SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ

DE' PIANI DE' MOMENTI PRINCIPALI E DELLE COPPIE DI FORZE EQUIVALENTI

MEMORIA

DEL SIG. INGEGNER GAETANO GIORGINI

Ricevuta adì 1. *Dicembre* 1827.

PRESENTATA DAL SOCIO

SIG. CAV. GIULIANO FRULLANI

APPROVATA DAL SOCIO

SIG. PROFESSOR GIUSEPPE TRAMONTINI

Per quanto molte belle proprietà de' momenti principali, e delle coppie di forze equivalenti sieno da varii anni conosciute (*a*), l'argomento non sembrandoci ancora del tutto esaurito, offeriamo ai geometri la seguente Memoria, onde essi giudichino se la maggior semplicità colla quale vengono esposte le principali proprietà del piano del minimo momento principale, meriti di essere ammessa ne' trattati speciali di meccanica, e se le cose aggiunte sieno di qualche importanza.

Rappresentino p', p'', p''', p^{iv} etc. le forze applicate ne'

(*a*) Poisson. Mecanique, Paris 1811.
Poinsot. Statique, Paris 1824.
Giorgini. Teoria analitica delle projezioni Lucca 1819.
Bordoni. Giornale di Pavia Tomo 4.° 1821.
Bordoni. Giornale di Pavia Tomo 5.° 1822.

punti x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; x^{iv}, y^{iv}, z^{iv}, etc. di un sistema rigido: m', m'', m''', m^{iv}, etc. i momenti di tali forze. Intendasi inoltre generalmente per p_x, p_y, p_z le tre componenti di una qualsivoglia forza p, parallele ai tre assi coordinati rettangolari: per m_x, m_y, m_z i tre momenti componenti del momento m, perpendicolari ai tre assi indicati, i tre momenti cioè di rotazione della forza p attorno a tali assi. Posto che P sia la massima azione di traslazione ed M il massimo momento di rotazione del sistema (*b*) attorno all'origine delle coordinate, sappiamo che

$$P_z = \Sigma p'_x \ldots, P_y = \Sigma p'_y \ldots, P_z = \Sigma p'_z,$$

$$M_x = \Sigma m'_x \ldots, M_y = \Sigma m'_y \ldots, M_z = \Sigma m'_z.$$

Sappiamo inoltre che trasportando il centro de' momenti nel punto α, β, γ; i nuovi momenti di rotazione attorno a tre assi condotti per questo punto parallelamente a quelli delle coordinate, si hanno dalle formole

$$(1) \ldots\ldots M'_x = M_x - (\gamma P_y - \beta P_z) \ldots, M'_y = M_y - (\alpha P_z - \gamma P_x)$$

$$M'_z = M_z - (\beta P_x - \alpha P_y).$$

Ora è facile riconoscere che le altre proprietà de' momenti principali, e del minimo tra momenti principali esposte ne' trattati col metodo generale de' massimi e minimi divengono apparenti per loro stesse, mediante alcune facilissime trasformazioni di coordinate.

Si supponga effettivamente per asse degli z prescelta una retta parallela alla massima azione di traslazione P: saranno allora

$$P_z = P \ldots, P_y = 0 \ldots, P_x = 0$$

e le accennate formole diverranno

(*b*) Teoria analitica delle projezioni. Titolo VI.

$$M'_x = M_x + \beta P \ldots, M'_y = M_y - \alpha P \ldots, M'_z = M_z$$

e daranno

$$M'^2 = (M_x + \beta P)^2 + (M_y - \alpha P)^2 + M^2_z$$

per l'espressione del momento principale del sistema il di cui centro è nel punto α, β, γ.

Facendo adesso variare di situazione il centro α, β, γ, il momento principale diverrà evidentemente un minimo pei valori di α e β, che danno

$$M_x + \beta P = 0 \ldots, M_y - \alpha P = 0$$

e sarà perciò determinato dalla equazione

$$M'_x = 0 \ldots, M'_y = 0 \ldots, M'_z = M_z = M'$$

onde si possono immediatamente, enunciare tutte le principali proprietà di questo minimo trai momenti principali cioè

1.° Che il momento principale è un minimo per tutti i punti della retta rappresentata dall'equazioni

$$\alpha = \frac{M_y}{P} \ldots, \beta = -\frac{M_x}{P}$$

parallele alla massima azione di traslazione.

2.° Che questa retta è l'asse stesso di rotazione di esso momento.

