SOPRA GL' INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

DEL PROFESSORE PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 8. Ottobre 1827.

Io mi propongo in questa breve Memoria di richiamar l'attenzione dei Geometri sopra alcune difficoltà, che possono incontrarsi nella teoria degl' integrali definiti comunemente adottata. A quest' oggetto prendo a ricercar nuovamente i valori già noti tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ delle formole integrali $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax$ ed $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax$, ove e è il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità e b ed n sono numeri positivi escluso lo zero.

1. Il problema ammette una semplicissima risoluzione, allorchè n è un numero intero. Poichè essendo

$$\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax = \pm \frac{d^{n-1} \int e^{-bx} dx \cos. ax}{db^{n-1}},$$

ove il segno superiore $+$ deve prendersi nel caso di n dispari, e l'inferiore $-$ nel caso di n pari, e facilmente trovandosi col mezzo dell'integrazione indefinita il valore di $\int e^{-bx} dx \cos. ax$ tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ essere $= \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} . \frac{d \log (a^2+b^2)}{db}$, avremo

$$\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax = \pm \frac{1}{2} . \frac{d^n . \log . (a^2+b^2)}{db^n}.$$

E così pure, essendo l'integrale egualmente definito

$$\int e^{-bx} dx \text{ sen. } ax = \frac{a}{a^2+b^2} = - \frac{d \text{ Arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{b}\right)}{db}, \text{ troveremo}$$

$$\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax = \mp \frac{d^n . \text{Arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{b}\right)}{db^n}.$$

2. Quando n non è un numero intero, i valori di

quest' integrali dipendono da quello di un altro integrale definito più semplice. Facendo $z=\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax$, $y=\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax$, e differenziando per rapporto ad a avremo

$$\frac{dz}{da}=\int e^{-bx} . x^{n} dx \cos. ax, \quad \frac{dy}{da}=-\int e^{-bx} . x^{n} dx \text{ sen. } ax,$$

cioè integrando per parti

$$\frac{dz}{da}=-\frac{e^{-bx}.x^{n} \cos. ax}{b}+\frac{n}{b}\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax$$
$$-\frac{a}{b}\int e^{-bx} . x^{n} dx \text{ sen. } ax$$
$$\frac{dy}{da}=\frac{e^{-bx}.x^{n} \text{ sen.} ax}{b}-\frac{n}{b}\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax$$
$$-\frac{a}{b}\int e^{-bx} . x^{n} dx \cos. ax.$$

Ora le quantità fuori del segno integrale svaniscono ad ambedue i limiti o ed $\frac{1}{0}$, quando b ed n sono >0, come abbiamo supposto. Con queste condizioni pertanto, e non altrimenti, avremo tra i medesimi limiti l'equazioni

$$(1) \qquad \frac{dz}{da}=\frac{a}{b}.\frac{dy}{da}+\frac{n}{b}y$$

$$(2) \qquad \frac{dy}{da}=-\frac{a}{b}.\frac{dz}{da}-\frac{n}{b}z.$$

Fin qui quest' analisi è perfettamente conforme a quella, che ha dato il Sig. Poisson in una profonda Memoria su gl'integrali definiti inserita nel Tomo X. del Giornale della Scuola Politecnica di Parigi. Questo gran Geometra eliminando in seguito la z dalle due equazioni (1) e (2) trova un'equazione differenziale del second'ordine alquanto complicata, che giunge ad integrare ponendo in luogo della variabile a l'angolo che ha per tangente $\frac{a}{b}$. Ma era difficile prevedere che una tale sostituzione avrebbe prestato l'uffizio desiderato, se il valore di y non fosse stato già noto, ed assegnato per la prima volta dall'Eulero. In una lettera scritta al Sig. Marchese Laplace nell'anno 1811. fu da me indicato il seguente semplicissimo metodo, con cui può direttamente ottenersi l'integrazione dell'equazioni (1) e (2).

Alla prima di esse moltiplicata per z aggiungendo la seconda moltiplicata per y avremo

$$(3) \qquad z\frac{dz}{da}+y\frac{dy}{da}=\frac{a}{b}\left(z\frac{dy}{da}-y\frac{dz}{da}\right).$$

Similmente se dall'equazione (1) moltiplicata per y si sottrae la (2) moltiplicata per z, sarà

$$(4) \qquad y\frac{dz}{da}-z\frac{dy}{da}=\frac{a}{b}\left(z\frac{dz}{da}+y\frac{dy}{da}\right)+\frac{n}{b}(z^2+y^2).$$

Ora secondo che eliminiamo da queste due equazioni (3) e (4) l'una o l'altra delle due quantità $y\frac{dz}{da}-z\frac{dy}{da}$, $z\frac{dz}{da}+y\frac{dy}{da}$, otterremo le seguenti

$$\frac{z\frac{dz}{da}+y\frac{dy}{da}}{z^2+y^2}=-\frac{na}{a^2+b^2}$$

$$\frac{y\frac{dz}{da}-z\frac{dy}{da}}{z^2+y^2}=\frac{nb}{a^2+b^2}$$

le quali integrate ci danno

$$z^2+y^2=\frac{A^2}{(a^2+b^2)^n}$$

$$\text{Arc}\left(\text{tang.}=\frac{z}{y}\right)=n.\text{Arc}\left(\text{tang.}=\frac{a}{b}\right)+B$$

e posto $t=\text{Arc}\left(\text{tang.}=\frac{a}{b}\right)$ se ne deduce finalmente

$$z=\frac{A}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\,\text{sen.}\,(nt+B)$$

$$y=\frac{A}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\cos.(nt+B).$$

3. Se nelle formole rappresentate da z e da y in luogo di a, avessimo fatta variare la costante b, saremmo giunti all' equazioni

$$\frac{dz}{db} = \frac{a}{b} \cdot \frac{dy}{db} - \frac{n}{b} z$$

$$\frac{dy}{db} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{dz}{db} - \frac{n}{b} y$$

le quali integrate col medesimo metodo ci avrebbero somministrato li stessi valori di z e di y, che abbiamo ottenuto nel numero antecedente.

