OSSERVAZIONI

INTORNO AD UN PARTICOLARE MOVIMENTO PRODOTTO DAL CALORE NE' LIVELLI A BOLLA D' ARIA.

MEMORIA

DEL SIG. DOTTOR GIUSEPPE BELLI

PROF. DI FISICA NELL' I. R. LICEO DI PORTA NUOVA DI MILANO

PRESENTATA

DAL SOCIO FRANCESCO CARLINI

ED APPROVATA

DAL SEGRETARIO ANTONIO LOMBARDI

Ricevuta adì 2. Novembre 1827.

1. Nel ripetere mesi sono alcune sperienze del Signor Guglielmo Libri relative al moto de' liquidi sui corpi riscaldati (1), mi venne al pensiero potersene fare un' applicazione ai livelli a bolla d' aria, nei quali applicando del calore lateralmente alla bolla parvemi che questa avrebbe dovuto muoversi ed avvicinarsi alla parte più riscaldata. Procuratomi pertanto uno di questi livelli ne feci l' esperimento, e con mia soddisfazione riuscì questo compiutamente secondo che io m' aspettava; intrapresi quindi alcune altre sperienze per verificare la spiegazione che io me ne era formata, ed anche queste riescirono conformente a ciò che io aveva immaginato. Parendomi ora che queste cose possano avere qualche novità e sieno atte a spargere nuova luce sulle irrego-

(1) *Annales de Chimie et de Physique* T. XXIX. (*an.* 1825), p. 57.

maginato. Parendomi ora che queste cose possano avere qualche novità e sieno atte a spargere nuova luce sulle irregolarità di questi strumenti, oltre a quanto venne già osservato da diligentissimi autori (1), ho sperato che potranno forse interessare il pubblico a cui le presento in questa Memoria.

Io dividerò questo mio lavoro in due parti; l' una puramente fisica, dove esporrò quelle sperienze colle quali io verificai il sopraccennato moto delle bolle dei livelli, e quelle altre con cui mi assicurai che la causa da me assegnata è veramente quella che produce il fenomeno; l' altra in vece matematica, dove mi sforzerò di mostrare, almeno in qualche parte, il modo con cui questa causa dà origine al fenomeno medesimo.

PARTE PRIMA

Sperienze sul moto prodotto dal calore nelle bolle de' livelli.

2. Volendo procedere in modo storico, secondo che si succedettero le idee, comincerò dall' esporre, benchè sia del genere di quelle del Sig. Libri, la esperienza che diede occasione alle altre.

Sperienza I.ª Ho presa una lamina rettangolare di ferro lisciata in una delle due faccie, l' ho collocata orizzontalmente colla superficie liscia al di sopra, e spalmata quindi leggermente d' olio e versatavi sopra una larga goccia di questo liquido, vi ho posta di sotto una lucerna accesa, riscaldando con questa la lamina lateralmente alla goccia. Ho veduto allora quest' ultima muoversi di un moto sensibilissimo, allontanandosi dalla parte riscaldata e dirigendosi verso la

(1) Vegansi nell'*Appendice alle Effemeridi Astronomiche di Milano per l' anno* 1827. due pregevoli Memorie su questo soggetto, l' una del Sig. Carlini, l' altra del Prof. Bianchi di Modena. E qui noterò, siccome cosa che s' attacca con quanto io avrò ad esporre, che il Sig. Carlini avverte in questo suo lavoro, p. 83., essere dovuto alla capillarità l' incurvamento o tondeggiamento delle bolle de' livelli alle loro due estremità.

fredda; e ciò secondo qualsivoglia verso, potendola far avanzare e retrocedere secondo che più mi piaceva, e senza che io avessi usata gran diligenza nell' orizzontare la lamina.

È facile a vedersi che questo fenomeno non si può attribuire al movimento dell' aria riscaldata, giacchè questo avrebbe in vece fatto muovere il liquido verso il luogo del maggior calore, ove l'aria riscaldata si innalzava chiamandone dell' altra dal lato più freddo; oltre a che l'innalzamento di quest' aria a chi vegga effettivamente il fenomeno, sembra lontano dal poter produrre nell' olio un moto così sensibile. E nemmeno può attribuirsi a sviluppo di vapore o d' altra sostanza aeriforme, che colla sua forza espansiva respinga in parte contraria la superficie liquida da cui proviene; perciocchè il fenomeno si mostra a temperature assai più basse di quello che basti per isviluppare sostanze aeriformi dall' olio. La vera cagione sembra essere una diminuzione dell'attrazione molecolare fra l' olio della goccia e la lamina già spalmata di questo liquido, in conseguenza del calore prodotto dalla lucerna sottoposta; o ciò che è lo stesso, una diminuzione nell' attrazione vicendevole delle molecole dell' olio. Non trovandosi più eguale questa attrazione tutto all' intorno della massa liquida, vien questa attratta più dall' una parte che dall' altra, e si muove verso la banda della maggiore attrazione cioè dove la lamina è più fredda (1).

3. Sperienza II.ª Ritenendo per vera una tale spiegazione, parvemi che prendendo un livello a bolla d' aria, e accostandovi da un lato un corpo riscaldato in guisa, che il tu-

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, T. XXIX. p. 58. Io mi scosto però alcun poco dalla spiegazione quivi esposta; giacchè ivi si dice essere la diminuzione d' attrazione fra la materia solida della lamina ed il liquido quella che produce l' effetto, ovvero anche una ripulsione fra le molecole liquide indotta dal calorico. A me non pare che nell' olio le molecole riscaldate si respingano, ma crederei che rimanga ancora fra di esse un resto di attrazione. E riguardo al tener conto della sola azione fra il solido ed il li-

bo divenisse più caldo dall' una banda della bolla che dall' altra, mi parve, dico, che essa bolla avrebbe dovuto abbandonare il suo posto e muoversi verso la parte del maggior calore. Perciocchè, ragionava io meco stesso, lo spirito di vino che è contenuto nel livello, tanto dal lato destro della bolla quanto dal sinistro tende per l' attrazione capillare ad avanzarsi verso il luogo occupato dalla bolla stessa (sia essa piena d' aria o di vapore alcoolico o anche vota, che di ciò a noi non importa): finchè però il calore è uniforme, essendo uguali le due contrarie tendenze non può essa decidersi nè verso l' una parte nè verso l' altra. Ma quando dall' un de' lati venga il tubo ad essere più caldo, ivi l' attrazione fra il velo liquido che sta aderente a tutta la sua interna superficie, e la rimanente massa di alcool, si farà più debole; in conseguenza di che venendo a riuscir maggiore la forza colla quale il liquido cerca di avanzarsi dalla banda opposta, succederà quivi un effettivo avanzamento; e intanto nella parte più calda il liquido si ritirerà, scorrendo sotto la bolla per recarsi dall' altro canto, e così questa bolla si trasporterà verso la parte riscaldata.

Mentre che io stava facendomi costruire il livello dall' abile macchinista della Specola di Brera Carlo Grindel, feci alcune prove coll' acqua, riempiendone quasi interamente un tubo di vetro, tanto che non restasse voto che lo spazio d' una piccola bolla, turando ambedue le estremità, e quindi cimentando l' apparecchio nel modo che aveva immaginato di fare col livello. Ma non ottenni verun risultamento;

quido, senza far anche concorrere uno scemamento d' attrazione fra le molecole liquide, non mi sembra che basti; poichè in tal caso dovrebbe venire sollecitato al moto il solo primo strato liquido aderente alla lamina, al quale solamente estendesi l' azione della lamina solida, e gli altri strati non verrebbero che portati meccanicamente da esso; ora questo primo strato è impedito assaissimo dall' attrito colla superficie della lamina stessa, e non si avrebbe moto sensibile se non vi fosse diminuzione d' attrazione anche fra le molecole dell' olio.

sia che l' attrazione capillare dell' acqua poco si alteri pei cangiamenti di temperatura, specialmente ne' gradi vicini alla congelazione ne' quali io sperimentava, sia che le parti di questo liquido non godano di una sufficiente scorrevolezza; intorno al che io non curai di occuparmi. Appena però che io feci l' esperienza col livello, con mia grata sorpresa riescimmi la cosa appuntino come io l' aveva concepita. Giacchè orizzontato lo strumento, ed accostatovi un corpo acceso, superiormente al tubo e da un fianco della bolla, vedeva questa in un modo chiarissimo dopo qualche minuto secondo muoversi verso la sorgente del calore. Posto il corpo acceso dall' altro lato della bolla io la faceva retrocedere; e ciò quante volte io voleva. Nè ciò punto avveniva o per dilatazione dell' alcool che ristringesse la bolla, o per allungamento della bolla permesso da dilatazione del tubo. Perchè la bolla movevasi tutta in corpo, trasportandosi verso la fonte calorifica sì colla estremità più vicina che colla più lontana, nè scorgevasi sensibile variazione nella di lei lunghezza. Laddove se il fenomeno fosse stato la conseguenza d' un raccorciamento della bolla, avrebbe dovuto la sua estremità più vicina retrocedere, e se fosse derivato da un allungamento, avrebbe dovuto retrocedere la più lontana; oltre a che gli spazii percorsi sarebbero stati in ambi i casi assai minori.

4. Sperienza III.ª Esposi il livello al Sole, orizzontandolo mentre la luce vi cadeva sopra tutta la sua lunghezza; e poscia intercettai i raggi da un lato della bolla, permettendoli solamente dall' altro. E a capo di circa un minuto vidi la bolla mettersi in moto, e lentamente incamminarsi verso la parte illuminata, quindi farsi il moto più spedito e continuare per lo spazio di parecchie linee. Se in seguito faceva che la luce cadesse dal lato opposto, la bolla a poco a poco si fermava, e dopo qualche momento di riposo tornava lentamente a retrocedere. Nelle quali prove per la miglior riuscita giovava che i raggi permessi non cadessero lontani dalla bolla ma ne illuminassero una porzione.

Parvemi allora di avere ritrovata una delle principali ragioni perchè questa specie di livelli non riescano sempre di un uso sicuro, e insieme alla dote di una squisita sensibilità abbiano anche l'accusa di una qualche irregolarità. Ciò si dovrebbe a mio giudizio attribuire alle parziali impressioni di caldo e di freddo, alle quali segnatamente nelle operazioni di campagna essi possono andare soggetti. Per dire il vero, di un tale difetto cagionato ne' livelli dal calore mi è stato assicurato da taluno aversi già contezza, ma però senza che se ne conosca (per quanto io potei sapere) nè la legge costante nè la spiegazione.

5. Sperienza IV.^{a} Restavami però un sospetto; dubitava cioè che questo moto della bolla potesse per avventura derivare da sollevamento del tubo nella parte più riscaldata, in conseguenza di una leggiera dilatazione del sostegno d'ottone da questa parte medesima. Per verificare la cosa, mi preparai un tubo di vetro piuttosto lungo, di tale diametro che una bolla aerea lunga circa un pollice non ne occupasse tutta la larghezza, chiuso da ambedue le estremità, e ripieno di spirito di vino fuori solamente d'un piccolo spazio lasciato voto, e postolo col mezzo sopra di un sostegno lo orizzontai, vale a dire lo disposi in guisa che la bolla si trovasse prossimamente nella parte media; il che per qualche leggiera concavità longitudinale interna facilmente ottenni. Avvicinato allora un corpo acceso, vidi nuovamente il consueto fenomeno; ed anzi ancor meglio, stantechè la maggiore lunghezza del tubo mi permetteva di condurre la bolla per maggiore spazio. Ed era curioso il vedere che la bolla si moveva con velocità crescente fin sotto al corpo acceso, e quivi si fermava; portato più innanzi questo corpo, ella restava per alcuni istanti in riposo; finchè elevatasi abbastanza la temperatura alla nuova posizione del corpo acceso medesimo, ella riprendeva nuovamente il suo moto. Nè quì si aveva dilatazione di sostegno che elevasse il tubo ; che anzi il calore dilatando il vetro alla parte superiore (giacchè a questa io appressava il corpo riscaldato) lo

incurvava necessariamente alcun poco e il deprimeva dal lato più caldo; effetto in vero leggerissimo, ma però tendente piuttosto ad opporsi al moto che appariva nella bolla anzi che a promuoverlo.