3.° Che il momento principale è costante per una qualsivoglia retta

$$M_x + \beta P = B \ldots, M_y - \alpha P = A$$

parallela all' asse sopraindicato.

4.° Che il minimo momento principale M' è sempre uguale al momento di rotazione M_z, attorno ad asse parallelo a quello del minimo momento principale condotto per un qualsivoglia centro de' momenti.

Trovato l'asse del minimo momento principale possiamo in questo asse immaginar trasportata l'origine delle coordinate. Nelle formole (1) si dovrà allora, per le dimostrate proprietà, supporre non solo

$$P_x = o \ldots, P_y = o \ldots, P_z = P$$

ma ancora

$$M_x = o \ldots, M_y = o \ldots, M_z = M$$

ed avremo i tre momenti di rotazione attorno a tre assi per un qualsivoglia centro α, β, γ condotti parallelamente a quelli delle coordinate espressi dall'equazioni

$$M'_x = \beta P \ldots, M'_y = -\alpha P \ldots, M'_z = M$$

ed il quadrato del momento principale pel centro α, β, γ sarà conforme a quanto già si sapeva

$$(2) \ldots . M'^2 = (\alpha^2 + \beta^2) P^2 + M^2.$$

L'equazione poi

$$M'_x (x - \alpha) + M'_y (y - \beta) + M'_z (z - \gamma) = o$$

del piano di questo momento principale (c), diverrà

$$(3) \ldots . P\beta x - P\alpha y + Mz = M\gamma$$

e servirà a porre in evidenza alcune singolari proprietà de' piani de' momenti principali.

E primieramente ci proverà che come ciaschedun punto α, β, γ può esser preso per centro di un momento principale del piano del quale essa è l'equazione, così ciaschedun piano dato dalla sua equazione

$$(4) \ldots \ldots z = Ax + By + C$$

può esser preso per quello di un momento principale, avente il suo centro nel punto

$$\alpha = \frac{BM}{P} \ldots, \beta = -\frac{AM}{P} \ldots, \gamma = C,$$

determinato dall'equazioni

(c) Teoria analitica delle projezioni. Titolo V.

$$M'_x = -AM\ldots, M'_y = -BM\ldots, M'_z = M,$$

e però uguale ad $M' = M\sqrt{A^2 + B^2 + 1}$.

Se conseguentemente facciamo variare il piano (4) secondo una legge espressa dall'equazione $f(A, B, C) = 0$, il centro del momento principale varierà col piano preindicato, secondo la legge $f\left(\frac{-P\beta}{M}, \frac{P\alpha}{M}, \gamma\right) = 0$, ossia sopra la superficie rappresentata da questa equazione.

Suppongasi per esempio che il piano (4), si faccia muovere soggetto a passare da un punto fisso α', β', γ' per modo cioè che si abbia l'equazione di condizione

$$\gamma' = A\alpha + B\beta' + C$$

dovrà tralle coordinate α, β, γ del centro corrispondente verificarsi l'equazione

$$P\beta\alpha' - P\alpha'\beta + M\gamma = M\gamma'$$

la quale paragonata coll'equazione generale (3) del piano del momento principale corrispondente al centro α, β, γ ci dimostra che. *Il luogo geometrico de' centri de' momenti principali, i piani de' quali passano per un dato punto, è nel piano del momento principale, avente il suo centro in questo stesso punto dato.*

Similmente se vogliasi che il piano (4) sia tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, avente il suo centro nell'origine delle coordinate dovrà verificarsi la condizione $r^2(1 + A^2 + B^2) = C^2$, e però tralle coordinate α, β, γ del centro corrispondente l'equazione

$$r^2P^2(\alpha^2 + \beta^2) - M^2\gamma^2 = -M^2r^2$$

dalla quale potremo concludere. *Che il luogo geometrico de' centri de' momenti principali i piani de' quali sono tangenti ad una sfera avente il suo centro nell' asse del minimo momento principale, è un iperboloide di rivoluzione attorno al mede-*

simo asse (*d*). Il valore di uno qualsivoglia de' momenti principali preindicati si ricaverà dall' equazione (2), e sarà

$$M' = \frac{M\gamma}{r}.$$

Più generalmente poi se il piano $z = Ax + By + C$ si assoggetta ad esser tangente ad una qualsivoglia superficie di secondo ordine, la relativa condizione trai coefficienti A, B, C sarà di secondo grado, e perciò

Il luogo geometrico de' centri de' momenti principali i piani de' quali sono tangenti ad una superficie del secondo ordine, è esso pure una superficie del secondo ordine.

