SULLA INTERPOLAZIONE

MEMORIA

DEL SOCIO ONORARIO SIGNOR

AGOSTINO LUIGI CAUCHY MATEMATICO

Ricevuta il 1.° Novembre 1835 (1).

Nelle applicazioni dell'Analisi alla Geometria, alla Fisica, all'Astronomia ec. si presentano due specie di questioni da sciogliere, e si tratta: 1.° di trovare le leggi generali delle figure, o dei fenomeni, vale a dire la forma generale delle equazioni che esistono fra le diverse variabili, per esempio fra le coordinate delle curve e delle superficie, fra le velocità, i tempi, gli spazii percorsi dai mobili ec: 2.° di fissare in numeri i valori dei parametri o costanti arbitrarie che entrano nelle espressioni di queste stesse leggi, cioè a dire i valori dei coefficienti incogniti che contengono l'equazioni trovate. Fra le variabili distinguonsi ordinariamente, come si sa, quelle che possono variare indipendentemente le une dalle altre, e che si chiamano perciò variabili indipendenti, da quelle che si deducono dalla soluzione delle diverse equazioni, e che si dicono funzioni di variabili indipendenti. Consideriamo in particolare una di queste funzioni, e supponiamo che sia essa dedotta da variabili indipendenti per mezzo di una equazione, o formola che racchiuda un certo numero di coefficienti. Un numero simile di osservazioni, o di esperienze ciascuna delle quali somministrerà un valore particolare della funzione

(1) Questa Memoria era scritta in lingua Francese ed è stata tradotta in Italiano dal Segretario della Società per uniformarsi agli Statuti.

funzione corrispondente ad un sistema particolare di valori delle variabili indipendenti, basterà per la determinazione numerica di tutti questi coefficienti; e fatta questa determinazione, si potranno ottenere senza difficoltà nuovi valori della funzione corrispondenti a nuovi sistemi di valori delle variabili indipendenti, e risolvere così quello che si chiama il problema dell'interpolazione. Così per es. se l'ordinata di una curva si trova espressa in funzione dell'ascissa da una equazione che racchiuda tre parametri, basterà conoscere tre punti della curva, cioè a dire tre valori particolari dell'ordinata corrispondenti a tre valori particolari dell'ascissa per determinare li tre parametri, ed effettuata questa determinazione, si potrà senza fatica tracciare la curva per punti, calcolando le coordinate d'un numero quanto si vorrà grande di nuovi punti situati sù gli archi di questa curva, compresi fra li punti dati. Considerandolo perciò in tutta la sua estensione, il problema della interpolazione, consiste, " nel determinare i " coefficienti, o costanti arbitrarie che racchiude l'espressione " delle leggi generali delle figure o dei fenomeni, per mezzo " di un numero almeno uguale di punti dati, o di osserva- " vazioni o di espressioni. „ In una quantità di ricerche le costanti arbitrarie trovansi al primo grado soltanto nelle equazioni che le contengono. Questo è ciò che accade precisamente, allorchè una funzione è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti o discendenti di una variabile indipendente, oppure ancora secondo li seni o li coseni dei multipli di uno stesso arco. Allora trattasi di determinare li coefficienti di quelli fra i termini della serie che non si possono trascurare senza temere che ne risulti un errore sensibile nei valori della funzione.

Nel piccolo numero di formole che sono state proposte a questo oggetto, distinguer devesi una formola ricavata dal calcolo delle differenze finite, ma applicabile solamente al caso in cui i diversi valori della variabile indipendente sono *equidifferenti* fra loro, e la formola di Lagrange applicabile, comunque siano questi valori, alle serie ordinate secondo le potenze ascendenti della variabile indipendente. Tuttavolta questa ultima formola, essa pur si rende complicata più e più, a misura che vuol conservarsi nello sviluppo della funzione in serie un maggior numero di termini, e ciò che avvi di più incomodo, si è che i valori approssimati dei diversi ordini corrispondenti ai diversi casi, nei quali si conservasse nella serie un solo termine, poi due termini, poi tre termini, ... si ottengono con calcoli quasi pienamente indipendenti gli uni dagli altri, così chè ciascuna nuova approssimazione, lungi dal rendersi facile per mezzo di quelle che la precedono, domanda al contrario, maggior tempo, e maggior fatica. Colpito da questi inconvenienti, e condotto dalle mie ricerche sulla dispersione della luce ad occuparmi di nuovo del Problema della interpolazione, io ho avuto la fortuna di incontrare per la soluzione di questo problema una nuova formola, che sotto il doppio rapporto della certezza dei risultamenti, e della facilità con la quale si ottengono sembrami che abbia sulle altre formole dei vantaggi talmente incontestabili, che io non dubito punto dover' essa ben presto divenire di un uso universale fra le persone dedicate a coltivar le scienze fisiche, e matematiche.

