# MEMORIE
DI
# MATEMATICA

## SULLO SVILUPPO DELLE FUNZIONI IN SERIE

# MEMORIA

DEL PROF. PIETRO PAOLI

*Ricevuta adì 19. Novembre 1828.*

1. Data l' equazione $z=0$ tra le variabili $x$ ed $y$, sia proposto di esprimere una funzione $\psi$ delle medesime variabili per $y$ senza $x$. Se ponghiamo $x'+x-x'$ in luogo di $x$, e sia $z'$ il valore di $z$ quando $x$ si cangia in $x'$, avremo pel teorema di Taylor

$$0=z=z'+(x-x')\frac{dz'}{dx'}+\frac{(x-x')^2}{2}\cdot\frac{d^2z'}{dx'^2}+\frac{(x-x')^3}{2.3}\cdot\frac{d^3z'}{dx'^3}+\&c.$$

Per determinare la quantità $x-x'$ mediante questa equazione facciamo

$$x-x'=Az'+Bz'^2+Cz'^3+Dz'^4+\&c.$$

sostituendo il qual valore nell' equazione precedente, e paragonando tra loro i termini affetti dalle medesime potenze di $z'$ conosceremo le quantità A, B, C, &c.

Ponendo similmente $x' + x - x'$ invece di $x$ nella funzione $\psi$, e chiamando $\psi'$ il valore di $\psi$ quando $x$ diventa $x'$, otterremo

$$\psi = \psi' + (x - x')\,\frac{d\psi'}{dx'} + \frac{(x-x')^2}{2}\cdot\frac{d^2\psi'}{dx'^2} + \frac{(x-x')^3}{2.3}\cdot\frac{d^3\psi'}{dx'^3} + \&c.$$

e sostituendo ad $x - x'$ la serie antecedente avremo $\psi$ così espressa

$$\psi = \psi' + a_1 z' + a_2 z'^2 + a_3 z'^3 + \&c.$$

Per trovare i valori dei coefficienti $a_1$, $a_2$, $a_3$, &c. si osservi, che in questa ultima equazione $x'$ non esiste che in apparenza, e deve sparirne dopo fatta la riduzione di tutti i termini, e da ciò segue che il differenziale della medesima equazione preso per rapporto ad $x'$ dev'essere $=0$. Avremo pertanto

$$0 = \frac{d\psi'}{dx'} + \frac{da_1}{dx'}.z' + \frac{da_2}{dx'}.z'^2 + \frac{da_3}{dx'}.z'^3 + \&c.$$

$$+ a_1\frac{dz'}{dx'} + 2a_2\frac{dz'}{dx'}.z' + 3a_3\frac{dz'}{dx'}.z'^2 + \&c.$$

Quindi se facciamo $\frac{dz'}{dx'} = -\frac{1}{X'}$, e paragoniamo insieme le medesime potenze di $z'$, troveremo

$$a_1 = X'\frac{d\psi'}{dx'}$$

$$a_2 = X'\frac{da_1}{2dx'} = X'\frac{d.X'\frac{d\psi'}{dx'}}{2dx}$$

$$a_3 = X'\frac{da_2}{3dx'} = X'\frac{d.X'd.X'\frac{d\psi'}{dx'}}{2.3dx'^2}$$

&c.

Conosciuti i valori di $a_1, a_2, a_3$, &c. avremo $\psi$ espressa per $x'$ e per $y$; ma siccome possiamo prendere $x'$ a piacere, acciò sia $\psi$ espressa per $y$ senza $x$, basta che facciamo $x'$ eguale ad una costante, o anche ad una funzione qualunque di $y$. E se osserviamo che $z$ e $z'$ sono funzioni simili di $x$ e di $x'$, potremo usare $z$ ed $x$ in luogo di $z'$ ed $x'$, purchè ci ricordiamo di far da per tutto terminate le operazioni $x = x'$. Sarà pertanto, posta $\frac{1}{X} = -\frac{dz}{dx}$,

$$\psi = \psi + zX\frac{d\psi}{dx} + z^2 X \frac{d.X\frac{d\psi}{dx}}{2dx} + z^3 X \frac{d.Xd.X\frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} + \&c.$$

facendo nel secondo membro dopo le differenziazioni $x =$ ad una funzione qualunque di $y$.

2. Sia $\psi$ funzione della sola $x$, e $z$ abbia la forma $F(x) - F(a) - y$, ove $a$ è una costante; indicando col segno $F'(x)$ la funzione $\frac{dF(x)}{dx}$ avremo $\frac{dz}{dx} = F'(x)$, e quindi

$$X = -\frac{1}{F'(x)},\quad a_1 = -\frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d\psi}{dx},$$

$$a_2 = \frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{1}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2dx},\quad a_3 = -\frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{1}{F'(x)}d.\frac{1}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2}, \&c.$$

e siccome $z$ diventa $-y$ quando vi si pone $x = a$, otterremo

$$\psi = \psi + y\frac{1}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx} + y^2\frac{1}{F'(x)}\frac{d.\frac{1}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2dx}$$

$$+ y^3\frac{1}{F'(x)}\frac{d.\frac{1}{F'(x)}d.\frac{1}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} + \&c.$$

facendo nel secondo membro $x = a$. E se sostituiamo ad $y$ il suo valore $F(x) - F(a)$, avremo così lo sviluppo di una funzione $\psi$ ordinato per le potenze di un' altra funzione $F(x) - F(a)$.

