SULL' USO DEL CALCOLO

DELLE DIFFERENZE FINITE NELLA DOTTRINA

DEGL' INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

DEL SIG. CAV. PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 16. *Maggio* 1828.

Le presenti ricerche si aggireranno principalmente intorno agli integrali definiti $\int x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}$, ed $\int dx \left(\log. \frac{1}{x}\right)^{a-1}$ presi ambedue tra i limiti zero ed 1 della x, ai quali il nome d'integrali Euleriani della prima e seconda specie è stato imposto dal Sig. Legendre. Questo gran Geometra ne' suoi eccellenti esercizj sopra il calcolo integrale ha trattato di tali trascendenti con tanta estensione e profondità, che nulla rimane a desiderarsi sia per la loro valutazione approssimativa, sia per la loro riduzione al più piccolo numero possibile. Devesi ciò non ostante commendare una dotta Memoria inserita nel Tomo XXVI. pubblicato dalla Reale Accademia di Torino, ove il Sig. Cav. Cisa de Gresy applicando al medesimo soggetto un metodo nuovo ed ingegnoso ha reso in qualche parte più facile la ricerca delle proprietà degl' integrali Euleriani, le quali sono il fondamento della loro riduzione. Il calcolo delle differenze finite somministra a tal' uopo un mezzo più semplice e più diretto, che io mi propongo di far conoscere in questa breve Memoria.

Esaminiamo in primo luogo l' integrale $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}$ ove p e q sono numeri positivi, ed il segno $\int_0^1$ indica che

l' integrazione deve farsi tra i limiti o ed 1 della x. Ponendo $1-x$ in luogo di x abbiamo

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = -\int_1^0 x^{q-1} dx (1-x)^{p-1}$$
$$= \int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{p-1}$$

e perciò salvo il valore dell'integrale si possono tra loro permutare le lettere p e q. Se adottiamo la notazione del Sig. Legendre indicando col segno (p, q) l' integrale $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}$, la precedente proprietà sarà espressa dall' equazione

$$(1) \qquad (p, q) = (q, p).$$

Integrando per parti avremo, quando p e q sono > 0,

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^q = \frac{q}{p} \int_0^1 x^p dx (1-x)^{q-1}$$
$$= \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} - \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^q$$

quindi sarà $(p+q) \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^q = q \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}$, cioè

$$(2) \qquad (p, q+1) = \frac{q}{p+q} (p, q)$$

la qual'equazione è il fondamento delle nostre indagini.

Prendendone i logaritmi da una parte e dall'altra avremo

$$\mathrm{L}.(p, q+1) - \mathrm{L}.(p, q) = \mathrm{L}.q - \mathrm{L}.(p+q);$$

ma $\mathrm{L}.(p, q+1) - \mathrm{L}.(p, q)$ è la differenza finita della funzione $\mathrm{L}.(p, q)$ per rapporto a q nella ipotesi di $\Delta q = 1$; sarà dunque

$$\Delta \mathrm{L}.(p, q) = \mathrm{L}.q - \mathrm{L}.(p+q)$$

ed integrando avrassi

$$\mathrm{L}.(p, q) = \Sigma \mathrm{L}.q - \Sigma \mathrm{L}\,(p+q) + \mathrm{F}.p$$

ove aggiungo la funzione arbitraria $\mathrm{F}.p$, perchè nella integrazione p è stata riguardata come costante.

Per determinare questa funzione F.p cangiamo nella equazione precedente p in q e viceversa, ed avremo

$$\mathrm{L}.(q, p) = \Sigma\mathrm{L}.p - \Sigma\mathrm{L}.(p+q) + \mathrm{F}.q$$

e siccome $(p, q) = (q, p)$ converrà che sia

$$\Sigma\mathrm{L}.p + \mathrm{F}.q = \Sigma\mathrm{L}.q + \mathrm{F}.p$$

per soddisfare alla qual' equazione porremo ciascuna delle quantità $\mathrm{F}.p - \Sigma\mathrm{L}.p$, e $\mathrm{F}.q - \Sigma\mathrm{L}.q$ eguale ad una costante L.C indipendente da p e da q. Avremo adunque

$$\mathrm{L}.(p, q) = \mathrm{L}.\mathrm{C} + \Sigma\mathrm{L}.p + \Sigma\mathrm{L}.q - \Sigma\mathrm{L}.(p+q)$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$(p, q) = \mathrm{C}e^{\Sigma\mathrm{L}.p + \Sigma\mathrm{L}.q - \Sigma\mathrm{L}.(p+q)}.$$

