SUL PORTAVOCE CONICO

MEMORIA

DEL SIGNOR DOTTORE GIROLAMO RESTI-FERRARI

PROFESSORE DI FISICA NELL'ISTITUTO FILOSOFICO

DELLA CITTÀ DI LODI

PRESENTATA

DAL SOCIO SIGNOR PROFESSOR CONFIGLIACHI

APPROVATA DAL SOCIO SIGNOR PROFESSOR

DON LIBERATO BACCELLI

Ricevuta adì 20. *Luglio* 1830.

1. Nacque al Cavaliere Morland nel 1670 il pensiero di esperimentare se per mezzo di una tromba si potesse conseguire lo scopo non solo di far sentire il suono a grandi distanze, ma di rendervi ben anche intelligibili le parole: il successo coronò i suoi tentativi, ed ebbesi per conseguenza il Portavoce. A questo, due anni dopo, il Cassegrain ha data la figura iperbolica, pretendendo di ottenere sotto dimensioni minori gli stessi effetti ottenuti già dal primo inventore. Di poi il Prof. Sturm, attenendosi alle misure del nominato meccanico, sottopose alle prove molti stromenti di diverse figure; e nel 1719 il Prof. Itase mostrò quanto la figura iperbolica del Cassegrain la cedesse alla elittica ed alla parabolica. Nessuno però avea seguito nel loro cammino i raggi sonori dal Portavoce riflessi, per lo sgomento, al dire di Lambert, cagionato dalla considerazione delle infinite riflessioni

che soffre in tali stromenti il suono, e che pnr tutte devono entrare nel calcolo; quando egli assunse, secondo l'espression sua, a scandagliare l'abisso, che le stesse presentano (Ved. Mémoires de l'Ac. de Berlin. T. XIX, an. 1763.)

2. Sarebbe fuor di proposito il ricordare qui tutto ciò che l'Accademico di Berlino ha scritto in tale occasione; ma devo però rimarcare, che, riguardo alla tromba conica, prendendo ad esame l'andamento di un raggio sonoro che incontra l'asse della medesima, determina gli angoli sotto de' quali è successivamente riflesso il numero delle riflessioni che subisce, non che l'espressione trigonometrica della distanza dal vertice della detta tromba alla quale avviene una riflessione qualsivoglia. Ed ho detto essere del mio dovere il rimarcar tali cose, imperciocchè ho preso anch'io le mosse dalle medesime, sebbene non affatto similmente. In seguito le questioni da lui trattate sono di tutt'altro genere di quelle che mi propongo d'esporre. Le mie sono per avventura più speculative che pratiche: ciò non pertanto voglio sperare che trovino una raccomandazione nella semplicità ed esattezza dei risultamenti.

3. Nella esposizione delle medesime riterrò sempre che il centro fonico, il punto cioè dal quale emanano i raggi sonori, si trovi sull'asse del portavoce; è questo il caso più semplice invero, ma ben anche il più meritevole di attenzione. In conseguenza di ciò, atteso che la riflessione si fa costantemente in un piano normale alla superficie riflettente, un raggio, per quante volte venga riflesso prima d'uscir dalla tromba, starà sempre nel piano determinato dall'asse di questa e dal punto che lo riflette per la prima volta; ossia starà in quella sezione fatta alla detta tromba per l'asse, nella quale si trova da principio. Ciò poi che accade per un raggio qualsivoglia, accade altresì per tutti quelli i quali sono nella superficie conica, che può intendersi generata dalla retta rappresentante il detto raggio, mentre la medesima ruoti intorno all'asse della tromba, mantenendosi sempre egualmente inclinata allo stesso, cosicchè basterà prendere particolarmente

in considerazione una sezione analoga alla poc'anzi nominata, ed esaminare quanto accada per rispetto ai raggi che trovansi in essa.

4. Ma giovi in prima notare che dal considerare gli angoli di incidenza e di riflessione si farà spesso passaggio alla considerazione di quelli detti di inclinazione, che fanno colla superficie della tromba i raggi incidenti e riflessi come pure il passaggio inverso; ciò per altro sarà sempre assai facile, poichè quest' ultimi angoli sono i complementi dei primi.

Proposizione 1.ª

Determinare gli angoli delle successive incidenze di un raggio sonoro, non che gli angoli che fa lo stesso successivamente coll' asse del portavoce, essendo nota la primitiva sua inclinazione con quest' asse medesimo.

5. La sezione per l'asse, nella quale si trova il dato raggio, venga rappresentata (*fig.* 1.) dal trapezio MNPQ; sia B il centro fonico; A il vertice del cono di cui la tromba fa parte, e BR il raggio dato. Il cammino seguito da esso sia rappresentato dalla linea spezzata BRSTU . . . .; il suo angolo d' inclinazione RBO coll' asse si denomini a; e l'altro angolo QAO si chiami ϕ.

6. Per la legge di riflessione, e per la notissima relazione che ha luogo fra gli angoli interni ed esterni di un triangolo, si vede facilmente che avrassi

$$BRA = SRQ = a - \phi, \qquad RSA = TSP = a - 3\phi,$$

$$STA = UTQ = a - 5\phi, \qquad TUA = VUP = a - 7\phi,$$

. . . . . .,

. . . . . .,

e quindi l' angolo, che farà il raggio colla superficie della

tromba alla n^{esima} riflessione, sarà

$$a - (2n - 1)\varphi.$$

7. Siano ora C, D, E, ec. i punti, ne' quali il raggio BRST . . sega l' asse AO... Se gli angoli che fa con questo il detto raggio s' intendano presi alternativamente l'uno sopra e l' altro sotto, basta la sola ispezione della figura per mostrare che uno qualsivoglia di tali angoli uguaglia quello dell'inclinazione, che immediatamente lo precede, diminuito di φ. L' angolo adunque che dal raggio verrà fatto coll' asse dopo la $n.^{esima}$ riflessione verrà dato da

$$a - 2n\varphi.$$

Proposizione 2.ª

Determinare tutti quei punti nei quali avvengono le riflessioni di un raggio, che fa coll' asse del portavoce un angolo dato.