Se per esempio $\psi = b^x$, $F(x) = c^x$, ed $a = 0$, sarà $\frac{d\psi}{dx} = b^x \log.b$, $F'(x) = c^x \log.c$, e posta $m$ in luogo di $\frac{\log.b}{\log.c}$ sarà $\frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx} = mb^x c^{-x}$, $\frac{1}{F'(x)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2dx} = \frac{m(m-1)}{2} b^x c^{-2x}$,

$$\frac{1}{F'(x)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(x)} d.\frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} b^x c^{-3x}, \text{ \&c.}$$

e quindi

$$b^x = 1 + m(c^x - 1) + \frac{m(m-1)}{2}(c^x - 1)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}(c^x - 1)^3 + \text{\&c.}$$

Quando $F(a) = 0$, avremo lo sviluppo di $\psi$ secondo le potenze di $F(x)$, ed in luogo di $a$ dovrà prendersi un valore di $x$, che soddisfaccia all' equazione $F(x) = 0$. Tante adunque saranno le serie, quanti i valori di $x$, che rendono $F(x)$ nulla; ma acciò lo sviluppo sia possibile, è necessario che per un dato valore di $a$ non abbia $F(x)$ altri fattori eguali ad $x - a$, perchè altrimenti sarebbe $F'(a)$ zero, ed i coefficienti della serie riescirebbero infiniti.

3. Rimanendo $\psi$ funzione della sola $x$ sia più generalmente $z = F(x) - F(a) - y\phi$, ove anche $\phi$ sia funzione di $x$. Avremo $\frac{dz}{dx} = F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}$, e quindi $X = -\frac{1}{F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}}$,

$$a_1 = -\frac{1}{F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}} \cdot \frac{d\psi}{dx}, \quad a_r = -\frac{1}{F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}} \cdot \frac{da_{r-1}}{rdx},$$ e poichè

$z$ diventa $-y\phi$ quando vi si pone $x = a$, otterremo in questo caso

$$\psi = \psi - a_1 y\phi + a_2 y^2\phi^2 - a_3 y^3\phi^3 + \text{\&c.}$$

ove nel secondo membro si deve porre $x = a$. Ora se si volesse ordinare questa serie per le potenze di $y$, è chiaro che il coefficiente di $y^r$ sarebbe

$$(A) \quad \pm\left(\varphi^r . a_r - \varphi^{r-1} . \frac{da_{r-1}}{dy} + \varphi^{r-2} . \frac{d^2 a_{r-2}}{2dy^2} \ldots \pm \varphi \frac{d^{r-1} a_1}{2.3 \ldots r dy^{r-1}}\right)$$

ove il segno superiore ha luogo quando $r$ è pari, e l' inferiore quando $r$ è dispari, purchè dopo le differenziazioni si faccia $y = 0$.

La formola (A) è molto complicata, e per poterne far uso convien calcolare le quantità $a_1, a_2 \ldots . a_r$. Ma anche senza conoscere i valori di queste quantità, dalla sola relazione che hanno tra loro, si può ricavare una espressione assai più semplice del coefficiente di $y^r$. Si osservi primieramente che l' equazione $a_r = - \frac{1}{F'(x) - y \frac{d\phi}{dx}} . \frac{da_{r-1}}{rdx}$ posta sotto la forma $\left(F'(x) - y \frac{d\phi}{dx}\right) a_r = - \frac{da_{r-1}}{rdx}$, e differenziata $n$ volte per rapporto ad $y$ ci dà, $\left(F'(x) - y \frac{d\phi}{dx}\right) \frac{d^n a_n}{dy^n} - n \frac{d\phi}{dx} . \frac{d^{n-1} a_r}{dy^{n-1}} = - \frac{d^{n+1} a_{r-1}}{rdxdy^n}$. Ciò posto invece di (A) consideriamo la formola più generale (B)

$$(B) \quad \pm\left(\varphi^s a_r - \frac{s}{r} \varphi^{s-1} \frac{da_{r-1}}{dy} - \frac{s(s-1)}{r(r-1)} \varphi^{s-2} \frac{d^2 a_{r-2}}{2dy^2} + \&c.\right)$$

la quale si cangia nell' espressione (A) se vi si pone $s = r$, e cerchiamone il valore nel caso di $y = 0$.

Siccome riguardando $y$ ed $s$ come costanti la formola (B) è una funzione di $r$ e di $x$, facciamola $= P_{r,x}$, e cangiando $r$ in $r + 1$ avremo

$$P_{r+1,x} = \mp\left(\phi^s a_{r+1} - \frac{s}{r+1}\phi^{s-1}\frac{da_r}{dy} + \frac{s(s-1)}{(r+1)r}\phi^{s-2}\frac{d^2a_{r-1}}{2dy^2} - \&c.\right).$$

Ma se in luogo di $a_{r+1}$, $\frac{da_r}{dy}$, $\frac{d^2a_{r-1}}{dy^2}$, &c. mettiamo i loro valori

$$\frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{da_r}{(r+1)dx},\ \frac{1}{F'(x)}\left(\frac{d\phi}{dx}a_r - \frac{d^2a_{r-1}}{rdxdy}\right),\ \frac{1}{F'(x)}\left(2\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{da_{r-1}}{dy} - \frac{d^3a_{r-2}}{(r-1)dxdy^2}\right), \&c.$$

troveremo

$$P_{r+1,x} = \pm\frac{1}{(r+1)F'(x)}\left\{\begin{array}{l}\phi^s\frac{da_r}{dx} - \frac{s}{r}\phi^{s-1}\frac{d^2a_{r-1}}{dxdy} + \frac{s(s-1)}{r(r-1)}\phi^{s-2}\frac{d^3a_{r-2}}{2dxdy^2} + \&c. \\ + s\phi^{s-1}\frac{d\phi}{dx}a_r - \frac{s(s-1)}{r}\phi^{s-2}\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{da_{r-1}}{dy} + \&c.\end{array}\right\}$$

Ora questa quantità è visibilmente $= \frac{1}{(r+1)F'(x)}\cdot\frac{dP_{r,x}}{dx}$; quindi avremo per determinare $P_{r,x}$ l' equazione

$$P_{r+1,x} = \frac{1}{(r+1)F'(x)}\cdot\frac{dP_{r,x}}{dx},$$

e siccome $P_{1,x} = -\phi^s a_1 = \frac{\phi^s}{F'(x)}\cdot\frac{d\psi}{dx}$ ne dedurremo

$$P_{2,x} = \frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{\phi^s}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2dx},\ P_{3,x} = \frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{1}{F'(x)}d.\frac{\phi^s}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2}, \&c.$$