Sottopongasi adesso il piano (3) del momento principale avente il suo centro nel punto α, β, γ a rimaner parallelo alla retta

$$y = ax + c$$
$$z = bx + d.$$

Avremo la condizione.

$$\beta = a\alpha - \frac{Mb}{P}$$

che rappresenta un piano parallelo alla retta predetta ed all' asse degli z onde potremo concludere

Che il luogo geometrico de' centri de' momenti principali, i piani de' quali sono paralleli ad una data retta è un piano parallelo a questa linea data ed all' asse del minimo momento principale.

Seguitando queste ricerche vogliasi che il piano del momento principale (3) passi per la retta.

$$(5) \; \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} y = ax + c \\ z = bx + d. \end{array} \right.$$

Il centro α, β, γ dovrà in questa supposizione soddisfare alle due condizioni

(*d*) Giorgini Teoria analitica delle superficie di secondo ordine. Lucca 1817.

$$\beta = aa - \frac{Mb}{P},$$

$$\gamma = -\frac{Pc}{M} + d;$$

le quali rappresentano una retta

$$(6) \; \ldots\ldots \begin{cases} y = a'x + c' \\ z = b'x + d', \end{cases} \text{ ove}$$

$$a' = a \ldots, c' = -\frac{M^b}{P} \ldots, b' = -\frac{Pc}{M} \ldots, d' = d.$$

Ma da queste equazioni si ha

$$a = a' \ldots, c = -\frac{Mb'}{P} \ldots, b = -\frac{Pc'}{M} \ldots, d = d'.$$

Dunque le due rette (5) e (6) sono talmente tra loro collegate e reciproche, che la seconda si determina per mezzo della prima, nel modo istesso che la prima per la seconda, dunque

Ad una qualsivoglia retta ne corrisponde sempre una seconda tale che una qualunque delle due è il luogo geometrico de' centri de' momenti principali i piani de' quali passano per l' altre.

Tralle diverse proprietà di queste linee reciproche, merita particolare attenzione la seguente

Ad una qualsivoglia coppia di linee come sopra reciproche corrisponde una coppia di forze equilibranti il sistema, applicate secondo la loro direzione.

E di fatti ricerchiamo direttamente quale deve essere la grandezza di una forza π applicata secondo una retta

$$(5) \; \ldots\ldots\ldots \begin{cases} y = ax + c \\ z = bx + d \end{cases}$$

affinchè il sistema di forze π, p', p'', p''' etc. possa essere equilibrato da una forza unica π', e quali la grandezza e l'equazioni

$$(6) \ldots\ldots \begin{cases} y = a'x + c' \\ z = b'x + d' \end{cases}$$

di questa ultima.

Sappiamo perciò, che espresso per μ il momento della forza π le sue equazioni sono

$$y\pi_x - x\pi_y = \mu_z,$$
$$x\pi_z - z\pi_x = \mu_y,$$
$$z\pi_y - y\pi_z = \mu_x;$$

alle quali dee aggiungersi la condizione

$$(7) \ldots\ldots \pi_x\mu_x + \pi_y\mu_y + \pi_z\mu_z = 0.$$

Avremo adunque, per esprimere che questa forza è applicata secondo la retta (5), l'equazioni

$$(8) \ldots a = \frac{\pi_y}{\pi_x} \ldots, c = \frac{\mu_z}{\pi_x} \ldots, b = \frac{\pi_z}{\pi_x} \ldots, d = -\frac{\mu_y}{\pi_x}, \text{e}$$

$$(9) \ldots\ldots \mu_x + \pi_x(cb - ad) = 0.$$

Ma se vogliamo che il nuovo sistema di forze π, p', p'', p''' ec. sia equilibrato da una unica forza π', della quale rappresenteremo per μ' il momento si dovranno avere l'equazioni

$$(10) \ldots\ldots \pi'_x\mu'_x + \pi'_y\mu'_y + \pi'_z\mu'_z = 0 \quad \text{e}$$

$$(11) \begin{cases} \ldots \pi'_x + \pi_x = 0 \ldots, \pi'_y + \pi_y = 0 \ldots, \pi'_z + \text{P} + \pi_z = 0 \ldots \\ \ldots \mu'_x + \mu_x = 0 \ldots, \mu'_y + \mu_y = 0 \ldots, \mu'_z + \text{M} + \mu_z = 0 \ldots \end{cases}$$