4. La determinazione delle costanti A e B dipende dai valori di z e di y nel caso di $a = 0$. Per conoscere con sicurezza quali siano questi particolari valori prendo ad esprimere y in una serie convergente, quando a è piccolissima. Ponendo in luogo di cos. ax il suo sviluppo in serie trovo

$$y = \int e^{-bx} . x^{n-1} dx \left(1 - \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^4 x^4}{2.3.4} - \&c.\right)$$

Ora se chiamiamo $\Gamma(b)$ il valore dell'integrale $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx$ da o ad $\frac{1}{0}$, abbiamo tra i medesimi limiti $\int e^{-bx} . x^{n+1} dx$ $= \frac{d^2 \Gamma(b)}{db^2}$, $\int e^{-bx} . x^{n+3} dx = \frac{d^4 \Gamma(b)}{db^4}$, &c. dunque sarà

$$y = \Gamma(b) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{d^2 \Gamma(b)}{db^2} + \frac{a^4}{2.3.4} \cdot \frac{d^4 \Gamma(b)}{db^4} - \&c.$$

E nella stessa maniera troveremo

$$z = -a . \frac{d\,\Gamma(b)}{db} + \frac{a^3}{2.3} \cdot \frac{d^3 . \Gamma(b)}{db^3} - \frac{a^5}{2.3.4.5} \cdot \frac{d^5 . \Gamma(b)}{db^5} + \&c.$$

Siccome adunque le funzioni $\frac{d\,\Gamma(b)}{db}$, $\frac{d^2 . \Gamma(b)}{db^2}$, &c. non sono infinite nei casi contemplati da noi, nei quali b ed n sono > 0, apparisce evidentemente che annullandosi a è $y = \Gamma(b)$, e $z = 0$. Abbiamo pertanto, per determinare le costanti A e B, l' equazioni $\Gamma(b) = \frac{A}{b^n}$ cos. B, $0 = \frac{A}{b^n}$ sen. B, le quali ci danno $B = i\pi$, ove i è un numero intero qualunque, π il rapporto della circonferenza del circolo al diametro, ed $A = \pm b^n . \Gamma(b)$ secondo che i è pari o dispari, e per conseguenza

$$z = \frac{b^n \Gamma(b)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \text{ sen. } nt$$

$$y = \frac{b^n \Gamma(b)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \cos. \, nt \, .$$

5. Possiamo render più semplici quest' espressioni riducendo $\Gamma(b)$ per ogni valore di b al caso di $b = 1$. Poichè integrando per parti abbiamo

$$\int e^{-bx} . x^n dx = -\frac{e^{-bx} . x^n}{b} + \frac{n}{b} \int e^{-bx} . x^{n-1} dx$$

e quindi tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$

$$\frac{d \cdot \Gamma(b)}{db} = -\int e^{-bx} . x^n dx = -\frac{n}{b} \Gamma(b)$$

la qual' equazione integrata ci dà $\Gamma(b) = \frac{\Gamma(1)}{b^n}$. Sarà dunque

$$z = \frac{\Gamma(1)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \text{ sen. } nt$$

$$y = \frac{\Gamma(1)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \cos. \, nt$$

ove $\Gamma(1)$ rappresenta il valore dell' integrale $\int e^{-x} . x^{n-1} dx$ tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$.

6. La medesima riduzione suol farsi comunemente così: nella formola $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx$ si pone x in luogo di bx, e siccome dopo la sostituzione diventa $\frac{1}{b^n} \int e^{-x} . x^{n-1} dx$, se ne conclude immediatamente che tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ sia

$b^n \int e^{-bx} . x^{n-1} dx = \int e^{-x} . x^{n-1} dx$. Questo ragionamento però non può usarsi che con molta precauzione, perchè applicandolo all' integrale $\int \frac{e^{-bx}dx}{x}$, ed osservando che la sostituzione di bx in luogo di x ne fa sparire la b, c' inganneremmo se da ciò deducessimo che l' integrale $\int \frac{e^{-bx}dx}{x}$ da o ad $\frac{1}{0}$ è indipendente da b. Infatti

$$\frac{d.\int \frac{e^{-bx}dx}{x}}{db} = -\int e^{-bx} dx = -\frac{1}{b},$$

ed integrando abbiamo $\int \frac{e^{-bx}dx}{x} = \text{C} - \log. b$. Posta $b = 1$ si trova la costante $\text{C} = \int \frac{e^{-x}dx}{x}$; dunque

$$\int \frac{e^{-bx} - e^{-x}}{x} dx = -\log. b\,.$$

Lo stesso, se bisognasse, si potrebbe dimostrare in altro modo. Ponendo $1 + b - 1$ in luogo di b, ed invece di $e^{-(b-1)x}$ il suo sviluppo in serie, avremo

$$\int \frac{e^{-bx} - e^{-x}}{x} dx =$$

$$-\int e^{-x} dx \left[b - 1 - \frac{(b-1)^2}{2} x + \frac{(b-1)^3}{2.3} x^2 - \&c. \right].$$