6. Vi sarebbero altre due cagioni, a cui potrebbe dubitarsi dovuto il fenomeno, e sono la diminuzione della densità del liquido operata dal calore, e l'allargamento del tubo prodotto dal medesimo. In quanto però alla prima, prescindendo dall'azione capillare e considerando la sola meccanica azione delle pressioni, non sarà difficile a dimostrarsi che ella dovrebbe produrre un effetto interamente contrario. Se infatti noi immagineremo che la bolla si cangi in un corpo solido della stessa figura, il quale per maggiore comodità di ragionamento supporremo ritenuto immobile; e che nella capacità del tubo vi abbia superiormente dall'una banda del luogo della bolla uno strato di liquido meno denso, sotto cui però siavi del liquido della stessa natura che dalla banda opposta, questo pezzo solido si troverà maggiormente premuto dalla parte dello strato men denso che dalla contraria. Per intenderlo si concepisca che tutta la massa liquida venga divisa in tanti sottili strati sovrapposti l'uno all'altro per mezzo di tanti piani orizzontali, de' quali i più bassi passino sotto la bolla e i più alti la taglino. È chiaro che in ciascuno degli strati infimi la pressione del liquido sarà la stessa sì alla destra che alla sinistra della bolla; e che questa uniformità dovrà mantenersi anche negli strati superiori, fino a che si continuerà ad aver liquido di una medesima natura; giacchè una tale pressione andrà bensì scemando dall'uno strato al sovrapposto, ma la diminuzione sarà la medesima sì dal lato destro che dal sinistro. Quando però dall'una banda si comincerà ad aver liquido più raro che dall'altra, allora la pressione non sarà più uniforme, venendo ad essere meno scemata dalla parte del liquido men denso che da quella del più denso; e così negli strati del liquido più raro si avrà maggior pressione, che in quelli dall'altra banda che corris-

pondono alla medesima altezza. E siccome questa differenza di pressione dee manifestarsi anche verso la superficie del corpo solido sostituito alla bolla, ne succederà che dalla azione simultanea delle laterali pressioni esso si troverà sollecitato verso gli strati più densi.

Potrebbe però alcuno riguardare la diminuzione della densità come cagione di indebolimento nell' attrazione capillare, ed attribuire direttamente a questo il nostro fenomeno, reputando quella solamente come sua causa remota. A ciò io non mi oppongo minimamente, bastandomi che il fenomeno si attribuisca come a sua causa prossima all' azione capillare diminuita.

7. In quanto poi all' allargamento del tubo, questo nel vero è favorevole al moto che scorgesi nella bolla, siccome quello che diminuisce la tendenza del liquido ad avanzarsi verso il posto della bolla stessa; ma mi pare troppo piccola cagione, ed incapace a produrre da se sola il fenomeno. Supponiamo per un esempio che il tubo sia del diametro interno di 4 linee, e che per la vicinanza del corpo riscaldato la sua temperatura si elevi di 20.° R., e ciò non solamente alla parte superiore, ma ben anche lateralmente all' asse e al di sotto. Essendo la dilatazione lineare del vetro corrispondente a questo elevamento di temperatura di $\frac{1}{4500}$, sarà l'aumento dell' interno diametro di $\frac{4}{4500}$ di linea, ossia di $\frac{1}{1125}$ di linea. Ora sono ben altro maggiori le irregolarità e le differenze di diametro che esistono nell' interno de' tubi anche fra punti vicini della loro lunghezza; specialmente se non sieno lavorati, come è appunto il caso dell' ultima sperienza. E da queste irregolarità e differenze verrebbe la bolla ad ogni tratto arrestata, se non fosse sollecitata da un' azione assai più possente che quella non è dei dilatamenti operati dal calore; giacchè essa bolla incontrerebbe spesso de' restringimenti assai maggiori, i quali annullerebbero e interromperebbero

l' effetto di quelle dilatazioni. All' incontro noi possiamo per mezzo del calore agevolmente condurre la bolla da un luogo ad un altro, e farle superare anche tutti que' restringimenti che dalle dette dilatazioni non vengono appianati.

8. Sperienza V.ª Per assicurarmi con prove dirette se veramente il calore diminuisca l' azione capillare dello spirito di vino, presi un sottil tubo di vetro con annessa una scala minutamente divisa, lo posi in un altro tubo più largo inferiormente chiuso, ove altresì versai dello spirito di vino a 0, 86 di gravità specifica, in tanta quantità che vi rimanessero tuffate sì le inferiori divisioni della scala, che la parte infima del tubo capillare. Quindi procuratami una bottiglietta trasparente e di largo collo, la riempii più volte, ora d' acqua fredda, ed ora di calda, la quale poi lasciava che lentamente si raffreddasse; a ciascuna volta vi introduceva il piccolo apparecchio; e dopo alquanti minuti di dimora, necessarii perchè potesse prendere la temperatura dell' acqua, osservava la differenza di livello dall' interno all' esterno del tubo capillare, quindi estratto l' apparecchio esplorava immediatamente con un termometro introdottovi la temperatura della bottiglia. Lascio da parte le prime due prove in cui non aveva praticate alcune cautele riconosciute necessarie dappoi; che sono di aspettare, come si è detto, alcuni minuti a far l' osservazione, e di osservar sempre il livello dello spirito anche all' esterno del tubo capillare perchè anche ivi si cangia colle temperature. I risultamenti delle altre sono i seguenti:

Temperature dell' alcool	Elevazioni nel tubo capillare
44.° Reaumur	Divisioni 22, 5
33.°	23
8.°	25
7.° ½	25
55.°	22
6.°	25.

Le divisioni della scala erano di una mezza linea ciascuna; ma questa cognizione poco importa, non avendo preso misura del diametro interno del sottil tubo. Non ho poi potuto notare le suddivisioni che ad occhio; quindi di un quarto di divisione in più o in meno non posso assicurare.

Rimane adunque dimostrato che il calore diminuisce effettivamente e in maniera molto sensibile l' attrazione capillare dell' alcool; perocchè non solamente la colonna liquida che si solleva in un dato cannello ad un' alta temperatura è di una minore lunghezza, ma è da notare altresì ch' ella è specificamente più leggiera. La parte poi che quì ha la dilatazione del tubo, è tanto piccola che non è da tenerne conto. Diffatto ad un innalzamento di temperatura di 50.° R. corrisponde un allargamento nel diametro di $\frac{50}{90000}$ all'incirca, ossia di circa $\frac{1}{1800}$; da cui deriverrebbe un abbassamento nella colonna di $\frac{1}{1800}$ del totale, che nel nostro caso corrisponderebbe a $\frac{22}{1800}$ ossia a $\frac{1}{82}$ di una divisione.

Lo scemamento dell' azione capillare a cagione del calore era già stato considerato dal Laplace, il quale giudicava che la colonna liquida sollevata in un dato tubo doveva tanto accorciarsi quanto diminuiva la sua densità (1). Dalle mie prove parrebbe che questa diminuzione d' altezza superi in proporzione quella della densità, e ne sia forse il doppio: su ciò però converrebbe instituire altri sperimenti più accurati. Comunque sia, la legge di una tale diminuzione mi sembra doversi attingere dai fatti, essendo cosa impossibile il veder chiaramente come si mutino le vicendevoli azioni delle minime particelle materiali in forza del calore.

(1) Laplace, *Théorie de l' action capillaire*, *Supplément* p. 38. Biot. *Traité de Physique*, edizione del 1816. in quattro volumi, T. I p. 454.

9. Sperienza VI.^{a} Per collegare questo risultamento colle sperienze del Sig. Libri, e con quella delle bolle de' livelli ho eseguite altre due sperienze, le quali non somministrano a vero dire veruna nuova cognizione, ma servono a rafforzare le cose precedenti. La prima sì fu di porre in un tubo di vetro del diametro di circa una linea una goccia di alcool che vi occupasse la lunghezza pressocchè d'un pollice, e orizzontato il tubo accostare un corpo riscaldato da un lato di essa, la quale dopo pochi istanti io vedeva allontanarsi dalla sorgente del calore. È facilissimo lo scorgere come questo fenomeno derivi dalla già ritrovata diminuzione nell'azion capillare al luogo riscaldato, e come d'altra parte esso si leghi colla prima sperienza dell' olio sulla lamina, e serva d'anello fra questi due fenomeni.

10. Sperienza VII.^{a} Ho poste da ultimo nel tubo della sperienza precedente due piccole masse d'alcool lunghe circa due pollici, e separate da un intervallo poco minore di un pollice. Reso ben orizzontale il tubo e stazionarie le due masse liquide colla bolla interposta, ho accostato ad una estremità di questa un corpo riscaldato, e come è facile a prevedersi, ho veduto la bolla farsi vicina a questo corpo, scostandosene la massa d' alcool contigua ed appressandovisi per la pressione dell'aria esteriore la massa più lontana. È chiarissima a vedersi la derivazione di questa sperienza dalla precedente, e come ella sia un secondo anello per condurre al fenomeno dei livelli a bolla d'aria.

11. Un'altra cosa ed assai importante or mi rimarrebbe, e sarebbe di determinare con esperienze dilicate sino a che punto possa arrivare questo effetto del calore negli ordinarii livelli; vale a dire, fatto che dalle due bande d'uno di essi vi abbiano due diverse ma costanti temperature, trovare di quanto verrebbe a spostarsi la bolla dal punto ove riposa quando ha una temperatura uniforme, e di quanto dovrebbe il livello deviarsi dalla direzione orizzontale per rimettere la bolla in quel punto. È chiaro che ciascun livello darebbe de'

risultamenti particolari, diversi da quelli di qualsivoglia altro. Si trarrebbe nulladimeno molto lume sulla grandezza di queste irregolarità, e sul grado di confidenza che si può avere nell'uso di questi strumenti. Similmente si troverebbe se a questa irregolarità possano attribuirsi alcuni fenomeni che da tutt'altra cagione sonosi fatti dipendere. E insieme si potrebbe indagare qual sia la migliore maniera di tenere custoditi i tubi de'livelli per garantirli da questa causa d'errore. Ma non avendo io apparecchi a ciò acconci, non posso che invitare quelli che li posseggono, a proseguire e a compiere queste ricerche. Intanto terminerò questa prima parte col raccomandare a que' pratici, i quali per propria esperienza non avessero imparata questa cautela, di ben difendere i loro livelli dalle parziali impressioni di caldo e di freddo, e di procurare che il calore a cui tali strumenti possono andare esposti, vi sia distribuito il più che si possa uniformemente.

CONSIDERAZIONE SUL MEDESIMO ARGOMENTO.

12. Ci rimarrebbe ora da esaminare circostanziatamente in qual modo operi la diminuzione dell' attrazione capillare per determinare la bolla a muoversi: giacchè vi è qualche differenza dal caso de' livelli a quello della sperienza VII., in questa la bolla occupava tutta la larghezza del tubo, e separava interamente le due masse liquide, la qual cosa ne' livelli non accade. Ma la ricerca è assai più difficile di quello che pare in sulle prime. Se noi supponessimo che dopo il riscaldamento parziale fosse la bolla per un istante immobile, ed avesse le due estremità di una medesima figura, e non si fosse cangiata la densità del liquido, sarebbe ovvio il vedere che lo scemamento dall' un de' lati dell' attrazione capillare renderebbe ivi minore la tendenza de' filetti liquidi orizzontali per inoltrarsi verso lo spazio vano; dal che risulterebbe disequilibrio e moto verso la sorgente calorifica. Ma durante il riscaldamento ha luogo diminuzione di densità che è da se sola una cagione di moto; inoltre al primo muoversi la figura della bolla si altera, e da questa mutazione di figura viene a modificarsi l' azione capillare che è un' altra causa produttrice del moto. Dal che nasce che quando si voglia considerare la bolla in moto, la questione è di una grande complicazione; e sarebbe già intrattabile anche quando fosse assai più semplice, come è ben noto a chi conosce i principii rigorosi dell' idrodinamica.

13. Si potrebbe semplificare il problema cercando la forma di equilibrio della bolla quando da un lato, senza cangiamento di densità, venisse a mutarsi l' azione capillare, e determinando la posizione che aver dovrebbe l' interna superficie del tubo affinchè la bolla potesse godere di una tal forma. In questo supposto è facile a vedersi che ad uguale altezza da un piano orizzontale, la superficie della bolla do-

vrebbe essere maggiormente incurvata, o avere minori i raggi di curvatura da quella banda ove essa attrazione capillare fosse scemata, affinchè l'incurvamento più grande venisse a risarcire un tale indebolimento (1). Si osservi la (fig. 1.ª) ove in B. si suppone diminuita pel calore l'energia dell'azione capillare. Il più grande incurvamento poi farebbe, che andando noi, da quel lato di essa superficie, a punti successivamente più elevati, arrivassimo più presto al suo ripiegamento all' indietro e a quello all'ingiù. E giacchè nel caso d'equilibrio dee superiormente la superficie del vetro esserle tangente, ne avverrà che questo vetro dovrà essere più basso dalla banda più riscaldata (fig. 2.ª); altrimenti la superficie della bolla si ripiegherebbe senza giungere a toccare quella del vetro, cosa che sarebbe incompatibile col supposto equilibrio (fig. 3.ª). Adunque perchè la bolla rimanga stazionaria dovrà il tubo essere alcun poco depresso dalla banda dell'azione capillare indebolita. Io non ho quì considerata la diminuzione del peso specifico del liquido, che ha luogo nella parte stata esposta al calore, nè l'incurvamento della bolla secondo il verso laterale, ma solamente quello della sezione media longitudinale. Mi sembra però difficile il voler trattare la quistione con tutto il rigore, anche in questo caso più facile dell'equilibrio.

