SOPRA L'USO DI ALCUNE SERIE

NELLA DETERMINAZIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI.

MEMORIA

DEL CAVALIERE GIULIANO FRULLANI.

Ricevuta adì 13 *Maggio* 1830.

In questa memoria mi propongo di rappresentare col mezzo delle serie l' integrale completo ed indefinito di alcune formole differenziali, onde ricavarne il modo di esprimerle quando che l' integrale di esse debba andare ristretto tra limiti determinati.

Nella scelta degli esempj pe' quali il metodo che sono per esporre può con felice successo adoperarsi, ne ho preferiti alcuni da cui discendono varie riduzioni già dai geometri riconosciute sussistere tra le trascendenti, e che sono particolari casi di più generali trasformazioni che andrò esponendo.

1. Prendiamo a considerare la formola differenziale $\frac{du}{a-\log.u}$ Ponghiamo per semplicità $x=a-\log.u$; e quindi risolvendo in serie rapporto ad u otterremo:

$$u=e^a\left[1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}-\text{ec.}\right];$$

ora sostituendo nella data formola in luogo di u la sua espressione in x avremo immediatamente:

$$\frac{du}{a-\log.u}=-e^a dx\left[\frac{1}{x}-1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{2.3.4}-\text{ec.}\right];$$

quindi trarremo, integrando indefinitamente:

$$(1) \quad \int \frac{du}{a-\log.u} = -e^a \left[\log.x - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2.3^2} + \frac{x^4}{2.3.4^2} - \text{ec.} \right] + \text{cost.}$$

Facciamo attualmente $u = e^{\phi\sqrt{-1}}$; noi ricaveremo dalla equazione $x = a - \log.u$ il corrispondente valore di x che sarà $x = a - \phi\sqrt{-1}$. Di più si faccia $a = r\cos.z$; $\phi = r\sin.z$; cosicchè abbiasi $r = \sqrt{a^2 + \phi^2}$; $z = \text{arc.tang.} \frac{\phi}{a}$. Noi avremo con queste denominazioni $x = re^{-z\sqrt{-1}}$. Sostituendo questi valori di u e di x nella equazione (1), troveremo:

$$(2) \quad \sqrt{-1}.\int \frac{d\phi(a\cos.\phi - \phi\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} - \int \frac{d\phi(\phi\cos.\phi + a\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = \text{cost.} +$$

$$+ \sqrt{-1}.e^a \left[z - r\sin.z + r^2.\frac{\sin.2z}{1.2^2} - r^3 \frac{\sin.3z}{1.2.3^2} + r^4 \frac{\sin.4z}{1.2.3.4^2} - \text{ec.} \right]$$

$$- e^a \left[\log.r - r\cos.z + r^2 \frac{\cos.2z}{1.2^2} - r^3 \frac{\cos.3z}{1.2.3^2} + r^4 \frac{\cos.4z}{1.2.3.4^2} - \text{ec.} \right];$$

or confrontando tra di loro le parti imaginarie, e pur separatamente tra di loro le parti reali, conseguiremo:

$$(3) \quad \int \frac{d\phi(a\cos.\phi - \phi\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^a \left[z - r\sin.z + r^2 \frac{\sin.2z}{1.2^2} - r^3 \frac{\sin.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.} \right] + \text{cost.}$$

$$(4) \quad \int \frac{d\phi(\phi\cos.\phi + a\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^a \left[\log.r - r\cos.z + r^2 \frac{\cos.2z}{1.2^2} - r^3 \frac{\cos.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.} \right] + \text{cost.}$$

Se noi applicheremo letteralmente il metodo ed i calcoli precedenti alla formola differenziale $\frac{du}{a+\log.u}$, e se come sopra faremo $r = \sqrt{a^2 + \phi^2}$, $z = \text{arc. tang.} \frac{\phi}{a}$, troveremo con somma facilità le seguenti riduzioni:

$$(5)\quad \int \frac{d\phi(a\cos.\phi + \phi\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^{-a}\left[z + r\sin.z + r^2\,\frac{\sin.2z}{1.2^2} + r^3\,\frac{\sin.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+ \text{cost.}$$

$$(6)\quad \int \frac{d\phi(\phi\cos.\phi - a\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^{-a}\left[\log.r + r\cos.z + \frac{r^2\cos.2z}{1.2^2} + \frac{r^3\cos.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+ \text{cost.}$$

