SOPRA LA RIDUZIONE
DI ALCUNE TRASCENDENTI
MEMORIA
DEL CAVALIERE GIULIANO FRULLANI.

Ricevuta adì 1. *Ottobre* 1830.

1. Rappresenti Fcos.z una funzione qualunque *dispari* di cos.z; tale in conseguenza che essa muti segno allora quando cos.z diviene —cos.z; cosicchè si abbia Fcos.z=—F(—cos.z.) Sia inoltre i un numero intero e pari. Ciò premesso la formola integrale

$$\int z^i dz\, \mathrm{F}\cos.z$$

estesa tra i limiti $z=0$, $z=\pi$, ove π rappresenta il rapporto tra la periferia circolare e il diametro, ammetterà alcune riduzioni che in qualche caso potrà essere utile di avere presenti, e che brevemente andrò esponendo.

Rappresenterò col segno y_i la formola di cui si tratta. Nè occorrerà che io richiami alla mente dei miei lettori i limiti dell'integrale con adoperare il segno $\int_0^\pi$; poichè una volta per tutte mi basterà il dire che le formole integrali che si incontreranno nel corso di questa memoria sono tutte assunte tra i limiti citati.

2. Ammesse tali convenzioni, noi avremo

$$y_i = \int z^i dz.\, \mathrm{F}\cos.z$$

se in luogo di z si sostituisca $\pi-z$, sarà senza che i limiti vengano alterati

$$y_i=\int(\pi-z)^i dz\mathrm{F}-\cos.z.$$

Ma poichè $\mathrm{F}-\cos.z=-\mathrm{F}\cos.z$ avremo pure

$$y_i=-\int(\pi-z)^i dz\mathrm{F}\cos.z$$

Ora risolvendo il binomio $(\pi-z)^i$, e dinotando col segno y_{i-n} l'integrale $\int z^{i-n} dz\,\mathrm{F}\cos.z$, noi otterremo, rammentando che il numero intero i è pari,

$$2y_i=i\pi y_{i-1}-\frac{i(i-1)}{2}\pi^2 y_{i-2}+\frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}\pi^3 y_{i-3}-\text{ec.}$$

E parimente

$$2y_{i-2}=(i-2)\pi y_{i-3}-\frac{(i-2)(i-3)}{2}\pi^2 y_{i-4}+\frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3}\pi^3 y_{i-5}-\text{ec.}$$

$$2y_{i-4}=(i-4)\pi y_{i-5}-\frac{(i-4)(i-5)}{2}\pi^2 y_{i-6}+\frac{(i-4)(i-5)(i-6)}{2.3}\pi^3 y_{i-7}-\text{ec.}$$

$$2y_{i-6}=(i-6)\pi y_{i-7}-\frac{(i-6)(i-7)}{2}\pi^2 y_{i-8}+\frac{(i-6)(i-7)(i-8)}{2.3}\pi^3 y_{i-9}-\text{ec.}$$

$$\vdots$$

$$2y_2=2\pi y_1.$$

Attualmente moltiplichiamo la seconda di queste equazioni per $i(i-1)\pi^2\lambda$; la terza per $i(i-1)(i-2)(i-3)\pi^4\lambda'$; la quarta per $i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)\pi^6\lambda''$, e così di seguito: essendo λ, λ', λ'' ec. coefficienti arbitrarj, si otterrà, sommando tutte le precedenti equazioni così moltiplicate:

$$0=2y_i - i\pi y_{i-1} - i(i-1)(i-2)\pi^3\left(\frac{1}{2.3}+\lambda\right)y_{i-3}$$

$$-i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)\pi^5\left(\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{\lambda}{2.3}+\lambda'\right)y_{i-5}$$

$$-(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)\pi^7\left(\frac{1}{2.3.4.5.6.7}+\frac{\lambda}{2.3.4.5}+\frac{\lambda'}{2.3}+\lambda''\right)y_{i-7}$$

$$(1)\qquad -\text{ec.}$$

$$+i(i-1)\pi^2\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)y_{i-2}$$

$$+i(i-1)(i-2)(i-3)\pi^4\left(\frac{1}{2.3.4}+\frac{\lambda}{2}+2\lambda'\right)y_{i-4}$$

$$+i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)\pi^6\left(\frac{1}{2.3.4.5.6}+\frac{\lambda}{2.3.4}+\frac{\lambda'}{2}+2\lambda''\right)y_{i-6}$$

$$+\text{ ec.}$$

Abbiamo supposto i numero pari: è dunque manifesto che le quantità $\lambda, \lambda', \lambda''$ ec. saranno $\frac{i}{2}-1$ di numero; cosicchè la serie di esse si estenderà sino a $\lambda^{\left(\frac{i}{2}-2\right)}$.