(1) È noto che un filetto liquido terminato ad una superficie concava viene per l'azione capillare atratto verso l'esteriore spazio voto con una forza espressa in generale da

$$H.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$$

dove H è un coefficiente costante che dipende solamente dalla natura e dallo stato del liquido (dalla temperatura p. e., dalla pressione che ne può cangiare la densità ec.), ed R, R' sono i raggi di curvatura massimo e minimo di quella concavità nel punto ove termina il filetto liquido medesimo. Ora nel caso nostro l'equilibrio esige che la suddetta forza sia eguale per tutti i punti della superficie della bolla che sono ad uno stesso livello; d'altronde il coefficiente H da una banda, si suppone diminuito, dovrà dunque di necessità trovarsi ivi accresciuto l'altro fattore, e quindi diminuito per lo meno uno de' raggi R, R'.

14. Per facilitarla ancor più, onde si possa esaminarla più minutamente fingerò un caso ipotetico. Supporrò che la bolla di cui ACB (fig. 4.^{a}) è una sezione, non abbia la sua maggior dimensione nel verso di questa sezione stessa, ma nella direzione ad essa perpendicolare, e che la sua lunghezza sia molte volte più grande della larghezza; inoltre che la sua superficie, almeno nelle parti vicine alla sezione suddetta ACB, molto si approssimi a quella che verrebbe generata da una retta che scorresse su di essa sezione mantenendosi perpendicolare al di lei piano. Il qual caso si verificherebbe sensibilmente allorquando la massa liquida insieme colla bolla si trovasse coperta da una lamina di cristallo leggermente curvata, presentando inferiormente una cavità cilindrica di cui HIL posta nello stesso piano della ACB fosse una sezione perpendicolare all'asse. Ed esaminerò primieramente quale sia la forma della sezione ACB nel caso della uniformità della temperatura, quindi come ella venga alterata da una determinata variazione della temperatura stessa in una sua parte.

15. Nell'ipotesi ora stabilita, ed ammesso come si è detto che la temperatura del liquido sia uniforme, la curva ACB è facile a determinarsi, essendo quella medesima che si conosce già dai Meccanici sotto il nome di curva elastica (1). Per averne l' equazione riferiamola a due assi ortogonali OX, OY, l'uno orizzontale e l' altro verticale, e chiamiamo rispettivamente x, y le coordinate secondo questi assi di un punto K preso arbitrariamente in essa, ritenendo che le x crescano da sinistra a destra, e le y dal basso all'alto. Chiamiamo inoltre a l'altezza a cui può essere sollevato il liquido per l'azione capillare corrispondente alla concavità nel punto infimo C. E fissiamo l'origine delle coordinate in un punto O situato

(1) Laplace. Théorie de l'action capillaire, Lection I. §. 8.

verticalmente al di sotto di C, ad una distanza CO uguale ad a. Infine chiamiamo h^2 il prodotto costante del raggio di un tubo capillare per l'altezza a cui il nostro liquido vi si può sollevare; ben inteso che per tale altezza venga presa la lunghezza media della colonna liquida sollevata, ossia quella lunghezza che ella avrebbe se fosse ridotta ad un cilindro dello stesso diametro della interna cavità del tubo, la quale lunghezza poi si ottiene con una grande approssimazione aggiungendo il terzo del raggio del tubo (cioè della cavità interna di esso) all' asse della colonna liquida sollevata, preso quest' ultimo dal centro della base di essa sino al punto infimo della superiore concavità (1).

Poste queste cose la curva ACB sarà data dalla seguente equazione

$$(1) \qquad y=\frac{h^2}{2}\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right]$$

essendo R, R' i raggi di curvatura massimo e minimo della superficie della bolla al punto K.

Immaginiamo difatti che il liquido che sta d'intorno alla bolla comunichi con dell' altro perfettamente simile posto in un ampio recipiente, ove la superficie libera possa essere piana ed orizzontale, e dove la pressione dell' aria sovrapposta a questa superficie uguagli quella esercitata dall' aria che sta entro la bolla, il che sarebbe quello che avrebbe luogo, allorquando per mezzo di un tubo si ponesse in comunicazione l'aria della bolla con quella del recipiente. Concepiamo quindi nella massa liquida un filetto liquido contenuto in un esilissimo canaletto, il quale termini dall' una banda alla superficie della bolla in K, e dall' altra in un punto della superficie orizzontale entro al recipiente, terminando normalmente a queste superficie in ambedue i luoghi.

(1) Biot. Traité de Physique T. I. p. 450.

Per ciò che dimostra il Laplace (1) il filetto suddetto alla estremità che fa capo alla bolla viene dall' attrazione della massa liquida circostante sollecitato verso l'interno della massa stessa, essendo ivi concava la superficie del liquido, con una fòrza espressa da

$$K - \frac{H}{2}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right]$$

dove K, ed H sono due quanità costanti dipendenti dalla natura del liquido.

Alla estremità in vece ove termina alla superficie piana il filetto stesso, dall'attrazione della massa che gli sta intorno è chiamato verso l' interno con una forza

$$K.$$

Per le due azioni combinate adunque il filetto liquido è sollecitato a muoversi dalla superficie piana verso la concava con una forza

$$K - \left[K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]$$

ossia con una forza

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

la quale moltiplicata per la piccolissima sezione trasversale del filetto che noi supporremo uniforme per tutta la sua lunghezza e chiameremo k, darà la quantità

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)k$$

la quale è la pressione che il filetto liquido potrebbe esercitare sopra la sua base dalla parte della bolla. D'altra parte, ammettendo che l'origine delle coordinate sia al livello della superficie liquida nell'ampio recipiente, il filetto stesso è sollecitato dalla gravità a muoversi in verso opposto, con una forza la quale potrebbe produrre sulla sua base dalla banda del recipiente una pressione gky

(1) Théorie de l' action capillaire p. 17.

intendendo per g il peso d'una massa liquida del volume 1. Ora nel caso dell' equilibrio queste due forze

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)k, \quad gky$$

debbono essere uguali; dunque in questo caso abbiamo

$$gky=\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)k$$

ossia

$$(a) \qquad y=\frac{H}{2g}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Rimane ora a vedersi che sia la quantità costante $\frac{H}{g}$. Osserviamo a quest' oggetto

1.° Che in un tubo capillare e verticale di vetro o di sostanza atta a venir bagnata dal liquido di cui è questione, se noi chiamiamo A l' elevazione a cui nella immersione vi si alza il liquido stesso al di sopra del livello esteriore, prendendo questa elevazione dal punto infimo della interna superficie libera del liquido, e indichiamo con r il raggio di curvatura di questa superficie, nel punto massimo noi abbiamo

$$\frac{H}{gr}=A$$

ossia

$$\frac{H}{g}=Ar$$

donde ricaviamo che Ar è una quantità costante.

2.° Che chiamato r' il raggio del tubo, A' l' altezza media della colonna sollevata, vale a dire il quoziente che si ha dividendo il volume di questa colonna per l' area della sezione della cavità del tubo, le quantità

$$\frac{A'}{A}, \frac{r'}{r}$$

col successivo diminuirsi della r' vanno indefinitamente avvicinandosi all' unità, da cui possono venir a differire meno di ogni minima quantità assegnata. Diffatto le A, A' differiscono l' una dall' altra meno del raggio del tubo, e si rendono grandissime ai piccolissimi valori di questo raggio; e rispetto alle r, r' si può riflettere che ne' tubi esilissimi la concavità del liquido è vicinissima alla forma di un segmento sferico (*), e però nel caso nostro di un tubo umettabile è vicinissima alla forma emisferica. Abbiamo dunque

$$Ar = A'(1+\alpha) \, . \, r'(1+\beta)$$

essendo α, β due quantità reali che collo scemare di r' possono divenire minori di ogni data.

3.° Che il prodotto

$$A'r'$$

è anch' esso una quantità costante. Perocchè essendo la massa liquida sollevata proporzionale al contorno della sezione della cavità interna del tubo (**), si ha

$$\frac{A'\pi r r'}{2\pi r'} = \text{Costante}.$$

Dalle quali cose noi deduciamo che

$$Ar - A'r' = \text{costante}$$

$$A'r'(1+\alpha+\beta+\alpha\beta) - A'r' = A'r'(\alpha+\beta+\alpha\beta) = \text{costante}$$

$$\alpha+\beta+\alpha\beta = \text{Cost.}$$

Ma le tre quantità α, β, $\alpha\beta$ possono farsi divenire tutte tre minori di qualsivoglia quantità data; dunque

$$\text{Cost.} = 0$$

$$\text{costante} = 0$$

$$Ar = A'r'.$$

Ma

$$Ar = \frac{H}{g}$$

e la $A'r'$ si è convenuto superiormente di indicarla con h^2 dunque

$$\frac{H}{g} = h^2$$

(*) La-Place Theorie p. 25.

(**) Laplace. *Supplement à la theorie de l'action capillaire.* p. 14.

il qual valore di $\frac{H}{g}$ posto nell' Equazione (a) la riduce alla forma (1).

E quì osservo che essendosi posto l' origine delle coordinate a livello della superficie libera nel largo recipiente, viene il punto infimo C della sezione della bolla ad avere appunto per sua ordinata quella altezza, da noi denominata a, a cui può il liquido venir sollevato dall' azione capillare della concavità al punto infimo medesimo.

16. Venendo ora a trattare l' Equazione (1) noi possiamo osservare, che nel nostro caso uno de' raggi, k, k', cioè quello del cerchio osculatore perpendicolare al piano della curva ACB, è infinito, e l' altro è il raggio di curvatura della stessa ACB al punto K. Intendendo adunque che k sia il primo di questi raggi, k' il secondo, sarà

$$\frac{1}{R} = 0$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx}\right)}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

colla sostituzione de' quali valori l' Equazione (1) si cangia in quest' altra

$$(2) \qquad y = \frac{h^2}{2} \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Onde integrar questa, moltiplichiamola per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$; e dall' Equazione risultante integrati separatamente i due membri, immediatamente si otterrà

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{h^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} + \text{Cost.}$$

Per determinare la costante osserviamo che quando

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

si ha

$$y = a\,;$$

sarà dunque $\quad \frac{1}{2}a^2 = -\frac{h^2}{2} + \text{Cost.}$

donde cavato il valore della Costante, e sostituitolo nell' Equazione (b), dopo una facilissima riduzione si avrà

$$(3) \qquad \frac{a^2+h^2-y^2}{h^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Chiamiamo θ l' angolo d' inclinazione coll'orizzonte della toccante alla curva condotta pel punto K; si ha

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{tang.}\,\theta\,, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \cos.\,\theta$$

Sarà adunque altresì

$$(4) \qquad \cos.\,\theta = \frac{a^2+h^2-y^2}{h^2}$$

$$(5) \qquad y^2 = a^2 + h^2\,(\,1 - \cos.\,\theta\,)$$

In queste tre Equazioni (3), (4), (5) abbiamo due parametri a^2, h^2, l' uno de' quali, cioè h^2, è dato dalla qualità e dallo stato del liquido, l' altro cioè a^2 dipende dal volume e dalla posizione della bolla, e per un medesimo liquido può avere tutti i possibili valori dai minimi ai grandissimi. In generale quando la bolla è larghissima si ha a piccolissimo; quando in vece ella è strettissima (come succede allorquando il liquido trovasi frammezzo a due vicinissime lamine piane e parallele) si ha la a di un valore assai grande. Dati poi che siano a^2, h^2, la forma della curva trovasi interamente determinata.

Il Laplace (*) ha considerati i due casi quando $a = 0$, e quando a è molto grande. A noi in vece occorre quello di a assai piccolo ma non nullo. Intorno ad esso adunque ci tratterremo ne' paragrafi seguenti.