Per dare un' idea di questa formola, io suppongo che una funzione di x rappresentata da y sia sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti o discendenti di x, oppure anche secondo i seni e coseni degli archi multipli di x, o anche più generalmente secondo altre funzioni di x che io rappresenterò per

$$\varphi(x) = u;\ \chi(x) = v;\ \psi(x) = w$$

per modo che si abbia

$$y = au + bv + cw + \ldots .$$

$a, b, c \ldots$, indicando dei coefficienti costanti. Trattasi di sapere

1.° Quanti termini debbonsi conservare nel secondo membro della Equazione (1) per ottenere un valore di y sufficientemente approssimato, di cui la differenza col valore esatto sia insensibile, e comparabile agli errori, che comportano le osservazioni.

2.° Fissare in numeri i coefficienti dei termini conservati o, ciò che torna lo stesso, trovare il valore approssimato di cui abbiamo parlato. Li dati del problema sono un numero bastantemente grande di valori di y rappresentati da

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n$$

e corrispondenti a un ugual numero n di valori di x rappresentati da $x_1, x_2 \ldots x_n$, per conseguenza così a un egual numero di valori di ciascuna delle funzioni u, v, $w \ldots$, valori che io rappresenterò parimenti per

$$u_1,\ u_2 \ldots u_n$$

per la funzione u; per

$$v_1,\ v_2, \ldots\ldots v_n$$

per la funzione v, ec. Così per risolvere il problema si avranno fra li coefficienti incogniti a, b, $c \ldots$ le n equazioni di primo grado

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 + \ldots \\ \\ y_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 + \ldots \\ \quad\vdots \\ y_n = au_n + bv_n + cw_n + \ldots \end{array}\right.$$

le quali, se si indica per i uno qualunque dei numeri intieri $1, 2, \ldots n$

si troveranno tutte comprese nella formola generale

$$(3) \qquad y_i = au_i + bv_i + cw_i + \ldots$$

Si effettuerà la prima approssimazione trascurando i coefficienti $b, c \ldots$, o ciò che torna lo stesso riducendo la serie che racchiude l'equazione (1) al suo primo termine; allora il valor generale prossimo di y sarà

$$(4) \qquad y = au$$

e per determinare il coefficiente a si avrà il sistema di equazioni

$$(5) \qquad y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2 \ldots y_n = au_n.$$

Li diversi valori a che dedur si possono dalle equazioni (5) considerate ciascuna a parte, o combinate fra loro, sarebbero tutti precisamente uguali, se i valori particolari di y che noi supponiamo dati dalla osservazione fossero esatti a tutto rigore, ma non è così nella pratica, in cui le osservazioni comportano degli errori contenuti fra certi limiti, ed allora è duopo di combinare fra loro le equazioni (5) in modo che nei casi più sfavorevoli l'influenza esercitata sul valore del coefficiente a dagli errori commessi sui valori di $y_1, y_2 \ldots y_n$ sia la minima possibile. Ora le diverse combinazioni che si possono fare delle equazioni (5) per ricavarne una nuova equazione di primo grado rapporto ad a, somministrano tutte dei valori di a compresi nella formola generale

$$(6) \qquad a = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_n y_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n}$$

che si ottiene aggiungendo membro a membro le equazioni

(5) rispettivamente moltiplicate per dei fattori costanti k_1, $k_2 \ldots k_n$. Inoltre siccome il valore di a determinato dalla equazione (6) non varia punto quando si fanno variare simultaneamente i fattori $k_1, k_2 \ldots k_n$ nello stesso rapporto, egli è chiaro che fra questi fattori il più grande (astrazion fatta dal segno) può sempre considerarsi ridotto all' unità.