3. La precedente equazione (1) rappresenterà la funzione y_i, data per mezzo delle $i-1$ funzioni $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3} \ldots y_1$; delle quali potremo eliminarne $\frac{i}{2}-1$ convenientemente determinando le quantità $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots \lambda^{\left(\frac{i}{2}-2\right)}$, meno per altro la funzione y_{i-1} la quale non può eliminarsi perchè non è affetta da nessuna di quelle arbitrarie.

Così per esempio osserveremo che nella serie

$$y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3} \ldots\ldots y_1$$

ove i è numero pari, li termini collocati in posto pari sono $\frac{i}{2}-1$ di numero; noi potremo dunque eliminare tutti questi termini; ed in tal caso la funzione y_i resterà espressa linearmente nella equazione precedente (1) per mezzo delle quantità

$$y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}, \ldots . y_1.$$

4. Per eseguire questa eliminazione è chiaro che noi dovremo determinare le arbitrarie λ, λ', λ''........$\lambda^{\left(\frac{i}{2}-2\right)}$ per mezzo delle equazioni seguenti:

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} &2\lambda+\frac{1}{2}=0 \\ &2\lambda'+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2.3.4}=0 \\ &2\lambda''+\frac{\lambda'}{2}+\frac{\lambda}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5.6}=0 \\ &2\lambda'''+\frac{\lambda''}{2}+\frac{\lambda'}{2.3.4}+\frac{\lambda}{2.3.4.5.6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}=0 \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

Ammesse le quali rimarrà y_i espresso dalla equazione

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} 2y_i = {} & i\pi y_{i-1} + i(i-1)(i-2)a\pi^3 y_{i-3} \\ & + i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)a'\pi^5 y_{i-5} + \text{ec.} \\ & + i(i-1)(i-2).....(i-2h)\pi^{2h+1} a^{(h-1)} y_{i-2h-1} + \text{ec.} \end{aligned}$$

purchè si abbia

$$a = \lambda + \frac{1}{2.3}$$

$$a' = \lambda' + \frac{\lambda}{2.3} + \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$\text{(B)} \qquad a'' = \lambda'' + \frac{\lambda'}{2.3} + \frac{\lambda}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$

$$\vdots$$

$$a^{(h-1)} = \lambda^{(h-1)} + \frac{\lambda^{(h-2)}}{2.3} + \frac{\lambda^{(h-3)}}{2.3.4.5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2.3.4\ldots(2h+1)}$$

ec.

5. Tutto dunque consisterà nella risoluzione delle equazioni (A) e nel calcolo delle quantità a, a', a'', ec. date dalle equazioni (B).

Per tale oggetto è facile il convincersi che ritenute le equazioni (A) sussisterà pure la equazione

$$\frac{1 - \lambda x - \lambda' x^2 - \lambda'' x^3 - \lambda''' x^4 - \text{ec.}}{1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \lambda''' x^4 + \text{ec.}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3.4} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

ove x rappresenta una variabile qualunque:

Or supponendo

$$1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \lambda''' x^4 + \text{ec.} = fx$$

ed osservando che

$$\frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2.3.4} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

è manifesto che la precedente equazione diverrà

$$\frac{2 - fx}{fx} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

d' onde trarremo:

$$fx = \frac{4}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)}$$

e ne inferiremo che le quantità $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots\ldots$ ec. sono i coefficienti delle successive potenze di x nello sviluppo della funzione

$$\frac{4}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)^2}$$

cosicchè si avrà

$$\lambda^{(n)} = \frac{4}{2.3.4\ldots(n+1)dx^{n+1}}\, d^{n+1} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)^2}$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni.

Per determinare i valori di a, a', a'' ec. dati dalle equazioni (B), noi osserveremo che in virtù di queste ed essendo x una variabile qualunque, sussisterà pure la equazione

$$\frac{1+ax+a'x^2+a''x^3+a'''x^4+\text{ec.}}{1+\lambda x+\lambda' x^2+\lambda'' x^3+\lambda''' x^4+\text{ec.}} = 1 + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2.3.4.5} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6.7.} + \text{ec.}$$

Or noi abbiamo

$$1+\lambda x+\lambda' x^2+\lambda'' x^3+\lambda''' x^4+\text{ec.} = \frac{4}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)^2}$$

e si ha non meno

$$1 + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2.3.4.5} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6.7.} + \text{ec.} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

quindi concluderemo

$$1+ax+a'x^2+a''x^3+a'''x^4+\text{ec.} = \frac{2\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}}$$

E pertanto

$$a^{(n)} = \frac{2}{2.3.4\ldots(n+1)dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n+1}\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}}$$

oppure

$$a^{(n)} = \frac{8}{2.3.4\ldots(n+1)dx^{n+2}}\, d^{n+2} \log.\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)$$

purchè si faccia $x=0$ dopo le differenziazioni.