8. Ritenuta la figura, e ritenute le denominazioni della proposizione precedente, si chiamino le rette AR, AS, AT, AU ec. ordinatamente p', p'', p''', p^{iv}, ec. e pongasi AB $= a$. Dai triangoli BAR, RAS, SAT, TAU, ec. si deducono le proporzioni seguenti (prop. 1.ª §. 6.)

$$p' : a = \text{sen.}a \quad : \quad \text{sen.}(a - \varphi)$$

$$p'' : p = \text{sen.}(a - \varphi) : \text{sen.}(a - 3\varphi)$$

$$p''' : p'' = \text{sen.}(a - 3\varphi) : \text{sen.}(a - 5\varphi)$$

$$p^{iv} : p''' = \text{sen.}(a - 5\varphi) : \text{sen.}(a - 7\varphi)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$p^{(n)} : p^{(n-1)} = \text{sen.}(a - (2n-3)\varphi) : \text{sen.}(a - (2n-1)\varphi),$$

e queste somministrano

$$p^{(n)} : a = \text{sen}.\alpha : \text{sen}.(\alpha - (2n - 1)\phi)$$

d' onde si ricava

$$p^{(n)} = \frac{a\,\text{sen}.\alpha}{\text{sen}.(\alpha - (2n-1)\phi)}.$$

Ponendo in tale formola successivamente n eguale ad 1, a 2, a 3, ec. si avranno i valori di p', p'', p''' ec.; e quindi anche i punti richiesti.

9. Questi valori, che si ricavano anche separatamente dalle proporzioni suesposte, sono

$$p' = \frac{a\,\text{sen}.\alpha}{\text{sen}.(\alpha - \phi)}, \; p'' = \frac{a\,\text{sen}.\alpha}{\text{sen}.(\alpha - 3\phi)}, \; p''' = \frac{a\,\text{sen}.\alpha}{\text{sen}.(\alpha - 5\phi)}, \text{ ec.};$$

e si possono costruire nella maniera seguente. Facciasi centro in A, e si descriva con un raggio qualsivoglia (*Fig.* 2.) l' arco *yzax;* indi si segnino gli archi *ab*, *bc*, *cd*, ec., tutti eguali all' *ya*, e si estendano le rette A*a*, A*b*, A*c* fino all'incontro della BR prolungata, che le AR, AS, AT, ec. terminanti ad essa saranno i valori di p', p'', p''', ec.

La dimostrazione è appoggiata alla considerazione, che gli angoli ARB, ASB, ATB, ec. uguagliano per ordine gli $\alpha - \phi$, $\alpha - 3\phi$, $\alpha - 5\phi$, ec.

10. Supposto che A*x* sia parallela al raggio BR, appare dall' esposto che lo stesso subirà tante riflessioni quante volte l' arco *ya* è contenuto nell' altro *yx*, non avuto riguardo alle frazioni od all' ultima di queste volte, se vi è contenuto esattamente: cosicchè il numero delle riflessioni può essere espresso dalla formola

$$\frac{\alpha + \phi}{2\phi}$$

purchè non si tenga conto che degli interi se v' è un residuo, o si tolga dal quoto una *unità* se manca lo stesso, giac-

chè non voglio risguardare quale riflessione quella che avverrebbe a distanza infinita; essa in realtà non avverrebbe mai. All'ultima di tali riflessioni il raggio sarà riflesso o parallelamente al lato della tromba opposto a quello che lo riflette, ovvero per modo che quel lato non possa più essere incontrato dal raggio, ma solo dal suo prolungamento, secondo che il residuo suddetto mancherà o no.

11. *Coroll.* I. Appare ancora, che escono dalla tromba senz' essere riflessi tutti quei raggi che fanno coll' asse un angolo non maggiore di ϕ; ne escono dopo una sola riflessione tutti quelli che fanno coll' asse stesso un angolo non minore di ϕ e non maggiore di 3ϕ; dopo due riflessioni quelli che lo fanno non minore di 3ϕ, e non maggiore di 5ϕ; ed in generale escono dalla tromba dopo di avere subite n riflessioni que' raggi che coll' asse di essa fanno un angolo non minore di $(2n-1)\phi$, e non maggiore di $(2n+1)\phi$.

12. Coroll. II. Indicando con P, P' due qualisivogliono delle rette p', p'', p''', ecc. e con ω, ω' i corrispondenti angoli d'inclinazione, avremo (§. 8.)

$$P = \frac{a\,\text{sen.}\,\alpha}{\text{sen.}\,\omega}, \quad P' = \frac{a\,\text{sen.}\,\alpha}{\text{sen.}\,\omega'};$$

e quindi

$$P : P' = \text{sen.}\,\omega' : \text{sen.}\,\omega :$$

vale a dire, *le distanze dal vertice del cono, di cui il portavoce fa parte, de' punti dove avvengono le riflessioni di un medesimo raggio, sono reciprocamente proporzionali ai seni degli angoli delle corrispondenti incidenze.*

13. *Osservazione* I. In tutto il fin quì detto non ho avuto di mira che quei raggi che escono dall' apertura maggiore del portavoce; anche per lo innanzi farò lo stesso, tanto più che in pratica il centro fonico trovasi pressochè sempre all'apertura minore. Ritenendolo però, come ho fatto, in B (*Fig.* I.), i limiti che separano i raggi che escono da un' apertura

da quelli che escono dall' altra, sono costituiti dalle BH BK perpendicolari ordinatamente alle AQ.... AP....

14. *Osservazione* II. La tromba l' ho risguardata sempre come di lunghezza indefinita; se fosse questa determinata, quanto ho detto specialmente ai §§. 10, ed 11 di questa proposizione esigerebbe qualche restrizione, ma però facilissima a farsi.

PROPOSIZIONE 3.ª

Determinare i diversi punti ne' quali un raggio, che fa coll'asse della tromba un angolo dato, sega quest' asse medesimo.