17. Incominceremo col soccorso dell' Equazione (5) a dare un' occhiata all' andamento della curva considerata estesa indefinitamente, e quale viene data dalla medesima Equazione. Supponendo pertanto che l' angolo θ partendo dalla grandezza zero vada successivamente aumentandosi di valore, troveremo che:

a) Quando $\theta = 0$, e quindi $\cos.\theta = 1$, si ha $y = a$; il che non è altro che quello che si stabilì superiormente quando si fissò l' origine delle coordinate.

b) Crescendo la θ da 0° a 90°, il suo senoverso

$$1 - \cos.\theta$$

cresce esso pure, e seco la y; la curva va adunque per questo tratto elevandosi, come è indicato nella forma dell' arco CN.

c) Quando $\theta = 90°$, si ha $\cos.\theta = 0$, $y = \sqrt{a^2 + h^2}$; e questo è il valore dell' ordinata corrispondente al punto N, ove la toccante della curva è verticale.

d) Seguitando la θ a crescere da 90° a 180°, continua a crescere anche il suo senoverso, e così anche la y; e ne nasce l' arco NB (fig. 5.ª) che mentre retrocede secondo le x, continua secondo le y ad elevarsi. Però il retrocedimento da N in B, vale a dire la corrispondente diminuzione nel valore della x è minore dell' aumento precedente da C fino ad N, per essere più piccoli i raggi di curvatura in BN che in CN, onde avviene che più prontamente si pieghi la curva nel ramo NB per passare dalla direzione verticale all' oriz-

(*) *Theorie de l'action capillaire* p. 30.

zontale, che non aveva fatto in CN per passare dalla direzione orizzontale alla verticale. L' ascissa adunque del punto B è necessariamente positiva.

e) Quando $\theta = 180°$, si ha $(1 - \cos.\theta) = 2, y = \sqrt{a^2 + 2h^2}$; e questo è il valore della y nel punto più elevato B.

f) Continuando la θ a crescere da 180° a 270°, il senoverso $(1 - \cos.\theta)$ torna a decrescere, ripassando dal valor 2 al valore 1; ed insieme diminuisce la y, venendo dalla grandezza $\sqrt{a^2 + 2h^2}$ alla grandezza $\sqrt{a^2 + h^2}$. E se ne ha l' arco BN', il quale si ripiega all' ingiù ed è uguale al BN ma diversamente situato, essendogli simmetrico rispetto ad una verticale condotta per B.

g) Coll' aumentarsi del θ da 270° a 360° si avrà l' arco N'D uguale e simmetrico con NC. Dopo ciò si tornerà ad avere un ramo DPE uguale in tutto a CNB e similmente situato; quindi un altro EP'F uguale al precedente ma posto simmetricamente, e così di seguito.

Se pertanto noi descriviamo alla sinistra del punto C il ramo CMA uguale a CNB, e simmetrico con esso rispetto ad una verticale che passi per C, la curva in questione supposta continuata come sarebbe voluto dalla sua Equazione, verrebbe formata da una serie indefinita di parti ACB, BDE, EFG, ec. tutte fra loro perfettamente simili ed uguali, co' punti superiori A, B, E, G, ec. situati in una stessa retta orizzontale ed equidistanti, e co' punti infimi C, D, F ec. pure equidistanti ed in una medesima orizzontale; essendo poi ciascuna di quelle parti simmetrica intorno alla verticale condotta pel suo punto infimo. In conseguenza di che tutto sarà conosciuto, quando siasi esaminata una sola delle suddette parti, p. e. la ACB.

L' altezza di questa, vale a dire la distanza del punto C dalla retta AB, distanza che costituisce altresì la grossezza della bolla supposta continuata da A fino in B è

$$(6) \qquad \sqrt{a^2 + 2h^2} - a$$

La differenza d' altezza fra i punti C, N, vale a dire l'altezza dell' arco CN è

$$(7)\qquad \sqrt{a^2+h^2}-a$$

e quella dell' arco NB è

$$(8)\qquad \sqrt{a^2+2h^2}-\sqrt{a^2+h^2}.$$

In quanto poi alla distanza de' punti A e B noi l' avremo dal calcolo seguente.

18. Risolvendo l' Equazione (3) relativamente a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, noi abbiamo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\sqrt{h^4-(a^2+h^2-y^2)^2}}{a^2+h^2-y^2}$$

da cui

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{a^2+h^2-y^2}{\sqrt{h^4-(a^2+h^2-y^2)^2}}$$

ed integrando

$$(9)\qquad x=\int dy\,.\,\frac{a^2+h^2-y^2}{\sqrt{h^4-(a^2+h^2-y^2)^2}}$$

dove converrà incominciar l' integrale da $y=a$.

Per avere il valore di questo integrale pel caso di a^2 assai piccolo a confronto di h^2, si trova comodo il ridurre la questione agli archi d' elisse, potendo allora servire all' uopo nostro que' metodi di approssimazione che sonosi immaginati per la rettificazione delle elissi a grande eccentricità.

Facciamo adunque, secondo c' insegna il Legendre

$$(10)\qquad y=\frac{a}{\sqrt{1-\frac{2h^2}{a^2+2h^2}\,\text{sen.}^2\phi}}$$

avremo

$$x=\int d\phi\left(\frac{dy}{d\phi}\right).\frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{h^2}{a^2+h^2-y^2}\right)^2-1\right]}}=$$

$$= \frac{h^2}{\sqrt{a^2+2h^2}} \int d\phi \,.\, \frac{1 - \frac{2(a^2+h^2)}{a^2+2h^2} \text{sen.}^2 \phi}{\left(1 - \frac{2h^2}{a^2+2h^2} \text{sen.}^2 \phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2+h^2}{\sqrt{a^2+2h^2)}} \int d\phi \,.\, \frac{1}{\sqrt{\frac{2h^2}{a^2+2h^2} \text{sen.}^2 \phi}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+2h^2}} \times$$

$$\int d\phi \,.\, \frac{1}{\left(1 - \frac{2h^2}{a^2+2h^2} \text{sen.}^2 \phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ed avendosi in generale

$$\int d\phi \,.\, \frac{1}{\left(\frac{1}{1-c^2\text{sen.}^2\phi)}\right)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{c^2 \text{sen.}\phi \cos.\phi}{(1-c^2)\sqrt{1-c^2\text{sen.}^2\phi}} + \frac{1}{1-c^2} \int d\phi . \sqrt{1 - c^2 \text{sen.}^2 \phi}$$

sarà nel nostro caso, fatta $c^2 = \frac{2h^2}{a^2+2h^2}$

$$(11) \quad x = \frac{2h^2}{\sqrt{a^2+2h^2}} \,.\, \frac{\text{sen.}\phi \cos.\phi}{\sqrt{1 - \frac{2h^2}{a^2+2h^2} \text{sen.}^2 \phi}} - \sqrt{a^2 + 2h^2} . \times$$

$$\int d\phi \sqrt{1 - \frac{2h^2}{a^2+2h^2} \text{sen.}^2 \phi} + \frac{a^2+h^2}{\sqrt{a^2+2h^2}} \int d\phi \,.\, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2h^2}{a^2+2h^2} \text{sen.}^2 \phi}}$$

Inoltre per ridurre i trascendenti della forma

$$\int d\phi \,.\, \frac{1}{\sqrt{1-c^2\text{sen.}^2\phi}}$$

a quelli della forma

$$\int d\phi . \sqrt{1 - c^2 \text{sen.}^2 \phi}$$

noi abbiamo la formola

$$(c) \quad \int d\phi \,.\, \frac{1}{\sqrt{1-c^2\text{sen.}^2\phi}} = \frac{2}{1-c^2} \int d\phi . \sqrt{1-c^2 \text{sen.}^2 \phi} + \frac{2c}{1-c^2} \text{sen.}\phi$$

$$- \frac{2}{1-c} \int d\psi \,.\, \sqrt{1 - \frac{4c}{(1+c)^2} \text{sen.}^2 \psi}$$

dove

(*d*) $$\cos.2\psi = \cos.\phi\sqrt{1 - c^2.\mathrm{sen.}^2\phi} - c.\mathrm{sen.}^2\phi$$

come si può facilmente verificare prendendo la derivata dell' Equazione (*c*) rispetto a ϕ, e sostituendo nell' ultimo termine del secondo membro in luogo di

$$\left(\frac{d\psi}{d\phi}\right), \quad \sqrt{1 - \frac{4c}{(1+c)^2}\ \mathrm{sen.}^2\,\psi}$$

i loro valori ricavati dalla (*d*) che sono rispettivamente

$$\frac{\sqrt{1-c^2\mathrm{sen.}^2\phi}+c\cos.\phi}{2\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen.}^2\phi)}}, \quad \frac{\sqrt{1-c^2\mathrm{sen.}^2\phi}+c\cos.\phi}{1+c}.$$

Posto perciò nella (*c*)

$$c^2 = \frac{2h^2}{a^2+2h^2}$$

sostituendo il valore di

$$\int d\phi.\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2h^2}{a^2+2h^2}\ \mathrm{sen.}^2\phi}}$$

che da essa si ricava, nel secondo membro della (11), e fatte le opportune riduzioni si ha

(12) $$x = \frac{2h^2}{\sqrt{a^2+2h^2}} \cdot \frac{\mathrm{sen.}\phi\cos.\phi}{\sqrt{1 - \frac{2h^2}{a^2+2h^2}\ \mathrm{sen.}^2\phi}} + \frac{2(a^2+h^2)\sqrt{2h^2}}{a^2}\ \mathrm{sen.}\phi$$
$$+ \frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\int d\phi\,.\sqrt{1 - c^2\ \mathrm{sen.}^2\phi}$$
$$- \frac{2(a^2+h^2)}{a^2}\left[\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2}\right].\int d\psi\sqrt{1 - c'c'.\ \mathrm{sen.}^2\,\psi}$$

dove negli integrali a motivo di semplicità si è ritenuto c^2 in luogo di

$$\frac{2h^2}{a^2+2h^2}$$

si è posto $c\ c'$ in luogo di

$$\frac{4c}{(1+c)^2}, \text{ ossia di } \frac{(4\sqrt{2h^2}\,.\,\sqrt{a^2+2h^2})}{(\sqrt{2h^2}+\sqrt{a^2+2h^2})^2}$$

e dove per ψ si intende l'angolo dato dalla Equazione (d), ove la c e la ϕ siano quelle stesse della Equazione (12). E così il ritrovamento della x si riduce alla rettificazione di due elissi.

19. Rammentiamoci quì che l'integrale indicato nel secondo membro dell' Equazione (9) deve incominciarsi da $y=a$, e veggiamo come si debbano in conseguenza di ciò determinare le costanti introdotte dagli integrali della (12). Indicando adunque con

$F(\phi)$ la parte algebraica del secondo membro di questa ultima Equazione, con

$A.\Pi(\phi, C)$ il termine che contiene il primo integrale, e con

$B.\chi(\psi, C')$ quello dove si contiene il secondo integrale; ne' quali A, e B sono i coefficienti di questi integrali, e C, C' due costanti da determinarsi avremo

$$x = F(\phi) + A.\,\Pi(\phi, C) + B\,\chi(\psi, C').$$

Ora dovendo la x essere nulla quando $y=a$, cioè quando

$$\phi = 0,\ \psi = 0$$

sarà

$$0 = F(0) + A.\Pi(0, C) + B.\chi(0, C')$$

la quale Equazione sottratta dalla precedente dà

$$x = F(\phi) - F(0) + A[\Pi(\phi, C) - \Pi(0, C)] + B[\chi(\psi, C') - \chi(0, C')]$$

ed essendo

$$F(0) = 0$$

$\Pi(\phi, C) - \Pi(0, C)$ l'integrale $\int d\phi\sqrt{1 - cc\ \text{sen.}^2\phi}$ incominciato da $\phi = 0$,

$\chi(\psi, C') - \chi(0, C')$ l'integrale $\int d\psi.\sqrt{(1 - c'c'.\ \text{sen.}^2\psi)}$

incominciato da $\psi = 0$, se noi rimetteremo i valori indicati dai suddetti simboli avremo

$$(13)\quad x = \frac{2h^2}{\sqrt{a^2+2h^2}} \cdot \frac{\text{sen.}\phi\cos.\phi}{\sqrt{1-\frac{2h^2}{a^2+2h^2}\,\text{sen.}^2\phi}} + \frac{2(a^2+h^2)\sqrt{2h^2}}{a^2}\,\text{sen.}\phi$$

$$+\frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\int_0 d\phi.\sqrt{1-cc.\,\text{sen.}^2\phi}\;-$$

$$\frac{2(a^2+h^2)}{a^2}\,[\sqrt{a^2+2h^3}+\sqrt{2h^2}]\int_0 d\psi.\sqrt{1-c'c'.\text{sen.}^2\psi}$$

ove gli zeri scritti sotto i simboli di integrazione significano essere questi i limiti minori di esse.