Tra queste le (11) riducono l'antecedente (10) a

$$\pi_x\mu_x + \pi_y\mu_y + (\text{P} + \pi_z)(\text{M} + \mu_z) = 0;$$

condizione che combinata colla (7), diviene

$$(12) \ldots\ldots \text{PM} + \text{M}\pi_z + \text{P}\mu_z = 0.$$

Questa poi, combinata colle equazioni (8), e (9), darà

$$(13)\ldots\begin{cases}\pi_x = -\frac{PM}{Mb+Pc}\ldots,\pi_y = -\frac{PMa}{Mb+Pc}\ldots,\pi_z = -\frac{PMb}{Mb+Pc},\\ \mu_x = \frac{PM(cb-da)}{Mb+Pc}\ldots,\mu_y = \frac{PMd}{Mb+Pc}\ldots,\ \mu_z = \frac{-PMc}{Mb+Pc},\end{cases}$$

e per conseguenza la forza cercata

$$(14)\ \ldots\ldots\ldots\ \pi = \frac{PM\sqrt{(1+a^2+b^2)}}{Mb+Pc}$$

ed il suo momento

$$(15)\ \ldots\ldots\ldots\ \mu = \frac{PM\sqrt{((cb-da)^2+c^2+d^2)}}{Mb+Pc}.$$

La forza come sopra trovata unita alle altre del sistema dato saranno equilibrate da una forza unica π', la grandezza ed il momento della quale si determineranno facilmente pel mezzo dell' equazione (11).

Per averne poi le sue equazioni

$$y = a'x + c'$$
$$z = b'x + d'$$

basterà porre

$$a' = \frac{\pi'_y}{\pi'_x}\ldots,c' = \frac{\mu_z}{\pi'_x}\ldots,b' = \frac{\pi'_z}{\pi'_x}\ldots,d' = -\frac{\mu'_y}{\pi'_x}$$

e quindi combinando questi valori coll' equazioni (11), e cogli altri (13), si avranno

$$(16)\ldots\ldots a' = a\ldots,c' = -\frac{Mb}{P}\ldots,b' = -\frac{Pc}{M}\ldots,d' = d$$

risultati i quali ci provano l' annunziata identità delle linee secondo le quali sono applicate le forze equilibranti colle coppie di linee reciproche.

Resumendoci adunque concluderemo

Che un qualsivoglia sistema di forze applicate ad un sistema rigido di punti (P *essendo il massimo sforzo di traslazione ed* M *il minimo momento principale di rotazione, e supposto prescelto per asse degli* z *l' asse stesso di questo minimo momento principale*) *può essere equilibrato da un indefi-*

nito numero di coppie di forze, ciascheduna delle quali è applicata secondo la direzione di una delle due rette

$$(5) \ldots\ldots \begin{cases} y = ax + c \\ z = bx + d \end{cases} \qquad (6) \ldots\ldots \begin{cases} y = a'x + c' \\ z = b'x + d' \end{cases}$$

rilegate tra loro dall' equazioni

$$(17) \ldots . a = a' \ldots , Mb' = -Pc \ldots , Pc' = -Mb \ldots , d = d';$$

ed uguale rispettivamente a

$$(18) \ldots , \pi = \frac{PM\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}{Mb + Pc} \ldots , \pi' = \frac{PM\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}}{Mb' + Pc'}.$$

I risultamenti ottenuti essendo sufficienti a rappresentarci una qualsivoglia coppia di forze equilibranti, se ne dedurranno facilmente tutte le loro proprietà (*e*). Eccone alcune più rilevanti

Un qualsivoglia piano

$$y = Ax$$

condotto per l'asse del minimo momento principale è incontrato dalle due rette (5), (6) ne' punti

$$(19) \ldots , x = \frac{c}{A-a} \ldots , y = \frac{Ac}{A-a} \ldots , z = \frac{bc + d(A-a)}{A-a}, \text{ ed}$$

$$(20) \ldots , x = \frac{-Mb}{P(A-a)} \ldots , y = \frac{-AMb}{P(A-a)} \ldots , z = \frac{bc + d(A-a)}{A-a}$$

posti alla medesima altezza z sopra il piano degli x, y. Dunque le due forze π e π' si possono considerare come applicate ne' punti (19), (20) di una retta che si appoggia sull' asse del minimo momento principale, gli è perpendicolare ed è rappresentata dall' equazioni

$$(21) \ldots\ldots \begin{cases} y = Ax \\ z = \frac{bc + d(A-a)}{A-a}. \end{cases}$$

Ciò posto osserviamo che i valori (18) di π, π', e quelli (19), e (20) delle coordinate x, y de' loro punti di applicazione sono indipendenti dal valore di d, e che però

(*e*) Bordoni. Giornale di Pavia Tomo 4.