15. Le parti (*Fig.* 1.) AB, AC, AD, ec. di questo s' indichino con q', q'', q''', ... $q^{(n)}$, la prima delle quali si è anche chiamata a.

16. La retta che determina il cammino del raggio quando va contro la tromba per esserne riflesso all'n^{esima} volta, chiude colle $p^{(n)}$, $q^{(n)}$ un triangolo i cui angoli opposti a queste sono per ordine $90°-(\alpha-(2n-2)\phi)$, $\alpha-(2n-1)\phi$, (proposizione 1.ª §§. 6, 7.): per conseguenza ha luogo la proporzione

$$p^{(n)} : q^{(n)} = \text{sen.}(\alpha-(2n-2)\phi) : \text{sen.}(\alpha-(2n-1)\phi).$$

Ma dal §. 8 proposizione 2.ª hassi ancora

$$a : p^{(n)} = \text{sen.}(\alpha-(2n-1)\phi) : \text{sen. } \alpha :$$

dunque

$$a : q^{(n)} = \text{sen.}(\alpha-(2n-2)\phi) : \text{sen.}\alpha ;$$

e quindi

$$q^{(n)} = \frac{a\,\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\alpha-(2n-2)\phi)}.$$

Adesso non resta che di fare successivamente n uguale ad 1, 2, 3, 4, ec. onde ricavare i valori di q', q'', q''', q^{iv}, ec.

17. Anche questi si possono costruire assai facilmente. Descritto col centro A (*Fig.* 2.) e raggio arbitrario l' arco yzx, facciansi gli archi za', $a'b'$, $b'c'$, ec. eguali tutti ad ya, che le rette AzB, Aa'C, Ab'D, ec. terminate nella BR.... costituiranno i detti valori.

18. Ritenuta Ax parallela a BR....., i punti d' incontro d' un raggio coll' asse, se si escluda il punto B, saranno tanti quante sono le volte che l' arco ya è contenuto nell' altro zax, se avvi un residuo, e se questo manca, saranno tante quante sono queste volte medesime meno *una* : per conseguenza il numero totale de' punti di segamento del raggio coll' asse sarà dato da

$$\frac{a}{2\varphi}$$

se questa non è che una frazione apparente; ovvero dal numero degl' interi contenuti in essa frazione accresciuto di *uno*. Nel caso che a sia divisibile esattamente per 2φ il raggio viene per ultimo riflesso parallelamente all' asse; altrimenti lo è per modo che si segano i loro prolungamenti.

19. *Osservazione* 1. Quì pure si ricordi la osservazione II. della proposizione antecedente, §. 14.

20. *Coroll.* Dalla *fig.* 2. si hanno le distanze de' punti in cui avvengono due successive riflessioni del raggio, non che le distanze di tali punti da quello, in cui resta segato l' asse dal raggio stesso, quando dopo la prima di queste riflessioni va per subire la seconda. Infatti la retta RS è la distanza del primo punto d'incidenza dal secondo; la ST quella del punto della seconda incidenza dall' altro della terza; ecc. e le RC, CS sono le distanze del secondo punto comune all'asse ed al raggio dalla prima e seconda incidenza; le SD, DT sono le distanze dal terzo punto d' incontro del raggio coll' asse dai punti della seconda e terza incidenza, ecc. In som-

ma i punti R, S, T ecc. sono quelli ove il raggio rettilineo BR . . . è obbligato ad inflettersi in causa delle pareti della tromba; ed i punti C, D, ecc. sono quelli nè quali in conseguenza delle inflessioni sega e risega l' asse.

21. *Osservazione* II. Il limite che separa i raggi sonori che escono da un' apertura da quelli che escono dall' altra (§. 13.), separa pure que' raggi, che segano l' asse da una banda del centro fonico da quelli che lo segano dall'altra.

PROPOSIZIONE 4.ª

Tracciare il cammino seguito da un dato raggio.

22. I valori delle p', p'', p''', ecc. oppure quelli delle q', q'', q''' ec. e le corrispondenti costruzioni somministrano una maniera assai facile per la soluzione del presente problema: preferisco però quella che deducesi dal principio che passo a stabilire.

23. Dalla proposione 2. §. 8. si ricava

$$p^{(n)} \text{sen}\,(a - (2n - 1)\varphi) = a\,\text{sen}.a.$$

Ma il primo membro di questa eguaglianza rappresenta la distanza del vertice A della tromba dalla direzione, che prende il raggio sonoro per la n^{esima} riflessione; ed il secondo membro è costante: *per quante volte* adunque *venga un raggio riflesso, la sua direzione è sempre egualmente distante dal vertice del portavoce.*

24. Il cammino per conseguenza seguito dal raggio BR (*Fig.* 3.) si può graficamente determinare nel modo seguente. Si conduca A*l* perpendicolare ad RB . . , e, fatto centro in A, si descriva quel cerchio che ha per raggio la A*l* medesima. Poi si faccia R*m* eguale ad R*l*, e si conduca la *m*RS; si faccia S*n* eguale ad S*m*, e si conduca *n*ST; si faccia T*o* eguale a T*n*, e si conduca *o*TU; e così di seguito, che la spez-

zata BRSTU.. .rappresenterà il cammino richiesto. E ciò perchè i suoi lati riescono tutti tangenti al circolo *nlmo*; e quindi equidistanti dall'A.

25. Chi volesse rendere tale costruzione indipendente dalla trigonometria, di cui mi sono servito, altro non dovrebbe che rimarcare, che gli angoli *l*R*m*, *m*S*n*, *n*T*o*, ecc., sono divisi pel mezzo dalle rette AP..., AQ.....

26. *Osservazione.* Detti *g*, *h* i punti d'incontro del cerchio *nlmo* colle AP.... AQ.. , si vede chiaramente che l'*h* è punto di mezzo degli archi *lm*, *no*, *pq*, ecc. e l'altro *g* lo è degli *nm*, *po*, *rq*, ecc. per conseguenza ciascuno degli archi *mo*, *oq*, *qs*, ecc. *ln*, *np*, *pr*, ecc. è doppio di *gh*. Da quì potrebbe dedursi una nuova soluzione del problema proposto molto semplice ed elegante. Le operazioni però necessarie per la determinazione del cammino di un raggio dovrebbero ripetersi tutte per la determinazione di quello di un altro: in seguito ne indicherò una, che, vincendo questa in semplicità ed eleganza, serve per qualsivoglia raggio.