Con questa Equazione noi possiamo facilmente trovare il valore di x corrispondente a qualsivoglia grandezza di y. Noi però ci limiteremo a quello che corrisponde al punto B e che denomineremo $[x]$ determinandolo in numeri per diversi valori di a; poichè esso basterà per le nostre ricerche.

20. Essendo pel punto B, come si è già veduto

$$y=\sqrt{a^2+2h^2}$$

e però, indicata con π la semicirconferenza di raggio 1,

$$\phi=\frac{1}{2}\pi,\ \text{sen.}\phi=1,\ \cos.\phi=0$$

$$\psi=\text{arc. tang.}\frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-c}}$$

l'Equazione (13) diverrà in questo caso, posto $[x]$ in luogo di x,

$$(14)\quad [x]=\frac{2(a^2+h^2)}{a^2}\sqrt{2h^2}+\frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi.\sqrt{(1-c.^2\,\text{sen.}^2\phi)}$$

$$-\frac{2(a^2+h^2)}{a^2}\,[\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2}]\int_0^{\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}} d\psi.\sqrt{(1-c'c'\text{sen.}^2\psi)}$$

dove colle quantità scritte al di sopra de' simboli delle integrazioni intendiamo di indicare i loro limiti maggiori.

Ora pel teorema del Fagnani (Brunacci Matem. subl. T. III. p. 34) noi abbiamo, posto $b'=\sqrt{1-c'c'}$.

$$2\int_0^{\text{arc.tang.}\frac{1}{\sqrt{b}}} d\psi.\sqrt{1-c'c'.\text{sen.}^2\psi}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi\sqrt{1-c'c'.\text{sen.}^2\psi}+1-b,$$

ed essendo nel nostro caso

$$c'c'=\frac{4c}{(1+c)^2}$$

$$b'b'=1-\frac{4c}{(1+c)^2}=\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2$$

$$\sqrt{b'}=\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$$

abbiamo appunto

$$2\int_0^{\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}} d\psi\;.\;\sqrt{1-c'c'\,\text{sen.}^2\psi}=$$

$$2\int_0^{\text{arc.tang.}\frac{1}{\sqrt{b'}}} d\psi\;.\;\sqrt{1-c'c'\,\text{sen.}^2\psi}$$

Sarà perciò

$$2\int_0^{\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}} d\psi\;.\;\sqrt{1-c'c'\,\text{sen.}^2\psi}=$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi.\sqrt{1-c'c'.\text{sen.}^2\psi}+1-b'$$

sostituendo il qual valore nella (14), e ponendo

$$1-b'=\frac{2\sqrt{2h^2}}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2}}$$

avremo infine

$$(15)\qquad [x]=\frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi.\sqrt{1-cc.\,\text{sen.}^2\phi}$$

$$-\frac{(a^2+h^2)(\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2})}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi.\sqrt{1-c'c'.\,\text{sen.}^2\psi}$$

con che il valore della x vien fatto dipendere dalla rettificazione di due quarti d' elisse, de' quali i due semiassi maggiori sono $=1$, i semiassi minori sono rispettivamente

$$(16)\qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+2h^2}},\quad \frac{a^2}{(\sqrt{2h^2}+\sqrt{a^2+2h^2})^2}$$

e la eccentricità

$$\frac{\sqrt{2h^2}}{\sqrt{a^2+2h^2}},\quad \frac{2\,[2h^2(a^2+2h^2)]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2h^2}+\sqrt{a^2+2h^2}}$$

21. Facciamo (*)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\phi.\sqrt{1-c^2\,\text{sen.}^2\phi}=\left(1-\frac{1}{4}b^2-\frac{13}{64}b^4-\frac{9}{64}b^6\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{16}b^4+\frac{15}{128}b^6\right)\log.\frac{4}{b}+\text{ec.}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi.\sqrt{1-c'c'\text{sen.}^2\psi}=\left(1-\frac{1}{4}b'b'-\frac{13}{64}(b')^4-\frac{9}{64}(b')^6\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}b'b'+\frac{3}{16}(b')^4+\frac{15}{128}(b')^6\right)\log.\frac{4}{b'}+\text{ec}$$

essendo b, b' i semiassi minori delle due elissi, e venendo trascurate le potenze ottave di essi e le ulteriori. Avremo

$$(17)\quad [x]=\frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\left[1-\frac{1}{4}b^2-\frac{13}{64}b^4-\frac{9}{64}b^6+\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{16}b^4\right.\right.$$

(*) V. Brunacci *Matem. subl.* T. III. p. 37, dove è da correggersi un errore di stampa notato nell' *errata*.

$$+\frac{15}{128}b^6\Big)\log.\frac{4}{b}\Big]-\frac{a^2+h^2}{a^2}\left(\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2}\right)\Big[1-\frac{1}{4}b'b'$$

$$-\frac{13}{64}(b')^4-\frac{9}{64}(b')^6+\left(\frac{1}{2}b'b'+\frac{3}{16}(b')^4+\frac{15}{128}(b')^6\right)\log.\frac{4}{b}\Big]$$

$+$ ecc.

ovvero anche

$$(18)\qquad [x]=\frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}-\frac{(a^2+h^2)}{a^2}\left(\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2}\right)$$

$$+\frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\left[\log.\frac{4}{b}\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{16}b^4+\frac{15}{128}b^6\right)-\frac{1}{4}b^2-\frac{13}{64}b^4-\frac{9}{64}b^6\right]$$

$$-\frac{(a^2+h^2)}{a^2}\left(\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2}\right)\Big[\log.\frac{4}{b'}\left(\frac{1}{2}b'b'+\frac{3}{16}(b')^4+\frac{15}{128}(b')^6\right)$$

$$-\frac{1}{4}b'b'-\frac{13}{64}(b')^4-\frac{9}{64}(b')^6\Big]+\text{ecc.}$$

22. Passiamo col mezzo di questa formola a determinare in numeri il valore di $[x]$ corrispondentemente a diversi valori di a, ovvero (ciò che torna allo stesso e a noi riesce più comodo) corrispondentemente a diversi valori di

$$\sqrt{a^2+2h^2}-a$$

quantità che come si ha dalla formola (b) esprime l' altezza del punto B al di sopra del punto C.

Facciamo per comodità

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{a^2+2h^2}-a=\sqrt{2h^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &\text{e sarà}\\ &a=\sqrt{2h^2}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n}\right)\\ &b=\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\\ &b'=\frac{1}{(2n-1)^2}\end{aligned}\right.$$

$$\frac{(a^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} - \frac{a^2+h^2}{a^2}\left(\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{2h^2}\right) =$$
$$-\sqrt{2h^2}\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4(2n-1)^2}\right]$$

e però, dopo qualche riduzione,

$$(20) \qquad \frac{[x]}{\sqrt{2h^2}} = -1 - \frac{1}{4(2n-1)^2} - \frac{1}{8(n-n)} + \left(\frac{2n^2-2n+1}{2n^2-2n}\right) \times$$
$$\left[\log.\left(\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^2 + \frac{15}{128}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^4\right)\right.$$
$$\left.-\frac{13}{64}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^2 - \frac{9}{64}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^4\right] - \frac{[n^4+(n-1)^4]}{(2n^2-2n)}\left[\log.[4(2n-1)^2] \times\right.$$
$$\left(\frac{1}{2(2n-1)^4}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{(2n-1)^8}+\frac{15}{128}\cdot\frac{1}{(2n-1)^{12}}\right)$$
$$\left.-\frac{1}{4(2n-1)^4} - \frac{13}{64}\cdot\frac{1}{(2n-1)^8} - \frac{9}{64}\cdot\frac{1}{(2n-1)^{12}}\right] + \text{ec.}$$

Cominciamo a fare nella precedente Equazione

$$n = 10$$

cioè a porre

$$\sqrt{a^2+2h^2} - a = \sqrt{2h^2}\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

avremo dopo le opportune operazioni

$$(21) \qquad [x] = \sqrt{2h^2}\,.\,0,83284$$

dove il trascurare b^3, $(b')^3$ non può, per quanto possiamo argomentare, portare errore che nelle decimali posteriori alla quinta.

Facciamo

$$n = 100$$

ossia

$$\sqrt{a^2+2h^2} - a = \sqrt{2h^2}\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

avremo

$$(22)\qquad [x] = \sqrt{2h^2}\; 1,993427.$$

23. Quando si abbia n uguale o maggiore di 1000, il calcolo si può rendere semplicissimo, riducendosi il valore della

$$\frac{1}{\sqrt{2h^2}} \cdot [x]$$

pochissimo diverso dalla quantità

$$\frac{1}{2} \log. 4n - 1.$$

Osserviamo difatti che la quantità

$$\left(\frac{2n^2-2n+1}{2n^2-2n}\right)\log.\left[\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^2+\frac{15}{128}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^4\right]$$

contenuta nel secondo membro dell' Equazione (20), si può ridurre alla forma seguente

$$\left(\frac{2n^2-2n+1}{2n^2-2n}\right)\log.\left[\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right]\cdot\left[\frac{3}{16}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^2+\frac{15}{128}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^4\right]$$
$$+\frac{1}{4(n^2-n)}\log.\left[\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right]+\frac{1}{2}\log. 4n-\frac{1}{2}\log.\left(1+\frac{n-1}{2n^2-2n+1}\right)$$

e quindi, separando i termini positivi dai negativi, si ha

$$(23)\qquad \frac{[x]}{\sqrt{2h^2}} = \frac{1}{2}\log. 4n + \frac{1}{4(n^2-n)}\log.\left[\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right] + \left(\frac{2n^2-2n+1}{2n^2-2n}\right)$$
$$\left[\frac{3}{16}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^2+\frac{15}{128}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^4\right]\log.\left[\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right]$$
$$+\frac{[n^4+(n-1)^4]}{(2n^2-2n)}\cdot\left[\frac{1}{4(2n-1)^4}+\frac{13}{64}\cdot\frac{1}{(2n-1)^8}+\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{(2n-1)^{12}}\right]$$
$$-1-\frac{1}{4(2n-1)^2}-\frac{1}{8(n^2-n)}-\frac{(2n^2-2n+1)}{(2n^2-2n)}\left[\frac{13}{64}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{9}{64}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^4\right]-\frac{1}{2}\log.\left(1+\frac{n-1}{2n^2-2n+1}\right)-\left(\frac{n^4+(n-1)^4}{n^2-n}\right)\times$$
$$\left[\frac{1}{2(2n-1)^4}+\frac{3}{16(2n-1)^8}+\frac{15}{128(2n-1)^{12}}\right].\log.(4n-2) + \text{ec.}$$

Ora nel secondo membro di questa Equazione lasciando fuori i due termini

$$\frac{1}{2}\log.(4n), \quad -1$$

la somma di tutti gli altri termini positivi, quando sia $n=1000$, è

$$+0,00000365\cdot$$

e quella di tutti gli altri termini negativi è

$$-0,00025085.$$

Inoltre tanto i termini positivi quanto i negativi (sempre lasciati fuori i due citati termini -1, $\frac{1}{2}\log(4n)$, prescindendo dal segno, e supposto la n maggiore di 2, vanno diminuendo allorchè cresce essa n.

Infatti, in quanto al termine $\frac{1}{4(n^2-n)}\cdot\log.\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}$, che indicheremo con N, se noi ne prendiamo la derivata riguardo ad n, questa dopo alcune facili riduzioni si riduce alla quantità seguente

$$\frac{1}{(2n-1)(2n^2-2n+1)}\left[1-\left(2+\frac{1}{2n(n-1)}\right)\left(1+\frac{1}{2n(n-1)}\right)\log.\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right]$$

Ora quando sia $n>2$, si ha

$$\frac{2n^2-2n+1}{2n-1}=\frac{2n(n-1)+1}{2n-1}>\frac{2n-1}{2n-1}>1,$$

$\log.\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}>\log.4>1$, giacchè qui si tratta di logaritmi iperbolici. Perciò $\left(\frac{dN}{dn}\right)$ di valor negativo. Dunque ogniqualvolta $n>2$, il termine N andrà scemando al crescere di n.

