TEORICA
DEGLI OBJETTIVI ACROMATICI
PROPOSTI
DAL SIGNOR ROGERS

MEMORIA

DEL SOCIO
GIOVANNI SANTINI
PROFESSORE DI ASTRONOMIA NELL' UNIVERSITA' DI PADOVA

Presentata li 8. *Maggio* 1829.

Dopo che Dollond ed Eulero verso la metà dello scorso secolo dimostrarono colla teoria e colla esperienza, che si potevano togliere, od almeno attenuare fino al punto di renderli innocui alla chiara visione gli errori provenienti dalla diversa rifrangibilità dei colori, e dalla figura sferica dei vetri nei Cannocchiali, i più celebri matematici si occuparono con ardore nello sviluppo della teorica di questi preziosi stromenti, ai quali va l'Astronomia debitrice di tante e sì luminose scoperte; e gli ottici pratici più riputati dietro la scorta dei precetti loro additati, pervennero in fatti a costruire dei Cannocchiali acromatici dotati di una chiarezza, e di una forza amplificativa sorprendente. Ciò non pertanto scarso è il numero di sì fatti Cannocchiali in grandi dimensioni scevri da qualche difetto; ed è oltremodo difficile il procuraneli anche con grandi spese, eccedenti per lo più i limiti che i privati sono astretti di imporsi negli oggetti di loro studio e diletto; lo che non a mancanza di teoria vuolsi attribuire, ma piutosto ad una peculiare disposizione scelta dai pratici, commendata anco dai teorici, ed alle difficoltà che in pratica seco conduce sì fatta disposizione.

Si costruiscono per lo più i grandi objettivi acromatici con due, talvolta anco con tre lenti di due diverse specie di cristalli comunemente conosciuti sotto il nome di *Crown* e di *Flint*, i quali operano nella decomposizione della luce una dispersione molto differente; e fra le varie disposizioni che a queste lenti si può dare per produrre immagini chiare, e distinte, quella si presceglie in pratica nella quale le lenti si riducono a contatto o ad una minima distanza fra loro ponendo esternamente una lente convessa di Crown, internamente una concava di Flint, e talvolta anco al di dietro di questa una terza lente convessa dello stesso vetro della prima. Non è nostro scopo di rintracciare i precetti per il calcolo dei raggi di curvatura delle diverse superficie delle lenti in sì fatta disposizione; questi si trovano esposti in molte Opere, e particolarmente nella Diottrica di Eulero, nelle Opere del P. Boschovich, ed anco nel primo volume del trattatello da me pubblicato lo scorso anno in Padova col titolo *Teorica degli stromenti ottici*, dove ho raccolto i precetti per la costruzione degli objettivi acromatici secondo le più accreditate teorie. Se nulla lasciano a desiderare per parte della teoria questi precetti, rimane un grandissimo ostacolo in pratica nella difficoltà di procurarsi dei pezzi di Flint puro ed omogeneo, scevro da filamenti, da bolle e da certa specie di onde le quali turbano la regolarità delle rifrazioni, e tanto danno arrecano alla precisione delle immagini. Questa difficoltà fu provata dai primi costruttori degli objettivi acromatici, e piuttosto che diminuire si è aumentata, giacchè quantunque molte celebri fabbriche di cristalli siano sorte in Inghilterra, in Francia ed in Germania, sembra che non siasi per anco riuscito a scuoprire un processo per la fusione e raffreddamento del Flint, atto a renderlo a colpo sicuro in gran quantità omogeneo, quale richiedesi per la costruzione degli stromenti ottici, sicchè convenga scegliere fra una gran quantità di pezzi quello che è atto alla costruzione di una lente, e mentre facilmente si incontrano molti pezzi idonei alla costruzione di minori objettivi di uno, o due pollici di apertura, rarissimo è il caso di potersene procurare dei pezzi abbastanza grossi, e larghi per formare un objettivo maggiore di 5 pollici, a segno che riguardasi a giusto titolo come un prodigio dell'Arte ottica il grande cannocchiale di 160 pollici di distanza focale, e di 9 pollici di apertura fabbricato a Monaco dal celebre Fraunhofer, e parallatticamente montato per l'osservatorio di Dorpat in Russia.

Queste difficoltà suggerirono il compenso di sostituire al Flint un fluido trasparente dotato di una gran forza dispersiva; sembra che li Signori Blair (padre e figlio), il Signor Brewster in Inghilterra, il Sig. Girard in Vienna siano felicemente riusciti nei primi loro tentativi. Ultimamente anco il Sig. Barlow, dietro un annunzio pubblicato dal Dott. Brewster nel giornale filosofico di Edimburgo, ha costruito due di questi cannocchiali Acromatici, in uno dei quali l' objettivo ha $3 \frac{1}{4}$ poll; nell' altro 6 poll. di apertura. Col primo riconobbe per doppie tutte quelle stelle come tali osservate dal Sig. Dott. W. Herschel con un' objettivo di prova di poll. $3 \frac{1}{2}$ di apertura; col secondo vide separate ancora delle stelle più vicine, che con questo apparivano semplici, e più difficili a riconoscersi per doppie. Per quanto felici siano questi risultamenti, vi si possono fare molte ragionevoli objezioni, che molto limitano l' uso di questi Acromatici, i quali d' altronde presentano in pratica grandissime difficoltà, e lasciano sempre il desiderio di vedere perfezionati i metodi per la fabbrica del Flint.

Primieramente è molto difficile racchiudere fra due vetri un fluido con tale cemento, che non evapori, e non venga a diminuirsene la massa, ceme accade negli ordinari livelli internamente smerigliati, i quali per la evaporazione presto divengono inservibili, ed obbligano chi ne fa uso a riempirli con nuovo alcool. Il Dott. Blair assicura, che in trent' anni nulla ha per questa parte perduto l'objettivo costruito da suo padre, e quantunque siasi il fluido un poco alterato, ed abbia deposto alcuni cristalli, tuttavia supera ancora in bontà i migliori cannocchiali acromatici della stessa dimensione. (*Bibliotheque universelle Avril. et Juin.* 1828). In secondo luogo, conviene lasciare un piccolo vacuo non riempiendo esattamente lo spazio fra le due lenti racchiuso, affinchè dilatandosi il fluido per l'incremento della temperatura, quelle non si rompano. Tale spazietto in vero apporterà nessuno, o leggero nocumento alla bonta del cannocchiale, quando si osservi un oggetto in direzione orizzontale, od elevato pochi gradi sopra l'orizzonte; ma se vadasi avvicinando al zenit, quella bolla si trasporterà verso il centro dell' objettivo, e deturperà le immagini, togliendo la regolarità delle rifrazioni nella parte migliore e più interessante. In terzo luogo, nei fluidi col variare della temperatura varia fortemente l'indice di rifrazione, ed affinchè l'acromatismo rimanga costante per ogni grado del termometro, richiedesi, che detto m' l'indice di rifrazione per i raggi medii; $m'+dm'$ per i raggi estremi dello spettro solare ad un determinato grado di temperatura, rimanga costante il rapporto $\frac{dm'}{m'-1}$, comunque quella venga a variare. Non è indicato di qual fluido abbiano fatto uso i Signori Blair; nel citato annunzio del Dott. Brewster dicesi, che il Sig. Barlow ha adoperato il solfuro di carbonio. Conviene inoltre che al momento dell' osservazione la temperatura sia uniforme per tutta la massa, altrimenti nei diversi strati verrebbero a prodursi certe onde, che come nel Flint impuro turberebbero la regolarità delle rifrazioni. Queste considerazioni sembrano di molto ristringere l' uso degli objettivi costruiti con sostanze fluide, i quali dalla parte pratica presentano alla maggior parte degli artefici grandi difficoltà, e richiedono per la loro costruzione una grandissima diligenza; perciò rimane sempre, come da bel principio annunziammo, il desiderio che si rimuovano gli ostacoli che si incontrano nella fabbrica dei comuni cannocchiali Acromatici col Crown, e col Flint.