Proposizione 5.ª

Determinare tutti que' raggi sonori, che, dopo le opportune riflessioni, incontrano la tromba in un punto individuato.

27. La distanza del punto dato dal vertice del cono, di cui la tromba fa parte, sia *b*, ed i simboli *a*, α, φ, *n*, abbiano gli stessi significati loro dati nelle proposizioni antecedenti.

28. Dal §. 8. proposizione 2.ª si ricava per la determinazione dell'α ora incognito, l'equazione.

$$b = \frac{a\,\text{sen}.\alpha}{\text{sen}.(\alpha-(2n-1)\varphi)},$$

che dà, dopo poche riduzioni,

$$(b\cos.(2n-1)\varphi-a)\text{sen}.\alpha = b\,\text{sen}.(2n-1)\varphi\cos.\alpha,$$

ed in ultimo

$$\text{sen}.\alpha = \frac{b\,\text{sen}.(2n-1)\phi}{\sqrt{(a^2-2ab\cos.(2n-1)\phi+b^2)}}.$$

Se adesso facciasi $n=1$ si troverà il seno dell' angolo, che fa coll' asse della tromba il raggio, che giunge direttamente al punto dato; se facciasi $n=2$, avrassi il seno di quell' angolo, che fa col detto asse il raggio, che arriva al punto dato dopo di aver subita una riflessione; se facciasi $n=3$, avrassi il seno dell' inclinazione coll' asse di quel raggio, che arriva al punto dato dopo d' essere stato riflesso due volte; e così di seguito. Si noti però che que' raggi i quali dovranno arrivare al punto dato dopo d' essere stati riflessi un numero pari di volte, dovranno subire la prima riflessione contro quel lato della tromba in cui trovasi il punto medesimo; e quelli che vi dovranno arrivare dopo un numero dispari di riflessioni, la prima dovranno subirla contro del lato opposto.

29. Ecco come graficamente si possono trovare i raggi in questione. Sia C il punto dato (*Fig.* 4). Descritto col centro A e col raggio AC il cerchio $caCb'$ si facciano gli archi Ca, ab, cb, ec., Ca', $a'b'$, $b'c'$, ecc. tutti eguali al doppio del CG, la retta BC indicherà il raggio che giugne direttamente al punto C; la Ba quello che vi arriva dopo una riflessione; la Ba' quello che vi arriva dopo due riflessioni; la Bb l' altro che vi arriva dopo tre; e così di seguito.

30. Dimostrerò la verità di quanto ho asserito per riguardo ad uno de' raggi ora determinati; il ragionamento, che farò per esso, potrà ripetersi per ciascuno degli altri. Se prendiamo ad esempio il raggio Ba, questo per giungere al punto C dopo una riflessione, dovrà fare coll' asse della tromba un angolo che abbia per seno (§. 28.)

$$\frac{b\,\text{sen}.3\phi}{\sqrt{(a^2-2ab\cos.3\phi+b^2)}}.$$

Ma condotta la Aa, dal triangolo ABa deduconsi le relazioni

$$Aa : Ba = \text{sen.}a\text{BO} : \text{sen.BA}a,$$

$$Ba = \sqrt{(\overline{AB}^2 - 2AB.Aa\cos.BAa + \overline{Aa}^2)}$$

dalle quali, fatte le opportune sostituzioni, ricavasi

$$\text{sen.}a\text{BO} = \frac{b\,\text{sen.}3\phi}{\sqrt{(a^2 - 2ab\cos.3\phi + b^2)}} :$$

dunque è vero quanto ho dichiarato.

31. Conducasi la HB... perpendicolare alla AQ, e la Bk perpendicolare alla AP. I raggi che perverranno al punto C dopo un numero dispari di riflessioni saranno tanti quante volte Cab...., esteso sino all' incontro della BH..., contiene l'arco Ca; e quelli che vi giungeranno dopo un numero pari di riflessioni tanti, quante sono le volte che l'arco C$a'b'$, esteso sino all' incontro della Bk..., contiene l' arco suddetto Ca, o l' altro Ca'. Si potrebbero assegnare questi numeri in funzione delle quantità a, b, ϕ, da cui dipendono, ma tale funzione non è abbastanza semplice per essere di qualche eleganza, meno poi per servirsene.

32. *Coroll.* Dicansi α, α' gli angoli d' inclinazione coll'asse di due raggi, che dopo le convenienti riflessioni, incontrano la tromba in uno stesso punto; ed ω, ω', i loro angoli di inclinazione colla tromba in questo punto medesimo. Ritenuto che b rappresenti la distanza di esso dal vertice del portavoce, avrassi (§. 8.)

$$b = \frac{a\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\omega}, \quad b = \frac{a\,\text{sen.}\alpha'}{\text{sen.}\omega'};$$

e quindi

$$\text{sen.}\alpha : \text{sen.}\omega = \text{sen.}\alpha' : \text{sen.}\omega'.$$

e questa proporzione include il teorema seguente: *il seno del-*

la prima inclinazione coll' asse d' uno qualsivoglia de' raggi che, dopo le convenienti riflessioni, incontrano la tromba in uno stesso punto, sta al coseno dell'angolo d' incidenza corrispondente a questo punto medesimo in un rapporto costante.

PROPOSIZIONE 6.ª

Trovare tutti quei raggi, che, dopo le opportune riflessioni, segano l' asse in un medesimo punto.