Or dalla decomposizione nei suoi infiniti fattori della funzione esponenziale

$$e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}$$

noi abbiamo:

$$\log.\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right) = \log.2 + \frac{S_2\, x}{\pi^2} + \frac{S_4\, x^2}{2\pi^4}$$

$$+ \frac{S_6\, x^3}{3\pi^6} - \text{ec.}\ldots\ldots \pm \frac{S_{2n+4}\, x^{n+2}}{(n+2)\pi^{2n+4}} \mp \text{ec.}$$

essendo

$$S_{2m} = 1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \text{ec.}$$

ove m è un numero intero e positivo. Pertanto

$$a^{(n)} = \pm \frac{8}{\pi^{2n+4}} \cdot S_{2n+4}$$

ove il segno superiore conviene al caso di n dispari, e l' inferiore al caso di n pari.

Denotiamo attualmente con i segni $B_1, B_3, B_5 \ldots\ldots B_{2n+3}$ ec. la serie dei numeri di Bernoulli. Noi avremo, come è noto dagli elementi di algebra

$$S_{2n+4} = \frac{2^{2n+4}-1}{2} \; \frac{\pi^{2n+4} \; B_{2n+3}}{1.2.3\ldots\ldots(2n+4)}$$

onde sostituendo nel valore di $a^{(n)}$ otterremo finalmente

$$a^{(n)} = \pm \frac{4(2^{2n+4}-1)\,B_{2n+3}}{2.3.4\ldots\ldots(2n+4)}$$

Nè questa espressione di $a^{(n)}$ potrà lasciare da desiderare quanto alla generalità, perchè il termine generale dei numeri di Bernoulli è analiticamente determinato in funzione del suo indice.

6. Riprendiamo attualmente il valore di y_i dato nel precedente articolo 4 dalla equazione (2). In esso potremo sostituire in luogo di a, a', a'', ec. i loro valori dedotti dalla generale loro espressione: e ciò facendo otterremo:

$$2y_i = \frac{i}{2} . 4(2^2-1)B_1 \pi y_{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4} 4(2^4-1)B_3 \pi^3 y_{i-3}$$

$$+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6} 4(2^6-1)B_5 \pi^5 y_{i-5}$$

(3) $$- \text{ec.}$$

$$\pm \frac{i(i-1)(i-2)\ldots\ldots(i-2h)}{2.3.4\ldots(2h+2)} 4(2^{2h+2}-1)B_{2h+1} \pi^{2h+1} y_{i-2h-1}$$

$$\mp \text{ec.} \ldots\ldots \pm 4(2^i-1)B_{i-1} \pi^{i-1} y_1$$

nella quale espressione il termine generale che vi è compreso avrà il segno superiore quando h è pari, e l'inferiore quando è dispari: e l'ultimo termine di essa dovrà essere preceduto dal segno positivo quando $\frac{i}{2}$ sia dispari, e dal negativo nel caso contrario.

Si noterà che nella espressione di $2y_i$ in luogo del primo termine che sarebbe $i\pi y_{i-1}$ ho scritto il suo equivalente $\frac{i}{2} 4(2^2 - 1) B_1 \pi y_{i-1}$, e ciò per meglio rappresentare la legge dei termini.

La equazione (3) potrebbe scriversi in ordine inverso: e ciò facendo si troverà:

$$
\begin{aligned}
2y_i = \pm 4 \Big[& \pi^{i-1}(2^i - 1)B_{i-1}\, y_1 - \frac{i(i-1)}{2.3}\pi^{i-3}(2^{i-2} - 1)B_{i-3}\, y_3 \\
& + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4.5}\pi^{i-5}(2^{i-4} - 1)B_{i-5}\, y_5 \\
& - \text{ec.} \\
& \pm \frac{i(i-1)\ldots(i-2n+3)}{2.3\ldots(2n-1)}\pi^{i-2n+1}(2^{i-2n+2} - 1)B_{i-2n+1}\, y_{2n-1} \\
& \mp \text{ec.} \ldots\ldots \pm \frac{i\pi}{2}(2^2 - 1)B_1\, y_{i-1} \Big].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Nella quale equazione il coefficiente di $B_{i-2n+1}\, y_{2n-1}$ avrà il segno superiore quando sia n dispari, e l'inferiore quando sia pari; mentre poi degli altri doppj segni dovranno preferirsi i superiori quando $\frac{i}{2}$ sia dispari, e gli inferiori quando $\frac{i}{2}$ sia pari. Tale sarà dunque il valore dell' integrale

$$2y_i = 2\int z^i dz F\cos.z$$

esteso tra i limiti $z=0$, $z=\pi$ purchè sia i un numero intero e pari; ed $F\cos.z$ una funzione dispari di $\cos.z$,