Il Chiarissimo Sig. Littrow, Professore di Astronomia nell' Università di Vienna, sviluppò per il primo le condizioni alle quali si dovrebbe soddisfare per ottenere un buon cannocchiale Acromatico, mediante due specie di vetri con due sole lenti, delle quali la prima fosse convessa, e l' altra concava portata dalla prima in gran distanza. È palese, che quando ciò riesca, la lente concava per essere situata molto vicina al foco della lente di Crown, dove il fascio luminoso è già ristretto in un angusto spazio, riuscirà di dimensioni molto minori, ed in conseguenza si richiederanno per la sua costruzione minori pezzi di Flint puro ed omogeneo, quali più facilmente si ottengono dalle fabbriche. Colla scorta della teoria è facile di assegnare le condizioni alle quali si deve soddisfare, affinchè vengano anche in questa disposizione distrutti gli errori di rifrangibilità e di figura. Ma si cade nell' inconveniente di aumentare la lunghezza del cannocchiale, la quale tanto più fassi maggiore, quanto minore è la forza dispersiva del Flint in confronto di quella del Crown posti in opera. Dimostrò il lodato autore, che se ottenere si potesse una pasta di Flint in cui la forza dispersiva fosse quattro o cinque volte maggiore di quella dell' ordinario flint inglese, una tale distribuzione condurrebbe a risultati vantaggiosi, perchè con piccole porzioncelle di un tal vetro pure ed omogenee riuscire si potrebbe a costruire un buon cannocchiale Acromatico di grandi dimensioni. La composizione però di un tal Flint si desidera tuttavia, e si può temerla non esente da gravi difficoltà, riflettendo che la forza dispersiva aumenta con la quantità di ossido di piombo, conche aumentasi la difficoltà di mescolare perfettamente gli elementi componenti tal vetro; ed oltre ad aumentarsi il numero ed il pericolo delle onde, e dei filamenti, una soverchia quantità di ossido di piombo tende a diminuire la diafaneità, e ad imprimergli un colore lattiginoso. Giova non pertanto sperare, che i progressi sempre crescenti della chimica pervengano a rimuovere queste difficoltà, nel qual caso il progetto del Sig. Littrow sarà per l'ottica pratica sommamente vantaggioso. Questo suo interessante lavoro è inserito nel IV. volume del giornale di Fisica e Matematica pubblicato in Vienna dai Signori Professori Ettingshausen, e Bahumgartner sotto il titolo *Zeitschrift für Physik und Mathematik* IV. 257. Circa lo stesso tempo, cioè agli 11 di Aprile 1828. il Sig. Rogers lesse alla Società astronomica di Londra una memoria, di cui si dà l'annunzio nel *giornale Filosofico* per il mese di Giugno 1828, ed anco nell' ora citato giornale di Fisica e di Matematica (Vol. V. pag. 120.), la quale ha per iscopo di costruire con un piccolo pezzo di Flint delle fabbriche comuni un gran cannocchiale Acromatico; nel che procede con un metodo molto ingegnoso, il quale sembra dover produrre in pratica un ottimo effetto. Il metodo praticato da Rogers riducesi in sostanza a costruire una lente semplice di Crown, la quale abbia la distanza focale che si vuol dare all'objettivo del cannocchiale composto con l'apertura solita a darsi agli objettivi acromatici della medesima dimensione. Fra questa ed il suo foco introducesi una piccola lente, che egli appella *di correzione*, composta di due lenti, una convessa di Crown, l'altra di Flint ridotte a contatto od in grandissima vicinanza fra loro, ed in modo combinate che producano sui raggi di media rifrangibilità l'effetto di una lente piana, sicchè questi attraversino irrefratti il loro sistema; ma sia al tempo stesso accelerata la convergenza dei raggi rossi, e ritardata quella dei violacei in modo che tutti vengano a riunirsi in un sol punto, formando così chiare e precise le immagini degli oggetti lontani. Nulla di più si richiede per l'acromatismo. Rogers dà pel calcolo delle distanze focali delle lenti nel suo objettivo la seguente regola.

,, *La lunghezza focale di ciascheduna parte della lente*
,, *di correzione stà a quella dell' objettivo di Crown in ragio-*
,, *ne composta della superficie della lente di correzione alla*
,, *superficie dell'objettivo, e della differenza degli indici di di-*
,, *spersione del Flint e del Crown all' indice di dispersione*
,, *del Crown*.

Calcolate prossimamente le distanze focali delle lenti osserva l' Autore, che l' aberrazione longitudinale residua di rifrangibilità si può togliere senza alterare le loro curvature, mediante un piccolo movimento lungo l' asse dell' objettivo dato con un opportuno apparato micrometrico alla lente di correzione; e che del pari si può distruggere l' aberrazione longitudinale di sfericità, separando convenientemente le due lenti di correzione. Infine osserva non essere necessario che le due lenti congiunte producano sui raggi di media rifrangibilità l' effetto di un vetro piano, ma potersi ancora con opportune modificazioni nelle loro dimensioni abbreviar alcun poco la lunghezza del tubo objettivo.

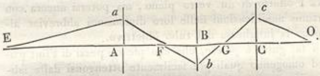
In tal guisa è palese, che con piccoli pezzi di Flint puro, ed omogeneo quali più facilmente ottengonsi dalle fabbriche, si può costruire un cannocchiale acromatico di grandi dimensioni, purchè abbiasi una lente objettiva semplice di Crown, ed è per conseguenza tolta una delle maggiori difficoltà che ai pratici si è sempre presentata nella costruzione dei grandi rifrattori astronomici.

L' importanza di questo argomento mi ha determinato ad esporre in questa breve Memoria i precetti dalla teoria indicati per sì fatte costruzioni, ed illustrarli con un esempio numerico, affinchè abbiano i pratici una guida conveniente per il calcolo di un tal genere di objettivi, i quali per la loro semplicità meritano una particolare attenzione.

Prima però di venire al calcolo dell' objettivo di Rogers, stimo opportuno di riferire brevemente la teoria di quello a due lenti proposto da Litrow, giacchè sebbene questa disposizione non possa utilmente applicarsi con le attuali qualità di Flint, renderà un utile servigio, se avvenga di scuoprire una sostanza molto disperdente da sostituirsegli, siccome lo stesso autore fece saggiamente riflettere nella Memoria, che abbiamo sopra citata; e per procedere con ordine, brevemente riferiremo le formule, alle quali si appoggia la teoria dei sistemi acromatici di lenti disposte intorno ad uno stesso asse, ritenendo le definizioni, ed i simboli adoperati nel primo volume della *Teorica degli stromenti ottici*, alla quale Opera saranno da riferirsi le citazioni dei paragrafi che si incontrano nelle cose seguenti.

FORMULE GENERALI

per il calcolo di un sistema di lenti acromatiche disposte intorno ad un medesimo asse.



I. Sia nella quì unita figura EAO l' asse comune di un sistema di lenti A*a*, B*b*, C*c* . . . , che fingeremo tutte convesse; E il punto radiante; le loro distanze focali siano rispettivamente $p, q, r, \ldots$; E*abc*O il viaggio del raggio ultimo, che da E conducesi alla prima lente, sicchè F, G, O siano i punti di riunione successivi dei raggi procedenti da E, dove pure esistono le immagini del punto E; pongansi le distanze di riunione $EA = a$, $AF = \alpha$; $FB = b$, $BG = \beta$ $GC = c$, $CO = \gamma$ ec. Le semiaperture successive A*a*, B*b*, C*c* delle lenti siano $= x, x', x''$; le loro distanze scambievoli AB, BC . . . $= d, d'$. . . ; le semi-aperture da darsi alla seconda, terza ec. lente, affinchè i raggi provenienti dall' estremità di un' oggetto situato in E, e facienti nel centro della prima lente con l' asse un' angolo determinato ϕ, da cui dipende il campo del sistema, si indichino per ϖq, $\varpi' r$ . . . . . L' angolo ϕ nella teoria dei cannocchiali rappresenta il mezzo campo, ed è sempre un piccolo angolo, che si può supporre uguale alla sua tangente od al suo seno; le quantità ϖ, ϖ' sono frazioni assolute, per le quali si stabilisce generalmente la condizione, che non debbano risultare maggiori di $\frac{1}{4}$, affinchè le intere aperture delle lenti non risultino maggiori della metà della loro distanza focale. Gli indici di rifrazione nel vetro di cui si formano le lenti, siano per i raggi di media rifrangibilità rappresentati rispettivamente da m, m', m'' . . ., e per i raggi estremi dello spettro ricevano le variazioni dm, dm', dm'' . . ., quantità che riescono abbastanza piccole per poterne trascurare le potenze superiori alla prima. I raggi delle superficie della prima lente siano R, R'; della seconda R'', R'''; della terza R$^{\text{iv}}$, R$^{\text{v}}$, ec. Questi raggi devono riguardarsi come positivi per le superficie convesse, negativi per le concave; così pure le distanze focali p, q, r si riguarderanno come positive nelle lenti di convergenza, negative nelle lenti concave, o di divergenza. I numeri arbitrarii, dai quali dipendono i raggi delle lenti, e le aberrazioni di sfericità siano λ, λ', λ'' . . . Questi saranno sempre positivi, e maggiori di uno (Teor. I. vol. § 103.). Si assumano inoltre le denominazioni ivi stabilite (§ 104.), cioè si ponga

$$\mu = \frac{m(4m-1)}{8(m-1)^2(m+2)}\ ; \quad v = \frac{4(m-1)^2}{4m-1}$$

$$\rho = \frac{4+m-2m^2}{2(m+2)(m-1)}\ ; \quad \sigma = \frac{m(2m+1)}{2(m+2)(m-1)}$$

$$\tau = \frac{m\sqrt{4m-1}}{2(m+2)(m-1)}.$$

Fra le quantità precedenti esisteranno per i principii della diottrica (supponendo trascurabili le grossezze delle lenti) le equazioni seguenti