Supponghiamo adesso che l' integrale $\Sigma\mathrm{L}.p$ sia determinato in modo, che svanisca quando $p = 1$, lo che è permesso a motivo della costante arbitraria C, e ponendo $q = 1$ otterremo

$$(p, 1) = \mathrm{C}e^{\Sigma\mathrm{L}.p - \Sigma\mathrm{L}.(p+1)} = \frac{\mathrm{C}}{p}$$

perchè $\Sigma\mathrm{L}.(p+1) = \Sigma\mathrm{L}.p + \Delta\Sigma\mathrm{L}.p = \Sigma\mathrm{L}.p + \mathrm{L}.p$. E siccome $(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$, ne segue che la costante C è eguale all' unità, e perciò

$$(p, q) = e^{\Sigma\mathrm{L}.p + \Sigma\mathrm{L}.q - \Sigma\mathrm{L}.(p+q)}.$$

L' equazione $(p, q) = \mathrm{C}e^{\Sigma\mathrm{L}.p + \Sigma\mathrm{L}.q - \Sigma\mathrm{L}.(p+q)}$ non è per verità che un' integrale particolare dell' equazione (2) alla quale possiamo più generalmente soddisfare ponendo in luogo della costante C una funzione indeterminata $\phi(p, \text{sen}.2q\pi)$, ove 2π è la circonferenza del cerchio che ha per raggio l'unità, poichè p è riguardata come costante nell' equazione (2), e sen.$2q\pi$ non varia quando q si cangia in $q+1$. Ma siccome $(p, q) = (q, p)$, dovrà essere nel caso nostro $\phi(p, \text{sen}.2q\pi) = \phi(q, \text{sen}.2p\pi)$, la qual condizione viene adempita se si riduce la funzione $\phi(p, \text{sen}.2q\pi)$ ad una funzione simile di

sen. $2p\pi$ e sen. $2q\pi$, nella composizione della quale entrino egualmente le due variabili sen. $2p\pi$ e sen. $2q\pi$. Chiamando $\psi(\text{sen}.2p\pi, \text{sen}.2q\pi)$ questa funzione simile, avremo più generalmente

$$(p, q) = \psi(\text{sen}.2p\pi, \text{sen}.2q\pi).\, e^{\Sigma L.p + \Sigma L.q - \Sigma L.(p+q)}.$$

La funzione ψ diventa una costante C, quando ambedue i numeri p e q sono interi, e si dimostrerà come sopra che $C = 1$. Lo stesso valore eguale all' unità ha la funzione ψ, allorchè o l' uno o l' altro dei numeri p e q è intero. Supponghiamo infatti che sia tale; ed avremo

$$\Sigma L.q = L.1 + L.2 + L.3 \ldots + L.(q-1) = L.(1.2.3 \ldots q-1)$$
$$\Sigma L.(p+1) = \Sigma L.p + L.p$$
$$\Sigma L.(p+2) = \Sigma L.(p+1) + L.(p+1) = \Sigma L.p + L.(p.p+1)$$
$$\Sigma L.(p+3) = \Sigma L.(p+2) + L.(p+2) = \Sigma L.p + L.(p.p+1.p+2)$$
$$\vdots$$
$$\Sigma L.(p+q) = \Sigma L.p + L\,(p.\,p+1.\,p+2 \ldots p+q-1)$$

e per conseguenza

$$(p, q) = \psi(\text{sen}.2p\pi, 1).\frac{1.2.3 \ldots q-1}{p.\,p+1.\,p+2 \ldots p+q-1}.$$

Ma dall' equazione (2) per mezzo delle continue sostituzioni si deduce nel caso di q numero intero

$$(p, q) = \frac{1.2.3 \ldots q-1}{p+1.\,p+2 \ldots p+q-1}.(p, 1) = \frac{1.2 \ldots q-1}{p.\,p+1 \ldots p+q-1};$$

dunque $\psi(\text{sen}.\,2p\pi, 1) = 1$, e lo stesso avviene quando p è numero intero.

Se adesso ponghiamo che la funzione ψ conservi il medesimo valore eguale all' unità, anche quando niuno dei due numeri p e q è intero, avremo in generale, qualunque siano p e q,

$$(3) \qquad (p, q) = e^{\Sigma L.p + \Sigma L.q - \Sigma L.(p+q)}.$$

In questa ipotesi, la quale si riduce in sostanza ad ammettere, come comunemente si suole, che in grazia della continuità della funzione (p, q) le di lei proprietà verificate nel caso particolare, in cui uno dei numeri p e q è intero, possano estendersi al caso generale di p e q numeri qualunque, avranno luogo le considerazioni seguenti.

