SULL' INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONE

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{i(i+1)}{x^2}\right)y = 0$$

MEMORIA

DEL PROFESSOR PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 8. *Ottobre* 1827.

Il Sig. Prof. Plana nel Tomo XXVI delle Memorie della Reale Accademia di Torino da alcune relazioni osservate da lui tra i termini delle serie, che rappresentano l'integrale dell' equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{i(i+1)}{x^2}\right)y = 0$$

ha dedotto un mezzo elegante e diverso dai metodi ordinarj per esprimerne l'integrale in termini finiti, quando i è un numero intero. Siccome è importante che siano promossi tutti i differenti artifizj, con i quali possono superarsi le difficoltà che presenta l'integrazione dell'equazioni differenziali, ho creduto bene di mostrare una via più diretta e più semplice ed insieme indipendente dalla considerazione delle serie per giungere al medesimo risultamento.

All'equazione proposta moltiplicata per una funzione M di x aggiungendo il differenziale della medesima equazione avremo

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \mathrm{M}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{i(i+1)}{x^2}\right)\left(\frac{dy}{dx} + \mathrm{M}y\right) + \frac{2i(i+1)}{x^3}\,y = 0.$$

Ponghiamo

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{M}y = z$$

ed osservando che

$$\frac{d^3y}{dx^3}+M\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{d^2M}{dx^2}\cdot y$$

$$=\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dM}{dx}.z+\left(2\frac{dM}{dx}-\frac{d^2M}{dx^2}\right)y$$

otterremo con la sostituzione di questo valore

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(1-\frac{i(i+1)}{x^2}-2\frac{dM}{dx}\right)z+\left(2M\frac{dM}{dx}-\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{2i(i+1)}{x^3}\right)y=0.$$

Per ridurre l' ultima equazione ad una forma simile a quella della proposta eliminandone la y facciamo

$$2M\frac{dM}{dx}-\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{2i(i+1)}{x^3}=0$$

ed integrando avremo

$$M^2-\frac{dM}{dx}-\frac{i(i+1)}{x^2}=c.$$

Ora se lasciassimo questa equazione in tutta la sua generalità, incontreremmo per integrarla le stesse difficoltà, che presenta la proposta; ma siccome non abbiamo bisogno che di un valore particolare di M porremo la costante $c=0$. L'equazione in M diventa allora quella del Conte Riccati in un caso integrabile, e facilmente vedremo che ad essa soddisfà

$$M=-\frac{i+1}{x}.$$

Sostituito il valore di M sarà

$$z=\frac{dy}{dx}-\frac{i+1}{x}y$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(1-\frac{(i+1)(i+2)}{x^2}\right)z=0.$$

E se paragoniamo questa ultima equazione con la proposta, vedremo che la seconda si cangia nella prima, allorchè vi si ponga $i+1$ in luogo di i. Pertanto qualora si conosca l'integrale $y=X$ della proposta nel caso di $i=n$, sarà $y=\frac{dX}{dx}-\frac{n+1}{x}.X$, quando $i=n+1$.

Chiamando y_0, y_1, y_2, &c. i valori di y corrispondenti ad $i = 0, 1, 2,$ &c. avremo l' equazione a differenze miste

$$y_i = \frac{dy_{i-1}}{dx} - \frac{i}{x} y_{i-1} = x^i . \frac{d.x^{-i}\, y_{x-1}}{dx}$$

per mezzo della quale conosciuto $y_0 = a\,\text{sen.}(x+b)$ potremo successivamente trovare i valori di y_1, y_2 &c. e dedurne il valor generale di y nel modo seguente. Avremo primieramente

$$y_1 = \frac{x.d.\frac{a\,\text{sen.}(x+b)}{x}}{dx} = a\cos.(x+b) - \frac{a\,\text{sen.}(x+b)}{x}$$

e posto $b - 90^\circ$ in luogo di b, lo che è permesso

$$y_1 = a\,\text{sen.}(x+b) + \frac{a\cos.(x+b)}{x}.$$

Così pure sarà

$$y_2 = x^2 \frac{d.\frac{y_1}{x^2}}{dx} = a\cos.(x+b)\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) - \frac{3a\,\text{sen.}(x+b)}{x}$$

e cangiando b in $b - 90^\circ$

$$y_2 = a\,\text{sen.}(x+b)\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) + a\cos.(x+b).\frac{3}{x}.$$

In simil guisa troveremo

$$y_3 = a\,\text{sen.}(x+b)\left(1 - \frac{15}{x^2}\right) + a\cos.(x+b)\left(\frac{6}{x} - \frac{15}{x^3}\right)$$

$$y_4 = a\,\text{sen.}(x+b)\left(1 - \frac{45}{x^2} + \frac{105}{x^4}\right) + a\cos.(x+b)\left(\frac{10}{x} - \frac{105}{x^3}\right)$$

&c.