Il termine successivo lo possiamo riguardare come il prodotto de' tre fattori

$$\left[1+\frac{1}{2n(n-1)}\right],\ \frac{3}{4}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)+\frac{15}{32}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^3,$$

$$\frac{2n-1}{4(2n^2-2n+1)}\,.\,\log.\left[\frac{4(2n^2-2n+1)}{2n-1}\right].$$

E di questi il primo quando $n>1$ scema evidentemente all' aumentarsi di n, e però anche quando $n>2$. Lo stesso è del secondo come si riconosce dall' osservare che la quantità

$$\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}$$

ha per derivata riguardo ad n quest' altra quantità

$$\frac{-4n(n-1)}{(2n-2n+1)^2}$$

che è sempre negativa quando $n>1$, e però altresì quando $n>2$; donde si trae che la suddetta

$$\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}$$

quando $n>2$ scema all'aumentare di n, e così anche il menzionato secondo fattore. Rispetto poi al terzo, ponendo

$$\frac{2n-1}{4(2n^2-2n+1)}=\rho$$

si può mettere sotto la forma

$$\rho.\log.\frac{1}{\rho},$$

la cui derivata prima rispetto ad n è

$$\left(\frac{d\rho}{dn}\right)\left[\log.\frac{1}{\rho}-1\right].$$

Ora quando $n>2$, abbiamo

$$\frac{1}{\rho}=4\frac{(2n(n-1)+1)}{2n-1}>4,\ \ \log.\frac{1}{\rho}>1,\ \log.\frac{1}{\rho}-1=+$$

$$\left(\frac{d\rho}{dn}\right) = -\frac{n(n-1)}{(2n^2-2n+1)^2} = -$$

$$\left(\frac{d\rho}{dn}\right)\left[\ \log.\frac{1}{\rho} - 1\ \right] = - .$$

Onde ha luogo la stessa proprietà anche pel terzo fattore; e in conseguenza anche pel prodotto di tutti e tre i fattori.

Il termine che vien poi è il prodotto dei due fattori

$$\frac{n^4+(n-1)^4}{(2n-1)^4},\ \frac{1}{2n(n-1)}\left[\frac{1}{4} + \frac{13}{64}\cdot\frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{9}{64}\cdot\frac{1}{(2n-1)^8}\right].$$

Il primo d' essi ha per derivata la quantità

$$\frac{-4[3n(n-1)-1]}{(2n-1)^5}$$

che quando $n > 2$ è sempre negativa. E il secondo diminuisce evidentemente, nella stessa ipotesi, al crescere di n.

Pe' due termini

$$\frac{1}{4(2n-1)^2},\quad \frac{1}{8(n^2-n)}$$

la cosa è evidentissima.

Quello che succede può mettersi sotto la forma

$$\left[1 + \frac{1}{2n(n-1)}\right]\left[\frac{13}{64}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^2 + \frac{9}{64}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}\right)^4\right]$$

dove pel primo fattore non fa duopo dimostrazione, e pel secondo basta richiamarci quello che si è veduto poco sopra, cioè che la quantità

$$\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}$$

scema crescendo la n, solo che si abbia $n > 1$.

Rispetto al termine

$$\frac{1}{2}\log.\left(1 + \frac{n-1}{2n^2-2n+1}\right)$$

osserveremo che la derivata di

$$1+\frac{n-1}{2n^2-2n+1}$$

è

$$-\frac{[1+2n(n-2)]}{(2n^2-2n+1)^2}$$

quantità negativa ogniqualvolta $n>2$. Aumentandosi adunque la n da questo valore innanzi, la quantità

$$1+\frac{n-1}{2n^2-2n+1}$$

va scemando ed avvicinandosi all'unità, e intanto va decrescendo anche il suo logaritmo ed avvicinandosi allo zero.

Siffatto termine poi diminuisce alquanto lentamente. Allorchè $n=1000$, il suo valore è ancora

$$0,0002499\,37$$

che supera d'assai la somma de' valori (prescindendo dal segno) di tutti gli altri termini negativi, non formando fra tutti che

$$-0,000000909.$$

Divenendo $n=10000$, esso termine perde quasi nove decimi del suo valore, e diviene

$$0,000024999.$$

Venendo infine all'ultimo termine e ponendolo sotto la forma

$$\left[\frac{n^4+(n-1)^4}{(2n-1)^4}\right]\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\,\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{15}{128}\cdot\frac{1}{(2n-1)^8}\right]\times$$
$$\left[\frac{1}{n^2-n}\log.(4n-2)\right]$$

noi veggiamo che il primo fattore è già stato considerato precedentemente, e che diminuisce crescendo n quando sia $n>2$; e che ciò evidentemente ha luogo anche pel secondo fattore. In quanto al terzo, esso ha per derivata la quantità

$$\frac{1}{(n^2-n)(2n-1)}\left[2-\left(4+\frac{1}{n(n-1)}\right)\log.(4n-2)\right]$$

la quale ogniqualvolta $n>2$ è negativa. Anche l'ultimo termine pertanto gode della proprietà già enunciata e provata per tutti gli altri, di diminuire cioè al crescere di n, quando questa n superi il 2.

Da tutto questo noi raccoglieremo

1.° Che quando $n=1000$ si ha

$$(24)\qquad \frac{[x]}{\sqrt{2h^2}}=-1+\frac{1}{2}\log.4n+0{,}00000365-0{,}00025085$$

$$=-1+\frac{1}{2}\log.4n-0{,}0002472$$

$$=3{,}146778$$

2.° Che quando $n=10000$, ovvero $n>10000$, si ha

$$(25)\qquad \frac{[x]}{\sqrt{2h^2}}=-1+\frac{1}{2}\log.4n+\lambda.0{,}00000365-\lambda'.0{,}00002591$$

$$=-1+\frac{1}{2}\log.4n\pm\lambda''.0{,}00002591$$

$$=-1+0{,}6931422+\frac{1}{2}\log.n\pm\lambda''.0{,}00002591$$

essendo $\lambda, \lambda', \lambda''$ quantità positive minori di 1. Perciocchè essendo n uguale o maggiore di 10000, la somma de' termini positivi è necessariamente minore di

$$0{,}00000365$$

e in quanto ai termini negativi, quello la cui espressione generale è

$$-\frac{1}{2}\log.\left(1+\frac{n-1}{2n^2-2n+1}\right)$$

prescindendo dal segno è al più uguale a

$$0{,}000024999.$$

e la somma di tutti gli altri è minore di

$$0{,}000000909\,;$$

e però prescindendo dal segno la somma de' termini negativi è minore di

$$0,00002591.$$

24. Raccogliamo ora i valori di [x] già ottenuti (veggansi le formole 21, 22, 24), e dalla formola (25) caviamo quegli altri che corrispondono ad $n = 10000$ $n = 100000$, $n = 1000000$, ec. Ritenendo quattro soli decimali che per noi sono più del bisogno, avremo i risultamenti espressi dalla seguente tabella.

Altezze della bolla, ossia valori di $\sqrt{a^2+2h^2}-a$	Valori di [x]	Valori di 2[x], ossia delle larghezze della bolla da A in B
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{10}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 0,8328	$\sqrt{2h^2}.$ 1,6657
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{100}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 1,9934	$\sqrt{2h^2}.$ 3,9869
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{1000}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 3,1468	$\sqrt{2h^2}.$ 6,2936
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{10000}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 4,2983	$\sqrt{2h^2}.$ 8,5966
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{100000}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 5,4496	$\sqrt{2h^2}.$ 10,8992
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{1000000}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 6,6009	$\sqrt{2h^2}.$ 13,2018
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 7,7522	$\sqrt{2h^2}.$ 15,5044
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{10^8}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 8,9035	$\sqrt{2h^2}.$ 17,8070
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{10^9}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 10,0548	$\sqrt{2h^2}.$ 20,1096
$\sqrt{2h^2}.\left(1-\frac{1}{10^{10}}\right)$	$\sqrt{2h^2}.$ 11,2061	$\sqrt{2h^2}.$ 22,4121.

E si può continuarla facilissimamente fino a che piace, essendo che i numeri che verrebbero in seguito all ultima colonna vanno aumentandosi l' uno dopo l' altro di

$$2,302585$$

che è il logaritmo iperbolico del 10.

25. *Osservazione*. È facile lo scorgere da questa tavola che per poco che la bolla abbia di larghezza, la sua altezza o grossezza è vicinissima al valore $\sqrt{2h^2}$; p. e. allorchè la larghezza è 11 volte maggiore di questa $\sqrt{2h^2}$, l'altezza non ne differisce che di $\frac{1}{100000}$ in meno.

Per avere poi questo valore di $\sqrt{2h^2}$ relativamente all' alcool, abbiamo opportunamente alcune sperienze dilicatissime eseguite da Gay-Lussac, e riportate dal Laplace nel suo Supplemento alla Teoria dell' azione capillare, p. 55. Consistevano queste nell' osservare diligentissimamente le altezze a cui si elevavano diverse specie di alcool in un tubo capillare di vetro, di cui erasi esattamente misurato il diametro interno. In una di esse la temperatura era di $+8^{\circ}$. C, l' alcool paragonato all'acqua aveva a questa temperatura la gravità specifica 0, 81961, il tubo di vetro aveva il diametro interno di millimetri 1, 29441; e l'altezza cui l' alcool ascese misurata dal punto infimo della superiore concavità fu di millimetri 9, 18235 che corretta coll' aggiunta del sesto del diametro suddetto, diede per altezza media della colonna sollevata millimetri 9, 39808. Per questa qualità di alcool adunque, e ad una tale temperatura si ha

$$2h^2 = 1^{m}, 29441 . 9^{m}, 39808 = 12^{mm}, 1650$$

$$\sqrt{2h^2} = 3^{mill.}, 4878.$$

In un' altra sperienza fatta con un altro alcool che a $+10.^{\circ}$C. aveva la densità 0, 8595, si ebbe nel tubo medesimo l'elevazione di millimetri 9,30079 che colla correzione del sesto del diametro diviene 9, 51652. In questo caso si ha

$$2h^2 = 12,^{mm} 31828 ,\ \sqrt{2h^2} = 3^{mill.}, 5097.$$

Finalmente dell' alcool, il quale a $+8.^{\circ}$C. aveva la densità 0, 94153, s'alzò nello stesso tubo millimetri 9, 99727. il che dà

$$2h^2 = 13^{mm}, 2198, \sqrt{2h^2} = 3^{mill.}, 6359.$$

Ci contenteremo di questo relativamente alla forma che ha la bolla aerea quando la temparatura è uniforme, passeremo ora a vedere quale alterazione vi possa produrre il calore.

26. Limitandoci ad un caso particolare noi supporremo che una parte del liquido che sta dall'uno de' lati della bolla si riscaldi, e precisamente dalla banda di B fig. (6.^{a}) in quella parte che giace sopra ad un piano orizzontale condotto pel punto N dove la toccante alla sezione ACB è verticale, riscaldandosi questa parte di liquido tutta uniformemente, e rimanendo la massa sottoposta, come pure quella dall'altro canto della bolla alla medesima temperatura di prima. Ne avverrà che diminuendosi a cagione dell'aumentata temperatura tanto la densità del liquido, quanto l'energia dell'attrazione, l'arco NB della sezione della superficie della bolla si cangerà di figura. Noi supporremo che questo cangiamento di densità e di figura non produca veruna alterazione nella parte rimanente di questa sezione: perciocchè si potrebbe mutare il parametro a della sua Equazione (Vedi Equ. 5.), e per serbarne intatto il valore è d'uopo modificare opportunamente di qualche poco il volume del liquido e la posizione della lamina sovrapposta. Ammettendo adunque che questo parametro non si muti, e che tutto il cangiamento avvenga nell'arco NB, noi procureremo di esaminare questo cangiamento stesso, e in ispecie l'abbassamento che ne deriva al punto B, dove la curva ACB venendo continuata innanzi si ripiegherebbe all'ingiù. Il che ci mostrerà di quanto si debba abbassare da questo lato la lamina solida che ricopre la bolla affine di conservare l'equilibrio.