Abbiamo osservato che $\Sigma\, L.p$ è eguale al logaritmo del prodotto $1.2.3\ldots p-1$, quando p è un numero intero. Allorchè p è la metà di un numero intero dispari, il valore della medesima funzione può esprimersi per mezzo del logaritmo della circonferenza del circolo. Sia primieramente $p=q=\frac{1}{2}$, e l'equazione (3) ci darà $2\Sigma L.\frac{1}{2}=L.\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, ma $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(x-x^2)}}$, che posta $x=y^2$ diventa $\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}=\pi$, dunque $\Sigma L.\frac{1}{2}=L.\sqrt{\pi}$. Ora dall' equazione $\Sigma\, L.(p+1)$ $=\Sigma L.p+L.p$ si deduce $\Sigma L.\frac{3}{2}=L.\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$, $\Sigma L.\frac{5}{2}=L.\left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\right)$ e generalmente $\Sigma L.\frac{2i+1}{2}=L.\left(\frac{1.3.5\ldots.2i-1}{2^i}\sqrt{\pi}\right)$, ed

$$e^{\Sigma L.\frac{2i+1}{2}}=\frac{1.3.5\ldots 2i-1}{2^i}\sqrt{\pi}.$$

Fuori di questi casi il valore di $\Sigma L.p$ è legato con quello della trascendente $\int_0^1 dx\left(L.\frac{1}{x}\right)^{p-1}$, come vedremo in seguito.

Ritorniamo all' equazione generale (3), la quale posto $p+q$ in luogo di p ed r in luogo di q si cangia nella seguente

$$(p+q,r)=e^{\Sigma L.(p+q)+\Sigma L\, r-\Sigma L(p+q+r)}.$$

Sarà dunque

$$(p,q).(p+q,r)=e^{\Sigma L.p+\Sigma L.q+\Sigma L.r-\Sigma L.(p+q+r)}$$

e siccome il secondo membro di questa equazione si mantie-

ne sempre lo stesso, in qualunque modo si permutino tra di loro le lettere p, q ed r, se ne può concludere la nota relazione scoperta dall' Eulero.

$$(4) \qquad (p,q).(p+q,r)=(p,r).(p+r,q)=(q,r).(q+r,p).$$

Passiamo all' integrale definito $\int_0^1 dx\left(\mathrm{L}.\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, che il Sig. Legendre denota col segno Γa, e relativamente al quale ha luogo l' equazione

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma a.$$

Prendendo i logaritmi avremo

$$\mathrm{L}.\Gamma(a+1)-\mathrm{L}.\Gamma a=\Delta\mathrm{L}.\Gamma a=\mathrm{L}.a$$

e quindi integrando $\mathrm{L}.\Gamma a=\Sigma\mathrm{L}.a+\mathrm{L}.\phi(\mathrm{sen}.2a\pi)$, e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma a=\phi(\mathrm{sen}.\,2a\pi).\,e^{\Sigma\mathrm{L}.a}.$$

Quando a è un numero intero qualunque, la funzione $\phi(\mathrm{sen}.\,2a\pi)$ si riduce ad una costante C', e se determiniamo come sopra l' integrale $\Sigma\mathrm{L}.a$ in modo, che svanisca quando $a=1$, avremo $\Gamma 1=1=\mathrm{C}'e^{\Sigma\mathrm{L}.1}=\mathrm{C}'$, e $\Gamma a=e^{\Sigma\mathrm{L}.a}$. Se adesso ponghiamo che la funzione $1.\,2.\,3.\ldots a-1=e^{\Sigma\mathrm{L}.a}$, la quale è espressa da Γa quando a è un numero intero, sia egualmente rappresentata dalla medesima funzione Γa, quando a è un numero qualunque, la quale ipotesi ammetteremo sempre nelle ricerche seguenti; avremo in generale per qualsivoglia valore di a

$$(5) \qquad \Gamma a=e^{\Sigma\mathrm{L}.a}.$$

Questa espressione della trascendente Γa non offre per verità alcun nuovo vantaggio per la di lei valutazione, ma serve a dimostrarne molto semplicemente le proprietà, come tra poco vedremo. Intanto se nella equazione (4) sostituiamo ad $e^{\Sigma\mathrm{L}.p}$, $e^{\Sigma\mathrm{L}.q}$, $e^{\Sigma\mathrm{L}.(p+q)}$ i rispettivi valori Γp, Γq, $\Gamma(p+q)$,

otterremo immediatamente la relazione trovata dal Sig. Legendre

$$(6) \qquad (p, q) = \frac{\Gamma p \, \Gamma q}{\Gamma(p+q)}$$

per mezzo della quale si riferisce il valore della trascendente (p, q) a quello di Γp.