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{m-1}{R}+\frac{m-1}{R'}\ \ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}=\frac{m'-1}{R''}+\frac{m'-1}{R'''}\ \ldots\ldots\ (2)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}=\frac{m''-1}{R^{IV}}+\frac{m''-1}{R^{V}}\ \ldots\ldots\ (3)$$

$$d=\alpha+b\,;\quad d'=\beta+c\,;\ \text{ec.}\ \ldots\ldots\ (4)$$

$$x'=\frac{b}{\alpha}\,x\,;\quad x''=\frac{bc}{\alpha\beta}\,x\,,\quad \text{ec.}\ \ldots\ldots\ (5)$$

$$\varpi q=(\alpha+b)\phi;\ \varpi' r=\left(\frac{\alpha\beta}{b}-c\right)\phi+\varpi c;\ \text{ec.}\ \ldots\ (6)\,.$$

I raggi delle superficie delle lenti saranno dati dalle seguenti equazioni, nelle quali $\mu', \mu'' \ldots \nu', \nu'', \ldots \rho', \rho'' \ldots$ indicano ciò che divengono le rispettive quantità superiori μ, ν, ρ . . . cambiandovi l' indice di rifrazione m in m', ovvero in m'' (§. 104).

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\frac{\rho}{a}+\frac{\sigma}{\alpha}\pm\frac{\tau\sqrt{\lambda-1}}{p}\\ \frac{1}{R'}&=\frac{\rho}{\alpha}+\frac{\sigma}{a}\mp\frac{\tau\sqrt{\lambda-1}}{p}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R''}&=\frac{\rho'}{b}+\frac{p\sigma'}{\beta}\pm\frac{\tau'\sqrt{\lambda'-1}}{q}\\ \frac{1}{R'''}&=\frac{\rho'}{\beta}+\frac{\sigma'}{b}\mp\frac{\tau'\sqrt{\lambda'-1}}{q}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R^{IV}}&=\frac{\rho''}{c}+\frac{\sigma''}{\gamma}\pm\frac{\tau''\sqrt{\lambda''-1}}{r}\\ \frac{1}{R^{V}}&=\frac{\rho''}{\gamma}+\frac{\sigma''}{c}\mp\frac{\tau''\sqrt{\lambda''-1}}{r}\end{aligned}\right\}\quad(9).$$

La condizione, perchè sia annullata l' aberrazione longitudinale di rifrangibilità, sarà (§. 87.)

per 2 lenti $\frac{dm}{m-1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 0$ . . . . (10)

per 3 lenti $\frac{dm}{m-1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{dm''}{m''-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2\beta^2} = 0$...(11)

La condizione, perchè sia tolto il margine colorato in un sistema di tre lenti (non potendo esso annullarsi in un sistema di due lenti) è (§. 93.)

$$\varpi \frac{dm'}{m'-1} + \varpi' \frac{c}{\beta} \cdot \frac{dm''}{m''-1} = 0 \quad \ldots\ldots (12)$$

Questa equazione equivale anco alla seguente (vol. II. §. 246.)

$$\bar{d} = \frac{q+r}{2-\frac{q}{d}} \quad \ldots\ldots (12)'$$

che ci sarà utile in seguito.

Per ultimo, le condizioni per esprimere le aberrazioni longitudinali di sfericità in un sistema di due o di tre lenti saranno espresse nelle seguenti equazioni (§. 109.).

per due lenti $P + \frac{b^4}{a^4} Q = 0$ . . . . . (13)

per tre lenti $P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4c^4}{a^4\beta^4} R = 0$ (14)

dove per brevità ponesi

$$P = \frac{\mu}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\nu}{a\alpha}\right); \quad Q = \frac{\mu'}{q}\left(\frac{\lambda'}{q^2} + \frac{\nu'}{b\beta}\right)$$

$$R = \frac{\mu''}{r}\left(\frac{\lambda''}{r^2} + \frac{\nu''}{c\gamma}\right).$$

FORMULE

Per il calcolo di un objettivo acromatico a due lenti separate da un intervallo = d.

2. Fingasi la prima lente in A di Crown; la seconda in B di Flint, essendo per A l' indice di rifrazione $= m$; per $B = m'$, l'intervallo $AB = d$, e si cerchino le condizioni, perchè i raggi paralelli all'asse tanto prossimi, che remoti si riuniscano in un punto; o sia perchè siano in questo sistema distrutte le aberrazioni longitudinali di rifrangibilità e di figura. Posta la distanza focale p della prima lente $= 1$, quella della seconda $= q$, avremo in grazia dei raggi paralelli all' asse

$$a = \infty,\ \alpha = p = 1\ ;\ b = -(1 - d) \;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$

L' equazione (10) darà il valore di q atto a distruggere gli errori di rifrangibilità; e ponendo per brevità

$$N = \frac{dm}{dm'} \cdot \frac{m'-1}{m-1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (b)$$

da essa si dedurrà

$$q = -\frac{(1-d)^2}{N} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$$

In seguito l' equazione (2) darà

$$\beta = \frac{bq}{b-q} = \frac{(1-d)^2}{1-(d+N)} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (d)$$

Rimangono a determinare i raggi delle superficie delle lenti in modo che siano distrutti gli errori di sfericità, al che si perverrà, determinando i numeri λ, λ' in modo che sia soddisfatta l' equazione (13). Ponendo $a = \infty$, $\alpha = p = 1$, si troverà

$$P = \mu\lambda\ ;\ Q = \frac{\mu'\lambda'}{q^3} + \frac{\mu'\nu'}{qb\beta},$$

e la detta equazione darà

$$\lambda' = -\frac{q^3}{b^4}\cdot\frac{\mu}{\mu'}\lambda - \frac{q^2}{b\beta}v' \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(e)$$

dalla quale, preso λ a piacere si avrà tosto λ'. Quindi le equazioni (7), (8) daranno senza alcuna difficoltà i raggi della superficie delle lenti A, B, e con ciò la disposizione dell'objettivo sarà completamente determinata, nè altro resterà che scegliere convenientemente le arbitrarie d, λ le quali rimangono tuttavia a nostra disposizione.

3. Vediamo ora qual sia l'allungamento che in questo caso riceve il cannocchiale. È palese che ponendo $d = 0$ nelle formole precedenti, si ricade in quelle stesse, che servono al calcolo delle dimensioni di un objettivo, in cui le due lenti sieno all' immediato contatto. Chiamando l', l le lunghezze rispettive del tubo objettivo, quando le lenti sono separate da un intervallo d, e quando sono a contatto, sarà evidentemente

$$l' = d + \beta = \frac{1 - d(1 + N)}{1 - (d + N)}; \quad l = \frac{1}{1 - N}$$

donde risulterà

$$l' - l = \frac{dN^2}{(1 - N)[1 - (d + N)]}.$$

Dovendo ora essere β quantità positiva, affinchè i raggi convergano effettivamente ad un punto dopo di avere attraversato la seconda lente, dovrà in virtù dell' equazione (d) essere $d + N < 1$, cioè $d < 1 - N$, perciò sarà $l' - l$ quantità positiva, quando N è una frazione, come succede nel caso del Crown e del Flint. Tende dunque questa disposizione ad aumentare la lunghezza del cannocchiale tanto più, quanto più grande sia d, e quanto più grande è la frazione N; se prendesi d molto piccolo non si ha il vantaggio contemplato da bel principio di potere adoperare dei pezzi minori di Flint;

se poi prendasi molto grande e vicino al suo limite $1 - N$, il fattore del denominatore $1 - (d + N)$ diviene piccolissimo, e soverchiamente incomoda riesce la lunghezza del tubo objettivo.