Ritenendo le denominazioni stabilite superiormente, la parte CN della sezione sarà ancora data dall'Equazione (5) cioè dalle

$$y^2 = a^2 + h^2(1 - \cos.\theta).$$

In quanto alla NB, sarà essa rappresentata da una Equazione somigliante ma con parametri diversi; giacchè ella è porzione di una curva che avrebbe luogo tutta intera quando il liquido sottoposto ad N fosse riscaldato esso pure similmente. Indichiamo adunque per la NB con

$$h'h',\ a',\ y',\ \theta'$$

delle quantità analoghe a quelle che per CN avevamo indicate con hh, a, y, θ. Vale a dire sia $h'h'$ il prodotto costante dell'elevazione media a cui il nostro liquido riscaldato salirebbe entro un esilissimo tubo, moltiplicata pel raggio della cavità cilindrica interna del tubo medesimo;

a' l'altezza a cui il liquido stesso potrebbe venir sollevato dall'azione capillare corrispondente alla concavità del punto infimo C' della curva NB prolungata all'ingiù;

y' l'ordinata di un punto P preso ad arbitrio nella curva NB, supposta che questa venga riferita a due assi paralleli a quelli delle x, y, ma aventi un'origine diversa, cioè un'origine O' collocata verticalmente al di sotto del punto C', ad una distanza a';

θ' l'angolo ottuso fatto dalla toccante alla curva, condotta da P secondo l'aumento dell'arco (supposto che questo cresca da N verso B), e da una retta condotta dallo stesso punto P parallelamente all'asse delle x e secondo l'aumento delle x medesime. Chiamiamo inoltre

δ la densità primitiva del liquido ossia quella che esso ha sì sotto al punto N che dalla banda AC

δ' quella del liquido riscaldato superiormente al punto medesimo N dalla banda di CN;

u la differenza d'altezza fra il punto P e il punto N.

Avremo la curva C'NB rappresentata dall'Equazione

(26) $$y'y' = a'a' + h'h'(1 - \cos.\theta').$$

27. Essendo quì la $h'h'$ data dalla sperienza, la quale de-

termina con qual legge scemi l'elevazione di una sostanza liquida in un tubo capillare, a proporzione che si va inalzando la temperatura di essa, non rimane per la compiuta cognizione della curva C'NB che a sapersi il valore di a'. Ma qui per mancanza di dati sperimentali è forza contentarci di un ipotesi. Supporremo adunque, onde poter arrivare fino ad un risultamento numerico, che la NB abbia nel punto N la medesima toccante della CN. In questo supposto, se noi cercheremo l'ordinata del punto N considerato nella curva C'NB avrà essa per valore la quantità

$$\sqrt{a'a'+h'h'}$$

perocchè abbiamo veduto che l'ordinata della ACN nel punto ove la toccante è verticale ha il valore $\sqrt{a^2+h^2}$. L'azione sollevatrice adunque dipendente dalla concavità al punto P sarebbe atta a tener elevata del liquido riscaldato una colonna dell'altezza verticale

$$(e) \qquad u+\sqrt{a'a'+h'h'}.$$

In vece essa forza serve effettivamente a tener sollevata una colonna d'altezza u del proprio liquido, ed una dell' altezza $\sqrt{a^2+h^2}$ del liquido sottoposto; perciocchè immaginando un canaletto curvilineo che parta dal punto P e discenda fino al livello dell' origine O, o della superficie orizzontale del liquido nell'ampio recipiente mentovato fino da principio (§. 15.) e che ora torniamo a richiamare, in questo canaletto si troveranno contenute due colonne liquide, l'una dell'altezza verticale u ed appartenente al liquido superiore, e l'altra dell' altezza $\sqrt{a^2+h^2}$ ed appartenente al liquido inferiore, e saranno tutte e due sostenute dall'azione dipendente dalla concavità in P. Ora una colonna dell'altezza $\sqrt{a^2+h^2}$ e della densità δ equivale, rispetto alla forza che dee sostenerla, ad una della densità δ e dell' altezza verticale

$$\frac{\delta}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}\,.$$

Pertanto la forza sollevatrice al punto P tiene effettivamente elevata una colonna equivalente ad una del liquido superiore che avesse per altezza

$$u+\frac{\delta}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}.$$

Uguagliando questa quantità alla (e) avremo per determinare a' l' Equazione

(27) $$\frac{\delta}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}=\sqrt{a'a'+h'h'}\,.$$

Dopo ciò tutto è facilissimo: si potrà immediatamente avere sotto forma conosciuta l' Equazione (26) che sarà

(28) $$y'y'=\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)-h'h'\cos.\theta';$$

così pure potremo trovare la differenza d'altezza fra i punti d'origine O, O' de' due sistemi di coordinate, essendo O' più sotto che O della quantità

$$\sqrt{a'a'+h'h'}-\sqrt{a^2+h^2}$$

ossia di

(29) $$\left(\frac{\delta}{\delta'}-1\right)\sqrt{a^2+h^2}\,.$$

28. Per avere l' abbassamento avvenuto nel punto B a cagione della mutata temperatura, noi osserveremo che l'effettiva differenza di livello che ora si ha fra i punti B ed N è

$$\sqrt{a'a'+2h'h'}-\sqrt{a'a'+h'h'}$$

laddove quella che aveva luogo prima del riscaldamento era (Equ. 8.^{a})

$$\sqrt{a^2+2h^2}-\sqrt{a^2+h^2}.$$

Indicando adunque con D l'abbassamento o discesa del punto B, avremo

$$(30)\quad D=\sqrt{a^2+2h^2}-\sqrt{a^2+h^2}-\sqrt{a'a'+2h'h'}+\sqrt{a'a'+h'h'}$$

e sostituendo in luogo di $(a'a'+h'h')$ il suo valore dedotto dall' Equazione (27), avremo

$$(31)\quad D=\sqrt{a^2+2h^2}+\left(\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\right)\sqrt{a^2+h^2}-\sqrt{\frac{\delta\delta_{\prime}}{\delta'\delta}(a^2+h^2)+h'h'}\,.$$

Possiamo quì osservare che il valore di D si accresce tanto per la diminuzione della δ' quanto per quella di $h'h'$. Il che senza altra considerazione si riconosce immediatamente riducendo l' Equazione (30) prima alla forma

$$D=\frac{h^2}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{a^2+h^2}}-\frac{h'h'}{\sqrt{a'a'+2h'h'}+\sqrt{a'a'+h'h'}}$$

e quindi a quest' altra

$$(32)\quad D=\frac{h^2}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{a^2+h^2}}-\frac{1}{\frac{\delta}{\delta' h'h'}\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{\frac{1}{h'h'}+\frac{\delta\delta(a^2+h^2)}{\delta'\delta'(h')^4}}}$$

dove si scorge che collo scemarsi la δ' cresce il denominatore del termine negativo del secondo membro, e quindi diminuisce esso termine negativo, e s'aumenta la D. E lo stesso succede per la diminuzione di $h'h'$.

29. Ma passiamo ad un esempio numerico. Ammettiamo che sieno abbastanza rigorosi i risultamenti citati nella sperienza V. (§. 8.), sebbene a dire il vero esigerebbero d' essere verificati con mezzi più delicati. Ammettiamo che l' alcool da noi adoperato non si allontani sensibilmente nella legge di dilatazione pel calore da quello rettificatissimo, pel quale tal legge è già stata determinata (*). Quindi concepiamo che l' aumento di temperatura del liquido che sta intor-

(*) *Biot. Traité de Physique* T. I. p. 229.

no alla nostra bolla e che noi supponiamo essere l'acool della sperienza V^a, sia di un grado del termometro di Reaumur; vale a dire ammettiamo che dalla banda di AC, e al di sotto del punto N rispetto alla banda CB sia a + 8° R, e che al di sopra di N sia a + 9°. R. Inoltre supponiamo che l'altezza della bolla da C in A sia uguale a

$$\sqrt{2h^2}\left(1-\frac{1}{1000000}\right)$$

il che corrisponde ad una lunghezza da A in B uguale a

$$\sqrt{2h^2}\,.\,13{,}2018.$$

Essendo quest' alcool della stessa densità di quello della seconda fra le sperienze che abbiamo prese dal Laplace (§. 25.), avremo

$$2h^2=12,^{mm}31828,\quad \sqrt{2h^2}=3{,}5097.$$

Avendo noi trovato nella sperienza V^a. che aumentandosi in questo alcool la temperatura di 48°.R la quantità $2hh$ diminuisce di $\frac{3}{25}$ del suo valore, ed ammettendo (come è più naturale a supporsi fino a che non s'abbiano sperienze più rigorose) che ciò avvenga con legge uniforme a proporzione che la temperatura si va alzando di grado in grado, si avrà per ogni grado d' aumento di questa temperatura una diminuzione nella $2h^2$ di $\frac{3}{25.48}$ ossia di $\frac{1}{400}$ del suo valore. Sarà dunque

$$2h'h'=2hh\left(1-\frac{1}{400}\right).$$

La legge della dilatazione dell' alcool data dal Biot è la seguente

$$\Delta_T=0{,}00123369.T+0{,}00000322537.T^2+0{,}00000001198T^3,$$

dove T è il numero de' gradi della scala di Reaumur sopra lo o°, e Δ_T è l'aumento del volume, indicato con 1 quello a o°. L'aumento adunque da o°a + 8°.R è

$$0{,}01008208$$

e da o°a + 9° è

$$0{,}01137320$$

si avrà dunque

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{1{,}01137320}{1{,}01008208} = 1{,}0012782\,.$$

Ora, trascurando le decimali ulteriori alla undecima, si ha (Equ. 19.[a])

$$a = \sqrt{2h^2}\left(\frac{2n-1}{2n^2-2n}\right) = \sqrt{2h^2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2-2n}\right)$$

$$= \sqrt{2h^2}\left(\frac{1}{1000000} + \frac{1}{1999998000000}\right) = \sqrt{2h^2}(0{,}00000100000)\,.$$

Perciò

$$\sqrt{a^2+2h^2} = \sqrt{2h^2}[1{,}0000000000] = 3{,}\overset{mill.}{}5097$$

$$\sqrt{a^2+h^2} = \sqrt{h^2}\,[1{,}0000000000] = 2{,}\overset{mill.}{}4818$$

$$\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2} = 0{,}0012782 \times 2{,}\overset{mill.}{}4818 = 0{,}\overset{mill.}{}0031722$$

$$\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}\,(a^2+h^2) + h'h'} = \sqrt{1{,}0025580.h^2 + 0{,}9975.h^2}$$

$$= \sqrt{h^2(2{,}0000580)} = \sqrt{2h^2(1{,}0000290)} = \sqrt{2h^2}(1{,}0000145)$$

$$= \sqrt{2h^2} + 3{,}\overset{mill.}{}5097.0{,}0000145 = \sqrt{2h^2} + 0{,}\overset{mill.}{}00005089$$

E quindi (Equ. 31.)

$$D = \sqrt{2h^2} + 0{,}\overset{mill.}{}2{,}0031722 - \sqrt{h^2} - 0{,}\overset{mill.}{}00005089$$

$$= 0{,}\overset{mill.}{}0031213.$$

Siccome poi la distanza dal punto A al punto B è prossimamente (V. §. 24.)

$$\sqrt{2h^2}.\ 13{,}2018$$

ossia millimetri

$$46,3343$$

(giacchè collo spostarsi di B non si è aumentata che di qualche piccolissima frazione di millimetro), così la retta AB si deprime dalla banda di B di un angolo la cui tangente trigonometrica è

$$\frac{0{,}0031213}{46{,}3343}\text{, ossia } \frac{1}{14844}$$

ossia di un angolo di 14″. Ed è questo l' angolo di cui si dovrà abbassare la lamina di vetro che ricopre la bolla, affine di tenerla a contatto con questa da ambedue le bande, e di mantenere la bolla stessa in equilibrio.

30. Per un secondo esempio supponiamo che stando in tutte le altre parti le già fatte supposizioni, l' alcool da N in B sia più caldo di 2°.R di quello al di sotto di N, essendo questo a + 8°.R, quello a + 10°.R. Fatto T = 10, avremo

$$\Delta_{T} = \Delta_{10} = 0{,}0126714$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{1{,}0126714}{1{,}01008208} = 1{,}0025635$$

$$\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2} = 0{,}0025635 \times 2,\overset{mill.}{}4818 = 0,\overset{mill.}{}0063621$$

$$h'h' = hh\left(1 - \frac{2}{400}\right) = hh.0{,}9950$$

$$\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)+h'h'} = \sqrt{1{,}0051336.h^2 + 0{,}9950.h^2}$$

$$= \sqrt{h^2.2{,}0001336} = \sqrt{2h^2.1{,}0000668}$$

$$= \sqrt{2h^2}.\ 1{,}0000334 = \sqrt{2h^2} + 3,\overset{mill.}{}5097.\ 0{,}0000334$$

$$= \sqrt{2h^2} + 0{,}0001172$$

$$D = \sqrt{2h^2} + 0,\overset{mill.}{}0063621 - \sqrt{2h^2} - 0,\overset{mill.}{}0001172$$

$$= 0,\overset{mill.}{}0062449$$

quantità doppia di quella ottenuta per D nell'esempio precedente, e che corrisponde ad una depressione della linea AB di 28''.