Consideriamo adesso la funzione $\Gamma 2x$, per la quale ha luogo l' equazione

$$\Gamma(2x+1) = 2x\Gamma 2x.$$

Prendendo i logaritmi abbiamo

$$\mathrm{L}.\Gamma(2x+1) - \mathrm{L}.\Gamma 2x = \mathrm{L}.2 + \mathrm{L}.x$$

cioè indicando col segno $\Delta^{(\frac{1}{2})}\phi x$ la differenza finita di $\phi.x$, quando quella di x è $= \frac{1}{2}$

$$\Delta^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.\Gamma 2x = \mathrm{L}.2 + \mathrm{L}.x$$

ed integrando

$$\mathrm{L}.\Gamma 2x = 2x\mathrm{L}.2 + \Sigma^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.x + \mathrm{L}.\mathrm{C}$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma 2x = \mathrm{C}2^{2x} . e^{\Sigma^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}x}.$$

Se prendiamo l' integrale $\Sigma^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.x$ in modo che si annulli quando $x = \frac{1}{2}$, avremo per determinare la costante C l' equazione $\Gamma 1 = 1 = 2\mathrm{C}$, cioè $\mathrm{C} = \frac{1}{2}$, e

$$\Gamma 2x = 2^{2x-1} . e^{\Sigma^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.x}.$$

L' integrale $\Sigma^{(\frac{1}{2})}$ può esprimersi per mezzo di un altro integrale Σ, rapporto al quale sia $\Delta x = 1$. Ponghiamo infatti $\Sigma^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.x = \Sigma \mathrm{P}_x$, e prendendo la differenza $\Delta^{(\frac{1}{2})}$ avremo

$$\mathrm{L}.x = \Sigma(\mathrm{P}_{x+\frac{1}{2}} - \mathrm{P}_x).$$

Ora perchè sia soddisfatta questa equazione è necessario che si abbia

$$\mathrm{P}_{x+\frac{1}{2}} - \mathrm{P}_x = \mathrm{L}.(x+1) - \mathrm{L}.x = \mathrm{L}.(x+1) - \mathrm{L}.(x+\tfrac{1}{2})$$
$$+ \mathrm{L}.(x+\tfrac{1}{2}) - \mathrm{L}.x$$

o sia

$$\Delta^{(\frac{1}{2})}\mathrm{P}_x = \Delta^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.x + \Delta^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.(x+\tfrac{1}{2})$$

onde si deduce mediante l' integrazione

$$\mathrm{P}_x = \mathrm{L}.x + \mathrm{L}.(x+\tfrac{1}{2}) + \mathrm{L}.c$$

e per conseguenza

$$\Sigma^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.x = \Sigma\mathrm{L}.x + \Sigma\mathrm{L}.(x+)\tfrac{1}{2} + \Sigma\mathrm{L}.c.$$

Essendo, come sopra, $\Sigma\mathrm{L}.1 = 0$, abbiamo nel caso di $x = \frac{1}{2}$

$$\Sigma^{(\frac{1}{2})}\mathrm{L}.\tfrac{1}{2} = 0 = \Sigma\mathrm{L}.\tfrac{1}{2} + \Sigma\mathrm{L}.c,$$

dunque $\Sigma\mathrm{L}.c = -\Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{2}$, e

$$\Gamma 2x = 2^{2x-1} . e^{\Sigma\mathrm{L}.x + \Sigma\mathrm{L}.(x+\frac{1}{2}) - \Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{2x-1} . \frac{\Gamma x . \Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1}{2}}.$$

Più generalmente l'equazione

$$\Gamma(ix+1) = ix\Gamma ix$$

ove i è un numero intero, ci darà

$$\mathrm{L}.\Gamma(ix+1) - \mathrm{L}.\Gamma ix = \Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)}\mathrm{L}.\Gamma ix = \mathrm{L}.i + \mathrm{L}x$$