Osserviamo finalmente che se si chiamino

$$E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$$

gli errori rispettivamente commessi nelle osservazioni sui valori di $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$, la formola (6) somministrerà per a un valore prossimo la cui differenza col vero sarà

$$(7) \qquad \frac{K_1 E_1 + K_2 E_2 + \ldots + K_n E_n}{K_1 u_1 + K_2 u_2 + \ldots + K_n u_n}.$$

Conviene ora scegliere $K_1, K_2 \ldots\ldots K_n$ in modo tale che nei casi più sfavorevoli il valore numerico della espressione (7) sia il minore possibile. Rappresentiamo per

$$Su_1$$

la somma dei diversi valori numerici di u_1 vale a dire ciò che diviene il polinomio

$$+u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$$

quando si dispone di ciascun segno in modo da rendere ciascun termine positivo. Rappresentiamo per SE_1 non la somma dei valori numerici di $E_1, E_2 \ldots E_n$; ma ciò che diventa la somma Su_1, quando vi si mette in luogo di ciascun valore di u il valor corrispondente di E_i: se si riduce a $+1$ od a -1 ciascuno dei coefficienti K_1, K_2 . . . . K_n, scegliendo i segni in modo che nel denominatore della frazione (7) tutti i termini siano positivi, questa frazione si ridurrà a

$$\frac{SE_i}{Su_i} \tag{8}$$

ed offrirà un valore numerico tutto al più eguale al rapporto

$$\frac{\Sigma}{Su_i}$$

se si indica per Σ la somma dei valori numerici di E_i, o ciò che torna lo stesso, il valor numerico di SE_i nel caso il più sfavorevole. D' altra parte attribuendo a K_1, K_2 . . . . K_n dei valori disuguali di cui il più grande (fatta astrazione dal segno) sia l' unità, si otterrà per denominatore della frazione (7) una quantità il valor numerico della quale sarà evidentemente inferiore a Su_i, mentre il valor numerico del numeratore potrà elevarsi sino al limite Σ, il che accaderà effettivamente se gli errori E_1, E_2 . . . . E_n sono tutti nulli all' eccezione di quello che sarà moltiplicato per un fattore eguale (prescindendo dal segno) all' unità. Da ciò risulta che il più grande errore da temersi nel valore di a determinato dalla formola (6) sarà il minimo possibile se si ponga generalmente

$$K_1 = \pm 1$$

scegliendo il segno in modo che nel polinomio

$$K_1 u_1 + K_2 u_2 + \ldots\ldots + K_n u_n$$

tutti i termini siano positivi.

Allora la formola (6) darà

$$(9) \qquad a = \frac{Sy_i}{Su_i}$$

Sy_i essendo ciò che diventa la somma Su_i quando vi si mette in luogo di ciascun valore di u_i il valor corrispondente di y_i, e l'equazione (4) diventerà

$$(10) \qquad y = \frac{uSy_i}{Su_i}.$$

Se per brevità si fa

$$(11) \qquad a = \frac{u}{Su_i}$$

si avrà semplicemente

$$(12) \qquad y = aSy_i.$$

Se si supponesse generalmente $u=1$ l'equazione (4) ridotta ad $y=a$ ci direbbe che il valore di y è costante, e siccome avrebbesi allora

$$a = \frac{u}{Su_i} = \frac{1}{n}$$

la formola (12) diventerebbe

$$y = \frac{1}{n} Sy_i.$$

Dunque allora si dovrebbe prendere per valor approssimato di y la media aritmetica fra i valori osservati, ed il più grande errore da temersi sarebbe più piccolo per questo valore approssimato che per qualunque altro. Questa proprietà dei medii aritmetici congiunta alla facilità con cui si calcolano, giustifica pienamente l' uso invalso di accordar loro la preferenza nel valutare le costanti arbitrarie che possono essere determinate direttamente dalle osservazioni.