Non può pertanto utilmente adoprarsi questa costruzione coi vetri Crown e Flint delle fabbriche comuni, pei quali si ha presso a poco $N = 0,5$; od anche $= 0,7$: ma se si riuscisse a trovare due sostanze vitree, per le quali N fosse $= 0,1$ od anche $= 0,2$, si potrebbe con piccoli pezzi di tale Flint procurare dei grandi e buoni objettivi acromatici, siccome chiaramente dimostrano gli esempii numerici dal Sig. Littrow riferiti nel citato giornale, che quì per amore di brevità tralasciamo.

CALCOLO

Di un objettivo acromatico composto di tre lenti separate giusta il metodo di Rogers.

4. Si consideri un sistema di tre lenti A, B, C disposte intorno ad un medesimo asse; la prima, e la seconda siano della stessa specie di Crown, ambedue convesse, e separate dall' intervallo $AB = d$; la terza fingasi a contatto della seconda, concava e di Flint. Assumasi ad unità la distanza focale della prima lente, e si supponga, che la seconda e la terza insieme congiunte nei raggi di media rifrangibilità facciano l' ufficio di un vetro piano, sicchè sia $q + r = 0$, ovvero $q = -r$.

Avremo in questo caso nelle formule generali del n.° 1 $a = \infty$, $\alpha = p = 1$; $b = -(1 - d)$; l' equazione $d' = \beta + c$ darà $\beta = -c$. Indicando per m l' indice medio di rifrazione del Crown, per m' quello del Flint, sarà nelle stesse formule $m' = m$, e si dovrà cangiare m'' in m'; l' equazione (11), ponendovi

$$p = a = 1\,,\ q = -r,\ \frac{dm'}{dm}\cdot\frac{m-1}{m'-1} = \xi\,,\ c = -\beta,\ \text{darà}$$

$$1 + \frac{b^2}{q}(1 - \xi) = 0$$

dalla quale si otterrà

$$q = b^2(1 - \xi)\ \ldots\ldots\ldots\ (a)$$

e perciò

$$r = -b^2(1 - \xi)\ \ldots\ldots\ (b).$$

Preso pertanto d a piacere, tosto si avrà b; e quindi le equazioni precedenti (a), (b) daranno le distanze focali della seconda, e terza lente atte a togliere l'aberrazione longitudinale di rifrangibilità prodotta dalla lente A, ed è abbastanza palese che queste equivalgono alla regola data da Rogers, di cui abbiamo sopra riferito l'enunziato.

In seguito l'equazione (2) darà

$$\beta = \frac{bq}{b-q} = -c\,,$$

e l'equazione (3), a motivo di

$$r = -q\,,\ \beta = -c,\ \text{darà}\ \gamma = -b.$$

Resta ad assegnare la figura delle lenti in modo che l'errore di sfericità sia distrutto, al che si perverrà facilmente soddisfacendo all'equazione (14) mediante le arbitrarie $\lambda, \lambda', \lambda''$. È facile vedere, che nel caso presente i valori di P, Q, R si ridurranno ai seguenti

$$\mathrm{P} = \lambda\mu;\ \mathrm{Q} = \frac{\mu\lambda'}{q^3} + \frac{\mu\nu}{qb\beta};\ \mathrm{R} = -\frac{\mu'\lambda''}{q^3} - \frac{\mu'\nu'}{qb\beta}\,.$$

Osservando che $\frac{c^4}{\beta^4} = 1$, la detta equazione diverrà

$$\mu\lambda + \frac{b^4}{q^3}(\mu\lambda' - \mu'\lambda'') + \frac{b^3}{q\beta}(\mu\nu - \mu'\nu') = 0\ \ldots\ldots\ (c)$$

dalla quale, presi a piacere due dei tre numeri arbitrarii λ, λ', λ'', si avrà l'altro. In seguito il calcolo numerico delle equazioui (7), (8), (9) darà i raggi delle superficie delle singole lenti A, B, C.

Esempio Numerico.

5. Si voglia costruire un objettivo acromatico dietro questa teoria con due specie di vetro, per il quale siano gli indici di rifrazione e di dispersione quelli stessi, dei quali ho fatto uso nella *Teorica degli stromenti ottici* vol. I. §.° 126; cioè

Crown, pei raggi medii . . . . $m = 1,530000$

pei raggi rossi . . . $+ m - dn = 1,521000$

e perciò . . . . $dm = 0.009000$

Flint, pei raggi medii . . . . $m' = 1,634494$

pei raggi rossi . . . . . $m' - dm' = 1,616707$

$dm' = 0.017787$.

Dietro questi dati si troverà

$$\xi = \frac{dm'}{dm} \cdot \frac{m-1}{m'-1} = 1,650853.$$

Assunta la distanza focale p della prima lente $= 1$, pongasi l'arbitraria $d = \frac{2}{3}$; sarà $b = -\frac{1}{3}$; in seguito si troverà

$$q = \frac{\xi - 1}{q} = 0,072317 \; ; \; r = -0.072317$$

$$\beta = \frac{q}{1+3q} = 0,0594247 = -c$$

$$b = -\gamma = -0,333333.$$

Non resterà più, che a determinare la figura delle lenti soddisfacendo all' equazione (c). A tale oggetto, conviene prima di tutto apparecchiare i valori delle funzioni μ, μ'; v, v' etc. dietro le equazioni riferite al n.° 1. Si troverà così, come nel §. 126

$$\text{per } m = 1{,}530000 \;.\;.\;.\;.\; \text{per } m' = 1{,}634494$$

$$\log.\mu = 9.9945449 \;.\;.\;.\;.\;.\; \log.\mu' = 9.8883567$$

$$\log.v = 9{,}3413418 \;.\;.\;.\;.\;.\; \log.v' = 9{,}4635639$$

$$\log.\sigma = 0{,}2201369 \;.\;.\;.\;.\;.\; \log.\sigma' = 0{,}1798181$$

$$\log.\rho = 9.3554177 \;.\;.\;.\;.\;.\; \log.\rho' = 8.8005278$$

$$\log.\tau = 9.9622458 \;.\;.\;.\;.\;.\; \log.\tau' = 9.9211687$$

$$\sigma = 1.660110 \;.\;.\;.\;.\;.\; \sigma' = 1.5129280$$

$$\rho = 0{,}226682 \;.\;.\;.\;.\;.\; \rho' = 0.0631725.$$

L' equazione (c) contenendo tre indeterminate λ, λ', λ'', si potrà prendere a piacere la figura delle prime due lenti di Crown. Riesce in pratica più comoda di tutte la figura isoscele, perchè in una sola forma, o con un solo raggio si arruotano le due superficie della stessa lente; stabiliremo perciò, che le due lenti di Crown siano isosceli, con che i numeri λ, λ' saranno determinati dalle seguenti equazioni (§. 106).

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \rho}{2\tau}\;;\; \sqrt{\lambda' - 1} = \frac{\sigma - \rho}{2\tau} \cdot \frac{b - \beta}{b + \beta}.$$