7. Abbiamo, come è noto,

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_3=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{1}{42},\ B_7=\frac{1}{30};\ B_9=\frac{5}{66},\ B_{11}=\frac{691}{2730},\ \text{ec.}$$

Se pertanto nel valore generale di y_i faremo successivamente $i=0$, 2, 4, 6, ec. troveremo le riduzioni seguenti

$$\int dzF\cos.z=0$$

$$\int z^2dzF\cos.z=\pi\int zdzF\cos.z$$

$$\int z^4dzF\cos.z=2\pi\int z^3dzF\cos.z-\pi^3\int zdzF\cos.z$$

$$\int z^6dzF\cos.z=3\pi\int z^5dzF\cos.z-5\pi^3\int z^3dzF\cos.z+3\pi^5\int zdzF\cos.z$$

ec.

8. È notabile che la generale equazione (3) può molto semplicemente rappresentarsi per mezzo di una equazione simbolica.

Infatti abbiamo la equazione identica

$$\frac{2-(1+k\sqrt{-1})^{i+1}-(1-k\sqrt{-1})^{i+1}}{2k(i+1)}=\frac{ik}{2}$$

$$-\frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4}k^3+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6}k^5-\text{ec.}$$

Indi è manifesto che la equazione (3) equivarrà alla seguente:

$$(5)\qquad 0=y_i+\frac{(1+\pi k\sqrt{-1})^{i+1}+(1-\pi k\sqrt{-1})^{i+1}-2}{\pi k(i+1)}$$

purchè nello sviluppo per le potenze di k si ponga

$$(2^{2h+2}-1)B_{2h+1}\,y_{i-2h-1}\quad\text{in luogo}$$

della potenza k^{2h+1}, essendo B_{2h+1} il numero di Bernoulli rispondente all'indice $2h+1$.

9. Riprendiamo la generale equazione (1) riportata nel precedente articolo 2.

In quella abbiamo sino ad ora determinate le arbitrarie λ, λ', λ'' ec. in modo da esprimere la trascendente y_i per mezzo delle analoghe trascendenti $y_{i-1}, y_{i-3}, y_{i-5} \ldots\ldots y_i$. Potremo invece disporre di quelle arbitrarie in modo che la trascendente y_i venga determinata per mezzo delle trascendenti

$$y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-4} \ldots\ldots y_2;$$

ed otterremo ciò facilmente purchè si faccia

$$
\text{(C)} \quad
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2.3} + \lambda \\
0 &= \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{\lambda}{2.3} + \lambda' \\
0 &= \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{\lambda}{2.3.4.5} + \frac{\lambda'}{2.3} + \lambda''
\end{aligned}
$$

ec.

In virtù delle quali noi conseguiremo:

$$2y_i = i\pi y_{i-1} - i(i-1)\pi^2 b y_{i-2} - i(i-1)(i-2(i-3)\pi^4 b' y_{i-4} - \text{ec.}$$

purchè si abbia

$$
\text{(D)} \quad
\begin{aligned}
b &= \frac{1}{2} + 2\lambda \\
b' &= \frac{1}{2.3.4} + \frac{\lambda}{2} + 2\lambda' \\
b'' &= \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{\lambda}{2.3.4} + \frac{\lambda'}{2} + 2\lambda''
\end{aligned}
$$

ec.

Per risolvere le equazioni (C), e determinare le quantità

λ, λ', λ'' ec. noi csserveremo che sopra quelle equazioni stesse si ricadrà quando per risolvere in serie secondo le potenze della variabile x la funzione $\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}$ si ponga

$$\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}} = 1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \lambda''' x^4 + \text{ec.}$$

onde sarà

$$\lambda^{(n)} = \frac{2}{2.3.4\ldots(n+1)dx^{n+1}} \, d^{n+1} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}$$

purchè si faccia $x=0$ dopo le differenziazioni.