33. Chiamata c la distanza del punto dato dal vertice A (*Fig.* 4), si ricava dal §. 16. proposizione 3ª.

$$c = \frac{a\,\text{sen}.\alpha}{\text{sen}(\alpha-(2n-2)\phi)};$$

d' onde, operando come al §. 28. proposizione 5.ª deducesi

$$\text{sen}.\,\alpha = \frac{c\,\text{sen}.(2n-2)\phi}{\sqrt{(a^2-2ac\cos.(2n-2)\phi+c^2)}}.$$

E ponendo in questa formola successivamente n uguale 2, 3, 4 ecc. si otterranno i seni degli angoli che fanno coll' asse i raggi che l'incontrano nel punto dato dopo una, due tre, ec. riflessioni.

34. Sia O (*Fig.* 4) il punto dato. Descritto col centro A e raggio AO il cerchio $b'Ob$, facciansi gli archi Om, mn, np ec. eguali tutti a CG, che Bm, Bn, Bp, ecc. passeranno per O, il primo dopo una riflessione, il secondo dopo due, il terzo dopo tre, e così via via. È facile l' accorgersi che ciascun raggio Bm, Bn, ecc. ha il suo corrispondente che incontra il lato AP.

35. La dimostrazione di questa costruzione è simile affato a quella data per la costruzione indicata al §. 30. della proposizione antecedente.

36. Il numero de' raggi, che, dopo le occorrenti rifles-

sioni, passano per O è doppio del numero delle volte che l'arco OI contiene l'altro CG, trascurate le frazioni. Quì non ho compreso il raggio che vi arriva direttamente.

37. *Coroll.* Se dicansi α, α' gli angoli che fanno coll'asse, quando emanano dal centro fonico, due raggi che finalmente passano per O, e ψ, ψ' gli angoli che dessi fanno coll' asse medesimo in questo punto; avrassi, a somiglianza del §. 32. proposizione antecedente

$$\text{sen.}\alpha : \text{sen.}\psi = \text{sen.}\alpha' : \text{sen.}\psi' :$$

d' onde deducesi un teorema affatto analogo a quello che là si è dedotto. Ed ha pure luogo per rispetto all' asse un teorema simile a quello del §. 12.

38. *Osservazione.* Per la susistenza della scritta proporzione non è necessario che i due raggi si trovino nello stesso piano. Quanto poi si è detto per rispetto alla sezione MNPQ può riferirsi a qualunque altra sezione analoga (§. 4.): per cui tutti i raggi sonori che arrivano al punto O dopo le debite riflessioni costituiscono, emanando dal centro fonico, tante superficie coniche quante sono le B*m*, B*n*, B*p* ec.

Proposizione 7.ª

Determinare quei raggi sonori che escono dal portavoce paralleli all' asse di esso.

39. Comincieremo dalla determinazione di quelli, fra i raggi richiesti, che trovansi nella sezione fatta per l' asse MNPQ; anzi da prima ci limiteremo a quei soli che subiscono la prima riflessione contro il lato AQ (*Fig.* 5.)

40. Al §. 18. proposizione 3.ª si è notato, che vengono riflessi appunto paralleli all' asse del portavoce tutti quei raggi che fanno, emanando dal centro fonico, coll' asse medesimo un angolo divisibile esattamente per 2ϕ. Ma per veder meglio come ciò sia, e molto più per assicurarci che dietro

una tale condizione si trovano tutti quei raggi che finalmente escono nel modo ora voluto, dicasi al solito α l'angolo della prima inclinazione verso la tromba di quel raggio che prende alla n^{esima} riflessione la direzione richiesta. L'angolo d'inclinazione verso la tromba corrispondente a questa riflessione verrà quindi espresso da $\alpha-(2n-1)\phi$ (§. 6. proposizione 1.ª); ma lo stesso dev' essere evidentemente eguale a ϕ: dunque dee sussistere l' eguaglianza

$$\alpha-(2n-1)\phi=\phi;$$

e però dev' essere necessariamente

$$\alpha=2n\phi.$$

Ed a questo risultamento poteasi arrivare anche più presto, osservando che pel caso presente dev' essere (§. 7. proposione 1.ª)

$$\alpha-2n\phi=0.$$

Da quì si vede che i raggi che sono riflessi alla prima, alla seconda, alla terza, alla quarta, ecc. riflessione parallelamente all' asse, fanno da principio con questo ordinatamente gli angoli 2ϕ, 4ϕ, 6ϕ, 8ϕ, ec. ovvero, ponendo $2\phi=\beta$, gli angoli β, 2β, 3β, 4β, ecc.

41. La grafica determinazione degli stessi è semplicissima. Fatto centro in B (*Fig.* 5.) con raggio BA descrivasi l' arco circolare CI, terminante all'asse AO, ed alla BHI perpendicolare alla AQ...; e su questo si segnino gli archi DE, EF, FG, ec. tutti eguali al CD: che i raggi BD, BeE, BfF, ec. saranno evidentemente i richiesti.

42. L' angolo CBI vale $90°+\phi$: saranno adunque tanti i raggi ora indicati quante volte 2ϕ è contenuto in $90°+\phi$, non avuto riguardo alle frazioni. Uno di tali raggi vi sarà sempre; perchè ve ne siano due, dovrà $90°+\phi$ non esser minore di 4ϕ, ossia non dovrà ϕ superare 30°; ve ne saranno

tre, se φ non sarà maggiore di 18.°, ed in generale ve ne saranno n, purchè non sia φ maggiore di $\frac{90°}{2n-1}$: sempre inteso, come si è rimarcato al §. 14, che il portavoce sia di lunghezza indefinita. Per la quale cosa si vede quanto importa per la bontà d' un portavoce conico, ch' esso sia molto lungo, e che l' angolo fatto coll' asse dalla retta generatrice la sua superficie sia molto piccolo.

43. *Coroll.* Le distanze dal vertice del cono di que' punti che riflettono i raggi paralleli all'asse alla prima, alla seconda, alla terza, ec. riflessione, sono per ordine (§. 8. proposizione 2.ª)

$$\frac{a\,\text{sen}.\beta}{\text{sen}.\varphi},\ \frac{a\,\text{sen}.2\beta}{\text{sen}.\varphi},\ \frac{a\,\text{sen}.3\beta}{\text{sen}.\varphi},\ \frac{a\,\text{sen}.4\beta}{\text{sen}.\varphi},\ \text{ecc.}$$

per cui costituiscono una serie di rapporti eguale a quella costituita dai seni degli angoli β, 2β, 3β, 4β, ecc.