Attesa però la imperfezione di alcuni dei dati sperimentali di cui abbiamo fatto uso, non possono questi risultamenti anche nelle assunte ipotesi riguardarsi che come approssimativi, siccome facilmente si sarà accorto il lettore.

31. *Osservazione.* 1.ª Appare dal paragone de' due precedenti risultamenti che l'abbassamento del punto B è in proporzione diretta semplice degli aumenti di temperatura. Del che però possiamo anche dare una dimostrazione diretta. Diffatti l'Equazione (31) si può agevolmente ridurre alle forme seguenti

$$D=\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}+\frac{(a^2+2h^2)-\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)-h'h'}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)+h'h'}}$$

$$=\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}+\frac{(a^2+h^2)\left(1-\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}\right)+hh-h'h'}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)+h'h'}}$$

$$=\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}-\frac{\left(\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\right)\left(\frac{\delta+\delta'}{\delta'}\right)(a^2+h^2)}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta\delta'}(a^2+h^2)+h'h'}}$$

$$+\frac{hh-h'h'}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta(a^2+h^2)}{\delta'\delta'}+h'h'}}$$

$$(32)\quad D=\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}\left\{1-\frac{\frac{\delta+\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)+h'h'}}\right\}$$

$$+\frac{hh-h'h'}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta(a^2+h^2)}{\delta'\delta'}+h'h'}}.$$

Ora parlandosi di aumenti di temperatura assai piccoli abbiamo δ' pochissimo minore di δ, $h'h'$ pochissimo minore di hh, con differenze prossimamente proporzionali, sì l'una quantità che l'altra, agli aumenti di temperatura medesimi. Quindi

$$\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}$$

sarà un fattore che s' aumenterà prossimamente in ragione diretta semplice di questi aumenti. E supponendo altresì che aa sia piccolissimo in confronto di hh, come è in questi casi che noi trattiamo, sarà la quantità

$$\frac{\frac{\delta+\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)+h'h'}}$$

pochissimo diversa da

$$\frac{2.\sqrt{h^2}}{\sqrt{2h^2}+\sqrt{2h^2}} \text{ ossia da } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

val a dire uguale a

$$\frac{2}{\sqrt{2}}+\mathrm{P}a+\mathrm{Q}(\delta-\delta')$$

indicando con $\mathrm{P}a$, e $\mathrm{Q}(\delta-\delta')$ due quantità che hanno valore piccolissimo quando a e $(\delta-\delta')$ sono molto piccoli; In questi supposti adunque il fattore

$$1-\frac{\delta+\delta'}{\delta'}\sqrt{a^2+h^2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{a^2+2h^2}+\sqrt{\frac{\delta\delta}{\delta'\delta'}(a^2+h^2)+h'h'}}$$

sarà una quantità positiva e pochissimo diversa da

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e però il valore del primo termine del secondo membro della (32) sarà positivo e prossimamente proporzionale all' aumento della temperatura. Il che essendo anche del secondo termine, ove il denominatore rimane prossimamente costante al cangiarsi di piccole differenze le δ', $h'h'$, ne succede che ciò ha luogo anche per la loro somma, ossia pel valore di D.

32. *Osservazione* 2.ª Per poco che la bolla sia larga, gli angoli di cui la retta AB (fig. 6.ª) s' inclina all'orizzonte per un medesimo aumento di temperatura, e per diverse lunghezze ch' essa retta può avere, sono precisamente in ragione reciproca di queste lunghezze medesime.

Supponiamo per un esempio che sia, allorchè la tempesatura è ancora uniforme,

$$AB = 6{,}3.\sqrt{2h^2}$$

il che per la qualità di alcool di cui noi ragioniamo avente la gravità specifica 0,86, corrisponde ad una lunghezza di 22 millimetri circa, e ad una larghezza totale della bolla di poco meno di millimetri 24, si ha prossimamente

$$n = 1000,\ a = \frac{1}{1000}\sqrt{2h^2};$$

e ne' tre termini del secondo membro dell'Equ. (31) togliendo la a nascono delle differenze di vario segno, e tutte minori di

$$\frac{1}{1000000}\sqrt{2h^2}$$

quantità che è assai più piccola di D, per poco che sia sensibile l'aumento della temperatura, e sensibile quindi il valore della D medesima.

Ciò poi ha luogo ancor più per grandezze maggiori della AB. Per la qual cosa la depressione del punto B corrispondente ad un determinato aumento di temperatura è costante per tutte le larghezze che può avere la bolla, quando però queste sieno 6 o 7 volte almeno più larghe che alte. Dal che evidentemente appare che gli angoli di depressione della AB sono quasi esattamente reciproci alle sue larghezze, come erasi asserito.

33. *Osservazione* 3.ª Tornerò quì ad avvertire che io non so bene se le due parti del liquido l' una superiore al punto N, e l' altra inferiore, abbiano ivi alla superficie della bolla un comune piano tangente o non formino piuttosto angolo l' una coll' altra. In questo secondo caso l' abbassamento del punto B nelle circostanze superiormente supposte sarebbe evidentemente diverso da quello che abbiamo insegnato a ritrovare; e se quell' angolo fosse rientrante, come si osserva nella superficie di una massa d'acqua colle gocce d' olio che vi si pongono a galleggiare, l'abbassamento stesso per questa nuova cagione diverrebbe più grande. E se si trattasse di una temperatura insensibilmente decrescente da B in N, allora in luogo di un angolo si avrebbe una siffatta alterazione nella forma della superficie della bolla che la curvatura relativa ad un punto P (fig. 6.ª) non sarebbe più semplicemente dovuta all' energia della capillarità del liquido e alla lunghezza della colonna che deve essere sollevata, ma eziandio alla rapidità colla quale andrebbe mutandosi la temperatura da uno stato liquido all' altro.

Ma è inutile al presente il cercare di sottoporre al calcolo queste ipotesi, mancandoci i dati sperimentali a ciò necessarii. Malgrado però un tal voto, potranno le cose dette in questa seconda parte servire a rischiarar la strada che si avrà a tenere quando si potrà dare una spiegazione più compiuta, e ad indicarci i dati che ancora ci mancano; inoltre, ciò che è l' oggetto su cui principalmente ci siamo trattenuti, a mostrare quali sieno le dimensioni di alcune specie di bolle nel caso della temperatura uniforme.

AGGIUNTA.

34. Pregato da me il Signor Carlini ad eseguire qualche sperienza di questo genere co' sensibilissimi livelli che possiede l'I. R. Specola di Brera, ebbe la compiacenza di soddisfare al mio desiderio, operando nel modo seguente. Prese un pezzo di cera che da un lato abbracciasse e si addattasse alla superior superficie del tubo di un livello, e che nell' interno chiudesse il bulbo di un termometro. Quindi lo andò riscaldando ora ad una ed ora ad un' altra temperatura, e ad ogni volta posatolo sul tubo osservava l' effetto sulla bolla e la temperatura della cera. Questo effetto poi lo misurava in due maniere, cioè 1.° Movendo una vite micrometrica che alzasse il tubo dalla parte contraria a quella dove era posta la cera, e continuando a girare essa vite quanto era necessario per tenere immobile la bolla; 2.° misurando lo spazio di cui la bolla retrocedeva dopo levata la cera. I risultamenti da lui ottenuti sono quelli esposti nella tabella seguente dove la prima colonna mostra gli aumenti della temperatura espressi in gradi di Reaumur, la seconda indica le parti di cui conveniva girare la vite micrometrica, e la terza lo spazio di cui retrocedeva la bolla espresso in linee di Parigi.

Aumento del calore,	Parti della vite,	Parti del livello lin.	Lunghezza della bolla
6,5	12	5,3	
8,1	19	7,4	
9,1	12	3,0	
10,2	22	6,8	
9,3	22,5	9,1	
10,0	15	4,5	73,8
53,2	102,5	36,1.	

Effetto medio di un grado di calore

1°	1,927	0,6785.

E siccome ogni parte della vite corrispondeva a $0'',7317$ (*), e ogni parte del livello corrispondeva in quei giorni a $2'',044$, così dalla prima maniera di osservare, cioè dai risultamenti della seconda colonna si avrebbe per ogni grado d'aumento di calore

$$1'',410$$

e dalla seconda maniera, cioè dai risultamenti della terza colonna

$$1'',387.$$

35. Facendo paragone di queste sperienze co' nostri calcoli del §. 29, può parere in sulle prime che vi abbia una notabile discordanza, avendo noi ivi trovato un angolo di

$$14''$$

per ogni grado di aumento nella temperatura, ma la differenza sta principalmente nelle circostanze.

Prima di tutto è a considerarsi la lunghezza della bolla. Non sapendo noi, almeno per ora, sottoporre al calcolo quelle forme di bolle che sono effettivamente contenute ne' livelli, e vengono attirate dall' azione del calore secondo la lunghezza, ma in vece avendo dovuto instituire i nostri calcoli sopra bolle ipotetiche di indefinita lunghezza e di notabile larghezza attirate lateralmente, egli è chiaro che nel porre a confronto le une colle altre, dovrà la larghezza delle seconde tenere il luogo della lunghezza delle prime, e che volendo ravvicinare le circostanze si dovranno rendere uguali queste dimensioni. Ora nelle sperienze del Sig. Carlini la bolla aveva la lunghezza di lin. 73,8, corrispondente a millim. 166,5, da cui deducendo due millimetri pel ripiegamento all'indietro nella parte superiore delle due estremità della bolla stessa, avremo prossimamente millimetri

(*) Veggansi le già citate Effemeridi di Milano pel 1827. Append. p. 84.

164, 5

per la distanza fra i due punti, che diremo p', p', ove la sezione media longitudinale verticale della bolla è tangente alla superfice interna del tubo, la quale è molto maggiore della distanza AB (fig. 6.ª) che noi abbiamo supposta al §. 29, e che era di millim.

46,3343.

Ed io ho per certo che raccorciandosi la bolla del livello fino a che la distanza pp' diventi di quest'ultima grandezza, deve la inclinazione di esso livello aumentarsi nella proporzione reciproca semplice, ammettendo io che l'osservazione del §. 32 debba valere anche per le bolle de' livelli. Nel qual caso in luogo di

1″, 3985

(medio fra 1″,410, e 1″,387) si verrebbe ad avere

$$\frac{1'',3985 . 164,5}{46,3343}\text{, ossia } 4'',965.$$

Secondariamente vi ha la temperatura. Quella che indicava il termometro in mezzo alla cera non veniva partecipata tutta intera al vetro e al velo superiore dell'alcool, ma bensì già assai diminuita. Nei nostri calcoli noi avevamo supposto che la temperatura più elevata si fosse trovata senza degradazione per tutta la massa liquida da B in N, e che passando sotto ad N si fosse saltato bruscamente alla temperatura primitiva. Per andar vicini a questa supposizione ed avere un effetto pressochè uguale, si sarebbe nelle esperienze dovuto avere il velo liquido superiore o aderente al vetro della medesima temperatura del termometro, e quindi una successiva ed uniforme degradazione di calore fino al di sotto di N, d'altrettanto più in giù quanto vi è da B in N, ove poi si tornasse a trovare la temperatura primitiva. In vece l'imperfetta conducibilità della cera e del vetro fa che la

Tavola per la memoria del sig.r Belli D.r Giuseppe nel T. I. di Fisica T. 20 mem. della Soc. Ital. pag. 281

Tav. XV

Fig. 1.

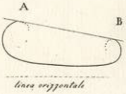

Fig. 2.

Fig. 3.

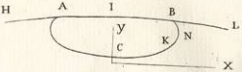

Fig. 4.

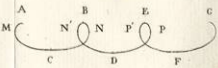

Fig. 5.

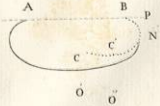

Fig. 6.

temperatura alla interna superficie del vetro sia già molto scemata; e quindi la scarsa conducibilità dell'alcool e la sua scorrevolezza, per cui le particelle liquide si distendono entro al tubo lungo la superficie superiore, fanno sì che il calore non possa bastevolmente penetrare innanzi verso gli strati inferiori. Egli è quindi a presumere che se l'aumento di temperatura indicato dal termometro avesse avuto luogo nel liquido nel preciso modo finto ne' nostri calcoli ovvero in un modo equivalente, sarebbesi avuto un risultamento molto maggiore e più vicino al nostro: forse dai 4″,965 si sarebbe arrivato verso i 10″. Sempre però, anche supposta giusta l'ipotesi assunta al §. 27, sarebbe rimasta la differenza dovuta alla imperfezione dei dati sperimentali di cui ci siamo valsi, alla diversa qualità dell'alcool, e alla diversa forma della bolla.