Quindi in numeri sarà

$$\log.\sqrt{\lambda - 1} = 9.8891001\;;\quad \lambda = 1{,}6000676$$

$$\log.\sqrt{\lambda' - 1} = 0.0456194\;;\quad \lambda' = 2{,}233782.$$

Mediante i valori precedenti l' equazione (c) diverrà

$$\mu\lambda' - \mu'\lambda'' + 0{,}0505568 = 0$$

ovvero

$$\lambda'' = 0,0653767 + 1,276992.\lambda' = 2,917899.$$

Determinati i numeri $\lambda, \lambda', \lambda''$ si avranno i raggi delle superficie dalle equazioni (7), (8), (9) senza alcuna difficoltà: più comodamente si calcoleranno quelli della prima e seconda lente dalle equazioni fondamentali (1), (2) ponendovi

$$R' = R;\ R'' = R''';\ p = 1;\ q = 0,072317.$$

Si troverà così

$$R = R' = 2(m-1) = 1,060000$$

$$R'' = R''' = 2(m-1)q = 0,0766555$$

Per ultimo, introducendo nelle equazioni (9) i precedenti valori di $c, \gamma, r, \tau', \sigma' \ldots \ldots \lambda''$, ed osservando le regole dei segni, si troverà

$$\frac{1}{R^{IV}} = -1,06307 + 4,53878 \mp 15,97115$$

$$\frac{1}{R^{V}} = +0,189517 - 25,45960 \pm 15,97115.$$

Presi i segni superiori, affinchè i valori di R^{IV}, R^{V} divengano ambedue negativi; e la lente risulti concavo-concava si troverà

$$R^{IV} = -0,0800292;\ R^{V} = -0,1075404.$$

Resta ancora a determinare l'apertura della prima lente. Assumendo che nessuna apertura debba eccedere la metà della propria distanza focale, come ordinariamente si pratica da gli ottici, affine di evitare angoli incidenti e rifratti troppo grandi, si determineranno primieramente le aperture delle due minori lenti a contatto, le quali si assumeranno $= \frac{1}{2}q$. Sarà così $x' = x'' = \frac{1}{4}q = 0,01808$ circa; dopo di che l'equazione (5) darà $x = \frac{ax'}{b} = 3x' = 0,05424$; e l'apertura totale sarà $=0,10848$. In numeri rotondi, vogliamo ritenerla $=\frac{1}{10}$ che notabilmente eccede quella che in pratica si suole adottare per i maggiori objettivi acromatici, e vogliamo supporre le grossezze delle prime due lenti $=0,002$, mentre quella della terza lente concava sia $=0,001$, ed in questa ipotesi calcoleremo gli errori residui di rifrangibilità e di figura.

6. Cominciamo da quelli di rifrangibilità; si chiamino $k, k', k'', k''', k^{iv}, k^{v}$ le distanze del punto, in cui ad ogni nuova rifrazione un raggio luminoso paralello, e prossimo all' asse lo incontrerebbe dietro la superficie refringente, se fosse prolungato; perchè fossero tolti gli errori di rifrangibilità, dovrebbe k^{v} risultare lo stesso tanto per i raggi medii, come per i raggi rossi, o violacei. Queste quantità si calcoleranno coi precetti del §.° 121. una dietro l' altra colla scorta delle seguenti equazioni, le quali per maggiore comodo si sono disposte in modo da considerare tutti i raggi $R, R', \ldots R^{v}$ come positivi; d rappresenta la distanza della prima dalla seconda lente assunta $=\frac{2}{3}$; v, v', v'' sono le grossezze attribuite alle lenti, cosicchè nel caso attuale si ha

$$v=v'=0{,}002;\ v''=0{,}001.$$

$$1.^{a}\ \text{lente}\ \frac{R}{k}=\frac{m-1}{m};\ \frac{R'}{k'}=\frac{mR'}{k-v}+m-1$$

$$2.^{a}\ \text{lente}\ \frac{R''}{k''}=\frac{R''}{m(k'-d)}+\frac{m-1}{m};\ \frac{R'''}{k'''}=\frac{mR'''}{k''-v'}+m-1$$

$$3.^{a}\ \text{lente}\ \frac{R^{iv}}{k^{iv}}=\frac{R^{iv}}{m'k'''}-\frac{m'-1}{m'};\ \frac{R^{v}}{k^{v}}=\frac{m'R^{v}}{k^{iv}-v''}-(m'-1).$$

Prendendo per m, m' prima l' indice di rifrazione per i raggi medii nel Crown e nel Flint, quindi quello conveniente ai raggi rossi, dietro le superiori equazioni si formeranno i seguenti valori

Per i raggi medii . . . . . . *Per i raggi rossi*

$k = 3{,}060000$ . . . . $k = 3{,}094550$

$k' = 0{,}999673$ . . . . $k' = 1{,}016946$

$k'' = 0{,}1542802$. . . . . . . $k'' = 0{,}1575919$

$k''' = 0{,}0589577$. . . . . . . $k''' = 0{,}0603419$

$k^{iv} = 0{,}1809460$. . . . . . . $k^{iv} = 0{,}1823450$

$k^{v} = 0{,}314150$ . . . . $k^{v} = 0{,}314422$

Aberrazione residua di rifrangibilità $= 0{,}000272$.

7. Prima di procedere al calcolo dell' aberrazione di sfericità, è opportuno di distruggere questa piccola aberrazione residua di rifrangibilità, al che comodamente si perviene mediante una piccola variazione data alla distanza d, che indicheremo per δd. Chiamando δk la corrispondente variazione di k^{v}, si troverà differenziando le superiori equazioni

$$\delta k^{v} = -\frac{\overline{k^{iv}}^{2}}{(k^{iv}-d)^{2}}\,\delta d.$$

Riducendo a numeri il coefficiente di δd tanto per i raggi medii, quanto per i rossi, si ottiene

per i medii . . . $k^{v} = 0{,}314150 - 0{,}889959 \cdot \delta d$

per i rossi . . . . $k^{v} = 0{,}314422 - 0{,}805748.\ \delta d$.

Uguagliando i due valori di k^{v}, si troverà

$$\delta d = -\frac{272}{84211} = -\,0{,}003230\ ;$$

perciò il valore corretto di d sarà $= 0{,}663437$.
Ricalcolando con questo valore di d i numeri $k \ldots . k^{v}$ dietro le stesse equazioni, si otterrà

Per i raggi medii		*Per i raggi rossi*
$k = 3{,}060000$	. . . .	$k = 3{,}094550$
$k' = 0{,}999673$	. . . .	$k' = 1{,}016946$
$k'' = 0{,}1547307$	. . . .	$k'' = 0{,}1580190$
$k''' = 0{,}0590609$	. . . .	$k''' = 0{,}0603006$
$k^{iv} = 0{,}1815420$	. . . .	$k^{iv} = 0{,}1828973$
$k^{v} = 0{,}317137$	. . . .	$k^{v} = 0{,}317121$.

Quindi l' aberrazione residua di rifrangibilità sarà $= 0.000016$; quantità piccolissima e trascurabile.

8. Vediamo ora, come in questo objettivo siano tolti gli errori di sfericità, per il che con un calcolo trigonometrico e rigoroso conviene calcolare la via tenuta da un raggio luminoso incidente verso gli estremi dell' objettivo in direzione paralella all' asse dietro i precetti del §. 120. Siano perciò i, i', i'', i''', i^{iv}, i^{v} gli angoli successivi di incidenza in cadaun punto, ove ha luogo una rifrazione, l, l', l'. . . l^{v} i corrispondenti angoli rifratti; O, O'. . . O^{v} gli angoli, sotto i quali la direzione del raggio luminoso dopo la prima, seconda, . . . sesta rifrazione taglia l' asse; k, k'. . . k^{v} le distanze dei punti d' incontro di essa direzione con l' asse dalle rispettive superficie refringenti. Disponendo le formule in modo da riguardare nella presente costruzione i raggi come tutti positivi, si otterranno queste quantità dal calcolo successivo delle seguenti equazioni per ogni dato valore di i

1.ª lente;

$$\text{sen}.l = \frac{\text{sen}.i}{m};\ O = i - l;\ k - R = \frac{R\,\text{sen}.l}{\text{sen}.O}$$

$$\text{sen}.i' = \frac{k + R' - r}{R'}\,\text{sen}.O;\ \text{sen}.l' = m.\text{sen}.i';\ O' = l' - i' + O$$

$$k' + R' = \frac{R'\,\text{sen}.l'}{\text{sen}.O'}.$$

2.ª lente ;

$$\text{sen.}\, i'' = \frac{k' - d - R''}{R''} \,.\, \text{sen.}\,O'; \quad \text{sen.}\, l'' = \frac{\text{sen.}\, i''}{m}; \quad O'' = i'' - l'' + O'$$

$$k'' - R'' = \frac{R''\,\text{sen.}\, l''}{\text{sen.}\,O''};$$

$$\text{sen.}\, i''' = \frac{R''' + k'' - \nu'}{R'''} \,.\, \text{sen.}\,O''; \quad \text{sen.}\, l''' = m\,\text{sen.}\, i'''; \quad O''' = l''' - i''' + O'';$$

$$k''' + R''' = \frac{R'''\,\text{sen.}\, l'''}{\text{sen.}\,O'''}.$$

3.ª lente ;