44. *Osserv.* 1. Quanto accade pel lato AQ..., accade pure per ogni altro lato: dunqne sulla superficie del portavoce avvi una periferia circolare da ciascun punto della quale viene riflesso parallelamente all' asse un raggio che ad esso punto proviene direttamente dal centro fonico; avvene una seconda da ciascun punto della quale è riflesso parallelamente all' asse uno di que' raggi che vi arrivano dopo d' essere stati riflessi una volta; avvene una terza da ciascun punto della quale viene riflesso parallelamente all'asse uno di quei raggi che vi arrivano dopo di avere subite due riflessioni; e così di seguito.

45. Tali periferie circolari sono tante quante volte 2φ è contenuto in $90°+\varphi$ (§. 42); e le loro distanze dal vertice della tromba, e quindi anche i loro raggi sono ordinatamente proporzionali alle quantità (§. 43.)

$$\text{sen}\beta,\ \text{sen}.2\beta,\ \text{sen}.3\beta,\ \text{sen}4\beta,\ \text{ecc.}:$$

laonde *i punti della parete interna di un portavoce conico, che riflettono parallelamente all' asse di questo que' raggi sonori emananti da un centro fonico posto sull' asse stesso, i quali prendono tale direzione alla prima, alla seconda, alla terza, ec. riflessione, costituiscono altrettante periferie circolari, i cui semidiametri sono per ordine geometricamente proporzionali ai seni di angoli, che formano una progressione aritmetica, avente per primo termine e per differenza l'angolo compreso da due lati opposti del portavoce suddetto.*

46. Tali semidiametri ci vengono dati per conseguenza dalle perpendicolari all' asse D*m*, E*n*, F*p*, ecc. E le posizioni delle dette periferie circolari verrebbero determinate dai punti d' incontro della AQ... colle parallele all' asse condotte per D, E, F, G, ecc. Le periferie medesime vanno di mano in mano crescendo perchè così avviene delle nominate perpendicolari; l' ultima per altro potrebbe eguagliare la penultima e confondersi con essa; il che avverrebbe quando l'arco CI contenesse un numero esatto di volte il CD.

47. Quella delle parallele all' asse, che incontra la AQ... a maggiore distanza dal vertice A, passa per x punto determinato col fare l' arco Ix eguale alla metà del CD; poichè la xB risulta perpendicolare alla BO. Perchè dunque debbano escire dal portavoce parallelamente all' asse tutti quei raggi, pei quali ciò è possibile, basterà che il portavoce abbia la lunghezza da questa parallela assegnata. La detta lunghezza misurata sull' asse incominciando in A è

$$a \cot. \phi.$$

Essa è tanto minore quanto più il centro fonico è vicino al vertice A: cosicchè si può costruire il portavoce assai breve, senza soffrire alcuna perdita relativamente alla quantità de' raggi sonori paralleli all' asse; ciò che è molto vantaggioso. Deesi per altro avvertire, che quanto più si accorcia la tromba, tanto più riescono ravvicinate fra loro le superficie cilin-

driche costituite dai detti raggi, la quale cosa fino ad un certo limite giova al migliore conseguimento dell' effetto proprio dello stromento in discorso; ma poi riesce dannosa, in quanto che rende troppo angusto lo spazio, entro il quale il nominato effetto può trovar luogo.

48. *Osservazione*. II. Anche quei punti che riflettono per la prima volta quei raggi che dopo un egual numero di riflessioni riescono paralleli all' asse costituiscono una periferia circolare. E propriamente que' punti che riflettono per la prima volta i raggi che riescono paralleli all'asse alla prima, alla seconda, alla terza, ecc. riflessione, costituiscono per ordine le circonferenze generate dai punti D, *e*, *f*, *g* ecc. quando la AQ... s' aggira intorno alla AO... per generare la superficie del portavoce; cosicchè quei raggi che poi riesciranno paralleli all' asse formano da prima tante superficie coniche. La prima determina quello spazio che comprende tutti que' raggi sonori, i quali non incontrano l' asse che una sola volta, cioè in B; tra la prima e la seconda sono compresi tutti quei raggi che lo segano anche altrove; tra la seconda e la terza quelli che lo segano due volte; ec. (§. 11.)

49. *Osservazione* III. Se risguardiamo per prima tra le periferie ora considerate quella che è più vicina al punto A, si vede che l' ultima di esse coincide colla prima di quelle contemplate al §. 44.

Proposizione 8.ª

Determinare quei raggi che dopo le opportune riflessioni, riescono paralleli ad un dato lato del portavoce.

50. La soluzione di questo problema è rinchiusa nel §. 10, dove si nota che escono dalla tromba paralleli al lato opposto a quello, che li riflette per l' ultima volta, tutti quei raggi che fanno da principio coll' asse un tal angolo α, che riesce $\alpha+\varphi$ divisibile esattamente per 2φ. Ed infatti l'angolo sot-

to del quale viene riflesso alla n^{esima} riflessione il raggio di cui l'inclinazione coll'asse è a viene espresso da $a-(2n-1)\varphi$ (§. 6.); ma lo stesso dev' essere eguale a 2φ, deve aversi per conseguenza

$$a-(2n-1)\varphi=2\varphi:$$

e quindi

$$a=(2n+1)\varphi.$$

Gli angoli adunque che dovrà fare un raggio coll' asse, per essere riflesso parallelamente ad un lato della tromba alla prima, alla seconda, alla terza, ecc. riflessione, sono

$$3\varphi,\ 5\varphi,\ 7\varphi,\ 9\varphi,\ \text{ecc.}$$

51. Eccone la costruzione. Il lato dato sia (*Fig.* 6.) l'ANP..., ed al solito l'AO... rappresenti l'asse dello stromento, B il centro fonico: fatto centro in questo descrivasi il cerchio AEFD, e si conduca BF parallela ad AQ. Facciansi gli archi Fa, ac, ce, ecc. Fb, bd, df, ecc. eguali al DE; ed i raggi Baa, Bβb, Bγc, Bδd, ecc. saranno i domandati.