Posto $s = r$ sarà

$$P_{1,x} = \frac{\phi}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx},\ P_{2,x} = \frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{\phi^2}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2dx},$$

$$P_{3,x} = \frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{1}{F'(x)}d.\frac{\phi^3}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2}, \&c. \text{ e}$$

$$\psi = \psi + y\frac{\phi}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx} + y^2\frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{\phi^2}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2dx} + y^3\frac{1}{F'(x)}\cdot\frac{d.\frac{1}{F'(x)}d.\frac{\phi^3}{F'(x)}\frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} + \&c.$$

purchè nel secondo membro si faccia $x=a$: il quale sviluppo trovasi elegantemente dimostrato dal Sig. Legendre ( Eserc. T. II. pag. 224. )

Se $F(x)=x$, e per conseguenza $F'(x)=1$, in modo che sia $z=x-a-y\varphi$, avremo

$$\psi=\psi+y\varphi\frac{d\psi}{dx}+y^2\frac{d.\varphi^2\frac{d\psi}{dx}}{2dx}+y^3\frac{d.^2\varphi^3\frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2}+\&c.$$

posta $x=a$, che è il celebre teorema di Lagrange.

4. Il resultato precedente, per giungere al quale abbiamo incontrato non poca difficoltà, può ottenersi molto più semplicemente nel modo che segue. Considerando $x$ come funzione di $a$ e di $y$, data dall' equazione

$$F(x)-F(a)-y\varphi(x)=0,$$

e differenziando l' equazione medesima avremo

$$F'(x)\frac{dx}{da}-F'(a)-y\varphi'(x)\frac{dx}{da}=0$$

$$F'(x)\frac{dx}{dy}-\varphi(x)-y\varphi'(x)\frac{dx}{dy}=0$$

e quindi $\frac{dx}{dy}=\frac{\phi(x)}{F'(a)}\cdot\frac{dx}{da}$. Posto ciò, se chiamiamo $q_n$ il coefficiente di $y^n$ nello sviluppo di $\psi(x)$, sarà $q_n=\frac{d^n\psi(x)}{1.2....ndy^n}$ facendovi $y=0$; tutto adunque si riduce a trovare il valore della funzione $\frac{d^n\psi(x)}{dy^n}$ nel caso di $y=0$. Sarà primieramente $\frac{d\psi(x)}{dy}=\psi'(x)\frac{dx}{dy}=\frac{\phi(x)\psi'(x)}{F'(a)}\cdot\frac{dx}{da}$, la qual' equazione può mettersi sotto la forma

$$(b)\qquad \frac{d\psi(x)}{dy}=\frac{1}{F'(a)}\cdot\frac{d.\int\phi(x)\psi'(x)dx}{da}.$$

Differenziando nuovamente troveremo

$\frac{d^2\psi(x)}{dy^2} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d^2.\int\phi(x)\psi'(x)dx}{dady}$; ma ponendo nella equazione ($b$) $\int\phi(x)\psi'(x)dx$ in luogo di $\psi(x)$ abbiamo

$$\frac{d\int\phi(x)\psi'(x)dx}{dy} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d\int\overline{\phi(x)}^2\psi'(x)dx}{da};$$

dunque sarà

$$\frac{d^2\psi(x)}{dy^2} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(a)}\,d.\int\overline{\phi(x)}^2\psi'(x)dx}{da^2}$$

e nell' istessa maniera

$$\frac{d^3\psi(x)}{dy^3} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'a}\,d.\frac{1}{F'(a)}\,d.\int\overline{\phi(x)}^3\psi'(x)\,dx}{da^3}$$

e così in seguito. Ed essendo $q_n = \frac{d^n\psi(x)}{1.2\ldots n dy^n}$, quando vi si pone $y = 0$, ed in conseguenza $x = a$, avremo

$$q_1 = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d\int\phi(a)\psi'(a)da}{da} = \frac{\phi(a).\psi'(a)}{F'(a)}$$

$$q_2 = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F(a)}\overline{\phi(a)}^2\psi'(a)}{2da}$$

$$q_3 = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(a)}\,d.\frac{1}{F'(a)}\overline{\phi(a)}^3\psi'(a)}{2.3da^2}, \text{ \&c.}$$

come sopra.

5. Lo stesso coefficiente $q_n$ può esprimersi sotto un' altra forma, la quale riuscirà in alcuni casi molto più comoda. Abbiamo pel teorema di Taylor

$$F(x) - F(a) = (x-a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}F''(a) + \frac{(x-a)^3}{2.3}F'''(a) + \text{\&c.}$$

e quindi $F(x) - F(a) = (x-a)X$, essendo X una funzione di $x$ ed $a$, che non si annulla quando $x = a$, purchè non sia

$F(a)=0$, come quì si suppone. Mettiamo nella funzione X un' altra lettera $b$ in luogo di $a$, e così facciamo nelle funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$, se $a$ fosse in esse compresa per restituir poi il valore di $b$ terminate le operazioni. L' equazione $(x-a)X-y\phi(x)=0$ differenziata relativamente ad $a$ ed $y$ ci dà

$$(x-a)\ \frac{dX}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+X\frac{dx}{da}-X-y\phi'(x)\frac{dx}{da}=0$$

$$(x-a)\ \frac{dX}{dy}\cdot\frac{dx}{dy}+X\frac{dx}{dy}-\phi(x)-y\phi'(x)\frac{dx}{dy}=0$$

