ovvero $x=\beta$, si avranno rispettivamente le due equazioni

$$C+C'\alpha=\frac{-\alpha^3}{(\alpha+1)(\alpha-1)^3},\qquad C+C'\beta=\frac{-\beta^3}{(\beta+1)(\beta-1)^3}.$$

Sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima, si ha

$$C'(\alpha-\beta)=\frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)^3}+\frac{1}{(\beta+1)(\beta-1)^3}.$$

Per liberare questa equazione dagli immaginarj ed ottenere il valore di C', conviene quì richiamare le note proprietà delle radici cubiche immaginarie dell'unità quali sono le α, β, vale a dire 1.° che la loro somma eguaglia l'unità negativa; 2.° che ciascuna di esse è eguale al quadrato dell'altra; 3.° che il prodotto $(\alpha-1)(\beta-1)=3$. Ciò posto, essendo

$$C'(\alpha-\beta)=\frac{-1}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)^2}+\frac{1}{(\beta^2-1)(\beta-1)^2}=\frac{-1}{(\beta-1)(\alpha-1)^2}+\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)^2}$$

$$=\frac{-1}{3(\alpha-1)}+\frac{1}{3(\beta-1)}=\frac{-3(\beta-1)+3(\alpha-1)}{3.9}=\frac{3(\alpha-\beta)}{3.9},$$

onde $C' = \frac{1}{9}$. Sostituendo ora questo valore di C' nell'equazione

$$C + C'\beta = \frac{-\beta^3}{(\beta+1)(\beta-1)^3} = \frac{-1}{(\beta^2-1)(\beta-1)^2},$$

si ha pure

$$C + \frac{\beta}{9} = \frac{-1}{(\alpha-1)(\beta-1)^2} = \frac{-1}{3(\beta-1)} = \frac{-\alpha+1}{9},$$

da cui si trae subito

$$C = \frac{-\alpha-\beta+1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Resta quindi solamente a determinarsi la A''. Perciò sostituiti nell' equazione (4) i valori trovati per A, A', B, C e fatto $x = 0$, si ha

$$\frac{1}{2.3} - \frac{1}{4} - A'' - \frac{1}{8} + \frac{2}{9} = 0, \quad \text{e perciò} \quad A'' = \frac{1}{8.9}.$$

Sarà dunque finalmente

$$\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)} =$$

$$-\frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{8.9} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{2}{9} + \frac{1}{9}x}{x^2+x+1}.$$

Il calcolo degli immaginarj introdotto in questa risoluzione avrebbe potuto risparmiarsi con ulteriore divisione sul primo membro dell' equazione (5) dopo aver trasposto il termine $\frac{A'}{(x-1)^2}$ onde determinare A'', trasponendo poi successivamente anche il termine $\frac{B}{x+1}$, dopo di che, eseguito il solito processo, le C, C' vengono date immediatamente dall'equazione ridotta. L' uso però degli immaginarj colle avvertenze indicate sembra abbreviare notabilmente le operazioni che vengono richieste per quanto sembra inevitabilmente dall' altro metodo di successiva trasposizione e divisione.

Sia da ultimo proposta a risolversi nelle sue componenti l'espressione

$$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)},$$

la quale, come è facile a vedersi, potrebbe decomporsi in dodici altre, vale a dire in altrettante quanti sono i fattori semplici o di primo grado nel suo denominatore, che avrebbero tutte per numeratore una quantità costante. Volendosi però evitare possibilmente il calcolo degli immaginarj e renderne esenti le frazioni più semplici che possono derivare dalla decomposizione della proposta, giova dare a queste la forma che viene indicata dalla seguente equazione

$$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} =$$

$$\frac{A+A'x}{(1+x^2)^4}+\frac{B+B'x}{(1+x^2)^3}+\frac{C+C'x}{(1+x^2)^2}+\frac{D+D'x}{1+x^2}+\frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

ove è opportuno riflettere che le quattro prime frazioni, che costituiscono il secondo membro, possono ridursi ad una sola della forma

$$\frac{M+M'x+M''x^2+M'''x^3+M^{\text{IV}}x^4+M^{\text{V}}x^5+M^{\text{VI}}x^6+M^{\text{VII}}x^7}{(1+x^2)^4},$$

in cui la massima potenza di x nel numeratore è minore di un'unità della massima potenza di x nel denominatore, come facilmente rilevasi, riducendole tutte al medesimo denominatore e sommandole, cosicchè allora è evidente che si avrebbero nell'equazione proposta tante incognite quante equazioni per determinarle secondo il metodo dei coefficienti indeterminati, supponendosi sempre le A, A', B, B', ecc. e quindi le loro somme quantità costanti da determinarsi. Ciò premes-

so, se si moltiplichi l'equazione proposta per $(1+x^2)^4$ e poi si ponga $x=\pm\sqrt{-1}$, nasce la doppia equazione