$\Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)}$ rappresentando la differenza finita, quando x varia di $\frac{1}{i}$. Dunque avremo integrando

$$\mathrm{L}.\Gamma ix = ix\mathrm{L}.i + \Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{L}.x + \mathrm{L}.\,\mathrm{C}$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma ix = \mathrm{C}i^{ix} . e^{\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{L}.x}.$$

Supposto che l'integrale $\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{L}.x$ cominci da $x = \frac{1}{i}$, per questo valore di x sarà $\Gamma 1 = 1 = \mathrm{C}i$, cioè $\mathrm{C} = \frac{1}{i}$, e

$$\Gamma ix = i^{ix-1} . e^{\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{L}.x}.$$

Facciamo $\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{L}.x = \Sigma \mathrm{Q}_x$, e prendendo la differenza $\Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)}$ avremo $\mathrm{Q}_{x+\frac{1}{i}} - \mathrm{Q}_x = \mathrm{L}.(x+1) - \mathrm{L}.x$

$$= \mathrm{L}.(x+1) - \mathrm{L}.\left(x + \frac{i-1}{i}\right) + \mathrm{L}.\left(x + \frac{i-1}{i}\right) \ldots + \mathrm{L}.\left(x + \frac{1}{i}\right) - \mathrm{L}x$$

cioè

$$\Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{Q}_x = \Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)} \left[\mathrm{L}x + \mathrm{L}.\left(x + \frac{1}{i}\right) + \mathrm{L}.\left(x + \frac{2}{i}\right) \ldots\ldots + \mathrm{L}.\left(x + \frac{i-1}{i}\right) \right]$$

dalla qual'equazione si ricava

$$\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{L}.x = \Sigma \mathrm{Q}_x = \Sigma\Big[\mathrm{L}.x + \mathrm{L}.\left(x+\frac{1}{i}\right) + \mathrm{L}.\left(x+\frac{2}{i}\right)$$
$$\ldots\ldots + \mathrm{L}.\left(x+\frac{i-1}{i}\right)\Big] + \mathrm{C}'$$

e posto $x = \frac{1}{i}$

$$\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} \mathrm{L}.\frac{1}{i} = 0 = \Sigma\left(\mathrm{L}.\frac{1}{i} + \mathrm{L}.\frac{2}{i} \ldots\ldots + \mathrm{L}.\frac{i-1}{i}\right) + \mathrm{C}'$$

e per conseguenza

$$\mathrm{C}' = -\Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{i} - \Sigma\mathrm{L}.\frac{2}{i} \ldots\ldots - \Sigma\mathrm{L}.\frac{i-1}{i}.$$

Dunque sarà

$$\Gamma ix = i^{ix-1} . \frac{e^{\Sigma\mathrm{L}.x + \Sigma\mathrm{L}\left(x+\frac{1}{i}\right) + \Sigma\mathrm{L}.\left(x+\frac{2}{i}\right) \ldots + \Sigma\mathrm{L}\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}}{e^{\Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{i} + \Sigma\mathrm{L}.\frac{2}{i} \ldots\ldots + \Sigma\mathrm{L}\frac{i-1}{i}}}$$

$$= i^{ix-1} . \frac{\Gamma x . \Gamma\left(x+\frac{1}{i}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{i}\right) \ldots\ldots \Gamma\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}{\Gamma\frac{1}{i} . \Gamma\frac{2}{i} . \Gamma\frac{3}{i} \ldots \Gamma\frac{i-1}{i}}$$

alla qual' equazione è giunto il Sig. Legendre dopo una serie non breve d'ingegnosi ragionamenti. E poichè per un Teorema dell' Eulero, dimostrato dal Sig. Lacroix nel Trattato delle Differenze e delle Serie pag. 460. è

$$\Gamma\frac{1}{i} . \Gamma\frac{2}{i} . \Gamma\frac{3}{i} \ldots\ldots \Gamma\frac{i-1}{i} = \frac{(2\pi)^{\frac{i-1}{2}}}{\sqrt{i}},$$

avrassi

$$(7) \quad \Gamma ix = i^{ix-\frac{1}{2}} . \frac{\Gamma x . \Gamma\left(x+\frac{1}{i}\right) . \Gamma\left(x+\frac{2}{i}\right) \ldots \Gamma\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}{(2\pi)^{\frac{i-1}{2}}}$$