e quindi $\frac{dx}{dy}=\frac{\phi(x)}{X}\cdot\frac{dx}{da}$. Sarà pertanto $\frac{d\psi(x)}{dy}=\psi'(x)\frac{dx}{dy}=\frac{\phi(x)\psi'(x)}{X}\cdot\frac{dx}{da}$ il qual valore si può mettere sotto la forma $\frac{d\psi(x)}{dy}=\frac{d.\int X^{-1}\phi(x)\psi'(x)dx}{da}$. E col ragionamento usato nel n.° antecedente ne dedurremo

$$q_n=\frac{d^n\psi(x)}{1.2.3...ndy^n}=\frac{d^n\int X^{-n}\phi(x)^n\psi'(x)dx}{1.2.3\ ....\ nda^n}=\frac{d^{n-1}X^{-n}\phi(x)^n\psi'(x)}{1.2.3.\ ...\ ndx^{n-1}}$$

facendo $x=a$ dopo le differenziazioni, o sia restituendo il valore di X

$$q_n=\frac{d^{n-1}\cdot\left(\frac{x-a}{F(x)-F(a)}\right)^n\phi(x)^n\psi'(x)}{1.2.3.\ ....\ ndx^{n-1}}.$$

Se ponghiamo $\phi(x)=1$, avremo

$$q_n=\frac{d^{n-1}\cdot\left(\frac{x-a}{F(x)-F(a)}\right)^n\psi'(x)}{1.2.3\ ....\ ndx^{n-1}},$$

il qual resultato combina con quello ottenuto per un' altra strada dal Sig. Legendre ( Eserc. T. II. pag. 234. ), e serve allo sviluppo della funzione $\psi(x)$ in una serie ordinata per le potenze della funzione $F(x)-F(a)$.

6. Data l' equazione $F(x)-F(a)-y\phi(x)-t\lambda(x)=0$, la quale contiene un' altra variabile $t$, se ponghiamo $\phi(x)+\frac{t}{y}\lambda(x)$ in luogo di $\phi(x)$ nel valore di $q_n$, sarà $\frac{d^{n-1}.X^n(\phi(x)+\frac{t}{y}\lambda(x))}{1.2.3.\ldots ndx^{n-1}}$ il coefficiente di $y^n$ nella serie, che rappresenta il valore di $\psi(x)$. Di quì facilmente apparisce, che volendo ordinar questa serie per le potenze ed i prodotti di $y$ e $t$, se chiamiamo $q_{n-r,r}$ il coefficiente di $y^{n-r}t^r$, avremo

$$q_{n-r,r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}\cdot\frac{d^{n-1}.X^{-n}\phi(x)^{n-r}\lambda(x)^r\psi'(x)}{1.2.3\ldots\ldots ndx^{n-1}}$$

$$=\frac{d^{n-1}.X^{-n}\phi(x)^{n-r}\lambda(x)^r\psi'(x)}{1.2\ldots(n-r)1.2\ldots rdx^{n-1}}$$

posta $x=a$ dopo le differenziazioni.

7. Noi non ci tratterremo a percorrere i casi, in cui l' equazione data conservando la medesima forma contenesse un maggior numero di variabili, i quali dopo ciò che abbiamo detto non presentano alcuna difficoltà, e piuttosto osserveremo che le formole descritte nei numeri antecedenti, ed altre simili espressioni inservienti allo sviluppo delle funzioni in serie, non sono che semplici corollarj di un teorema più generale dovuto a Laplace, a cui non sembra che i Geometri abbiano fatto molta attenzione, perchè appena accennato dall' Autore, senza addurne alcuna dimostrazione, sul terminare di una sua Memoria inserita tra quelle dell' Accademia Reale di Parigi per l' anno 1777.

Data tra le variabili $x$ ed $y$ l' equazione $z=0$, alla quale nel caso di $y=0$ soddisfaccia $x=a$, se sia proposto di svolgere una funzione qualunque $\psi$ delle medesime variabili in una serie ordinata per le potenze positive di $y$, e si chiami $q_n$ il coefficiente di $y^n$, sarà

$$q_n = \frac{d^n \psi}{1.2.3\ldots dy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \frac{d^n \frac{d\psi}{dx} \log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.3.\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}$$

ove si debbono riguardare $x$ ed $y$ come indipendenti tra loro, e porre $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad $y$, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

Sia $\psi$ funzione della sola $x$, e $z=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)-y\varphi$, essendo pure $\varphi$ funzione della sola $x$, avremo $\frac{d^n \frac{d\psi}{dx} \log.z}{1.2\ldots.ndy^n} =$
$\frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{d^n \log[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)-y\phi]}{1.2.3\ldots ndy^n} = -\frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{\phi^n}{n[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)-y\phi]^n} =$
$-\frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{\phi^n}{n[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)]^n}$ quando $y=0$, e siccome $\frac{d\psi}{dy}=0$, sarà

$$q_n = \frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{x-a}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)}\right)^n \varphi^n \frac{d\psi}{dx}}{1.2.3\ldots ndx^{n-1}}$$

come sopra (5). Lo stesso resultato potremmo ancora ottenere dal teorema di Lagrange ponendo l' equazione
$\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)y\varphi=0$ sotto la forma $x-a-y\frac{(x-a)\phi}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)}=0$.

8. Quantunque abbia dato due dimostrazioni del teorema di Laplace negli Atti della nostra Società T. IV. e T. VIII., l' importanza del medesimo ed il non conoscere che da altri ne sia stata confermata la verità, mi muovono ad esporre una terza dimostrazione, che è per qualche lato un poco più semplice delle altre. L' equazione $z=0$ posta $y=0$ si ridurrà ad una equazione $\mathrm{X}=0$ tra $x$ e costanti, la quale ci som-

ministrerà varj valori della $x$, e se $a$ sia uno di questi valori ed $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{X}}{x-a}$, ove suppongo che i fattori di A siano tutti diversi da $x - a$, o più generalmente che A non sia nè nulla nè infinita nel caso di $x = a$, si potrà dare all'equazione $z = 0$ la forma $(x-a)\mathrm{A} + \phi = 0$, essendo $\phi$ una funzione di $x$ ed $y$, che si annulli quando $y = 0$. Neppur la funzione $\phi$ avrà il fattore $x - a$, perchè se lo avesse, l'equazione $z = 0$ si risolverebbe nelle due $x - a = 0$, ed $\mathrm{A} + \frac{\phi}{x-a} = 0$, che converrebbe considerare séparatamente. Si può ancora supporre che $a$ non si trovi nè in $\phi$ nè in A, perchè altrimenti si potrebbe mettere un' altra lettera $b$ in luogo di $a$, e si risolverebbe un problema più generale, e dopo terminate tutte le operazioni si restituirebbe il valore di $b = a$ per aver la soluzione nel caso dato.