Sia ora Δy il resto che deve completare il valor approssimato di y somministrato dalla equazione (12) così che abbiasi

$$y = aSy_i + \Delta y. \tag{13}$$

Facciamo parimente

$$v = aSv_i + \Delta v, \quad w = aSw_i + \Delta w \text{ ec.} \tag{14}$$

si caverà dalla formola (3)

$$Sy_i = aSu_i + bSu_i + cSw_i + \text{ec.} \tag{15}$$

poi da questa ultima moltiplicata per a e sottratta dall' equazione (1)

$$\Delta y = b\Delta v + c\Delta w + \text{ec.} \tag{16}$$

Siano d' altronde a_i, Δy_i, Δv_i, Δw_i ciò che divengono i valori di a, Δy, Δv, Δw .... cavati dalle equazioni (11), (13), e (14) quando in y si mette x_i per x, essendo i uno dei numeri interi 1. 2. 3. . . . . . n.

Se i valori Δy_1, Δy_2 . . . . . Δy_n sono piccolissimi e comparabili agli errori che comportano le osservazioni, sarà inutile il procedere ad una seconda approssimazione, e potrà attenersi al valore approssimato di y dato dall'equazione (12). Se ha luogo il contrario, basterà per ottenere una nuova approssimazione, operare sulla formola (16), come si è operato sulla formola (1) nella prima approssimazione. Ciò posto indichiamo per

$$S\Delta v_i$$

la somma dei valori numerici di Δv_i e per

$$S'\Delta y_i,\quad S'\Delta w_i,\ \text{ec.}$$

i polinomii nei quali si cambia $S'\Delta v_i$ quando vi si colloca invece di ciascun valor di Δv_i il valor corrispondente di Δy_i o di Δw_i ec.: sia finalmente

(17) $$\beta = \frac{\Delta v}{S'\Delta v_i}.$$

Se si può senza errore sensibile trascurare nella serie (1) il coefficiente c del terzo termine, e quelli dei termini seguenti, si dovrà prendere per valore approssimato di Δy

(18) $$\Delta y = \beta S'\Delta y_i.$$

Sia $\Delta^2 y$ il resto del secondo ordine che deve completare questo valore approssimato, e facciamo perciò

(19) $$\Delta y = \beta S'\Delta y_i + \Delta^2 y.$$

Facciamo parimente

(20) $$\Delta w = \beta S'\Delta w_i + \Delta^2 w,\ \text{ec.}$$

Si ricaverà successivamente dalla formola (16)

(21) $$\Delta y_i = \beta\Delta v_i + c\Delta w_i + \text{ec.}$$

(22) $$S'\Delta y_i = \beta S'\Delta v_i + cS'\Delta w_i\ \text{ec,}$$

poi da questa derivata moltiplicata per β e sottratta dalla equazione (19)

$$(23) \qquad \Delta^2 y = c\Delta^2 w + \text{ec.}$$

Siano d' altronde β_i, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^2 w_i$ ec. ciò che diventano i valori di β, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 w$ ec. ricavati dalle equazioni (17), (19), e (20), quando in y si colloca x_i per x, i essendo uno dei numeri interi 1, 2, 3 . . . . n. Se li valori di

$$\Delta^2 y_1, \ \Delta^2 y_2 \ldots\ldots \Delta^2 y_n$$

sono piccolissimi e comparabili agli errori che comportano le osservazioni, sarà inutile di procedere ad una nuova approssimazione, e potrà attenersi al valore di Δy somministrato dalla equazione (18). Se accade il contrario, basterà per ottenere una terza approssimazione operare sulla formola (23) come si è operato nella prima approssimazione sulla formola (1). Continuando così si otterrà la seguente regola.