2. Se tra di loro aggiungeremo le formole (3), (5) otterremo:

$$(7)\quad \int \frac{d\phi\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2a}\left[z + \frac{r^2\sin.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\sin.4z}{1.2.3.4^2} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6^2} + \text{ec.}\right]$$
$$-\frac{(e^{a} - e^{-a})}{2a}\left[r\sin.z + \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\sin.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+ \text{cost.}$$

Parimente sommando la formola (4) con la formola (7) si avrà

$$(8)\quad \int \frac{\phi d\phi.\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2}\left[\log.r + \frac{r^2\cos.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\cos.4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$
$$-\frac{(e^{a} - e^{-a})}{2}\left[r\cos.z + \frac{r^3\cos.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\cos.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+ \text{cost.}$$

E se dalla formola (3) sottrarremo la formola (5); e quindi dalla formola (4) sottrarremo la (6), noi dedurremo:

$$(9)\quad \int \frac{\phi d\phi.\sin.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2}\left[z + \frac{r^2\sin.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\sin.4z}{1.2.3.4^2} + \frac{r^6\sin.6z}{1.2.3.4.5.6^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+\frac{(e^{a} + e^{-a})}{2}\left[r\sin.z + \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\sin.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+ \text{cost.}$$

$$(10)\quad \int \frac{d\phi.\sin.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^a - e^{-a}}{2a}\left[\log.r + \frac{r^2\cos.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\cos.4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{(e^a + e^{-a})}{2a}\left[r\cos.z + \frac{r^3\cos.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\cos.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

3. I precedenti risultati potranno tutti facilmente verificarsi col mezzo della differenziazione.

Ma egli è notabile che quelli sviluppi e conseguenti integrali potrebbero anche facilmente conseguirsi mediante la trasformazione delle date funzioni. Posto infatti $a = r\cos.z$; $\phi = r\sin.z$ e quindi $r = \sqrt{a^2+\phi^2}$, $z = \text{arc.tang.}\,\frac{\phi}{a}$, noi avremo identicamente, come sarà facile di verificare;

$$(11)\quad \frac{a\cos.\phi - \phi\sin.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{ae^a}{a^2+\phi^2}\,\frac{\left(e^{-re^{z\sqrt{-1}}} + e^{-re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2}$$

$$-\frac{\phi e^a}{a^2+\phi^2}\,\frac{\left(e^{-re^{-z\sqrt{-1}}} - e^{-re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$

Indi risolvendo in serie gli esponenziali $e^{-re^{z\sqrt{-1}}}$, $e^{-re^{-z\sqrt{-1}}}$, il primo per le potenze di $e^{z\sqrt{-1}}$, il secondo per le potenze di $e^{-z\sqrt{-1}}$ troveremo immediatamente:

$$(12)\quad \frac{a\cos.\phi - \phi\sin.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{ae^a}{a^2+\phi^2}\left[1 - r\cos.z + \frac{r^2\cos.2z}{1.2} - \frac{r^3\cos.3z}{1.2.3} + \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{\phi e^a}{a^2+\phi^2}\left[r\sin.z - \frac{r^2\sin.2z}{1.2} + \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3} - \text{ec.}\right].$$

Or dalle equazioni $a = r\cos.z$, $\phi = r\sin.z$ si ottiene

$$\frac{dz}{d\phi} = \frac{a}{a^2+\phi^2};\quad \frac{dr}{d\phi} = \frac{\phi}{\sqrt{a^2+\phi^2}};$$

onde si avrà:

$$(13)\quad \frac{a\cos.\varphi - \varphi\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}\,d\varphi = e^{a}.dz\left[1 - r\cos z + \frac{r^2\cos.2z}{1.2} - \frac{r^3\cos 3z}{1.2.3} + \text{ec.}\right]$$

$$- e^{a}dr\left[\sin.z - \frac{r\sin.2z}{2} + \frac{r^2\sin.3z}{1.2.3} - \text{ec.}\right]$$

ove tanto il primo membro quanto il secondo essendo differenziali esatti, conseguiremo integrando:

$$(14)\quad \int \frac{a\cos.\varphi - \varphi\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}.d\varphi = e^{a}\left[z - r\sin.z + \frac{r^2\sin.2z}{1.2^2} - \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

come sopra trovammo.