Abbiamo dato la precedente dimostrazione di questo importante ritrovato, perchè ci è sembrata meritevole di qualche considerazione, quantunque il medesimo resultato si possa ottenere con molto maggior semplicità nel modo che segue. Ponendo nell' equazione

$$\Gamma(ix+1)=ix\Gamma ix$$

successivamente $x+\frac{1}{i}$, $x+\frac{2}{i}$, ec. in luogo di x troveremo

$$\Gamma(ix+2)=(ix+1)\Gamma(ix+1)=ix(ix+1)\Gamma ix$$

$$\Gamma(ix+3)=(ix+2)\Gamma(ix+2)=ix(ix+1)(ix+2)\Gamma ix$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(ix+i)=ix(ix+1)(ix+2)\ldots\ldots(ix+i-1)\Gamma ix$$

$$=i^i x\left(x+\frac{1}{i}\right)\left(x+\frac{2}{i}\right)\ldots\left(x+\frac{i-1}{i}\right)\Gamma ix.$$

Presi i logaritmi da una parte e dall' altra sarà

$$\mathrm{L}.\Gamma(ix+i)-\mathrm{L}.\Gamma ix=\Delta\mathrm{L}.\Gamma ix=i\mathrm{L}i+\mathrm{L}.x$$
$$+\mathrm{L}.\left(x+\frac{1}{i}\right)\ldots\ldots+\mathrm{L}.\left(x+\frac{i-1}{i}\right)$$

ed integrando avremo

$$\mathrm{L}\Gamma ix=ix\mathrm{L}.i+\Sigma\mathrm{L}.x+\Sigma\mathrm{L}.\left(x+\frac{1}{i}\right)\ldots+\Sigma\mathrm{L}.\left(x+\frac{i-1}{i}\right)+\mathrm{C}.$$

Supposto al solito $\Sigma\mathrm{L}.1=0$, se facciamo $x=\frac{1}{i}$, otterremo

$$\mathrm{C}=-\mathrm{L}.i-\Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{i}-\Sigma\mathrm{L}.\frac{2}{i}\ldots\ldots-\Sigma\mathrm{L}.\frac{i-1}{i}$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma ix=i^{ix-1}.\frac{\Gamma x.\Gamma\left(x+\frac{1}{i}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}{\Gamma\frac{1}{i}.\Gamma\frac{2}{i}\ldots\ldots\Gamma\frac{i-1}{i}}$$

come sopra.

Differenziando logaritmicamente l'equazione $\Gamma(p+1)=p\Gamma p$

avremo $\frac{dL.\Gamma(p+1)}{dp} = \frac{dL.\Gamma p}{dp} + \frac{1}{p}$, o sia denotando la funzione $\frac{dL.\Gamma p}{dp}$ col segno $Z'p$

$$(8) \qquad Z'(p+1) = Z'p + \frac{1}{p}.$$

Questa equazione a differenze finite integrata ci dà

$$Z'p = \Sigma \frac{1}{p} + Z'1$$

se supponghiamo determinato l'integrale $\Sigma \frac{1}{p}$ in modo che svanisca quando $p = 1$.

Posto $\frac{p}{2}$ in luogo di p l'equazione (8) diventa

$$Z'\left(\frac{p+2}{2}\right) - Z'\left(\frac{p}{2}\right) = \Delta^{(2)} Z'\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{2}{p}$$

se indichiamo col segno $\Delta^{(2)}$ la differenza finita, quando p varia di 2. Dunque avremo integrando

$$(9) \qquad Z'\left(\frac{p}{2}\right) = 2\Sigma^{(2)}.\frac{1}{p} + Z'1$$

nella ipotesi che $\Sigma^{(2)}.\frac{1}{p}$ si renda nullo nel caso di $p = 2$.

Per mezzo di questi principj si possono facilmente assegnare i valori degl'integrali definiti $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-x} = (p, 0)$ ed $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$. Relativamente al primo abbiamo $(p+1, 0) - (p, 0) = \Delta(p, 0) = -\int_0^1 x^{p-1}\, dx = -\frac{1}{p}$, e quindi $(p, 0) = (1, 0) - \Sigma.\frac{1}{p} = (1, 0) + Z'1 - Z'p$. Per eliminarne la costante $(1, 0)$, che è infinita, prendendo un'altra funzione $(r, 0)$ avremo egualmento $(r, 0) = (1, 0) + Z'1 - Z'r$, e $(p, 0) - (r, 0) = Z'r - Z'p$. Sarà dunque

$$(10) \qquad Z'r - Z'p = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{r-1}}{1-x}\, dx$$

e posta $p = 1$

$$(11) \qquad Z'r = Z'1 + \int_0^1 \frac{1-x^{r-1}}{1-x}\, dx$$

come ha trovato per altra strada il Sig. Legendre a pag. 45. T. II. dei suoi Esercizj.