L' incognita y, funzione della variabile u essendo supposta sviluppabile in una serie convergente

$$(\mathrm{I}) \qquad au + bv + cw + \ldots\ldots$$

nella quale u, v, w . . . . . rappresentano funzioni date della stessa variabile, se si conoscono n valori particolari di y corrispondenti ad n valori particolari

$$x_1, \ x_2, \ldots\ldots, x_n$$

di x; se d' altronde si chiami i uno qualunque dei numeri intieri 1, 2, 3, ... n ed y_i, u_i, w_i . . . . ciò che diventano y, v, w . . . . . quando in y vi si collochi x_i invece di x, allora per ottenere il valor generale di y con una sufficiente approssimazione, si determinerà primieramente il coefficiente a con l' ajuto della formola

(II) $$u = \alpha S u_i$$

nella quale Su_i indica la somma dei valori numerici di u_i, e la differenza Δy di primo ordine con l'ajuto della formola

(III) $$y = \alpha S y_i + \Delta y.$$

Se i valori particolari di Δy rappresentati da

$$\Delta y_1, \ \Delta y_2 \ldots\ldots \Delta y_n$$

sono comparabili agli errori di osservazione, si potrà trascurare Δy e ridurre il valore approssimato di y a

$$\alpha S y_i.$$

Nel caso contrario si determinerà β col mezzo delle formole

(IV) $$v = \alpha S u_i + \Delta v, \quad \Delta v = \beta S' \Delta v_i,$$

essendo $S'\Delta v_i$ la somma dei valori numerici di Δv_i, e la differenza del secondo ordine $\Delta^2 y$ con l'ajuto della formola

(V) $$\Delta y_1 = \beta S' \Delta y + \Delta^2 y.$$

Se i valori particolari di $\Delta^2 y$ rappresentati da

$$\Delta^2 y_1, \ \Delta^2 y_2 \ldots\ldots \Delta^2 y_n$$

sono comparabili agli errori di osservazione, si potrà trascurare $\Delta^2 y$ e ridurre in conseguenza il valore approssimato di y ad

$$\alpha S y_i + \beta S' \Delta y_i.$$

Nel caso contrario si determinerà γ con le formole

(VI) $w=\alpha S w_i + \Delta w, \quad \Delta w = \beta S' \Delta w_i + \Delta^2 w, \quad \Delta^2 w = \gamma S'' \Delta^2 w_i$;

$S''\Delta^2 w_i$ essendo la somma dei valori numerici di $\Delta^2 w_i$, e la differenza di terz' ordine $\Delta^3 y$ per mezzo della formola

$$\text{(VII)} \qquad \Delta^2 y = \gamma S'' \Delta^2 y_i + \Delta^3 y. \text{ ec.}$$

Così definitivamente supponendo determinati i coefficienti α, β, γ dal sistema delle equazioni (II), (IV), (VI) ec. si dovranno calcolare le differenze dei diversi ordini rappresentate da

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y \text{ ec.}$$

o piuttosto i loro valori particolari corrispondenti ai valori $n_1, n_2, n_3, \ldots \ldots n_n$ della variabile x, sinchè si arrivi ad una differenza di cui i valori particolari siano comparabili agli errori di osservazione. Allora basterà uguagliare a zero il valore di questa differenza ricavato dal sistema delle equazioni (III), (V), (VII) . . . . per ottenere con sufficiente approssimazione il valore generale di y.

Questo valor generale sarà dunque

$$y = \alpha S y_i \text{ oppure } y = \alpha S y_i + \beta S' y_i$$

oppure . . . . secondo che si potrà senza error sensibile ridurre la serie (I) al suo primo termine o ai suoi due primi termini. . . . Dunque se chiamisi m il numero dei termini conservati, il problema della interpolazione sarà sciolto dalla formola

$$\text{(VIII)} \qquad y = \alpha S y_i + \beta S' \Delta y_i + \gamma S'' \Delta^2 y_i + \ldots .$$

essendo prolungato il secondo membro sino al termine che contiene $\Delta^{m-1} y_i$.

Egli è bene l'osservare che dalle formole (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII), ... si ricava non solamente la

(IX) $S\alpha_i = 1$; $S\beta_i = 0$; $S\gamma_i = 0$, $S'\gamma_i = 0$, $S''\gamma_i = 0$, ec.

ma ancora

(X) $S\Delta v_i = 0$; $S\Delta w_i = 0$, $S\Delta^2 w_i = 0$, $S'\Delta^2 w_i = 0$ ec.