Sempre ritenute le equazioni $r\cos.z = a$; $r\sin.z = \varphi$, potranno senze difficoltà verificarsi le identità seguenti:

$$(15)\quad \frac{a\cos.\varphi + \varphi\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{ae^{-a}}{a^2+\varphi^2}\,\frac{\left(e^{re^{-z\sqrt{-1}}} + e^{re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2}$$

$$+ \frac{\varphi e^{-a}}{a^2+\varphi^2}\,\frac{\left(e^{re^{z\sqrt{-1}}} - e^{re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}$$

$$(16)\quad \frac{\varphi\cos.\varphi - a\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\varphi e^{-a}}{a^2+\varphi^2}\,\frac{\left(e^{re^{z\sqrt{-1}}} + e^{re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2}$$

$$+ \frac{ae^{-a}}{a^2+\varphi^2}\,\frac{\left(e^{re^{-z\sqrt{-1}}} - e^{re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}$$

$$(17)\quad \frac{\varphi\cos.c + a\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\varphi e^{a}}{a^2+\varphi^2}\,\frac{\left(e^{re^{-z\sqrt{-1}}} + e^{re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2} -$$

$$- \frac{ae^{a}}{a^2+\varphi^2}\,\frac{\left(e^{-re^{z\sqrt{-1}}} - e^{-re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$

E qui pure svolgendo in serie gli esponenziali che nei secondi membri dipendono da z, e notando che

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{a}{a^2+\varphi^2},\ \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{a^2+\varphi^2}}$$

ritroveremo subito gli integrali che nell'articolo 1 abbiamo assegnati alle formole differenziali

$$\frac{a\cos\varphi + \varphi\sin.\varphi.}{a^2+\varphi^2}.d\varphi,\ \frac{\varphi\cos.\varphi - a\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}.d\varphi,\ \frac{\varphi\cos.\varphi + a\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}d\varphi.$$

Vedremo in appresso che queste identità non altro sono che uno special caso di una trasformazione più generale.

4. Frattanto riprendiamo le formole integrali dimostrate nell' articolo 2.

Incominciando da quella segnata (7) che è la seguente:

$$\int\frac{d\varphi.\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2a}\left[z + \frac{r^2\sin.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\sin.4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$
$$-\left(\frac{e^a - e^{-a}}{2a}\right)\left[r\sin.z + \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\sin.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+ \text{cost.}$$

è manifesto che questa serie la quale finirà sempre con esser convergente, servirà per calcolare il valore di $\int\frac{d\varphi\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}$ qualunque siano i limiti dell'integrale. E se questi limiti esser debbano $\varphi=0$, $\varphi=\infty$, noi riprenderemo le equazioni $r=\sqrt{a^2+\varphi^2}$, $z=\text{arc. tang.}\frac{\varphi}{a}$, e ne dedurremo che al limite $\varphi=0$ si ha $r=a$, $z=0$, ed al limite $\varphi=\infty$ si avrà $r=\infty$, $z=\frac{\pi}{2}$, essendo π (noi useremo sempre una tal denominazione nel corso di questa Memoria) il rapporto della circonferenza al diametro, ovvero la mezza periferia circolare del raggio 1.

Ciò premesso, e facendo le indicate sostituzioni nella Equazione precedente, noi avremo tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\infty$,

(18) $$\int \frac{d\phi.\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^a+e^{-a}}{2a}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{(e^a-e^{-a})}{2a}\times \left[r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4.5^2} - \text{ec.}\right]$$

ove nel secondo membro deve farsi $r=\infty$.