Ma tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ è $\int e^{-x} dx = 1$, $\int e^{-x} x dx = 1$, $\int e^{-x} x^2 dx = 1.2$, e generalmente denotando i un numero intero positivo è $\int e^{-x} . x^i dx = 1.2.3\ldots i$; perciò

$$\int \frac{e^{-bx} - e^{-x}}{x} dx = -(b-1) + \frac{(b-1)^2}{2} - \frac{(b-1)^3}{3} + \&c. = -\log. b.$$

Nè ciò deve recare alcuna maraviglia, perchè sebbene per la sostituzione di x in luogo di bx l' integrale $\int \frac{e^{-bx}dx}{x}$ si cangi in $\int \frac{e^{-x}dx}{x}$, e ne scomparisca la b, essa però si ritrova nei limiti, i quali non sono o ed ∞ come prima, ma o. b ed ∞. b, ed avuto riguardo alla variazione di b in questi limiti $\frac{d.\int \frac{e^{-x}dx}{x}}{db}$ non è zero, ma $= -\frac{1}{b}$. Poichè rappresentando col segno $\psi(x)$ l' integrale indefinito $\int \frac{e^{-x}dx}{x}$ avremo, tra i limiti o. b ed ∞. b, $\int \frac{e^{-x}dx}{x} = \psi(\infty . b) - \psi(o.b)$. Ma siccome $\frac{d.\psi(x)}{dx} = \frac{e^{-x}}{x}$, sarà $\frac{d.\psi(\infty.b)}{db} = \frac{e^{-\infty b}}{b} = o$, e $\frac{d.\psi(o.b)}{db} = \frac{1}{b}$.

7. Si può facilmente assegnare in generale la condizione, a cui si deve soddisfare, perchè in un integrale qualunque $\int dx \mathrm{F}(x)$ da o ad $\frac{1}{o}$ sia permesso di mettere cx in luogo di x, essendo c una costante, ed insieme supporre mantenuti i medesimi limiti. Affinchè l' integrale $\int cdx\,\mathrm{F}(cx)$, in cui dopo la sostituzione si cangia $\int dx \mathrm{F}(x)$, conservi il medesimo valore, è necessario che sia questo indipendente da c, e quindi ne sia nullo tra i limiti dati il differenziale preso per rapporto a c. Abbiamo adunque la condizione

$$(a) \qquad o = \frac{d.\int cdx \mathrm{F}(cx)}{dc} = \int dx \mathrm{F}(cx) + \int cdx \frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dc}.$$

Ma essendo $c\frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dc} = x\frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dx}$, si trova integrando per parti

$$\int cdx \frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dc} = \int xdx \frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dx} = x\mathrm{F}(cx) - \int dx \mathrm{F}(cx),$$

sostituito il qual valore l'equazione (a) diventa

$$o = x\mathrm{F}(cx)$$

e deve verificarsi tra i limiti o ed $\frac{1}{o}$, perchè salvo il valore dell' integrale e conservati i medesimi limiti sia permessa la sostituzione di cx in luogo di x.

Se ne facciamo l' applicazione all' integrale

$\int e^{-bx} \cdot x^{n-1} dx \,\text{sen}.\, ax$, avremo la condizione

$$o = e^{-bcx} \cdot x^n \text{ sen}.\, acx,$$

la quale è soddisfatta nei limiti o ed $\frac{1}{0}$ quando b è > 0, ed $n =, 0 > 0$, ma non lo sarebbe nel caso di b zero o di n negativa. Pertanto, quantunque la sostituzione di x in luogo di ax faccia sparire la quantità a dall'integrale $\int \frac{dx \,\text{sen}.\, ax}{x}$, questa sola circostanza non ci autorizza a conchiudere, che tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ sia $\int \frac{dx \,\text{sen}.\, ax}{x}$ indipendente da a.

8. Il caso di $n = 0$ non è compreso nei valori di z e di y trovati di sopra (4). Riandando infatti i ragionamenti precedenti vedremo che non hanno luogo in questo caso l' equazioni (1) e (2), ma si devono ad esse sostituir le seguenti

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{dy}{da}$$

$$\frac{dy}{da} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{dz}{da}$$

oppure le altre

$$\frac{dz}{db} = \frac{a}{b} \cdot \frac{dy}{db}$$

$$\frac{dy}{db} = -\frac{1}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{dz}{db}$$

dalle prime o dalle seconde delle quali facilmente si deduce

$$\int \frac{e^{-bx} dx \,\text{sen}.\, ax}{x} = \text{Arc}\left(\text{tang.} = \frac{a}{b}\right)$$

$$\int \frac{e^{-bx} - e^{-x}}{x} dx \cos.\, ax = \frac{1}{2} \log. \frac{1+a^2}{b^2+a^2}.$$

9. Quantunque i valori trovati (4) di z ed y siano tali sotto l' espressa condizione di $b > 0$, e debba per conseguenza escludersi dai medesimi il caso di $b = 0$, pure scordandosi di ciò l' Eulero il primo, ed altri dopo di lui pongono $b = 0$ nelle formole generali, ed ammettono come legittimi

i resultati particolari $\int dx \,\text{sen.}\, ax = \frac{1}{a}$, $\int dx \cos. ax = 0$, &c. $\int \frac{dx \,\text{sen.}\, ax}{x} = \frac{\pi}{2}$ cioè all' arco di 90. gradi. È evidente che quest' equazioni non potendosi riguardare come in tal modo dimostrate, hanno bisogno di altre prove.