$$A \pm A'\sqrt{-1} = \frac{\pm\sqrt{-1}\pm\sqrt{-1}}{2} = \pm\sqrt{-1},$$

dalla quale si ricava subito $A=0$, $A'=1$. Sostituendo questi valori nella stessa proposta equazione e trasponendo la frazione $\frac{A+A'x}{(1+x^2)^4}$, si ha

$$\frac{x-x^3-x(1+x^4)}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{-x^3-x^5}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{-x^3}{(1+x^2)^3(1+x^4)}$$

$$= \frac{B+B'x}{(1+x^2)^3} + \frac{C+C'x}{(1+x^2)^2} + \frac{D+D'x}{1+x^2} + \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

equazione, che moltiplicata per $(1+x^2)^3$ e fatto nuovamente $x=\pm\sqrt{-1}$, dà $B\pm B'\sqrt{-1} = \pm\frac{\sqrt{-1}}{2}$, e quindi $B=0$, $B'=\frac{1}{2}$; dunque

$$\frac{-x^3}{(1+x^2)^3(1+x)^4} + \frac{-x}{2(1+x^2)^3} = \frac{-2x^3-x-x^5}{2(1+x^4)(1+x^2)^3} = \frac{-x^3-x}{2(1+x^4)(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{C+C'x}{(1+x^2)^2} + \frac{D+D'x}{1+x^2} + \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4}.$$

Moltiplicata anche questa equazione per $(1+x^2)^2$ e fatto al solito $x=\pm\sqrt{-1}$, nasce $C\pm C'\sqrt{-1} = \pm\frac{\sqrt{-1}}{4} \mp \frac{\sqrt{-1}}{4} = 0$, onde si ricava facilmente $C=0$, $C'=0$. Sarà pertanto

$$\frac{-x^3-x}{2(1+x^4)(1+x^2)^2} = \frac{-x}{2(1+x^4)(1+x^2)} = \frac{D+D'x}{1+x^2} + \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

ove, moltiplicando per $1+x^2$ e fatto pure $x=\pm\sqrt{-1}$, si ha

$D \pm D'\sqrt{-1} = \mp \frac{\sqrt{-1}}{4}$, e perciò $D=0$, $D'=-\frac{1}{4}$. Fatta l' opportuna sostituzione e trasposizione, viene anche

$$\frac{-x}{2(1+x^4)(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)} = \frac{-2x+x(1+x^4)}{4(1+x^4)(1+x^2)} =$$

$$\frac{-x+x^5}{4(1+x^4)(1+x^2)} = \frac{x^3-x}{4(1+x^4)} = \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

ovvero

$$x^3-x = 4E+4E'x+4E''x^2+4E'''x^3,$$

da cui si ricava

$$E=0,\ E'=-\frac{1}{4},\ E''=0,\ E'''=\frac{1}{4},$$

cosicchè rimanendo determinate tutte le costanti, si ha finalmente

$$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{x}{2(1+x^2)^3} - \frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{x-x^3}{4(1+x^4)},$$

equazione perfettamente identica a quella che trovò il Lotteri (*) decomponendo la frazione proposta col metodo ordinario de' coefficienti indeterminati, che lo condusse a risolvere dodici equazioni insieme collegate con maneggio di calcolo assai prolisso e laborioso.

Le cose fin qui dichiarate sembrano mostrare sufficientemente come nella decomposizione delle frazioni si possa quasi sempre prescindere dall' ordinario metodo pressochè costantemente seguito dagli Algebristi de' coefficienti indeterminati. Questo, oltre al non potersi spingere praticamente molto lungi per la complicazione delle tante equazioni che si debbono per

(*) *V. Lezioni di Introduzione al Calcolo Sublime. Pavia* 1821; Par. I. pag. 452.

esso risolvere, non è poi atto ad indicare che per induzione la legge di serie per pochi termini mostrata dai coefficienti medesimi, laddove le formole generali stabilite nella presente Memoria la dimostrano rigorosamente ed all'infinito. Forse anche i teoremi che conducono a determinarle potrebbero giovare per conoscere i residui delle serie infinite, come da qualche cenno fatto di sopra in proposito si è potuto raccogliere. Ad ogni modo la varietà dei mezzi che per esse si hanno a risolvere una stessa frazione, come si rileva dai molti esempj recati, e la maggiore semplicità che risulta dall'applicazione degli uni piuttosto che degli altri ai casi particolari, ne raccomandano l'uso, a cui d'altronde ponno mirabilmente servire non difficili industrie di calcolo. S'intravede poi eziandio che le considerazioni esposte non debbano limitarsi alla trasformazione e decomposizione delle frazioni, ma possano estendersi ad altri oggetti dell'Introduzione al Calcolo infinitesimale per tutto forse ove il metodo ordinario dei coefficienti indeterminati manifesta nelle ricerche, per le quali s'impiega, il bisogno di più rigorose e meno intralciate dimostrazioni.