Parimente risolveremo le equazioni (D) osservando che in virtù di esse sussisterà indipendentemente da x la equazione

$$\frac{1 + bx + b'x^2 + b''x^3 + b'''x^4 + \text{ec.} - \lambda x - \lambda' x^2 - \lambda'' x^3 - \text{ec.}}{1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \text{ec.}} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

$$\phi x = 1 + bx + b'x^2 + b''x^3 + \text{ec.}$$

Facciamo

$$\text{F}x = 1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \text{ec.},$$

e la precedente equazione ci darà

$$\phi x = \frac{(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})}{2} \text{F}x + \text{F}x - 1.$$

Ma si ha $\text{F}x = \frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}$ quindi pure sarà riducendo,

$$\phi x = \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{x} - 1$$

Una formola conosciuta (*) ci dà

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}+e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}-e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}}.\sqrt{x}-1=1+\frac{2B_1\,x}{2}-\frac{2B_3\,x^2}{2.3.4}+\frac{2B_5x^3}{2.3.4.5.6}-\text{ec.}$$

ove B_1, B_3, B_5 ec. sono i numeri di Bernoulli. Tale dunque sarà lo sviluppo di ϕx, dal quale, confrontato con l'altra sua espressione

$$\phi x = 1 + bx + b'x^2 + b''x^3 + \text{ec.}$$

si deduce

$$b^{(n)} = \pm \frac{2B_{2n+1}}{2.3.4..(2n+2)}$$

prendendo il segno superiore se n è pari, e l'inferiore se è dispari:

Con queste determinazioni si avrà

$$(6)\qquad 2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{2i(i-1)}{2}\pi^2 B_1\, y_{i-2} + \frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4}\pi^4 B_3\, y_{i-4}$$

$$- \frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)}{2.3.4.5.6}\pi^6 B_5\, y_{i-6}$$

$$+ \text{ ec.}$$

$$\pm \frac{2i(i-1)(i-2)\ldots(i-2n-1)}{2.3.4\ldots(2n+2)}\,\pi^{2n+2}\, B_{2n+1}\, y_{i-2n-2}$$

$$\mp \text{ ec.} \ldots\ldots \pm \frac{2i(i-1)}{2}\,\pi^{i-2}\, B_{i-3}\, y_2$$

(*) Legendre, Exercices de Calcul Intégral 4.me partie art. 64 et suiv.

ove il segno superiore avrà luogo nel termine generale se n è dispari, e l'inferiore se n pari: e così pure nell'ultimo termine si preferirà il superiore o l'inferior segno secondo che sarà dispari o pari il numero $\frac{i}{2}$.

Pertanto se daremo ad i li particolari valori 0, 2, 4, ec. ed in luogo di y_i riprenderemo la formola integrale che ne è rappresentata, si avrà

$$\int dz \mathrm{F}\cos z = 0$$

$$\int z^2 dz \mathrm{F}\cos.z = \pi \int z dz \mathrm{F}\cos.z$$

$$\int z^4 dz \mathrm{F}\cos.z = 2\pi \int z^3 dz \mathrm{F}\cos.z - \pi^2 \int z^2 dz \mathrm{F}\cos.z$$

$$\int z^6 dz \mathrm{F}\cos.z = 3\pi \int z^5 dz \mathrm{F}\cos.z - \frac{5\pi^2}{2} \int z^4 dz \mathrm{F}\cos.z + \frac{\pi^4}{2} \int z^2 dz \mathrm{F}\cos.z$$

ec.

10. Anco la equazione (6) potrà rappresentarsi col mezzo di una equazione simbolica.

Di fatti abbiamo, svolgendo in serie per le potenze di k

$$\frac{2-(1+k\sqrt{-1})^i-(1-k\sqrt{-1})^i}{2k} = \frac{i(i-1)}{2} k - \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4} k^3 + \text{ec.}$$

Indi inferiremo:

$$(7) \qquad 2y_i = i\pi y_{i-1} + \frac{(1+\pi k\sqrt{-1})^i+(1-\pi k\sqrt{-1})^i-2}{k}$$

purchè nello sviluppo per le potenze di k si ponga

$$\mathrm{B}_{2h+1} y_{i-2h-2} \text{ in luogo di } k^{2h+1}.$$

11. Abbiamo sino ad ora supposto che nella formola integrale

$$y_i = \int z^i dz \mathrm{F}\cos.z$$

sia i un numero pari, ed $\mathrm{F}\cos.z$ una funzione di $\cos.z$ che non muti segno allora quando $\cos.z$ divenga $-\cos.z$.

Analoghe riduzioni varranno se nella formula

$$\int z^i dz\ \mathrm{F}\cos.z$$

sia i un numero dispari, conchè per altro $\mathrm{F}\cos.z$ sia funzione pari di $\cos.z$; ovvero tale che il suo segno ed il suo valore non muti se in luogo di $\cos.z$ si ponga $-\cos.z$.