Siccome le formole $\int dx \,\text{sen.}\, ax$ ed $\int dx \cos. ax$ ammettono l' integrazione indefinita, i valori trovati per questo mezzo dei medesimi integrali tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ possono somministrare la conferma dei resultamenti precedenti. Essendo $\int dx \,\text{sen.}\, ax = -\frac{\cos. ax}{a}$, ed $\int dx \cos. ax = \frac{\text{sen.}\, ax}{a}$, avremo tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$, $\int dx \,\text{sen.}\, ax = \frac{1 - \cos. \frac{a}{0}}{a}$, $\int dx \cos. ax = \frac{\text{sen.} \frac{a}{0}}{a}$. Ora perchè le due quantità $\frac{1 - \cos. \frac{a}{0}}{a}$ e $\frac{\text{sen.} \frac{a}{0}}{a}$ si riducano respettivamente ad $\frac{1}{a}$ e zero, bisogna supporre nel medesimo tempo $\cos. \frac{a}{0} = 0$, e $\text{sen.} \frac{a}{0} = 0$, lo che non può farsi a motivo dell'equazione $\left(\cos. \frac{a}{0}\right)^2 + \left(\text{sen.} \frac{a}{0}\right)^2 = 1$.

10. Sembra che il seno dell' arco infinito, il quale non si riferisce piuttosto ad un punto che ad un altro della circonferenza, possa essere rappresentato da un numero qualunque m compreso tra i limiti $+1$ e -1; e così pure il coseno dell' arco infinito sia espresso da un numero indeterminato n, ma compreso tra i medesimi limiti $+1$ e -1; questi due numeri m ed n non sono però indipendenti tra loro essendo legati insieme per mezzo dell' equazione $m^2 + n^2 = 1$. Ma quantunque essi non possano esser nulli nel medesimo tempo, contuttociò zero è la somma di tutti i valori tanto dell' uno che dell' altro, e per conseguenza $\frac{1}{a}$ è il medio arit-

metico tra tutti i valori della quantità $\frac{1-\cos.\frac{a}{o}}{a}$, e zero il medio aritmentico tra tutti i valori della quantità $\frac{\text{sen.}\frac{a}{o}}{a}$. Possono pertanto ammettersi contemporaneamente in un certo senso ambedue l' equazioni

$$\frac{1-\cos.\frac{a}{o}}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\text{sen.}\frac{a}{o}}{a} = o$$

quando cioè s' intenda che il secondo membro esprima non il valore assoluto del primo, ma il medio aritmetico tra tutti i valori, che questo può prendere.

Supposte tra i limiti o ed $\frac{1}{o}$ l'equazioni $\int dx \,\text{sen}.ax = \frac{1}{a}$, $\int dx \cos.\, ax = o$, se ne deducono col mezzo della differenziazione le seguenti $\int xdx \cos.\, ax = -\frac{1}{a^2}$ ed $\int xdx \,\text{sen}.\, ax = o$, le quali possono ancora ricavarsi dai valori di y e z ponendovi $b = o$, ed $n = 2$. L' integrazione indefinita ci dà

$$\int xdx \cos.\, ax = \frac{x\,\text{sen}.\,ax}{a} + \frac{\cos.\,ax}{a^2}$$

$$\int xdx \,\text{sen}.\, ax = -\frac{x\cos.\,ax}{a} + \frac{\text{sen}.\,ax}{a^2},$$

ma nè la quantità $\frac{x\,\text{sen}.\,ax}{a} + \frac{\cos.\,ax}{a^2}$ presa tra i limiti o ed $\frac{1}{o}$ può divenire $= -\frac{1}{a^2}$, nè la quantità $-\frac{x\cos.\,ax}{a} + \frac{\text{sen}.\,ax}{a^2}$ può ridursi a zero, se non quando si consideri il medio aritmetico tra tutti i loro valori. E simili osservazioni hanno luogo in generale relativamente alle altre equazioni, che si ricavano dalle precedenti mediante l'ulteriore differenziazione relativamente ad a, o inopportunamente si deducano dai valori generali di y e di z, facendovi $b=0$.

Passiamo ad altre considerazioni. Il Sig. Poisson nella citata Memoria prosegue le sue dotte ricerche sopra una classe molto estesa d' integrali definiti, ma noi ci ristringeremo per brevità ad un caso particolare, cioè a quello di $\int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2}$ tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$. Chiamando y il valore di questo integrale definito egli giunge all' equazione

$$0 = y - \frac{d^2y}{da^2} - \int dx \cos. ax$$

che poi riduce a $0 = y - \frac{d^2y}{da^2}$ supponendo $\int dx \cos. ax = 0$. Questa circostanza (9) lascia nella mente qualche scrupolo sull' esattezza della soluzione. Oltre di che per determinare il valore dell' integrale $\int \frac{x dx \text{sen.} ax}{1+x^2}$ nel caso di $a=0$ il Sig. Poisson vi pone x in luogo di ax, dopo la qual sostituzione diventa $\int \frac{x dx \text{sen.} x}{a^2+x^2}$, e si muta in $\int \frac{dx \text{sen.} x}{x}$, quando a è zero.