Le due forze equilibranti un sistema si possono senza alterare l' equilibrio trasportare parallelamente a se stesse, purchè i loro punti di applicazione si trasportino essi pure di una medesima quantità parallelamente all' asse del minimo momento principale.

Ritornando alla retta (21), che unisce i due punti di applicazione delle due forze equilibranti egli è chiaro che, prendendo il piano $y = Ax$ perpendicolare al piano $y = ax$ che è parallelo alle due rette reciproche, essa diverrà

$$(22) \;\ldots\ldots \begin{cases} \ldots\ldots y = -\frac{1}{a}\, x \\ \ldots\ldots z = \frac{d(1+a^2)-cba}{1+a^2} \end{cases}$$

poichè si dovrà fare $A = -\frac{1}{a}$, ed in questo caso sarà quella sopra la quale si misura la minima distanza delle due rette reciproche.

I punti di applicazione delle due forze all' estremità di questa minima distanza saranno dati dalle coordinate

$$x = \frac{-ca}{1+a^2} \;\ldots,\; y = \frac{c}{1+a^2} \;\ldots,\; z = \frac{d(1+a^2)-cba}{1+a^2}$$

sopra l' una, ed

$$x = \frac{Mba}{P(1+a^2)} \;\ldots,\; y = \frac{-Mb}{1+a^2} \;\ldots\ldots,\; z = \frac{d(1+a^2)-cba}{1+a^2}$$

sopra l' altra; di maniera che si avranno facilmente

$$L = \frac{Pc+Mb}{P\sqrt{(1+a^2)}}$$

per l' espressione della minima distanza delle due forze ed

$$l = \frac{c}{\sqrt{(1+a^2)}} \;\ldots\ldots,\; l' = \frac{Mh}{P\sqrt{(1+a^2)}}$$

per le parti di questa minima distanza comprese tra ciascheduna delle forze equilibranti, e l' asse del minimo momento principale.

Prendiamo adesso le formole note

$$\text{sen.}\ \overline{\pi\pi'} = \frac{\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2)}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}},$$

$$\text{sen.}\overline{\pi.\mathrm{P}} = \text{sen.}\ \overline{\pi z} = \frac{\sqrt{(1+a^2)}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},$$

$$\text{sen.}\overline{\pi'\mathrm{P}} = \text{sen.}\ \overline{\pi' z} = \frac{\sqrt{(1+a'^2)}}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}},$$

servendoci de' valori (17) di a', b', c', d', e delle espressioni

$$\sqrt{1+a^2+b^2} = \frac{\pi(\mathrm{M}b+\mathrm{P}c)}{\mathrm{M}} \ldots, \sqrt{1+a'^2+b'^2} = \frac{\pi'(\mathrm{M}b+\mathrm{P}c)}{\mathrm{M}}$$

ricavate dall' equazioni (18) troveremo

$$\text{sen.}\ \overline{\pi.\pi'} = \frac{\mathrm{P}^2\mathrm{M}\sqrt{(1+a^2)}}{\pi\pi'(\mathrm{M}b+\mathrm{P}c)} \ \ldots, \ \text{sen.}\ \overline{\pi.\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{PM}\sqrt{(1+a^2)}}{\pi(\mathrm{M}b+\mathrm{P}c)}$$

$$\ldots\ldots\ \text{sen.}\ \overline{\pi'\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{PM}\sqrt{(1+a^2)}}{\pi'(\mathrm{M}b+\mathrm{P}c)}$$

dalle quali risulta la proporzione

$$\mathrm{P} : \pi : \pi' :: \text{sen.}\overline{\pi.\pi'} : \text{sen.}\overline{\pi'.\mathrm{P}} : \text{sen.}\overline{\pi.\mathrm{P}},$$

e l'equazione

$$\mathrm{L}\,\pi\pi'\ \text{sen.}\ \overline{\pi.\pi'} = \mathrm{PM}.$$

La quale ultima equazione significa che

La solidità della piramide triangolare i di cui vertici sono le quattro estremità delle due forze equilibranti è costante per tutte le diverse coppie di tali forze.

E di fatti egli è facile vedere che il primo membro della mentovata equazione rappresenti il sestuplo di essa piramide.