Facendo $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = F.p$ avremo

$$F.(p+1) + F.p = \int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{1}{p},$$

la qual' equazione cangiando p in $p+1$ diventa

$$F.(p+2) + F.(p+1) = \frac{1}{p+1}$$

e sottraendo da questa la precedente

$$F.(p+2) - F.p = \Delta^{(2)} F.p = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}$$

che integrata ci dà

$$F.p = \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p+1} - \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p} + C'.$$

e preso l' integrale $\Sigma^{(2)}.\frac{1}{p}$ come sopra nell'equazione (9) avremo per determinare la costante C'

$$F.1 = L.2 = -\Sigma^{(2)}.1 + C',$$

cioè sarà $C' = L.2 + \Sigma^{(2)}.1$, e

$$F.p = L.2 + \Sigma^{(2)}.1 + \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p+1} - \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p}$$

$$= L.2 + \frac{1}{2} Z'.\frac{1}{2} - \frac{1}{2} Z'1 + \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p}{2}\right).$$

E siccome per l'equazione (10) è $Z'\frac{1}{2} - Z'1 = \int_0^1 \frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1-x} dx$ che posto $x = y^2$ diventa $-2\int_0^1 \frac{dy}{1+y} = -2L.2$, otterremo finalmente

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p}{2}\right).$$

Convien però osservare che questo resultato si può più semplicemente dedurre dall' equazione (10), come ha fatto il Sig. Legendre (Eserc. T. II. pag. 157.).

I medesimi principj somministrano una facile dimostrazione di un altro bel Teorema dello stesso Autore. Se col segno $\psi(x^n)$ rappresentiamo la somma della serie infinita

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \frac{1}{(x+3)^n} + \&c.$$

ove n è un numero intero positivo, avremo differenziando

$$\frac{d\psi(x^n)}{dx} = -n\left(\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \text{ec.}\right) = -n\psi(x^{n+1})$$

e quindi

$$\psi(x^n) = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1} \cdot \frac{d^{n-1}\psi(x)}{dx^{n-1}}.$$

Rimane a trovarsi il valore di

$$\psi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ec.}$$

al quale oggetto ponendo $x+1$ in luogo di x otterremo

$$\psi(x+1) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ec.} = \psi(x) - \frac{1}{x}$$

cioè $\psi(x) = \psi(1) - \Sigma.\frac{1}{x}$, ove $\Sigma\frac{1}{x}$ deve determinarsi al solito in modo che sia nullo quando $x=1$, e la costante $\psi(1)$ è infinita ed $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{ec.}$ Sostituendo a $\Sigma.\frac{1}{x}$ il suo valore $Z'x - Z'1$ avremo

$$\psi(x) = \psi(1) + Z'1 - Z'x = \psi(1) + Z'1 - \frac{dL\Gamma x}{dx}$$

e per conseguenza

$$\psi(x^n) = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n-1} \cdot \frac{d^n \mathrm{L}.\Gamma x}{dx^n}$$

(Eserc. T. II. pag. 17.).

Per mostrare con un altro esempio l'uso, che può avere il calcolo delle differenze finite in questo genere di ricerche, proponghiamoci di trovare il valore dell' integrale definito $\int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx}{x}$, ove m ed n sono numeri qualunque, e k un numero positivo intero e >0. Supposta n costante questo integrale è una funzione di k e di m, che indicheremo col segno $\mathrm{F}(k, m)$, e se in luogo di k porremo $k+1$ avremo

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^{k+1} . e^{-mx} dx}{x} = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-(m+n)x} dx}{x}$$

$$-\int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx}{x}$$

che è qnanto dire

$$\mathrm{F}(k+1, m) = \mathrm{F}(k, m+n) - \mathrm{F}(k, m) = \Delta \mathrm{F}(k, m)$$

nella ipotesi che la differenza Δm sia $= n$. Pertanto sarà

$$\mathrm{F}(k, m) = \Delta^{k-1} . \mathrm{F}(1, m)$$

ove resta a conoscersi il valore di $\mathrm{F}(1, m) = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1) . e^{-mx} dx}{x}$.