52. *Osservazione.* Quì avrebbero luogo alcune considerazioni; ma stimo bene di ommetterle, poichè non sarebbero forse che ripetizioni di altre già fatte altrove, attese le varie esposte in seguito alle proposizioni fin ora trattate.

PROPOSIZIONE 9.ª

Determinare quel punto dal quale si possono considerare direttamente emananti tutti i raggi sonori posti in uno stesso piano, i quali hanno sofferto un dato numero di riflessioni.

53. Questa proposizione non è che un caso particolare di quella che ha condotto Lambert alla sua *sfera sonora*.

Io la voglio esporre per completare quanto fin quì sono venuto dicendo, ma più ancora per le conseguenze che ne dedurrò.

54. Col centro A (*Fig.* 7.) e raggio AB descrivasi il cerchio δBd; i punti dove lo stesso sega i lati AP...., AQ.... della tromba siano m, n. Si facciano gli archi Ba, ab, bc, cd ecc. Bα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ecc. eguali all' mn. Considerando solamente i raggi che incontrano a dirittura il lato AQ...., il punto a è quello dal quale si possono risguardare come direttamente emananti tutti i raggi che hanno subita una riflessione; e il β quello dal quale si possono supporre emananti direttamente tutti i raggi che sono stati riflessi due volte; il c quello dal quale si possono ritenere emananti direttamente tutti i raggi che hanno subito tre riflessioni ecc. ecc. Difatti i punti β, a sono egualmente distanti dalla retta AQ; gli a, β sono egualmente distanti dalla AP; β, c sono equidistanti dalla detta AQ; e così via, via.

I punti α, b, γ ecc. sono per la AP, cioè che gli a, β, c, ecc. abbiamo veduto essere per la AQ.

55. *Coroll.* I. Sia BR un raggio sonoro qualunque. Si conduca la aRS; indi la βST; poscia la cTU, ecc. che sarà tracciato il cammino seguito dal detto raggio (Proposizione 4.ª).

56. *Coroll.* II. Saranno con ciò costruiti gli angoli delle successive inclinazioni alla tromba del raggio stesso, non che le successive inclinazioni coll' asse (Proposizione 1.ª)

57. *Coroll.* III. Saranno pure determinati i punti ne' quali avvengono le riflessioni del raggio dato (Proposizione 2.ª).

58. *Coroll.* IV. Non che quelli ne' quali esso sega l'asse (Proposizione 3.ª).

59. *Coroll.* V. Sia dato il punto U sul lato AP, od anche fuori, la retta BU indica il raggio che proviene a tal punto direttamente; e le aU, bU, cU, dU ecc. quelli che vi provengono dopo una, due, tre, ecc., riflessioni (Proposizione 5.ª).

60. *Coroll.* VI. E se fosse dato un punto X sull' asse, le rette aX, αX esprimerebbero i raggi che nel piano MNPQ ar-

Mem. Zamboni pag. 333.