Non sembra primieramente che questo modo di ragionare possa senza dimostrazione ammettersi in generale, e ne avremo una prova convincente applicandolo all' integrale $\int \frac{x \text{sen.} ax - \cos. ax}{1+x^2} dx$, il quale per i ritrovati del Sig. Poisson sarebbe $=0$ per qualunque valore di a. Postovi x in luogo di ax questo integrale si cangerebbe in $\int \frac{x \text{sen.} x - a \cos. x}{a^2+x^2} dx$, e qualora nel caso di a zero fosse permesso sopprimerne prima dell' integrazione i termini moltiplicati per a, diventerebbe $= \int \frac{dx \text{sen.} x}{x}$. In secondo luogo è da osservarsi, che i limiti dell' integrale $\int \frac{x dx \text{sen.} x}{a^2+x^2}$ non sono propriamente o ed $\frac{1}{0}$, quali erano prima della sostituzione, ma $0.a$ ed $\frac{1}{0}.a$, e questi nel caso di

a zero diventano o.o ed $\frac{1}{0}$. o, cioè o ed 1. (Si veda il seguente n.° 13.).

Ponendo in luogo della quantità $\frac{1}{1+x^2}$ il suo sviluppo in serie abbiamo

$$\int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2} = \int dx \cos. ax \,(1 - x^2 + x^4 - \&c.),$$

e se tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ fossero realmente nulli gl' integrali $\int dx \cos. ax$, $\int x^2 dx \cos. ax$, $\int x^4 dx \cos. ax$, &c., ne dovremmo concludere $\int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2} = 0$. Questa conseguenza, che non sarebbe facilmente ammessa relativamente al valore assoluto di quell' integrale, ci somministra un altro motivo di dubitare dell' equazione $\int dx \cos. ax = 0$. La medesima equazione non implicherebbe forse contraddizione veruna nel concetto del n.° 10, nel quale gl' integrali $\int dx \cos. ax$, $\int x^2 dx \cos. ax$, &c. sono tutti nulli senza contrasto, quando cioè si considerasse il medio aritmetico tra tutti i possibili valori.

12. Non ignoro che il resultato a cui è giunto il Sig. Poisson, si accorda con questo, che è stato ottenuto con altri metodi, ma anche questi sembrano soggetti a qualche difficoltà. Il Signor Laplace prende a considerare l' integrale doppio

$$z = \int\int e^{-y^2(1+x^2)} .\, 2y dy dx \cos. ax$$

tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ per ambedue le variabili x ed y, ed integrando in primo luogo relativamente alla y trova $z = \int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2}$. Per altra parte incominciando le integrazioni dalla x, ed osservando che $\int e^{-y^2 x^2} dx \cos. ax = \frac{\sqrt{\pi}}{2y} e^{\frac{-a^2}{4y^2}}$ ne deduce $z = \sqrt{\pi} \int dy e^{-y^2 - \frac{a^2}{4y^2}}$, e siccome $\int dy e^{-y^2 - \frac{a^2}{4y^2}} = \frac{e^{-a}\sqrt{\pi}}{2}$, conchiude finalmente essere z cioè $\int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} . e^{-a}$.

Niuna osservazione può farsi intorno alla prima integrazione, perchè $\int e^{-y^2(1+x^2)} . 2ydy$ conserva la medesima forma $\frac{1}{1+x^2}$ per tutti i valori della x da zero all' infinito; ma non è lo stesso della seconda integrazione. In questa si ammette che sia $\int e^{-y^2x^2} dx \cos. ax = \frac{\sqrt{\pi}}{2y} e^{-\frac{a^2}{4y^2}}$ per tutti i valori che può prendere la y, tra i quali è compreso anche lo zero, cioè si suppone che sia $\int dx \cos. ax = \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{\pi}}{0}$, lo che in qualunque modo è molto lontano dal vero. Bisognerebbe adunque dimostrare che una tale supposizione non può influire sul risultamento finale, ed alterarne il valore.

Per mostrare con qualch' esempio, che la nostra objezione non è forse priva affatto di fondamento, applichiamo il metodo del Sig. Laplace alla formola $z = \int\int e^{-y^2x} . 2ydydx$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ tanto per la x che per la y. Avremo da una parte $z = \int \frac{dx}{x}$, dall' altra $z = 2 \int \frac{dy}{y}$, lo che porterebbe alla strana conseguenza che fosse $2 \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dx}{x}$, e quindi $\int \frac{dx}{x} = 0$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$. Cessa ogni difficoltà, se le integrazioni si fanno tra i limiti 1 ed $\frac{1}{0}$, perchè i due valori di z, che se ne ottengono, cioè $\int \frac{e^{-x} dx}{x}$ e $2 \int \frac{e^{-y^2} dy}{y}$ sono evidentemente eguali.

Se prendiamo ad esaminare il valore z dell' integrale $\int\int e^{-xy} dxdy \text{sen}. ax$, e primieramente integriamo per rapporto ad y da zero all'infinito, troviamo $z = \int \frac{dx \text{sen}. ax}{x}$, ed integrando relativamente alla x abbiamo (5) $\int e^{-xy} dx \text{sen}.ax = \frac{a}{a^2+y^2}$, e quindi $z = \int \frac{a dy}{a^2+y^2} = \frac{\pi}{2}$. Ma quì apparisce chiaramente, che mentre supponghiamo essere $\frac{a}{a^2+y^2}$ il valore di $\int e^{-xy} dx \text{sen}.\, ax$ anche nel caso di y zero, ammettiamo per dato quello che è in questione, cioè supponghiamo che sia $\int dx \text{sen}.\, ax = \frac{1}{a}$.