Or se noi faremo principiare con zero l'integrale $\int \frac{\sin.r}{r}\,dr$ noi avremo:

$$\int \frac{\sin.r.dr}{r} = r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4.5^2} - \text{ec.}$$

quindi nel caso di $r=\infty$ la serie $r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4.5^2} - \text{ec.}$ sarà eguale all'integrale $\int \frac{\sin.r}{r}\,dr$ esteso tra i limiti $r=0$, $r=\infty$. Ora in questa ipotesi abbiamo $\int \frac{\sin.r}{r}\,dr = \frac{\pi}{2}$; onde sostituendo nella equazione (18), sarà tra i limiti, $\phi=0$, $\phi=\infty$.

$$\int \frac{d\phi.\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^a+e^{-a}}{2a}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{(e^a-e^{-a})}{2a}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ovvero:

(19) $$\int \frac{d\phi.\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{\pi}{2a}.e^{-a}.$$

Per richiamare alla mente i limiti tra i quali un dato integrale si estende, userò la notazione adottata da molti geometri di riportare nelle due estremità del segno sommatorio i limiti dell'integrale, cosicchè una integrazione estesa tra i limiti α, β sia indicata dal segno $\int_\alpha^\beta$. Con questa notazione sarà

(20) $$\int_0^\infty \frac{d\phi.\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a}.$$

5. L'integrale completo della formola $\frac{\phi\cos.\phi.}{a^2+\phi^2}\,d\phi$ è dato

nell' articolo 2 dalla equazione

$$\int \frac{\varphi . d\varphi \cos . \varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\left[\log . r + \frac{r^2\cos . 2z}{1.2^2} + \frac{r^4\cos . 4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{(e^a - e^{-a})}{2}\left[r\cos . z + \frac{r^3\cos . 3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\cos . 5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

Ove abbiamo al solito

$$r = \sqrt{a^2+\varphi^2}; \quad z = \text{arc. tang.} \frac{\varphi}{a}.$$

Sarà pertanto tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \infty$

$$(21) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi d\varphi . \cos . \varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\left[\log . r - \frac{r^2}{1.2^2} + \frac{r^4}{1.2.3.4^2} - \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{(e^a + e^{-a})}{2}\left[\log . a + \frac{a^2}{1.2^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{(e^{-a} - e^a)}{2}\left[a + \frac{a^3}{1.2.3^2} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

Ove nel secondo membro dovremo porre $r = \infty$.

Ora è noto che per il caso di $r = \infty$ si ha

$$\log . r - \frac{r^2}{1.2^2} + \frac{r^4}{2.3.4^2} - \frac{r^6}{2.3.4.5.6^2} + \text{ec.} = -\text{K}$$

essendo $\text{K} = 0,577215$.

Pertanto avremo, sostituendo:

$$(22) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi d\varphi . \cos . \varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a - e^{-a}}{2}\left[a + \frac{a^3}{2.3^2} + \frac{a^5}{2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{(e^a + e^{-a})}{2}\left[\text{K} + \log . a + \frac{a^2}{1.2^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right].$$

6. Prendiamo ora in esame l'integrale completo $\int \frac{\varphi d\varphi \sin . \varphi}{a^2+\varphi^2}$ dato nell' articolo 2 dalla equazione:

$$\int \frac{\phi d\phi . \sin . \phi}{a^2 + \phi^2} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2} \left[z + \frac{r^2 \sin . 2z}{1.2^2} + \frac{r^4 \sin . 4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.} \right]$$

$$+ \frac{e^{a} + e^{-a}}{2} \left[r \sin . z + \frac{r^3 \sin . 3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5 \sin . 5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.} \right]$$

$$+ \text{cost.}$$

Al caso attuale applicando le precedenti avvertenze, troveremo con la facilità maggiore.

$$(23) \quad \int_0^\infty \frac{\phi d\phi . \sin . \phi}{a^2 + \phi^2} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{(e^{a} + e^{-a})}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin . r dr}{r} .$$

E poichè $\int_0^\infty \frac{\sin . r . dr .}{r} = \frac{\pi}{2}$, noi avremo:

$$(24) \quad \int_0^\infty \frac{\phi d . \phi \sin . \phi}{a^2 + \phi^2} = \frac{\pi}{2} . e^{-a} .$$