$$\text{sen.}\, i^{iv} = \frac{k''' + R^{iv}}{R^{iv}}\, \text{sen.}\,O'''; \quad \text{sen.}\, l^{iv} = \frac{\text{sen.}\, i^{iv}}{m'}; \quad O^{iv} = l^{iv} - i^{iv} + O'''$$

$$k^{iv} + R^{iv} = \frac{R^{iv}\,\text{sen.}\, l^{iv}}{\text{sen.}\,O^{iv}};$$

$$\text{sen.}\, i^{v} = \frac{k^{iv} - R^{v} - \nu}{R^{v}} \,.\, \text{sen.}\,O^{iv}; \quad \text{sen.}\, l^{v} = m\,\text{sen.}\, i^{v}; \quad O^{v} = i^{v} - l^{v} + O^{iv}$$

$$k^{v} - R^{v} = \frac{R^{v}\,\text{sen.}\, l^{v}}{\text{sen.}\,O^{v}}.$$

9. Affinchè fossero distrutti gli errori tutti di rifrangibilità, e di figura dovrebbe il valore di k^{v} tanto per i raggi medii, quanto per i raggi rossi e violacei sì prossimi che remoti dall' asse, risultare costante; ma a tanta precisione non si può aspirare per le ragioni che più diffusamente si espongono nella diottrica; ed è forza contentarsi di riunire in un sol punto i raggi eterogenei prossimi all' asse coi ragii medii remoti, tollerando una piccola aberrazione residua di sfericità nei raggi rossi. Assumendo l' apertura $= \frac{1}{10}$, si troverà $i = 2°.\, 42'.\, 13''$; riterrò in numeri rotondi $i = 2.°43'$; conservando per i raggi delle superficie, per la distanza d corretta, e per le grossezze delle lenti i valori superiormente assegnati, trovo i risultati espressi nella seguente tabella.

Raggi medii	*Raggi rossi.*
$i = 2.^\circ\ 43'.\ 0'',0$	$i = 2.^\circ\ 43'.\ 0'',\ 0$
$l = 1.\ 46.\ 30,8$	$l = 1.\ 47.\ 8,6$
$O = 0.\ 56.\ 29,2$	$O = 0.\ 55.\ 51,4$
$k = 3,0585405$	$k = 3,0930420$
$i' = 3.^\circ\ 39'.\ 30'',40.$	$i' = 3.^\circ\ 38'.\ 52'',63$
$l' = 5.\ 36.\ 9,16$	$l' = 5.\ 33.\ 12,53$
$O' = 2.\ 53.\ 7,96$	$O' = 2.\ 50.\ 11,30$
$k' = 0,995676$	$k' = 1.012955.$
$i'' = 9.^\circ\ 39'.\ 45'',36$	$i'' = 10.^\circ\ 8'.\ 43'',80$
$l'' = 6.\ 17'.\ 53,35$	$l'' = 6.\ 39.\ 1,45$
$O'' = 6.\ 14.\ 59.\ 77$	$O'' = 6.\ 19.\ 53,65$
$k'' = 0,1539007$	$k'' = 0,1571542$
$i''' = 18.^\circ\ 56'.\ 27'',60$	$i''' = 19.^\circ 28'.\ 52'',30$
$l''' = 29.\ 46.\ 38,1$	$l''' = 30.\ 28.\ 50,9$
$O''' = 17.\ 5.\ 10,3$	$O''' = 17.\ 19.\ 51,2$
$k''' = 0,0529159$	$k''' = 0,0538743$
$i^{iv} = 29.^\circ\ 12'.\ 51'',8$	$i^{iv} = 29.^\circ\ 53'.\ 44'',8$
$l^{iv} = 17.\ 22,\ 27,2$	$l^{iv} = 17.\ 57.\ 23,6$
$O^{iv} = 5.\ 14.\ 45,7$	$O^{iv} = 5.\ 23.\ 30,0$
$k^{iv} = 0,1813396$	$k^{iv} = 0,1825478$
$i^{v} = 3.^\circ\ 32'.\ 54'',9$	$i^{v} = 3.^\circ\ 42'.\ 26'',3$
$l^{v} = 5.\ 48.\ 23,0$	$l^{v} = 6.\ 0.\ 1,9$
$O^{v} = 2.\ 59.\ 17,6$	$O^{v} = 3.\ 5.\ 54,4$
$k^{v} = 0,316238$	$k^{v} = 0,315527$

pei raggi prossimi si trovò

$k^{v} = 0,317137$ . . . . $k^{v} = 0,317121$

Quindi l'aberrazione di sfericità residua

nei raggi medii $= 0,000899$

nei raggi rossi $= 0,001594$

Affinchè gli errori di sfericità non apportino in un cannocchiale una sensibile confusione, dimostrammo al §. 116. del 1.° Volume non dovere l'aberrazione longitudinale residua (almeno nei raggi di media rifrangibilità costituenti l'immagine principale e più splendente) oltrepassare il limite $0,0000747.p$. La precedente risultando all'incirca dieci volte maggiore, dovrà ancora attenuarsi mediante piccole alterazioni introdotte nel sistema delle lenti. Qui intanto rendesi manifesto, che se anche giungasi a distruggere esattamente l'aberrazione di sfericità nei raggi medii, rimarrà tuttavia una piccola aberrazione nei raggi rossi, la quale se si può attenuare cambiando la figura della prima lente, non si può togliere del tutto, se non con forme di lenti incomode nella pratica, come mostrammo accadere negli objettivi duplicati nella più volte citata *Teorica degli stromenti ottici*; perciò da ora in poi cercheremo solo di togliere l'aberrazione di figura per i raggi medii, tollerando la residua nei raggi estremi dello spettro solare.

10. Il Sig. Rogers vanta, come uno dei principali pregi della sua costruzione il poter togliere l'errore di figura con un piccolo allontanamento della seconda dalla terza lente, che prescrive doversi lasciare arbitrario mediante un apparato micrometrico, finchè per osservazione trovisi questo distrutto, o almeno attenuato a segno di essere impercettibile all'occhio, il quale per la sua arcana costruzione non richiede nell'acromatismo l'ultima esattezza. Quantunque non sembri gran fatto lodevole il permettere che le lenti di questo sistema siano avvicinate ed allontanate mediante apparati micrometrici, per la facilità, con cui possono insorgere errori di centratura (se l'apparato tutto non sia perfettissimo) anche più pericolosi di quelli che si vogliono evitare, non parmi nè anche possi-

bile di togliere con questo mezzo l'errore di sfericità. In fatti, introducendo una piccola distanza $\delta d'$ fra la seconda e terza lente, si riproducono gli errori di rifrangibilità che erano stati precedentemente distrutti; conviene pertanto far variare contemporaneamente d di una quantità arbitraria δd; quindi per i raggi prossimi all'asse si troverà

$$\delta k^{v} = - \frac{\overline{k^{v}}^{2}}{(k'-d)^{2}}\, \delta d - \frac{\overline{k^{v}}^{2}}{k'''^{2}}\, \delta d'$$

La quale ridotta a numeri nel nostro caso tanto per i raggi medii come per i raggi rossi, darà la distanza del punto di concorso dietro l'ultima lente espressa come segue;

per i raggi medii $k^{v} = 0{,}317137 - 0{,}88962.\delta d - 28{,}8332.\delta d' \ldots.(1)$

per i raggi rossi $k^{v} = 0{,}317121 - 0{,}80462.\delta d - 27{,}5364.\delta d' \ldots.(2)$

Più prolisso e laborioso riesce il calcolo della variazione di k^{v} per i raggi medii condotti parallelamente all'asse verso le estremità; imperciocchè variano con δd le quantità i'', $i'''\ldots i^{v}$, $l'' \ldots . l^{v}$, $k'' \ldots . k^{v}$; e dipendentemente da $\delta d'$ variano le quantità i^{v}, i_{v}, l^{v}, $l_{v}, \ldots k^{iv}$, k_{v}. Queste variazioni si otterranno differenziando le equazioni del n.° 8; così sarà, per esempio,

$$di'' = - \frac{1}{R''} \cdot \frac{\text{sen}.O'}{\cos.i''}.\delta d\,; \quad dl'' = \frac{\cos.i''}{m\cos.l''} . di''; \; dO'' = di'' - dl'';$$

$$dk'' = (k'' - R'').\text{cot}.l''.dl'' - (k'' - R'').\text{cot}.O''.dO''$$

Simili equazioni daranno i valori di dk''', dk^{iv}, dk^{v}, dal calcolo successivo delle quali trovo i seguenti risultamenti

$$dk'' = -\,0{,}13695.\ \delta d$$

$$dk''' = +\,0{,}00003.\ \delta d$$

$$dk^{iv} = -\,0{,}24524.\ \delta d - 7{,}52629\ \delta d'$$

$$dk_{v} = -\,1{,}21610.\ \delta d - 34{,}87460.\ \delta d'.$$

Quindi si formerà la seguente equazione di condizione

$$k^v = 0{,}316238 - 1{,}21610 . \partial d - 34{,}87460 . \partial d' \dots (3).$$