(XI) $S\Delta y_i = 0$; $S\Delta^2 y_i = 0$; $S'\Delta^2 y_i = 0$; $S\Delta^3 y_i = 0$,

$S'\Delta^3 y_i = 0$, $S''\Delta^3 y_i = 0$, ec.

Queste ultime formole sono tante equazioni di condizione alle quali devono soddisfare i valori particolari di α, β, γ, ... come pure quelli delle differenze dei diversi ordini di u, v, w, ... y, e ne risulta, che non si può commettere nel calcolo di questi valori particolari alcun errore di cifre senza esserne avvertiti dal fatto solo, che le equazioni di condizione cessano di verificarsi.

In compendio i vantaggi delle nuove formole di interpolazione sono i seguenti.

1.° Esse si applicano agli sviluppi in serie, qualunque sia la legge secondo la quale i differenti termini si deducono gli uni dagli altri, e qualunque siano i valori, equidifferenti o nò della variabile indipendente.

2.° Le nuove formole sono di un' applicazione facilissima, sopratutto quando si impiegano i logaritmi per il calcolo dei rapporti α, β, γ . . . . e dei prodotti di questi rapporti per le somme dei diversi valori delle funzioni e delle loro differenze. Allora infatti tutte le operazioni si riducono a somme o sottrazioni.

3.° Con l' ajuto delle nostre formole le approssimazioni successive si eseguiscono con una facilità sempre maggiore, avuto riguardo che le differenze degli ordini diversi vanno generalmente diminuendo.

4.° Le nostre formole permettono di introdurre contemporaneamente nel calcolo i numeri somministrati da tutte le osservazioni date, e di accrescere così l'esattezza dei risultamenti facendo concorrere a questo scopo un grandissimo numero di sperienze.

5.° Esse offrono ancora il vantaggio che a ciascuna nuova approssimazione i valori che somministrano per li coefficienti, a, b, c . . . . . . sono precisamente quelli nei quali l'errore più grande da temersi è il minimo possibile.

6.° Le nostre formole indicano da se stesse il momento in cui il calcolo deve arrestarsi, somministrando allora delle differenze comparabili agli errori di osservazione.

7.° Finalmente le quantità che esse determinano, soddisfanno ad equazioni di condizione, che non permettono di commettere il più leggiero errore di calcolo, senza accorgersene quasi immediatamente. Si troveranno nei nuovi esercizj di matematica numerose applicazioni delle nostre formole di interpolazione. Io ne citerò una sola. Sia l la lunghezza nell'aria di una ondulazione luminosa relativa ad uno dei raggi dello spetro solare, e θ l'indice di refrazione di questo raggio passando dall'aria in un altro mezzo. Dai principii stabiliti nella mia memoria sulla dispersione della luce risulta che si può sviluppare in serie convergente $\left(\frac{1}{l}\right)^2$ secondo le potenze ascendenti di $\left(\frac{\theta}{l}\right)^2$; in conseguenza $\left(\frac{\theta}{l}\right)^2$, e θ^2 secondo le potenze ascendenti di $\left(\frac{1}{l}\right)^2$. D'altronde un abilissimo osservatore, Fraunhofer ha determinato per diverse sostanze gli indici di refrazione dei raggi per li quali i valori l in centomillesimi di pollici sono

$$2541,\ 2425,\ 2175,\ 1940,\ 1789,\ 1585,\ 1451,$$

ed ha trovato per i valori corrispondenti di θ relativi ad una certa specie di Flint-glass

1,626596; 1,628469; 1,633667; 1,640495; 1,646756;

1,658848; 1,669686.

Ora la formola (VIII) ridotta allora a

$$\theta^2=2,6112351-0,0256298\left(\frac{l_1}{l}\right)^2+0,1081567\left(\frac{l_1}{l}\right)^4$$

$$-0,0649226\left(\frac{l_1}{l}\right)^6+0,019115\left(\frac{l_1}{l}\right)^8-0,002139\left(\frac{l_1}{l}\right)^{10}$$

riproduce esattamente e senza la minima alterazione i valori precedenti di θ.

FINE.