13. Il Signor Legendre nelle sue eccellenti Esercitazioni sopra il Calcolo Integrale, dubitando forse anch' esso dell' equazione $\int dx \cos.\, ax = 0$ ha immaginato un ripiego ingegnoso per evitarla. Cercando il valore dell'integrale $\int \frac{dx \cos.\, ax}{1+x^2}$ tra i limiti 0 e $\frac{2i\pi}{a}$, ove i è un numero intero e 2π la circonferenza del circolo che ha per raggio l'unità, egli assegna con tutto il rigore l'equazione differenziale, da cui dipende la risoluzione del problema propostosi. Ma nell'applicazione, che ne fà alla ricerca dello stesso integrale tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$, lascia nello spirito qualche incertezza la supposizione, che l' arco infinito termini precisamente dopo un numero intero di circonferenze, o dopo lo stesso numero intero diviso per a. Poichè sebbene posto i un numero intero infinito e b un numero finito la quantità $2i\pi + b$ possa riguardarsi come eguale a $2i\pi$, non è però sen. $(2i\pi + b) = \text{sen}.2i\pi$ cioè zero, ma $= \text{sen}.b$.

Per toglierci questo dubbio, seguitando le traccie del Sig. Legendre cerchiamo il valore Z dell'integrale $\int \frac{dx \cos.\, ax}{1+x^2}$ preso tra i limiti 0 e $\frac{2i\pi + b}{a}$, ove b è una quantità indipendente da a, e tenendo conto della variazione di a nel secondo limite troveremo

$$\frac{dZ}{da} = -\int \frac{x dx \text{sen}.ax}{1+x^2} - \frac{(2i\pi+b)\cos.b}{a^2+(2i\pi+b)^2}$$

e differenziando di nuovo

$$\frac{d^2Z}{da^2} = -\int \frac{x^2 dx \cos.\, ax}{1+x^2} + \frac{(2i\pi+b)^2 \text{sen}.\, b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]} + \frac{2a(2i\pi+b)\cos.\, b}{[a^2+(2i\pi+b)^2]^2},$$

e quindi

$$o = Z - \frac{d^2 Z}{da^2} - \int dx \cos.\, ax + \frac{(2i\pi+b)^2 \text{sen}.\, b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]} + \frac{2a(2i\pi+b)\cos.\, b}{[a^2+(2i\pi+b)]^2}.$$

Ma siccome $\int dx \cos.\, ax = \frac{\text{sen}.\, ax}{b}$, tra i limiti o e $\frac{2i\pi+b}{a}$ è $= \frac{\text{sen}.\, b}{a}$, avremo finalmente

$$o = Z - \frac{d^2Z}{da^2} - \frac{\text{sen}.\, b}{a} + \frac{(2i\pi+b)^2 \text{sen}.\, b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]} + \frac{2a(2i\pi+b)\cos.\, b}{[a^2+(2i\pi+b)^2]^2}.$$

Quando il numero i è infinito, il termine $\frac{2a(2i\pi+b)\cos.\, b}{[a^2+(2i\pi+b)^2]^2}$ si annulla, il termine $\frac{(2i\pi+b)^2 \text{sen}.\, b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]}$ diviene $= \frac{\text{sen}.\, b}{a}$, e perciò sparisce b dall' equazione, che si riduce a

$$o = Z - \frac{d^2Z}{da^2}.$$

E quì giova avvertire che si giunge al medesimo risultamento, senza che sia necessario di porre l'infinito sotto la forma $2i\pi$ o sotto la forma $2i\pi+b$. Infatti chiamando Z' l'integrale $\int \frac{dx \cos.\, ax}{1+x^2}$ tra i limiti o e $\frac{c}{a}$, ed operando come sopra avremo

$$o = Z' - \frac{d^2Z'}{da^2} - \frac{\text{sen}.\, c}{a} + \frac{c^2 \text{sen}.\, c}{a(a^2+c^2)} + \frac{2ac \cos.\, c}{(a^2+c^2)^2},$$

la qual'equazione, posta c infinita, si cangia in

$$o = Z' - \frac{d^2 Z'}{da^2}.$$

Sembra adunque potersi con ogni sicurezza concludere, che a questa ultima equazione deve soddisfare il valore dell'integrale $\int \frac{dx \cos.\, ax}{1+x^2}$ preso tra i limiti o ed $\frac{\infty}{a}$, ma siamo incerti se sia permesso di sostituire a questi i limiti o ed ∞. Poichè cercandosi direttamente il valore y dell' integrale

$\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}$ tra i limiti o e $2ix+b$ si giunge all' equazione

$$y-\frac{d^2y}{da^2}=\int dx\cos.\,ax=\frac{\mathrm{sen}.a(2ix+b)}{a}$$

ove il termine $\frac{\mathrm{sen}.a(2ix+b)}{a}$ non si annulla per ogni valore di b, comunque sia il numero i finito o infinito, e nè pur divien zero ponendosi col Sig. Legendre $b=0$, se non quando $2a$ è un numero intero.

Se non tenendo conto di questa difficoltà vogliamo dedurre dall' equazione

$$0=y-\frac{d^2y}{da^2}$$

l' integrale $\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}$ da o ad $\frac{1}{0}$, rimane al compimento della ricerca la determinazione delle costanti C e C′ nel valore di $y=Ce^{a}+C'e^{-a}$. Il Sig. Legendre riflette che la prima dev' esser nulla per la natura dell' integrale $\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}$, e la seconda eguale al valore dello stesso integrale nel caso di $a=0$, e ponendo l' unità in luogo di cos.ax e poi integrando trova $C'=\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$; ma questa seconda parte ha bisogno di esser dimostrata. Convien cioè far conoscere il motivo per cui nel caso di $a=0$ si possa prima dell'integrazione porre l'unità invece di cos.ax e dedurne $\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, e nel medesimo caso non sia permesso di porre zero in luogo di sen.ax, e concluderne $\int\frac{xdx\,\mathrm{sen}.ax}{1+x^2}=0$.