Uguagliando i valori di k^v dati dalle equazioni (1), (2) (3) si ottiene

$$\partial d = + 0{,}014013 ; \partial d' = - 0{,}0009021$$

ed essendosi precedentemente supposte a contatto le lenti di correzione, il risultato negativo è inammissibile. Vuolsi non pertanto osservare, che le variazioni di k^v variano notabilmente cogli indici di rifrazione, ed è quindi possibile che con altre paste di vetri anche in una simile disposizione si riesca a distruggere contemporaneamente i due errori di rifrangibilità, e di figura con la semplice variazione delle distanze; variando però con ∂d molto fortemente ambedue le aberrazioni, riuscirà una tale via (parmi) sempre pericolosa in pratica, sopra tutto se gli apparati micrometrici non siano con ogni diligenza costruiti.

11. Non potendosi pertanto nella attuale disposizione di lenti distruggere al tempo stesso gli errori di rifrangibilità e di figura con un'alterazione nelle loro distanze scambievoli, è forza ricorrere alla variazione dei raggi di una delle due lenti di correzione, ed a tal' uopo riesce comodissima per il calcolo numerico una variazione arbitraria nei raggi dell'ultima lente, giacchè in tal caso tutte le quantità relative alle due precedenti rimangono invariabili. Indicando con dR'^v, dR^v gli incrementi piccolissimi dati ai raggi R'^v, R^v riguardati come positivi, si calcoleranno i valori di dk^v col mezzo delle seguenti equazioni, che facilmente deduconsi dalla differenziazione delle equazioni generali date di sopra.

1.° Per i raggi prossimi all' asse

$$dk^v = - \frac{(m'-1)\, k'^{v2} . k^{v2}}{(k'^v - y'')^2 . R'^{v2}}\, dR'_v - \frac{(m'-1)\, k^{v2}}{R^{v2}} . dR^v \dots (a)$$

2.° Per i raggi rimoti si avrà

$$dk_v = \left(\frac{dk^v}{dR'^v}\right) dR'_v + \left(\frac{dk^v}{dR^v}\right) dR^v \dots (b)$$

Il primo termine $\left(\frac{dk^{v}}{dR'^{v}}\right) dR'^{v}$ si otterrà dal calcolo successivo delle seguenti equazioni:

$$di'^{v} = -\frac{k''}{R'^{v2}} \cdot \frac{\text{sen.}O'''}{\cos.i'^{v}} \cdot dR'^{v}$$

$$dl'^{v} = \frac{1}{m'} \cdot \frac{\cos.i'^{v}}{\cos.l'^{v}}\ di'^{v};\ dO'^{v} = dl'^{v} - di'^{v};$$

$$dk'^{v} = \frac{k'^{v}}{R'^{v}} \cdot dR'^{v} + (k'^{v} + R'^{v})\cot.l'^{v}.dl'^{v} - (k'^{v} + R'^{v})\cot.O'^{v}.dO'^{v};$$

$$di^{v} = \frac{\text{tang.}i^{v}}{k'^{v} - R^{v} - v}\ dk'^{v} + \text{tang.}i^{v}.\ \cot.O'^{v}.\ dO'^{v}$$

$$dO^{v} = di^{v} - dl^{v} + dO'^{v}$$

$$\left(\frac{dk^{v}}{dR'^{v}}\right) dR'^{v} = (k^{v} - R^{v})\cot.l^{v}\ dl^{v} - (k^{v} - R^{v})\ \cot.O^{v}\ dO^{v}.$$

Quanto al secondo termine dell'equazione (b) dipendente da dR^{v}, si otterrà dietro il calcolo dalle seguenti equazioni

$$di^{v} = -\frac{k'^{v} - y''}{R^{v2}} \cdot \frac{\text{sen.}O'^{v}}{\cos.i^{v}}\ dR^{v}$$

$$dl^{v} = m' \cdot \frac{\cos.i^{v}}{\cos.l^{v}} \cdot di^{v};\ dO^{v} = di^{v} - dl^{v}$$

$$\left(\frac{dk^{v}}{dR^{v}}\right) dR^{v} = \frac{k^{v}}{R^{v}} \cdot dR^{v} + (k^{v} - R^{v})\cot.l^{v}\ dl^{v} - (k^{v} - R^{v}).\cot.O.^{v}\ dO^{v}.$$

12. Se ora riducesi a numeri il valore di dk^{v} dato dall' equazione (a) del n.° precedente tanto pei raggi medii, come pei rossi, e si aggiungono i risultati ai rispettivi valori di k^{v} del n.° 7, si avrà pei raggi prossimi all'asse

Medii..... $k^{v} = 0{,}317137 - 10{,}07444.dR'^{v} - 5{,}51794.dR^{v}$.... (4)

Rossi...... $k^{v} = 0{,}317121 - 9{,}79024.dR'^{v} - 5{,}37508.dR^{v}$.... (5).

Passando all' equazione (b), si formerà il termine $\left(\frac{dk^{v}}{dR'^{v}}\right) dR'^{v}$

dietro le superiori equazioni applicate ai raggi di media rifrangibilità, il calcolo delle quali dà i seguenti risultati

$$di^{\text{iv}} = -2{,}781256.dR^{\text{iv}}$$
$$dO^{\text{iv}} = +1{,}225099.dR^{\text{iv}}$$
$$dl^{\text{iv}} = -1{,}556157.dR^{\text{iv}}$$
$$dk^{\text{iv}} = -2{,}521407.dR^{\text{iv}}$$
$$di^{\text{v}} = -1{,}311933.dR^{\text{iv}}$$
$$dO^{\text{v}} = +2{,}195614.dR^{\text{iv}}$$
$$dl^{\text{v}} = -2{,}282448.dR^{\text{iv}}$$
$$\left(\frac{dk^{\text{v}}}{dR^{\text{iv}}}\right) dR^{\text{iv}} = -12{,}155458.dR^{\text{iv}}.$$

Per ultimo si formerà $\left(\frac{dk^{\text{v}}}{dR^{\text{v}}}\right) dR^{\text{v}}$ mediante i seguenti valori

$$di^{\text{v}} = -1{,}428507.dR^{\text{v}}$$
$$dO^{\text{v}} = +0{,}913923.dR^{\text{v}}$$
$$dl^{\text{v}} = -2{,}342430.dR^{\text{v}}$$
$$\left(\frac{dk^{\text{v}}}{dR^{\text{v}}}\right) dR^{\text{v}} = -4{,}976608.dR^{\text{v}}$$

perciò sarà

$$dk^{\text{v}} = -12{,}155458.dR^{\text{iv}} - 4{,}976608.dR^{\text{v}}.$$

quindi la seguente equazione di condizione per i raggi remoti

$$k^{\text{v}} = 0{,}316238 - 12{,}155458.dR^{\text{iv}} - 4{,}976608.dR^{\text{v}} \ldots \text{(6)}$$

Uguagliando i valori di k^{v} dati dalle equazioni (4), (5), (6) per far concorrere in un solo punto i raggi eterogenei prossimi all'asse coi medii remoti, si troverà coi soliti metodi

$$dR^{\text{iv}} = -0{,}00026548;\; dR^{\text{v}} = +0{,}00064013;\; k^{\text{v}} = 0{,}316280.$$

Pertanto i raggi corretti dell' ultima lente concavo-concava risulteranno come segue

$$R^{\text{iv}} = 0{,}0800292 - 0{,}0002655 = 0{,}0797637\,;$$
$$R^{\text{v}} = 0{,}1075404 + 0{,}0006401 = 0{,}1081805\,,$$

e la disposizione completa dell' objettivo acromatico dovrà essere la seguente (supponendo gli indici di rifrazione, come a bel principio li abbiamo assunti)

1.^{a} lente, isoscele di Crown, convessa; distanza focale = 1,000000
Raggio comune alle due superficie . . . = 1,060000

2.^{a} lente, isoscele dello stesso Crown; distanza focale = 0,072317
Raggio comune alle due superficie . . . = 0,0766555

3.^{a} lente, concavo-concava di Flint; distanza focale risultante dai superiori raggi corretti = —0,0723599

Raggio della 1.^{a} superficie rivolta verso gli oggetti = —0,0797637

Raggi della 2.^{a} superficie rivolta all' occhio = —0,1081805

Distanza della prima dalla seconda lente . . . = 0,663437

Grossezza della prima e della seconda lente = 0,002 circa

Grossezza della terza lente . . . . = 0,001

Semi-apertura della prima lente = x . . . . . . = 0,05

La semi-apertura delle due lenti di correzione = $\frac{1}{3}x$ = 0.017 cir.