Finalmente in modo analogo operando sopra l'integrale completo della formola $\frac{d\phi \sin . \phi}{a^2 + \phi^2}$ dato nel precedente articolo 2 dalla equazione ivi segnata dal numero marginale (10), troveremo con breve calcolo:

$$(25) \quad \int_0^\infty \frac{d\phi \sin . \phi}{a^2 + \phi^2} = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2a} \left[a + \frac{a^3}{1.2.3^2} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.} \right]$$

$$- \frac{(e^{a} - e^{-a})}{2a} \left[\mathrm{K} + \log . a + \frac{a^2}{1.2^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4^2} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6^2} + \text{ec.} \right]$$

7. Le formole (22) (25) sono dovute al ch. Bidone che le ha dimostrate con metodi diversi dai precedenti nella sua dottissima memoria sopra gli integrali definiti inserita negli Atti della Società R. di Torino per l'anno 1812.

Sono dovute al cel. La Place le formole (20) (24) importantissime in questo ramo di analisi. Egli le dimostrò nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Francia per l' anno 1782 fondandosi per induzione sul passaggio dal reale all'imaginario; e vale a dire cercando di esprimere l' integrale

$\int z^{-\beta} e^{-z} dz$ esteso tra i limiti imaginarj che annullino la formola $z^{-\beta} e^{-z}$, ed applicandovi poi il metodo generale con cui può rappresentarsi l'integrale $\int y dx$ nel caso in cui la funzione y sia $= 0$ ai due limiti dell'integrale: ritenendo che la funzione y non sia suscettibile che di un solo massimo tra quei limiti.

Un tal metodo di dimostrazione potendo andar soggetto a qualche incertezza, volle il La Place dedurre le citate formole da diverso metodo; ed uno ne propose fondato sopra l'alternativa delle integrazioni in un integrale doppio. Indi il ch. Bidone si prevalse per l'oggetto medesimo nella sopra citata Memoria della evoluzione in serie per le potenze ascendenti e discendenti della variabile: mentre già il Le Gendre aveva adoperato un artifizio di calcolo dipendente dal far variare i limiti dell'integrale: così pervenendo ad una semplice equazione lineare del secondo ordine dalla quale la data formola dipende. Finalmente il ch. Poisson ridusse pur esso il problema alla medesima equazione differenziale lineare del secondo ordine, valendosi delle formole

$$\int_0^\infty \cos.x.dx = 0; \quad \int_0^\infty \sin.x.dx. = 1.$$

Può vedersi nella Memoria sopra gli integrali definiti inserita in questo volume stesso un mezzo di pervenire alle formole di che si tratta, appoggiato esso pure alla integrazione doppia: e da questo principio medesimo può dedursi il metodo seguente che applicherò alla formola $\int \frac{\cos.\phi.d\phi}{a^2+\phi^2}$ per un esempio delle avvertenze che in alcuni casi può esigere l'integrazione doppia, onde essere adoperata con buon successo.

La formola $\int_0^\infty \frac{\cos.\phi.d\phi}{a^2+\phi^2}$ può subito ridursi all'altra $\int_0^\infty \frac{\cos.b\phi.d\phi}{1+\phi^2}$; e noi ci accingeremo a determinare il valore di quest'ultima.

Consideriamo la formola

$$z=\iint e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy.dx.dy}{x}$$

ove la integrazione deve farsi tra i limiti $x=0$, $x=\infty$; $y=0$, $y=\infty$. Integrando rapporto ad y noi avremo

$$z=\int_0^\infty\frac{\cos.bx.dx}{1+x^2}.$$

Ora nel dato integrale doppio incominciando ad integrare rapporto ad x, noi dovremo considerare l' integrale

$$\int_0^\infty\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}dx$$

il di cui valore è differente secondo che sia $y<b$, ovvero $y>b$.