Sia difatti in questa ipotesi

$$y_i = \int z^i dz\, \mathrm{F}\cos.z.$$

Se in luogo di z si sostituisca $\pi - z$, avremo:

$$y_i = -\int (z-\pi)^i dz \mathrm{F}\cos.z.$$

E dinotando al solito col segno y_{i-n} la funzione $\int z^{i-n} dz \mathrm{F}\cos.z$, noi otterremo, svolgendo il binomio $(z-\pi)^i$,

$$2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{i(i-1)}{2}\pi^2 y_{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}\pi^3 y_{i-3} - \text{ec.}$$

In questa equazione successivamente mutando i in $i-2$, $i-4$, $i-6$, ec. otterremo altrettante equazioni analoghe: e se alla prima aggiungasi la seconda moltiplicata per $i(i-1)\pi^2\lambda$; la terza moltiplicata per $i(i-1)(i-2)(i-3)\pi^4\lambda'$,
la quarta moltiplicata per

$$i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)\pi^6\lambda'',$$

e così di seguito, ove λ, λ', λ'' ec. sono quantità indeterminate, noi otterremo una equazione della stessa forma di quella riportata nell' articolo 2; dalla quale se vorremo eliminare le trascendenti

$$y_{i-2}, y_{i-4}, \ldots \ldots y_1$$

non dovremo che ripetere i calcoli dell' articolo 4; e troveremo quindi

$$(8)\quad 2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4}\pi^3.4(2^4-1)\mathrm{B}_3 y_{i-3}$$

$$+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)\pi^5}{2.3.4.5.6}.4(2^6-1)\mathrm{B}_5 y_{i-5} - \text{ec.}$$

$$\pm\frac{i(i-1)(i-2)\ldots\ldots(i-2n)}{2.3.4\ldots\ldots(2n+2)}\pi^{2n+1}.4(2^{2n+2}-1)\mathrm{B}_{2n+1} y_{i-2n-1} \mp \text{ec.}$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{\pi^i}{i+1}4(2^{i+1}-1)\mathrm{B}_i y_0$$

notando che il termine generale compreso in questa formula avrà il segno superiore quando sia n pari; l' inferiore quando sia dispari, e l' ultimo termine sarà preceduto dal segno positivo se $\frac{\pi}{2}$ sia pari, e dal negativo nel caso contrario.

Indi si dedurrà, facendo successivamente $i=1, 3, 5$, ec.

$$\int z dz \, \mathrm{F}\cos.z = z\frac{2}{\pi}\int dz \mathrm{F}\cos.z$$

$$\int z^3 dz \mathrm{F}\cos.z = \frac{3\pi}{2}\int z^2 dz \mathrm{F}\cos.z - \frac{\pi^3}{4}\int dz \mathrm{F}\cos.z$$

$$\int z^5 dz.\mathrm{F}\cos.z = \frac{5\pi}{2}\int z^4 dz \mathrm{F}\cos.z - \frac{5\pi^3}{2}\int z^2 dz \mathrm{F}\cos.z + \frac{\pi^5}{2}\int dz \mathrm{F}\cos.z$$

ec.

12. È manifesto che anco nel caso che ora ci trattiene potremo rappresentare la trascendente y_i per le trascendenti

$$y_{i-1}\,,\, y_{i-2}\,,\, y_{i-4}\,, \ldots\ldots y_1\,;$$

ed indi si troverà:

$$\begin{aligned}
& 2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{2i(i-1)}{2}\pi^2 B_1 y_{i-2} + \frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4}\pi^4 B_3 y_{i-4} \\
(9) \qquad & - \frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)}{2.3.4.5.6}\pi^6 B_5 y_{i-6} + \text{ec.} \\
& \pm \frac{2i(i-1)\ldots.(i-2n-1)}{2.3\ldots.(2n+2)}\pi^{2n+2} B_{2n+1} y_{i-2n-2} \mp \ldots \pm 2i\pi^{i-1} B_{i-2} y_1
\end{aligned}$$

ove nel termine generale si prenderà il segno negativo se n è pari, ed il positivo se è dispari; valendo per l' ultimo termine la regola stessa secondo che sia $\frac{i-1}{2}$ dispari, ovvero $\frac{i-1}{2}$ pari.

E quì pure noteremo che le equazioni (8) (9) possono rappresentarsi per mezzo di equazioni simboliche; valendo per la prima di esse la forma stessa segnata (5) nell' articolo 8; e per la seconda la forma segnata (7) nell' articolo 10.

13. Oltre la trascendente $\int z^i dz F\cos.z$ che nei casi precedentemente distinti ammette le esposte riduzioni, una infinità di altre trascendenti possono come quella ridursi. Così per esempio è manifesto che la formola integrale $\int z^i dz F\sin.z$ estesa tra i soliti limiti, e dove i sia un numero dispari, può soggettarsi alle trasformazioni riportate nei precedenti articoli 10, 11; e che dalle stesse riduzioni può dipendere la più generale formola

$$\int z^i dz F(\cos.z,\ \sin.z)$$

purchè la funzione F(cos$z$, sin$z$) non muti segno nè valore quando in luogo di cos.z si ponga $-$cos.z

Per un caso semplicissimo consideriamo la formola int grale

$$\int z^{i} dz \sin.z(a+b\cos.z^{2n})^{m}$$

presa tra i soliti limiti; e dove sia i numero intero e dispari; n numero intero comunque; ed a, b, m quali si siano costanti.