L' estremo raggio principale, che attraversando il centro della prima lente potrà essere rifratto dalla seconda e terza lente farà con l' asse un' angolo di 1.° 25'; perciò il campo sarà sempre convenientemente grande.

13. Nell' objettivo precedentemente descritto sarebbero tolti gli errori di rifrangibilità nei raggi eterogenei prossimi all' asse, e di figura nei raggi medii estremi, se i piccoli errori commessi nella stima delle parti proporzionali in una sì lunga serie di operazioni numeriche, e le seconde potestà delle correzioni trovate, trascurate per la natura stessa del calcolo differenziale, non esercitassero sui finali valori di k^v una qualche influenza. È quindi opportuno di mostrare col calcolo la grandezza delle aberrazioni residue. Si riprenderà quin-

di da capo il calcolo delle quantità $k, k' \ldots k^v$, tanto pei raggi prossimi all'asse, come pei remoti, e siccome la posizione, e le dimensioni delle prime due lenti non hanno variato, basterà proseguire il calcolo delle indicate quantità da k''' in poi. Si troverà così pei raggi prossimi all'asse.

Medii		*Rossi*
$k'^v = 0{,}1820756$	....	$k'^v = 0{,}1834296$
$k^v = 0{,}316145$	....	$k^v = 0{,}316136$

e perciò l'aberrazione residua di rifrangibilità sarà$=0{,}000009$; quantità esigua e trascurabile.
Quanto ai raggi remoti si troverà

Pei medii	.....	*Pei rossi*
$i'^v = 29.°15'.24'',8$	....	$i'^v = 29°.56'.23'',6$
$l'^v = 17.\ 23.\ 52{,}8$	....	$l'^v = 17.\ 58.\ 53{,}1$
$O'^v = 5.\ 13.\ 38{,}3$	....	$O'^v = 5.\ 22.\ 20{,}7$
$k'^v = 0{,}1820153$	....	$k'^v = 0{,}1832289$
$i^v = 3°.31'.\ 0'',18$	....	$i^v = 3°.40'.28'',17$
$l^v = 5.45.\ 14{,}82$	....	$l_v = 5.\ 56.\ 49{,}85$
$O^v = 2.\ 59.\ 23{,}66$	....	$O^v = 3.\ 5.\ 59{,}0$
$k^v = 0{,}316120$	.....	$k^v = 0{,}315466.$

Aberrazione di figura residua nei raggi medii $= 0.000025$.

nei raggi rossi $= 0.000679$.

Vedesi pertanto, che l'aberrazione di sfericità residua nei raggi medii è all'incirca tre volte minore di quella, che può esercitare una sensibile influenza, e perciò trascurabile; ma rimane quì pure come negli objettivi duplicati, e triplicati a contatto una piccola aberrazione nei raggi rossi, la quale non può essere tolta del tutto, e solo potrà diminuirsi assumendo altre forme per le due prime lenti, la figura delle quali rimase al nostro arbitrio. Quì però vuolsi osservare, che a motivo della piccola distanza focale delle due lenti di correzione, sembra per esse conveniente la figura isoscele, almeno prossimamente, per non cadere in raggi di curvatura troppo piccoli, e d' altronde la figura della prima lente in virtù dell' equazione (*c*) del n.° 4. ha su quella delle altre due una piccola influenza. Quindi la disposizione da noi riferita riunisce al pregio della semplicità eziandio quello della tenuità delle aberrazioni residue pei raggi paralelli all' asse; a ciò si aggiunge, che è anche tolto all' incirca il contorno colorato in quanto che questo può derivare dalla decomposizione dei raggi principali di media rifrangibilità; imperciocchè la lente di correzione produce in essi all' incirca l' effetto di un vetro piano, piccolissima essendo la differenza fra le opposte distanze focali della seconda e della terza lente, la qual cosa anche si manifesta dall' equazione (12)' del n.° 1. che è sensibilmente soddisfatta. Sembra quindi tale costruzione dover produrre in pratica un buon effetto; ciò non pertanto è da osservarsi, che esigerà questa una grandissima diligenza, giacchè è facile convincersi dalle cose precedenti, che le aberrazioni di rifrangibilità, e di figura variano fortemente per piccole alterazioni date ai raggi delle lenti di correzione, e quindi un piccolo errore in questi può esercitare una pericolosa influenza. Per questa ragione non sembra potersene raccomandare l' uso che per i maggiori cannocchiali, per i quali sì fatta disposizione può divenire molto vantaggiosa, richiedendosi per essa dei mediocri pezzi di Flint puro, come più chiaramente apparirà dal seguente esempio numerico.

Colle paste di Crown, e di Flint, che hanno servito di base all'esempio precedente, si vuol costruire un grande rifrattore astronomico, il quale abbia 10 *piedi di distanza focale.*

1.° Si farà la prima lente di Crown isoscele; i raggi delle sue due superficie saranno $= 10.^{p}\ 7.^{pol}\ 2^{l}, \frac{2}{5}$. Nel nostro calcolo abbiamo portato l'apertura di questa lente ad $\frac{1}{10}$ della sua distanza focale; quindi sarebbe $= 12\frac{1}{2}$ pol. e superebbe quella di qualunque cannocchiale fin' ora costruito. Si potrà diminuire un' apertura così eccedente, e ridurla a 9, o 10. poll. con che eziandio gli errori residui di sfericità avranno minore influenza. La grossezza della lente risulterà circa 3. linee.

2.° La seconda lente si farà pure dello stesso vetro, convessa ed isoscele; i raggi delle due superficie dovranno essere $= 0^{p}.\ 9^{pol}.\ 2^{l}, 384$ circa; la sua apertura sarà di circa 4 poll., la sua grossezza nel calcolo è stata assunta uguale alla precedente; ma poca influenza ha nel risultato, se anche risulta un poco minore.

3.° La terza lente sarà di Flint concavo-concava, ed avrà l'apertura di 4 pol. come la precedente, laddove negli objettivi a contatto avrebbe dovuto essere di 9, o 10. poll. come quella della prima lente; se si lascierà nel mezzo una grossezza di circa $1.\ \frac{1}{2}$ linee; cioè circa la metà di quella della seconda.

Il raggio della prima superficie sarà $= 0.^{p}\ 9.^{p}\ 6,^{l}860.$ circa
quello della seconda . . . . . $= 1.\ \ 0.\ 11,780.$

4.° Le due lenti di correzione si fisseranno, come i comuni objettivi, in un anello di ottone; e siccome le due interne superficie rimangono quasi a contatto per la piccola differenza dei raggi, per evitare l'immediato contatto verso il centro, e gli anelli colorati che ne risulterebbero, si frapporranno fra l'una e l'altra lente tre piccoli pezzetti di foglia di stagno ugualmente grossi, come nei suoi objettivi praticò Fraunhofer, e si userà ogni diligenza nel centrarle dentro l'anello.

Per ultimo in un tubo, intorno ad un' asse comune, si porrà la prima lente ad una sua estremità, e la lente di correzione in modo, che le loro interne superficie siano alla distanza di $6.^{p}\ 7.^{pol}\ 7^{l}$, 349, ed in modo che tutto il sistema sia esattamente centrato; lo che si potrà verificare nel modo proposto, e praticato da Wollaston per gli objettivi triplicati.

Tale dovrà essere la disposizione delle lenti, perchè l'objettivo composto produca una immagine chiara, e precisa degli oggetti lontani; ad esso si adatterà una serie di occulari per i diversi ingrandimenti dalla chiarezza naturale fino al massimo ingrandimento che può sostenere, i quali si costruiranno coi precetti, che diffusamente si espongono nel secondo volume della *Teorica degli Stromenti Ottici*.