Sia primieramente $\psi$ funzione di $x$ sola, e supponghiamo egualmente che non contenga $a$, potendosi nel caso contrario sostituir, come sopra, ad $a$ un' altra lettera. Ciò posto, se riguardando $x$ come una funzione di $a$ e di $y$ data dall' equazione $z = 0$, differenziamo l'equazione medesima, prima per rapporto ad $a$ e poi per rapporto ad $y$ avremo

$$\mathrm{A}\frac{dx}{da} + (x-a)\frac{d\mathrm{A}}{dx} \cdot \frac{dx}{da} - \mathrm{A} + \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{da} = 0$$

$$\mathrm{A}\frac{dx}{dy} + (x-a)\frac{d\mathrm{A}}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} + \left(\frac{d\phi}{dy}\right) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{dy} = 0$$

e di quì dedurremo $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{d\phi}{dy}\right) \cdot \frac{dx}{da} = -\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{dx}{da}$, perchè $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)$ è $= \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Sarà dunque $\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{dz}{dy}\right) \times \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dx}{da}$, e siccome P non contenendo $a$, è $\mathrm{P}\frac{dx}{da} = \frac{d\int \mathrm{P}dx}{da}$ quando nell'integrale $\int \mathrm{P}dx$ si riguarda $y$ come costante, avremo

$$(c) \qquad \frac{d\psi}{dy} = -\frac{d.\int \frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d\psi}{dx}\,dx}{da} = \frac{d.\int \alpha dx}{da}$$

facendo $a = -\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{d\psi}{dx}$. E se $u$ è funzione di $x$ e di $y$, poichè $du = \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dx}\right) dx$, ove $\left(\frac{du}{dy}\right) dy$ e $\left(\frac{du}{dx}\right) dx$ rappresentano rispettivamente i differenziali di $u$ presi per rapporto ad $y$ ed $x$ considerate come indipendenti tra loro, sarà

$$(d) \quad \frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dy} = \left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) dx}{da}.$$

L' equazione ($c$) differenziata ci darà $\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d^2.\int adx}{dady}$; ma ponendo nella equazione ($d$) $\int adx$ in luogo di $u$ abbiamo

$$\frac{d.\int adx}{dy} = \int\left(\frac{da}{dy}\right) dx - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) adx}{da},$$

dunque facendo $\beta = \left(\frac{da}{dy}\right)$ e $\beta_1 = -\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) a$, sarà

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d.\int \beta dx}{da} + \frac{d^2\int \beta_1 dx}{da^2}.$$

Differenziando di nuovo troveremo

$$\frac{d^3\psi}{dy^3} = \frac{d^2.\int \beta dx}{dady} + \frac{d^3.\int \beta_1 dx}{da^2 dy},$$

e poichè l' equazione ($d$) ci dà

$$\frac{d.\int \beta dx}{dy} = \int\left(\frac{d\beta}{dy}\right) dx - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \beta dx}{da},$$

$$\frac{d.\int \beta_1 dx}{dy} = \int\left(\frac{d\beta_1}{dy}\right) dx - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \beta_1 dx}{da},$$

ponendo $\gamma$ in luogo di $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)$, $\gamma_1$ in luogo di $\left(\frac{d\beta_1}{dy}\right) - \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\beta$, e $\gamma_2$ in luogo di $-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\beta_1$ avremo

$$\frac{d^3\psi}{dy^3} = \frac{d.\int\gamma dx}{da} + \frac{d^2\int\gamma_1 dx}{da^2} + \frac{d^3.\int\gamma_2 dx}{da^3}.$$

Continuando queste operazioni vedremo in generale, che il valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$ sarà della forma seguente

$$(e) \qquad \frac{d^n\psi}{dy^n} = \frac{d.\int B dx}{da} + \frac{d.^2\int B_1 dx}{da^2} + \frac{d^3\int B_2 dx}{da^3} \ldots\ldots + \frac{d^n.\int B_{(n-1)} dx}{da^n}$$

ove convien determinare le quantità $B$, $B_1$, $B_2$, &c. Chiamiamo $B'$, $B'_1$, &c. i valori $B$, $B_1$, &c. quando $n$ diventa $n+1$, ed avremo similmente

$$(f) \qquad \frac{d^{n+1}\psi}{dy^{n+1}} = \frac{d.\int B' dx}{da} + \frac{d.^2\int B'_1 dx}{da^2} + \frac{d^3.\int B'_2 dx}{da^3} + \&c.$$

Ma l' equazione ($e$) differenziata ci dà

$$\frac{d^{n+1}\psi}{dy^{n+1}} = \frac{d.\int\frac{dB}{dy}dx}{da} + \frac{d^2.\int\left(\frac{dB_1}{dy}\right)dx}{da^2} + \frac{d^3.\int\left(\frac{dB_2}{dy}\right)dx}{da^3} + \&c.$$

$$-\frac{d^2.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)B dx}{da^2} - \frac{d^3.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)B_1 dx}{da^3} - \&c.$$

dunque paragonando questa coll' equazione ($f$) otterremo la serie seguente di equazioni a differenze finite ed infinitesime

$$(g) \qquad \begin{aligned} B' &= \left(\frac{dB}{dy}\right) \\ B'_1 &= \left(\frac{dB_1}{dy}\right) - \frac{B}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ B'_2 &= \left(\frac{dB_2}{dy}\right) - \frac{B_1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ &\&c. \end{aligned}$$