A questa formula potremo applicare le riduzioni dell'articolo 11; e così nel particolare caso di $i=1$ si avrà:

$$\int z dz \sin.z(a+b\cos.z^{2n})^{m} = \frac{\pi}{2}\int dz \sin.z(a+b\cos.z^{2n})^{m}.$$

Ponghiamo

$$y = \int dz \sin.z(a+b\cos.z^{2n})^{m},$$

si avrà, integrando per parti,

$$y = -\cos.z\,(a+b\cos.z^{2n})^{m}$$
$$-\,2mnb\int dz\cos.z^{2n}\sin.z(a+b\cos.z^{2n})^{m-1}$$

ovvero:

$$y = 2(a+b)^{m} - 2mnb\int dz\cos.z^{2n}\sin.z(a+b\cos.z^{2n})^{m-1}$$

ma abbiamo pure:

$$2nb\frac{dy}{db} = 2mnb\int dz\cos.z^{2n}\sin.z(a+b\cos.z^{2n})^{m-1}$$

onde dedurremo:

$$y + 2nb\frac{dy}{db} = 2(a+b)^m.$$

e quindi

$$yb^{\frac{1}{2n}} = \mathrm{C} + \frac{1}{n}\int \frac{(a+b)^m}{b^{\frac{2n-1}{2n}}}\, db.$$

Pertanto se faremo cominciare con zero l' integrale compreso nel secondo membro, si avrà:

$$y = \frac{1}{nb^{\frac{1}{2n}}}\int \frac{(a+b)^m db}{b^{\frac{2n-1}{2n}}}$$

onde sarà finalmente:

$$(10) \qquad \int zdz \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^m = \frac{\pi}{2nb^{\frac{1}{2n}}}\int \frac{(a+b)^m db}{b^{\frac{2n-1}{2n}}}.$$

Sia per semplicità maggiore $b = h^{2n}$; ed avremo:

$$(11) \qquad \int zdz \sin.z(a + h^{2n}\cos.z^{2n})^m = \frac{\pi}{h}\int (a + h^{2n})dh$$

la quale riduzione potrà condurre a calcolare molte formole integrali definite.

Così se sia $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$ si troverà:

$$(12) \qquad \int \frac{zdz \sin.z}{\sqrt{(a + h^2\cos.z^2)}} = \frac{\pi}{h}\log.\frac{\sqrt{(a+h^2)}+h}{\sqrt{a}}.$$

Uno dei più semplici casi quello sarà in cui abbiasi $m = -1$, $n = 1$. Con tali determinazioni conseguiremo:

(13) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a+h^2\cos.z^2} = \frac{\pi}{h}\int \frac{dh}{a+h^2}$$

ovvero:

(14) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a+h^2\cos.z^2} = \frac{\pi}{h\sqrt{a}} \text{ arc. tang. } \frac{h}{\sqrt{a}}.$$

Per una semplificazione ulteriore facendo $a = h = 1$ otterremo:

(15) $$\int \frac{zdz\sin.z}{1+\cos.z^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

la quale formola dedotta da diversa analisi trovasi riferita dal cel. Poisson nella sua seconda memoria sopra gli integrali definiti inserita nel giornale Politecnico.

Dalla formola (14) potremo trarre altre riduzioni. Pongasi $h\sqrt{-1}$ in luogo di h; noi abbiamo se $h < \sqrt{a}$

$$\frac{\pi}{h\sqrt{-1}.\sqrt{a}} \text{ arc. tang. } \frac{h\sqrt{-1}}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}} \log. \frac{\sqrt{a}+h}{\sqrt{a}-h}$$

e quando fosse $h > \sqrt{a}$ sarebbe

$$\frac{\pi}{h\sqrt{-1}\sqrt{a}} \text{arc. tang.} \frac{h\sqrt{-1}}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}} \log. \frac{h+\sqrt{a}}{h-\sqrt{a}}$$

onde in questi due respettivi casi otterremo:

(16) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a-h^2\cos.z^2} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}} \log. \frac{\sqrt{a}+h}{\sqrt{a}-h}$$

(17) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a-h^2\cos.z^2} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}} \log. \frac{h+\sqrt{a}}{h-\sqrt{a}}.$$

Le formole (14), (15), (16), (17) possono dedursi da quelle riportate dal cel. Legendre nei suoi esercizj di calcolo integrale art. 75 e seg. della 5.ª parte.