Fig. 1

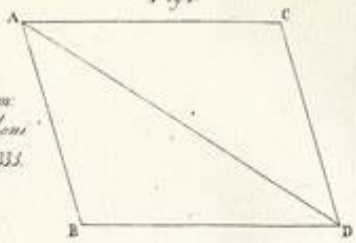


Fig. 2

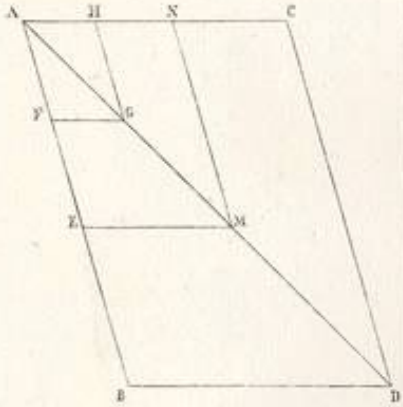


Fig. 3

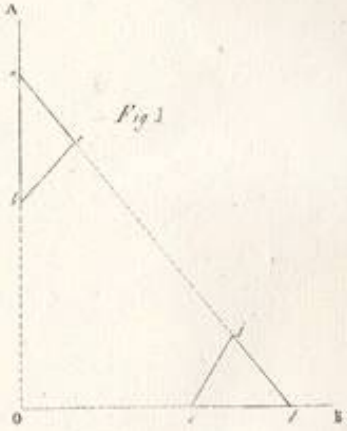


Fig. 4

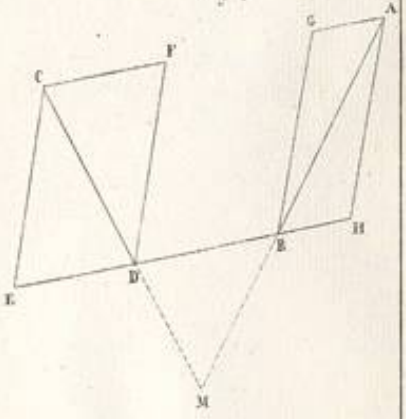


Fig. 1

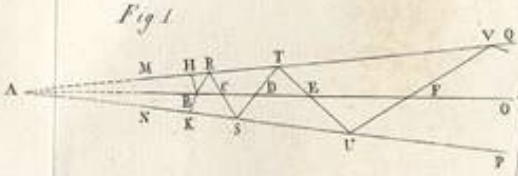


Fig. 2

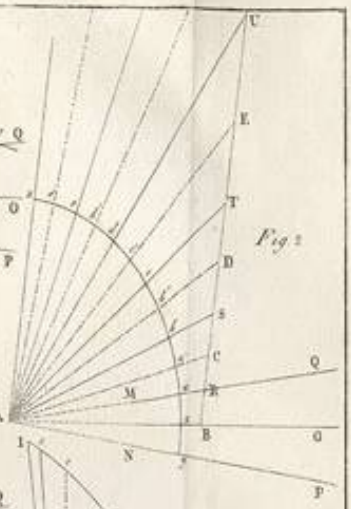


Fig. 3

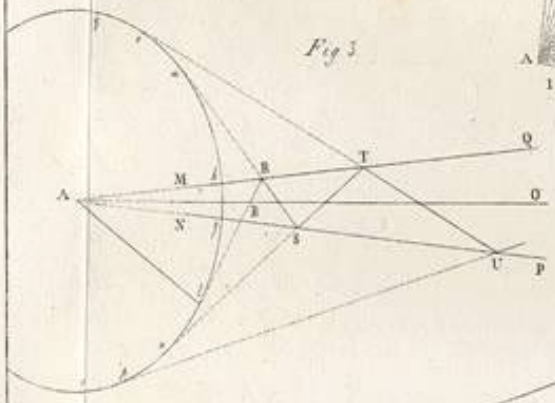


Fig. 4

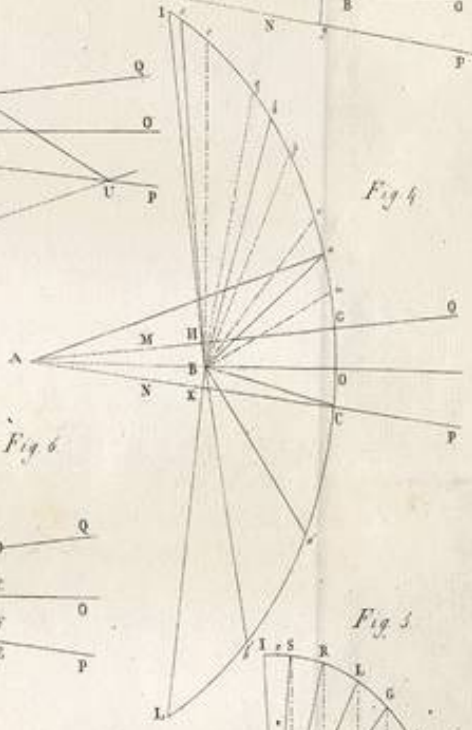


Fig. 6

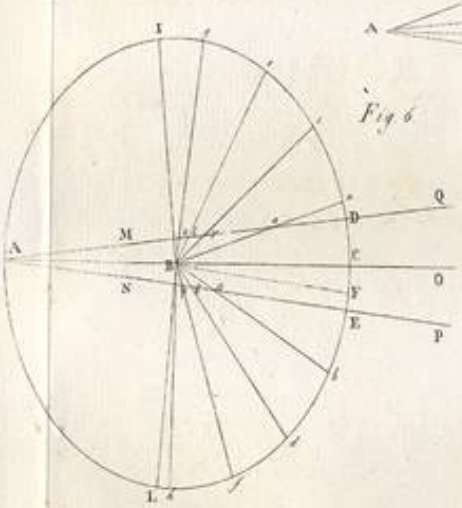


Fig. 5

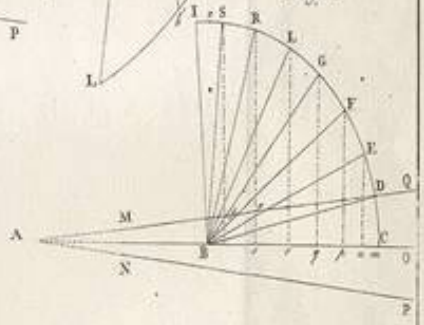
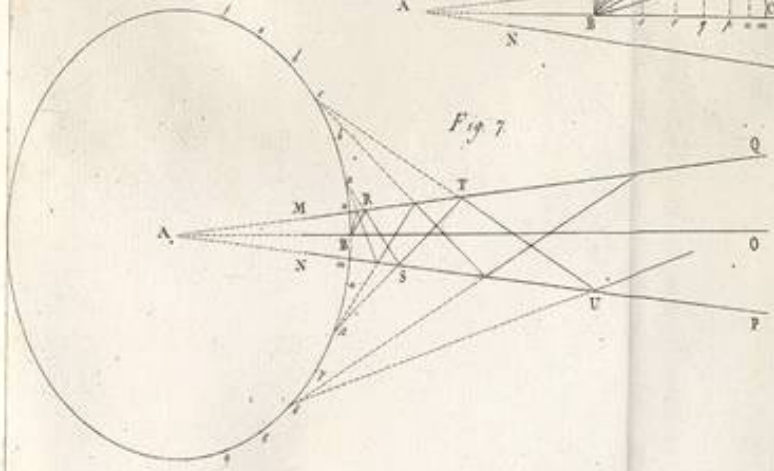


Fig. 7



rivano ad esso dopo una riflessione; le bX, βX quelli che vi arrivano dopo due, e così di seguito (Proposizione 6.ª).

61. *Coroll.* VII. Conducendo poi dai punti a, b, c, d...., α, β, γ, δ.... le parallele all'asse, si ottengono quei raggi che vengono riflessi parallelamente ad esso dopo una due, tre ec. riflessioni (Proposizione 7.ª)

62. *Coroll.* VIII. E conducendo da a, b, c, d.... le parallele al lato AP si hanno que' raggi, che dopo una, due, tre, ecc. riflessioni riescono paralleli al lato stesso (Proposizione 8.ª). Anzi potrebbonsi con altrettanta facilità determinare que' raggi che, dopo le necessarie riflessioni, risultano paralleli ad una data retta.

63. *Osservazione.* I. La presente semplicissima proposizione rinchiude adunque tutte le precedenti; essa è per questo molto rimarcabile. Credo però che nulla tolga a quel qualsiasi pregio che per avventura possono avere le soluzioni particolari date delle medesime, sia per le soluzioni in se stesse, sia per le conseguenze alle quali conducono.

64. *Osservazione* II. Tutte le cose poi dette fin quì si applicherebbero facilmente al caso che al centro fonico venisse sostituito un punto luminoso od altro centro di emanazioni sottoposte alla solita legge di riflessione. Ma quest'ultima proposizione in particolare guida per rispetto alla luce, alla dimostrazione del grazioso fenomeno presentato dal Caleidoscopio.