Se adesso osserviamo che $\frac{d.\int B dx}{da} = B\frac{dx}{da}$, avremo

$$(h) \qquad \frac{d^n\psi}{dy^n} = B\frac{dx}{da} + \frac{d.B_1\frac{dx}{da}}{da} + \frac{d^2.B_2\frac{dx}{da}}{da^2} + \&c.$$

Ora per isvolgere la funzione $\psi$ in una serie ordinata per le potenze di $y$ bisogna trovare il valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$ quando $y = 0$; ma l' equazione $z = 0$ nel caso di $y$ zero ci dà $x = a$, dunque avremo il ricercato valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$, se nel secondo membro dell' equazione $(h)$ porremo $y = 0$ ed $x = a$. Per altra parte, siccome A, $\psi$ e $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d\phi}{dy}\right)$ ed in conseguenza le quantità $B, B_1$, &c. non contengono $a$, facilmente si vede che $\frac{d^s B_{(s)}\frac{dx}{da}}{da^s}$ ponendovi $x = a$, è lo stesso che $\frac{d.B^s{}_{(s)}}{dx^s}$, se vi si pone $x = a$ dopo le differenziazioni. Sarà pertanto con questa condizione

$$\frac{d^n\psi}{dy^n} = B + \frac{d.B_1}{dx} + \frac{d.^2B_2}{dx^2} + \frac{d.^3B_3}{dx^3} \ldots . + \frac{d^{n-1}.B_{(n-1)}}{dx^{n-1}}.$$

Converrebbe adesso trovare i valori di $B, B_1$, &c. mediante l'integrazione dell' equazioni $(g)$; ma senza eseguire questa operazione, dalla quale difficilmente ottener si potrebbe sotto una forma abbastanza comoda il valor generale di $B_{(r)}$, la sola cognizione delle relazioni che hanno tra loro le quantità $B$, $B_1$, &c. ci basterà per conseguire una espressione assai semplice del valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$ nel caso di $y$ zero. Prima però è necessario di dare un' altra forma all' equazione precedente. A tale oggetto si osservi che, quando si fa $x = a$, dopo le differenziazioni, è sempre per una funzione qualunque P di $x$, la quale non contenga $a$,

$$\frac{d^{n-1}.(x-a)^r\ P}{dx^{n-1}} = (n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r)\,\frac{d^{n-r-1}P}{dx^{n-r-1}}$$

ove si suppone $r < n$; dunque avremo

$$\frac{d^n\psi}{dy^n} = \frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1} + b_1(x-a)^{n-2} + b_2(x-a)^{n-3} \ldots + b_{(n-1)}]}{dx^{n-1}}$$

e sarà $b = \frac{B}{1.2\ldots(n-1)}$, $b_1 = \frac{B_1}{2.3\ldots\ldots(n-1)}$, $b_2 = \frac{B_2}{3.4\ldots(n-1)}$, &c.
cioè avranno luogo tra $b$, $b_1$, $b_2$, &c. le seguenti equazioni

$$(i)\qquad \begin{aligned} nb' &= \left(\frac{db}{dy}\right) \\ nb'_1 &= \left(\frac{db_1}{dy}\right) - \frac{b}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ nb'_2 &= \left(\frac{db_2}{dy}\right) - \frac{2b_1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ nb'_3 &= \left(\frac{db_3}{dy}\right) - \frac{3b_2}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Consideriamo adesso la quantità

$$\frac{Ab}{z} + \frac{A^2b_1}{z^2} + \frac{A^3b_2}{z^3} \ldots + \frac{A^nb_{(n-1)}}{z^n}$$

la quale supposta $x$ costante è una funzione di $n$ e di $y$, che chiameremo $S_{n,y}$. Ponendovi $n+1$ in luogo di $n$ avremo

$$S_{n+1,y} = \frac{Ab'}{z} + \frac{A^2b'_1}{z^2} + \frac{A^3b'_2}{z^3} + \frac{A^4b'_3}{z^4} + \text{\&c.}$$

e sostituendovi i valori di $b'$, $b'_1$, &c. ricavati dall'equazioni $(i)$

$$nS_{n+1,y} = \frac{A}{z}\left(\frac{db}{dy}\right) + \frac{A^2}{z^2}\left(\frac{db_1}{dy}\right) + \frac{A^3}{z^3}\left(\frac{db_2}{dy}\right) + \frac{A^4}{z^4}\left(\frac{db_3}{dy}\right) + \text{\&c.}$$

$$-\frac{Ab}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{2A^2b_1}{z^3}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{3A^3b_2}{z^4}\left(\frac{dz^3}{dy}\right)-\&c.$$

Ma la quantità $S_{n,y}$ differenziata per rapporto ad $y$ ci dà

$$\frac{dS_{n,y}}{dy}=\frac{A}{z}\left(\frac{db}{dy}\right)+\frac{A^2}{z^2}\left(\frac{db_1}{dy}\right)+\frac{A^3}{z^3}\left(\frac{db_2}{dy}\right)+\frac{A^4}{z^4}\left(\frac{db_3}{dy}\right)+\&c.$$

$$-\frac{Ab}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{2A^2b_1}{z^3}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{3A^3b_2}{z^4}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\&c.$$

Quindi avremo l' equazione $S_{n+1,y}=\frac{1}{n}\cdot\frac{dS_{n,y}}{dy}$, dalla quale si deduce $S_{n,y}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}S_{1,y}}{dy^{n-1}}$, e poichè $S_{1,y}=\frac{Ab}{z}$ postovi $n=1$, cioè $=-\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{dz}{zdy}\right)=-\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d.\log.z}{dy}\right)$, sarà

$$S_{n,y}=\frac{Ab}{z}+\frac{A^2b_1}{z^2}+\frac{A^3b_2}{z^3}+\&c.=-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{d\psi}{dx}\cdot\left(\frac{d^n\log.z}{dy^n}\right).$$