Ma abbiamo $\frac{d\mathrm{F}(1, m)}{dm} = -\int_0^\infty (e^{-nx}-1) . e^{-mx} dx = -\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m}$, ed integrando $\mathrm{F}(1, m) = -\mathrm{L}.(m+n) + \mathrm{L}.m = -\Delta \mathrm{L}.m$, ove tralascio la costante perchè $\mathrm{F}(1, m)$ svanisce quando $n = 0$. Dunque

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx}{x} = -\Delta^k \mathrm{L}.m.$$

Se moltiplichiamo questa equazione per dm^i, e ne prendiamo i volte l' integrale, avremo

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx}{x^{i+1}} = (-1)^{i+1} \int^i dm^i \Delta^k \mathrm{L}.m$$

$$= (-1)^{i+1} \Delta^k \int^i dm^i \mathrm{L}.m$$

Ora $\int dm \mathrm{L}.m = m\mathrm{L}.m - m + \mathrm{C}$

$$\int^2 dm^2 \mathrm{L}.m = \frac{m^2}{2}\mathrm{L}.m - \frac{3}{4}m^2 + \mathrm{C}m + \mathrm{C}'$$

$$\int^3 dm^3 \mathrm{L}.m = \frac{m^3}{2.3}\mathrm{L}.m - \frac{11}{36}m^3 + \frac{\mathrm{C}m^2}{2} + \mathrm{C}'m + \mathrm{C}''$$

ec.

dunque $\int^i dm^i \mathrm{L}.m$ avrà in generale la forma

$$\int^i dm^i \mathrm{L}.m = \frac{m^i \mathrm{L}m}{2.3\ldots i} + am^i + a'm^{i-1} + a''m^{i-2} \ldots + a^{(i)}$$

essendo $a, a' \ldots a^{(i)}$ costanti indipendenti da m. E se osserviamo che è

$$\Delta^k (am^i + a'm^{i-1} + a''m^{i-2} \ldots + a^{(i)}) = 0$$

quando k è $=, 0 > i+1$, come noi supponghiamo, sarà in questo caso

$$(a) \qquad \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3\ldots i} \Delta^k . m^i \mathrm{L}.m.$$

Se facciamo $e^{-x} = y$, l'integrale $\int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx}{x^{i+1}}$ si cangerà in $\frac{1}{(-1)^{i+1}} \int_0^1 \frac{(y^n-1)^k . y^{m-1} dy}{(\mathrm{L}.y)^{i+1}}$, e perciò

$$\int_0^1 \frac{(y^n-1)^k . y^{m-1} dy}{(\mathrm{L}.y)^{i+1}} = \frac{1}{1.2.3\ldots i} \Delta^k . m^i \mathrm{L}.m$$

purchè sia $k =, 0 > i+1$, perchè altrimenti quell'integrale sarebbe infinito. E ponendo $k = i+1$ avremo

$$\int_0^1 \left(\frac{y^n-1}{\mathrm{L}.y}\right)^{i+1} . y^{m-1} dy = \frac{1}{1.2.3\ldots i} \Delta^{i+1} . m^i \mathrm{L}.m$$

lo che combina col resultato ottenuto dal Sig. Legendre nella terza parte de' suoi Esercizj pag. 372.

Consideriamo adesso i due integrali

$$u = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx \cos ax}{x^{i+1}}, \quad t = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k . e^{-mx} dx \operatorname{sen}. ax}{x^{i+1}}$$

e ponendo in luogo di cos.ax e di sen.ax i loro valori espressi per gli esponenziali immaginarj troveremo

$$u = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k}{x^{i+1}} \cdot \frac{e^{-(m-a\sqrt{-1})x} + e^{-(m+a\sqrt{-1})x}}{2} dx$$

$$t = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k}{x^{i+1}} \cdot \frac{e^{-(m-a\sqrt{-1})x} - e^{-(m+a\sqrt{-1})x}}{2\sqrt{-1}} dx.$$

Dunque sarà per l' equazione (a)

$$u = \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3\ldots i} \Delta^k . \frac{(m-a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m-a\sqrt{-1}) + (m+a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m+a\sqrt{-1})}{2}$$

$$t = \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3.\ldots i} \Delta^k . \frac{(m-a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m-a\sqrt{-1}) - (m+a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m+a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

e fatta la riduzione delle quantità immaginarie

$$u = \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3\ldots i} \Delta^k . r^i (\cos.i\beta x \mathrm{L}.r - \beta \mathrm{sen}.i\beta)$$

$$t = \frac{(-1)^i}{1.2.3\ldots i} \Delta^k . r^i (\mathrm{sen}.i\beta x \mathrm{L}.r + \beta \cos.i\beta)$$

ove r è $=\sqrt{(m^2+a^2)}$, e β l' arco che ha per tangente $\frac{a}{m}$.