Se $y>b$, noi avremo per i noti teoremi:

$$\int_0^\infty\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

ma se $y<b$ noi avremo in vece

$$\int_0^\infty\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}dx=0.$$

Ciò premesso, noi potremo dividere l' integrale doppio

$$\iint e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}dx\,dy$$

in due distinte parti: la prima delle quali sia presa tra i limiti

$$x=0,\ x=\infty;\ y=0,\ y=b;$$

e di cui la seconda venga presa tra i limiti

$$x=0,\ x=\infty;\ y=b,\ y=\infty.$$

Ma è facile il convincersi che la prima parte sarà sempre nulla: ed infatti è manifesto che nell'integrare rapporto ad x la formola

$$\iint e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,dx.dy,$$

(la quale poi deve essere integrata tra i limiti $y=o, y=b$) noi dovremo ammettere che nell'integrare rapporto ad x sia $y<b$, il che ci dà

$$\int_o^\infty \frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,dx=o$$

onde si è in diritto di concludere che tra i limiti $x=o$, $x=\infty$, $y=o$, $y=b$ si ha

$$\iint e^{-y}\frac{\cos bx.\sin.xy}{x}\,dx.dy=o.$$

Per ottenere l'altra parte del propostoci integrale già stabilimmo che l'integrazione rapporto ad y debba farsi tra i limiti $y=b$, $y=\infty$; il che esige che nella integrazione rapporto ad x si consideri $y>b$. Ora abbiamo quando $y>b$

$$\int_o^\infty \frac{\cos.bx\sin.xy}{x}.\,dx=\frac{\pi}{2};$$

or se noi moltiplicheremo da ambe le parti questa equazione per $e^{-y}dy$, ed integreremo quindi tra i limiti $y=b$, $y=\infty$, troveremo

$$\iint e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,.dx.dy=e^{-b}\,\frac{\pi}{2};$$

questo pertanto è il valore dell'integrale doppio Z. Onde infine concluderemo

$$\int_0^{\infty}\frac{dx.\cos.bx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.e^{-b}$$

8. Dopo questa breve digressione riprendiamo alcun'altro esempio del modo di rappresentare in serie l'integrale di formole differenziali analoghe a quelle trattate negli articoli 2. e 3.

Sia data pertanto la formola differenziale

$$\frac{du}{(a+\log.u)^h}$$

ove a, h sono costanti qualunque.

Se noi faremo $(a+\log.u)^h=x$ otterremo $u=e^{-a+x^{\frac{1}{h}}}$;onde in virtù di queste convenzioni sarà

$$(27)\quad \frac{du}{(a+\log.u)^h}=\frac{e^{-a}.dx}{h}\left[x^{\frac{1-2h}{h}}+x^{\frac{2-2h}{h}}+\frac{x^{\frac{3-2h}{h}}}{2}+\frac{x^{\frac{4-2h}{h}}}{2.3}+\text{ec.}\right]$$

ed integrando:

$$(28)\quad \int\frac{du}{(a+\log.u)^h}=e^{-a}\left[\frac{x^{\frac{1-h}{h}}}{1-h}+\frac{x^{\frac{2-h}{h}}}{2-h}+\frac{x^{\frac{3-h}{h}}}{2(3-h)}+\frac{x^{\frac{4-h}{h}}}{2.3.(4-h)}+\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{x^{\frac{i-h}{h}}}{1.2.3\ldots\ldots(i-1)(i-h)}+\text{ec.}\right]+\text{cost.}$$

Se ora riprenderemo la equazione $x=(a+\log.u)^h$, e faremo $a=e^{\phi\sqrt{-1}}$, sarà $x=r^h.e^{hz\sqrt{-1}}$, purchè si stabilisca

$$a=r\cos.z,\qquad \phi=r\sin z.$$

Quindi trarremo, sostituendo:

$$(29)\quad \sqrt{-1}\int\frac{d\phi . e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}\left[\frac{r^{1-h}.e^{(1-h)z\sqrt{-1}}}{1-h}+\frac{r^{2-h}.e^{(2-h)z\sqrt{-1}}}{2-h}\right.$$

$$\left.+\frac{r^{3-h}.e^{(3-h)z\sqrt{-1}}}{2(3-h)}+\text{ec.}\ldots+\frac{r^{i-h}.e^{(i-h)z\sqrt{-1}}}{2.3\ldots(i-1)(i-h)}+\text{ec.}\right]+\text{cost.}$$

Paragonando tra di loro le parti imaginarie ricaveremo

$$(30)\quad \int\frac{d\phi . e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}.r^{-h}\left[\frac{r\sin.(1-h)z}{1-h}+\frac{r^2\sin.(2-h)z}{2-h}+\frac{r^3\sin.(3-h)z}{2(3-h)}+\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{r^i\sin.(i-h)z}{2.3\ldots(i-1)(i-h)}+\text{ec.}\right]+\text{cost.}$$

ove nel primo membro debbono ommettersi le parti imaginarie.