E siccome $z$ è $=(x-a)A$ quando $y=0$, avremo in questo caso

$$\frac{b}{x-a}+\frac{b_1}{(x-a)^2}+\frac{b_2}{(x-a)^3}+\&c.=-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d^n\log.z}{dy^n}\right).$$

Moltiplicando quest' ultima equazione per $(x-a)^n$, e differenziandola $n-1$ volte per rapporto ad $x$, otterremo nel caso di $y=0$

$$\frac{d^n\psi}{dy^n}=\frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1}+b_1(x-a)^{n-2}+b_2(x-a)^{n-3}+\&c.]}{dx^{n-1}}$$

$$=-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d^n\log.z}{dy^n}\right)}{dx^{n-1}}.$$

E se chiamiamo $q_n$ il coefficiente di $y^n$ nella serie che nasce dallo sviluppo di $\psi$, avremo

$$q_n = - \frac{d^{n-1}(x-a)^n \frac{d\psi}{dx} \frac{d^n \log . z}{1.2 \ldots n dy^n}}{1.2.3 \ldots (n-1) dx^{n-1}}$$

ove dal secondo membro essendo state tolte le parentesi relative alla differenziazione per $y$ si comprende, che debbono riguardarsi le variabili $x$ ed $y$ come tra loro indipendenti, e porre $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad $y$, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Sarà dunque con queste condizioni

$$\psi = \psi - y(x-a) \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{d \log . z}{dy} - y^2 \frac{d(x-a)^2 \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2 \log . z}{1.2 dy^2}}{dx} -$$

$$-y^3 \frac{d^2(x-a)^3 \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{d^3 \log . z}{1.2.3 dy^3}}{1.2. dx^2} - \&c.$$

Se $\psi$ è funzione di $x$ e di $t$, il secondo membro di questa equazione conterrà $y$ e $t$, e se si volesse ordinare la serie, che esprime il valore di $\psi$ per le potenze ed i prodotti di $y$ e di $t$, ciò si potrà eseguire molto facilmente. Infatti il coefficiente di $t^n$ sarà $\frac{d^n \psi}{1.2 \ldots n dt^n}$, il coefficiente di $t^{n-1} y$ sarà

$$- \frac{(x-a) \frac{d^n \psi}{dx dt^{n-1}} \frac{d \log . z}{dy}}{1.2 \ldots (n-1)}$$, quello di $t^{n-2} y^2$ sarà

$$- \frac{d(x-a)^2 \frac{d^{n-1} \psi}{dx dt^{n-2}} \frac{d^2 \log . z}{1.2 dy^2}}{1.2 \ldots (n-2) dx}$$, quello di $t^{n-3} y^3$ sarà

$$- \frac{d^2(x-a)^3 \frac{d^{n-2} \psi}{dx dt^{n-3}} \frac{d^3 \log . z}{1.2.3 dy^3}}{1.2.1.2 \ldots (n-3) dx^2}$$, e così in seguito fino al coefficiente di $y^n$ che sarà $- \frac{d^{n-1} (x-a)^n \frac{d\psi}{dx} \frac{d^n \log . z}{1.2 \ldots n dy^n}}{1.2 \ldots (n-1) dx^{n-1}}$, nelle quali formole si dovrà porre $t=0$ dopo le differenziazioni relative

a questa variabile. Se adesso supporremo che sia $t=y$, in modo che sia $\psi$ funzione di $x$ e di $y$, è evidente che la somma di tutti questi coefficienti formerà il coefficiente di $y^n$ nella serie, che rappresenta in questo caso il valore di $\psi$. Chiamando dunque $r_n$ quest' ultimo coefficiente avremo

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2\ldots n dy^n} - \frac{(x-a)\dfrac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}} \cdot \dfrac{d.\log.z}{dy}}{1.2.\ldots(n-1)}$$

$$- \frac{d.(x-a)^2 \dfrac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}} \cdot \dfrac{d^2\log.z}{1.2dy^2}}{1.2\ldots(n-2)dx} - \frac{d^2.(x-a)^3 \dfrac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}} \dfrac{d^3\log.z}{1.2.3dy^3}}{1.2.1.2.\ldots(n-3)dx^2}$$

$$- \frac{d^3(x-a)^4 \dfrac{d^{n-3}\psi}{dxdy^{n-4}} \dfrac{d^4\log.z}{1.2.3.4dy^4}}{1.2.3.1.2\ldots(n-4)dx^3} \ldots - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \dfrac{d\psi}{dx} \dfrac{d^n\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.\ldots(n-1)dx^{n-1}},$$

Ma siccome convien fare $x=a$ dopo le differenziazioni, e facilmente apparisce essere in tal caso $(x-a)\dfrac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}} \dfrac{d\log.z}{dy} =$

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^n \dfrac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}} \dfrac{d\log.z}{dy}}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}, \quad \frac{d.(x-a)^2 \dfrac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}} \cdot \dfrac{d^2\log.z}{dy^2}}{dx} =$$

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^n \dfrac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}} \cdot \dfrac{d^2\log.z}{dy^2}}{2.3\ldots(n-1)dx^{n-1}}, \quad \frac{d.^2(x-a)^3 \dfrac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}} \cdot \dfrac{d^3\log.z}{dy^3}}{dx^2} =$$

$$\frac{d^{n-1}.(x-a)^n \dfrac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}} \dfrac{d^3\log.z}{dy^3}}{3.4.\ldots(n-1)dx^{n-1}}, \ \&c.,$$

sostituendo questi valori troveremo

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2\ldots ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n\, Q}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots ndx^{n-1}}$$

essendo

$$Q = n\frac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}} \cdot \frac{d\log.z}{dy} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}} \cdot \frac{d^2\log.z}{dy^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \cdot \frac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}} \cdot \frac{d^3\log.z}{dy^3} \cdot \ldots + \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{d^n\log.z}{dy^n}$$

$$= \frac{d^n \cdot \frac{d\psi}{dx}\log.z}{dy^n} - \log.z\,\frac{d^{n+1}\psi}{dxdy^n}.$$