Sembrami, se non m' inganno, che alla richiesta dimostrazione possa supplirsi così. Ponendo in luogo di cos.ax il suo sviluppo in serie avremo

$$\int\frac{dx\cos.\,ax}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}\left(1-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^4x^4}{2.3.4}-\&c.\right)$$

Ora facendo le integrazioni da zero ad $\frac{1}{a}$ troviamo

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arc}\left(\text{tang. } \frac{1}{a}\right) = \mathrm{A}$$

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{a} - \mathrm{A}$$

$$\int \frac{x^4dx}{1+x^2} = \int \left(x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{a} + \mathrm{A}$$

&c.

Dunque sostituendo questi valori avremo tra i limiti o ed $\frac{1}{a}$

$$\int \frac{dx\cos.\, ax}{1+x^2} = \mathrm{A} + \mathrm{P}$$

essendo P una quantità che svanisce insieme con a, e perciò posta $a = 0$ sarà tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$

$$\int \frac{dx\cos.\, 0x}{1+x^2} = \mathrm{Arc}\left(\text{tang.} = \frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ma qualora sia riconosciuto legittimo il precedente ragionamento, incontreremo un nuovo imbarazzo applicandolo alla ricerca del valore, che prende tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ l'integrale $\int \frac{xdx\,\text{sen}.\, ax}{1+x^2}$ quando a è zero. Poichè sostituendo a sen.ax il suo sviluppo in serie avremo

$$\int \frac{xdx\,\text{sen}.\, ax}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}\left(ax^2 - \frac{a^3x^4}{2.3} + \frac{a^5x^6}{2.3.4.5} - \&c.\right)$$

e ponendo in luogo di $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$, $\int \frac{x^4dx}{1+x^2}$, &c. i valori precedenti troveremo tra i limiti o ed $\frac{1}{a}$

$$\int \frac{xdx\,\text{sen}.\, ax}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{2.3.3} + \frac{1}{2.3.4.5.5} - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.7} + \&c. + \mathrm{Q}$$

ove Q si annulla con a. Pertanto posta $a = 0$ sarebbe tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$

$$\int \frac{x dx \operatorname{sen}.ax}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{2.3.3} + \frac{1}{2.3.4.5.5} - \&c. = 0{,}946083$$

cioè molto diverso da $\frac{\pi}{2}$, valore comunemente attribuito al medesimo integrale.

Merita di essere osservato, che la stessa serie

$$1 - \frac{1}{2.3.3} + \frac{1}{2.3.4.5.5} - \frac{1}{2\ldots7.7} + \&c.$$

rappresenta ancora l'integrale $\int \frac{dx \operatorname{sen}.ax}{x}$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{a}$, com' è facile verificare. Questo integrale adunque è indipendente da a, e per conseguenza $= \int \frac{dx \operatorname{sen}.x}{x}$ tra i limiti 0 ed 1, e fors' anco $= \int \frac{dx \operatorname{sen}.ox}{x}$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{o}$.

Si trova in simil guisa tra i limiti 0 ed $\frac{1}{a}$

$$\int \frac{1-\cos.ax}{x} dx = \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3.4.4} + \frac{1}{2.3.4.5.6.6} - \&c. = 0{,}239811,$$

ed ha il medesimo valore $\int \frac{1-\cos.x}{x} dx$ tra i limiti 0 ed 1, e pare che sia lo stesso quello dell'integrale $\int \frac{1-\cos.ox}{x} dx$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{o}$.

I dubbj da me accennati ed altri simili, che per brevità tralascio, potranno forse dalla sagacità degli Analisti essere facilmente dileguati. Ma siccome non mi è riescito, per quanto vi abbia meditato, di trovarne per me stesso uno scioglimento, che mi acquietasse pienamente lo spirito, così bramerei che un gran Geometra, come il Sig. Legendre, il quale ha portato tanta accuratezza in altre parti della Matematica, prendesse la cura di schiarir le difficoltà, che presentano alcuni principj ammessi nella teoria importante degl' integrali definiti.

14. Prima di terminar questa Memoria indicherò un nuovo metodo per trovare i valori degl' integrali definiti in principio contemplati, il quale può esser utile in altre circostanze. Ritenute le medesime denominazioni abbiamo

$$\frac{d^2y}{db^2}=\int e^{-bx}.x^{n+1}dx\cos.ax,\ \frac{d^2y}{da^2}=-\int e^{-bx}.x^{n+1}dx\cos.ax$$

e quindi l' equazione

$$\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}=0$$

la quale ha per integrale

$$y=\psi(b+a\sqrt{-1})+\phi(b-a\sqrt{-1}).$$

La determinazione delle funzioni arbitrarie ψ e ϕ dipende dai valori di y e di $\frac{dy}{da}$, quando a è zero. Ora essendosi da noi dimostrato (4) che in questo caso è $y=\Gamma(b)$, e $\frac{dy}{da}=0$, avremo indicando col segno $\psi'(u)$ la funzione $\frac{d.\psi(u)}{du}$

$$\psi(b)+\phi(b)=\Gamma(b)$$

$$\psi'(b)-\phi'(b)=0$$

cioè integrando $\psi(b)-\phi(b)=c$, essendo c una costante indipendente da b. Sarà dunque $\psi(b)=\frac{\Gamma(b)+c}{2}$, $\phi(b)=\frac{\Gamma(b)-c}{2}$, e per conseguenza

$$y=\frac{\Gamma(b+a\sqrt{-1})+\Gamma(b-a\sqrt{-1})}{2}$$

e posto in luogo di $\Gamma(b)$ il suo valore $\frac{\Gamma(1)}{b^n}$ (5)

$$y=\Gamma(1)\frac{(b+a\sqrt{-1})^{-n}+(b+a\sqrt{-1})^{-n}}{2}$$

la qual' espressione col mezzo delle consuete formole inservienti alla riduzione delle quantità immaginarie si trasforma in quella trovata al n.° 5.