Altre integrazioni definite potranno dedursi dalla equazione generale:

$$\int z dz \sin.z(a+b\cos.z^{2n})^m = \frac{\pi}{h}\int(a+h^{2n})^m$$

a seconda degli infiniti casi di integrabilità della formola $\int(a+h^{2n})^m dh$. Tale assunto essendo straniero all' oggetto di questa memoria, mi limiterò ad osservare che qualora per la specialità degli esponenti m, n non ammetta questa formola una finita evoluzione; potremo adottare in tale occasione li metodi approssimativi referiti nella eccellente memoria di Euler che è contenuta nel 4.° volume del suo calcolo Integrale (a).

14. Essendo i un numero impari, ed $F\cos.z$ una funzione pari di $\cos.z$, e ponendo

$$y_{i-n} = \int z^{i-n} dz F\cos.z$$

ove i limiti della integrazione sono sempre $z=0$, $z=\pi$ noi trovammo nell' articolo 11

$$\frac{1}{2}y_i = \frac{i\pi}{2}(2^2-1)B_1 y_{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4}\pi^3(2^4-1)B_3 y_{i-3}$$

$$+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6}\pi^5(2^6-1)B_5 y_{i-5}$$

$$-\text{ ec.}$$

$$\pm\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-2n)}{2.3.4\ldots(2n+2)}\pi^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}y_{i-2n-1}$$

$$\mp\text{ ec.}$$

(a) De resolut. formulae $\int x^{m-1}dx(\Delta+x^n)^\lambda$. MS. Acad. Petrop.

Se nella formola

$$y_{i-n} = \int z^{i-n} dz F\cos.z$$

faremo $F\cos.z = a$, essendo a una costante qualunque, noi otterremo

$$y_{i-n} = \frac{\pi^{i-n+1}}{i-n+1} a$$

e sostituendo nella equazione precedente si avrà

$$\frac{1}{2} = \frac{i+1}{2}(2^2-1)B_1 - \frac{(i+1)i(i-1)}{2.3.4}(2^4-1)B_3$$

$$(18) \qquad + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4.5.6}(2^6-1)B_5$$

$$+ \text{ec.} \ldots \pm \frac{(i+1)i(i-1)\ldots\ldots(i-2n+1)}{2.3.4\ldots(2n+2)}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1} \mp \text{ec.}$$

La quale equazione contiene una generale relazione tra i numeri Bernoulliani, che per mezzo di quella potrebbero tutti successivamente determinarsi. Ed infatti se successivamente faremo $i = 1, 3, 5, 7$, ec. si avrà:

$$\frac{1}{2} = \frac{1+1}{2}(2^2-1)B_1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3+1}{2}(2^2-1)B_1 - \frac{(3+1)3(3-1)}{2.3.4}(2^4-1)B_3$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5+1}{2}(2^2-1)B_1 - \frac{(5+1)5(5-1)}{2.3.4}(2^4-1)B_3 + \frac{(5+1)5(5-1)(5-2)(5-3)}{2.3.4.5.6.}(2^6-1)B_5$$

ec.

E potremo anche in tale circostanza osservare che la equazione (18) può rappresentarsi concisamente col mezzo della equazione simbolica

$$0 = 1 + \frac{(1+k\sqrt{-1})^{i+1} + (1-k\sqrt{-1})^{i+2} - 2}{(i+2)k} \tag{19}$$

la quale sussisterà quando nello sviluppo per le potenze di k si ponga $(2^{2h+2}-1)B_{2h+1}$ in luogo della potenza k^{2h+1}.

15. Moivre nelle sue miscellanee analitiche dedusse dal calcolo delle differenze finite una generale equazione, nella quale successivamente determinando un indice compresovi, si ottenevano altrettante equazioni atte a determinare l'uno dopo l'altro i numeri di Bernoulli, appunto come ho accennato potersi conseguire dalla equazione (17).

La equazione di Moivre può dedursi dalla equazione (9) che ho riportata nell' articolo 12.

Di fatti facendo in questa $F\cos.z=a$ troveremo:

$$\frac{i-1}{2} = \frac{(i+1).i}{2}B_1 - \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.3.4}B_3 + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6}B_5$$

$$- \text{ec.}$$

che appunto è quella di Moivre; e dalla quale altrettante equazioni successive si ricaveranno facendovi successivamente $i=3, 5, 7, 9.$ ec. Ma egli è manifesto che tanto la equazione di Moivre quanto la equazione (17) che ho di sopra ottenuta, le quali possono offrire forse qualche curiosità come teoremi numerici, non presentano nessun' interesse quando si tratti del calcolo dei numeri di Bernoulli, dei quali è nota l' espressione del termine generale in funzione del suo indice.

FINE.