Avremo adunque

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2\ldots ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \cdot \frac{d^n.\frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.\ldots.(n-1)dx^{n-1}}$$

$$+ \frac{d^{n-1}.(x-a)^n.\log.z\,\frac{d^{n+1}\psi}{dxdy^n}}{1.2\ldots(n-1)1.2\ldots ndx^{n-1}},$$

ove si potrà omettere l' ultimo termine, il quale è sempre $=0$. Infatti posto $y=0$ questo termine avrà la forma

$$[C'(x-a)+C''(x-a)^2+C'''(x-a)^3\ldots+C^{(n)}(x-a)^n]\log.(x-a)$$

$$+D'(x-a)+D''(x-a)^2+D'''(x-a)^3\ldots+D^{(n)}(x-a)^n$$

ove i coefficienti C', C'', &c. D', D'', &c. dipendenti dalla quantità $\frac{d^{n+1}\psi}{dxdy^n}$ non possono divenire infiniti quando $x=a$, nel qual caso è sempre $(x-a)\log.(x-a)=0$, se $r$ è $=0, >1$. Pertanto otterremo finalmente con le solite condizioni

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2\ldots ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n\frac{d.^n\frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Abbiamo trovato la serie che rappresenta $\psi$ dipendentemente dal fattore $x-a$, ed una simile serie si troverà per esprimere $\psi$, qualunque altro fattore si assuma della quantità in cui si cangia $z$, quando vi si fà $y=0$; ma perchè la cosa riesca, è necessario che tutti questi fattori siano diversi, ed infatti abbiamo supposto nei calcoli precedenti, che A non comprenda altri fattori eguali ad $x-a$. Nel caso che vi siano più fattori eguali espressi da $(x-a)^i$, la quantità $z$ si può concepire risoluta in $i$ fattori $z'$, $z''$, $z'''$, &c., ciascuno dei quali abbia la forma $(x-a)A'+\varphi'$, ove $A'$ non contenga più il fattore $x-a$, e $\varphi'$ sia una funzione di $x$ ed $y$, che svanisca con $y$. Ciascuno dei fattori $z', z'', z'''$, &c. ci darà per coefficiente di $y^n$ nello sviluppo di $\psi$ la quantità

$$\frac{d^n\psi}{1.2...ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \dfrac{d.^n \frac{d\psi}{dx}\log. z'}{1.2...ndy^n}}{1.2...(n-1)dx^{n-1}}.$$

Se adesso prendiamo il medio aritmetico tra le $i$ serie, che nascono dal fattore $(x-a)^i$, e chiamiamo $q_n$ il coefficiente di $y^n$ in questa serie media, avremo

$$q_n = \frac{d^n\psi}{1.2...ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \dfrac{d.^n \frac{d\psi}{dx}(\log.z'+\log.z''+\log.z'''+\&c.)}{1.2.....ndy^n}}{1.2.....(n-1)idx^{n-1}}$$

cioè a motivo di $\log.z'+\log.z''+\log.z'''+\&c. = \log.z$,

$$q_n = \frac{d^n\psi}{1.2....ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \dfrac{d^n.\frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2...ndy^n}}{1.2.....(n-1)idx^{n-1}}$$

posto, come sopra, $y = 0$ dopo le differenziazioni relative ad $y$, ed $x = a$ dopo tutte le differenziazioni.

Laplace assegna in generale il precedente valore al coefficiente di $y^n$ nello sviluppo di $\psi$, quando la funzione $z$ nel caso di $y = 0$ è divisibile per $(x - a)^i$. Risulta dalla nostra analisi la verità di questo teorema quando $i = 1$, se però $i$ è $> 1$, $q_n$ non esprime che il coefficiente di $y^n$ nella serie, la quale è il medio aritmetico tra tutte quelle, che rappresentano il valore di $\psi$ dipendentemente dal fattore $(x - a)^i$. Ma questa serie media non somministra il giusto valore di $\psi$, come può mostrarsi con un esempio semplicissimo. Sia data l' equazione $z = (x - a)^3 - y^3(b + cx)^3 = 0$, e si voglia svolgere il valore di $x$ in una serie ordinata per le potenze di $y$. Saranno $x - a - y(b + cx)$, $x - a - \beta y(b + cx)$, $x - a - \beta^2 y(b + cx)$ i fattori di $z$, ove $1$, $\beta$ e $\beta^2$ rappresentano le tre radici cubiche dell' unità, e questi fattori ci daranno le tre serie

$$x = a + (ac + b)y + c(ac + b)y^2 + c^2(ac + b)y^3 + c^3(ac + b)y^4 + \&c.$$

$$x = a + \beta(ac + b)y + \beta^2 c(ac + b)y^2 + c^2(ac + b)y^3 + \beta c^3(ac + b)y^4 + \&c.$$

$$x = a + \beta^2(ac + b)y + \beta c(ac + b)y^2 + c^2(ac + b)y^3 + \beta^2 c^3(ac + b)y^4 + \&c.$$

ciascuna delle quali soddisfà all' equazione $z = 0$. Se prendiamo il medio aritmetico tra questi tre valori di $x$, avremo la serie, che ci dà il teorema di Laplace, cioè

$$x = a + c^2(ac + b)y^3 + c^5(ac + b)y^6 + \&c.$$

la quale però non soddisfà all' equazione $z = 0$.

Quantunque la precedente dimostrazione sia un poco meno complicata di quella data da noi nel T. VIII. della Società, lo è tuttavia abbastanza per far desiderare, che i Geometri prendano la cura di sostituirgliene un' altra più semplice.