15. L' integrale definito $z = \int e^{-bx} \cdot x^{n-1} dx \operatorname{sen.} ax$ conduce alla medesima equazione

$$\frac{d^2 z}{db^2} + \frac{d^2 z}{da^2} = 0$$

e quindi allo stesso integrale

$$z = \psi(b + a\sqrt{-1}) + \phi(b - a\sqrt{-1})$$

ma le funzioni arbitrarie debbono determinarsi diversamente. E siccome nel caso di a zero è (4) $z = 0$, e $\frac{dz}{da} = -\frac{d.\Gamma(b)}{db}$, avremo

$$\psi(b) + \phi(b) = 0$$

$$\sqrt{-1}\,[\psi'(b) - \phi'(b)] = -\frac{d.\Gamma(b)}{db}$$

cioè $\psi(b) - \phi(b) = \frac{c' - \Gamma(b)}{\sqrt{-1}}$, e questa equazione combinata coll' altra $\psi(b) + \phi(b) = 0$ ci darà $\psi(b) = \frac{c' - \Gamma(b)}{2\sqrt{-1}}$, $\phi(b) = \frac{\Gamma(b) - c'}{2\sqrt{-1}}$, e perciò

$$z = \frac{\Gamma(b - a\sqrt{-1}) - \Gamma(b + a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

cioè sostituendovi il valore di $\Gamma(b)$

$$z = \Gamma(1) . \frac{(b - a\sqrt{-1})^{-n} - (b + a\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}$$

la qual formola per la riduzione delle quantità immaginarie diventerà lo stesso valore di z del n.° 5.

16. In questa soluzione non è escluso, come nell' altra, il caso di $n = 0$. Abbiamo allora (6), $\Gamma(b) = \int \frac{e^{-x} dx}{x} - \log. b$, e quindi

$$\int \frac{e^{-bx} \cos. ax - e^{-x}}{x} dx = -\frac{\log. (a + b\sqrt{-1}) + \log. (a - b\sqrt{-1})}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \log. (a^2 + b^2)$$

$$\int \frac{e^{-bx}dx\,\text{sen.}\,ax}{x} = \frac{\log.(b+a\sqrt{-1}) - \log.(b-a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$= \text{Arc}\left(\text{tang.} = \frac{a}{b}\right)$$

com' è noto.

17. Senza ricorrere all' equazioni $\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{da^2} = 0$ e $\frac{d^2z}{db^2} + \frac{d^2z}{da^2} = 0$, potevamo ottener l'intento con la semplice sostituzione alle quantità $\cos. ax$ e $\text{sen.}\, ax$ del loro sviluppo in serie. Infatti così facendo abbiamo trovato (4)

$$y = \Gamma(b) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{d^2\Gamma(b)}{db^2} + \frac{a^4}{2.3.4} \cdot \frac{d^4.\Gamma(b)}{db^4} - \&c.$$
$$z = -a\,\frac{d.\Gamma(b)}{db} + \frac{a^3}{2.3} \cdot \frac{d^3.\Gamma(b)}{db^3} - \frac{a^5}{2.3.4.5} \cdot \frac{d^5\Gamma(b)}{db^5} + \&c.$$

che è quanto dire

$$y = \frac{\Gamma(b-a\sqrt{-1}) + \Gamma(b+a\sqrt{-1})}{2}$$
$$z = \frac{\Gamma(b-a\sqrt{-1}) - \Gamma(b+a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

18. Potremo ancora porre in luogo di $\cos. ax$ e $\text{sen.}\, ax$ i loro valori espressi per l'esponenziali immaginarie, e siccome dopo questa sostituzione y e z diventano

$$y = \frac{1}{2}\int e^{-(b-a\sqrt{-1})x}dx + \frac{1}{2}\int e^{-(b+a\sqrt{-1})x}dx$$
$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int e^{-(b-a\sqrt{-1})x}dx - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int e^{-(b+a\sqrt{-1})x}dx$$

senza altro ragionamento ne dedurremo a colpo d' occhio i resultamenti precedenti. E questa sembra la più semplice soluzione del problema.

19. Più generalmente, qualora tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ si conosca il valore $F(b)$ dell'integrale $\int e^{-bx}.Xdx$, ove X è una funzione di x che non contenga b, se nella funzione $F(b)$ por-

remo in luogo di b prima $b-a\sqrt{-1}$ e poi $b+a\sqrt{-1}$, la semisomma di questi due resultati darà il valore dell' integrale $\int e^{-bx}.Xdx\cos.ax$ da o ad $\frac{1}{0}$, e la loro semidifferenza divisa per $\sqrt{-1}$ somministrerà il valore dell' integrale $\int e^{-bx}.Xdx\text{sen}.ax$ tra i medesimi limiti. È per altro necessaria la condizione, che $\frac{d.F(b)}{db}$ non sia infinita, perchè altrimenti non potremmo dimostrare che annullandosi a, sia $\int e^{-bx}.Xdx\cos.ax=F(b)$, ed $\int e^{-bx}.Xdx\text{sen}.ax=0$.