Da ciò apparisce, che avrà y in generale la forma

$$y = a\,\text{sen.}(x+b)\left(1 - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_4}{x^4} - \frac{c_6}{x^6} + \text{\&c.}\right)$$
$$+ a\cos.(x+b)\left(\frac{c_1}{x} - \frac{c_3}{x^3} + \frac{c_5}{x^5} - \text{\&c.}\right)$$

essendo i coefficienti c_1, c_2, c_3, &c. funzioni di i. Per determinarli sostituiamo questo valore di y nella proposta, e paragonando tra loro separatamente i termini moltiplicati per sen. $(x+b)$ e cos. $(x+b)$ avremo l'equazioni

$$2c_1 - i(i+1) = 0$$

$$2.2c_2 - [i(i+1) - 1.2]\, c_1 = 0$$

$$2.3c_3 - [i(i+1) - 2.3]\, c_2 = 0$$

$$2.4c_4 - [i(i+1) - 3.4]\, c_3 = 0$$

ed in generale

$$2nc_n - [i(i+1) - n(n-1)]\, c_{n-1} = 0$$

cioè

$$c_n = \frac{(i+n)(i-n+1)}{2n} \cdot c_{n-1}$$

onde si deduce

$$c_n = \frac{(i+n)(i+n-1)\ldots i(i-1)(i-2)\ldots(i-n+1)}{2.4.6\ldots 2n}$$

a motivo di $c_0 = 1$.

Sostituiti questi valori avremo y espressa in termini finiti, allorchè sarà i un numero intero positivo o negativo. Ma dal modo con cui abbiamo determinato i coefficienti c_1, c_2 &c. si comprende, che il valore trovato di y soddisfarà alla proposta anche quando i non è numero intero, se non che sarà allora espresso da una serie infinita.

All'equazione

$$M^2 - \frac{dM}{dx} - \frac{i(i+1)}{x^2} = 0$$

possiamo ancora soddisfare ponendo $M = \frac{i}{x}$, sostituito il qual valore abbiamo

$$z = \frac{dy}{dx} + \frac{i}{x}\, y$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(1-\frac{(i-1)i}{x^2}\right)z=0$$

ed in quest' ultima equazione si cangia la proposta, se vi si muta i in $i-1$. Sarà dunque

$$y_{i-1}=\frac{dy_i}{dx}+\frac{1}{x}\,y_i=\frac{1}{x^i}\cdot\frac{d\,x^i y_i}{dx},$$

ed integrando avremo

$$y_i=\frac{1}{x^i}\int x^i . y_{i-1}\,dx,$$

col mezzo della qual'equazione in un modo più analogo a quello seguitato dal Sig. Plana troveremo i valori successivi di y_i ed il valore generale di y. Ma questo metodo procedendo per integrazioni deve riguardarsi come men semplice del precedente, il quale non richiede che differenziazioni.

Se facciamo $y=x^n u$, la proposta diventerà

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2n}{x}\cdot\frac{du}{dx}+\left(1+\frac{n(n-1)-i(i+1)}{x^2}\right)u=0$$

e posta $n=-i$ si cangerà in

$$\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{2i}{x}\cdot\frac{du}{dx}+u=0.$$

Introducendo adesso in luogo di x un'altra variabile t, che ne sia funzione, l'equazione precedente si trasformerà in

$$(a)\qquad \frac{d^2u}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{du}{dt}\left(\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{2i}{x}\cdot\frac{dt}{dx}\right)+u=0.$$

Determiniamo la funzione t in modo, che sia

$$\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{2i}{x}\cdot\frac{dt}{dx}=0,$$

ed avremo integrando $x^{-2i}\cdot\frac{dt}{dx}=c$, ed integrando di nuovo $t=\frac{cx^{2i+1}}{2i+1}+c'$, o più semplicemente $t=x^{2i+1}$ posta $c=2i+1$ e $c'=0$, e quindi $x=t^{\frac{1}{2i+1}}$. Sostituiti questi valori l'equazione (a) diventerà

$$(b) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + (2.i + 1^2)^3 t^{\frac{4i}{2i+1}} . u = 0.$$

Conosciuto pertanto il valore y, che soddisfà alla proposta, avremo quello di u cioè l'integrale dell'equazione (b), se nella quantità $\frac{y}{x^3}$ porremo $t^{\frac{1}{2i+1}}$ in luogo di x.

L'Eulero nel suo Calcolo Integrale osservò la medesima relazione tra la proposta e l' equazione (b), e siccome aveva già assegnato l' integrale di questa, conviene ancora attribuirgli la prima integrazione dell' altra, che ha formato il soggetto di questa breve Memoria.