9. Nè qui trascurerò di notare che la trasformazione adoperata sopra la formola differenziale $\frac{du}{(a+\log.u)^h}$ e consecutivo confronto delle parti imaginarie, onde ottenere il completo integrale $\int\frac{d\phi e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}$ potrebbe, come in analogo caso vedemmo all'articolo 4. essere agevolmente supplita, opportunamente disponendo la stessa funzione $\frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}$.

In fatti sarà facile di verificare la identità seguente tra le parti reali:

$$(31)\quad \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=$$

$$e^{-a}.r^{-1-h}.\phi\left[\frac{e^{(1-h)z\sqrt{-1}}\,e^{re^{z\sqrt{-1}}}-e^{-(1-h)z\sqrt{-1}}.e^{re^{-z\sqrt{-1}}}}{2\sqrt{-1}}\right]$$

$$+e^{-a}.r^{-1-h}.a\left[\frac{e^{(1-h)z\sqrt{-1}}.e^{re^{z\sqrt{-1}}}+e^{-(1-h)z\sqrt{-1}}.e^{re^{-z\sqrt{-1}}}}{2}\right]$$

purchè si abbia $r.\cos.z=a$, $r.\sin.z=\phi$, ovvero $r=\sqrt{(a^2+\phi^2)}$; $z=\text{arc.tang.}\frac{\phi}{a}$.

Se noi svolgeremo in serie il secondo membro della equazione (31) si troverà facilmente:

$$(32)\quad \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}.r^{-h}\frac{\phi}{r}\Big[\sin.(1-h)z+r\sin.(2-h)z+r^2\sin.\frac{(3-h)z}{2}$$

$$+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.+\frac{r^{i-1}\sin.(i-h)z}{2.3\ldots(i-1)}+\text{ec.}\Big]$$

$$+e^{-a}.r^{1-a}\frac{a}{r^2}\Big[\cos.(1-h)z+r\cos.(2-h)z+\frac{r^2\cos.(3-h)z}{2}$$

$$+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.+\frac{r^{i-1}\cos.(i-h)z}{2.3\ldots.(i-1)}+\text{ec.}\Big].$$

Ma dalle equazioni

$$r=\sqrt{(a^2+\phi^2)};\ z=\text{Arc. tang. }\frac{\phi}{a}$$

si ottiene

$$\frac{\phi}{r}=\frac{dr}{d\phi};\ \frac{a}{r^2}=\frac{dz}{d\phi}$$

onde avremo, sostituendo

$$(33)\quad \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}\,d\phi}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}dr\Big[r^{-h}\sin.(1-h)z+r^{1-h}\sin.(2-h)z+\frac{r^{2-h}\sin.(3-h)z}{2}$$

$$+\,.\,.\,.\,.\,.+\frac{r^{i-1-h}\sin.(i-h)z}{2.3\ldots.(i-1)}+\text{ec.}\Big]$$

$$+e^{-a}dz\Big[r^{1-h}\cos.(1-h)z+r^{2-h}\cos.(2-h)z+\frac{r^{3-h}\cos.(3-h)z}{2}$$

$$+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.+\frac{r^{i-h}\cos.(i-h)z}{2.3\ldots.(i-1)}+\text{ec.}\Big]$$

È manifesto che il secondo membro di questa equazione è una differenziale esatta: e che integrando indefinitamente si avrà come sopra:

$$\int \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}d\phi}{(a+\phi\sqrt{-1})^h} = e^{-a}.r^{-h}\left[\frac{r\sin.(1-h)z}{1-h} + \frac{r^2\sin.(2-h)z}{2-h} + \frac{r^3\sin.(3-h)z}{2(3-h)}\right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{r^i\sin.(i-h)z}{2.3\ldots(i-1)(i-h)} + \text{ec.}\right] + \text{cost.}$$

10. Or se vorremo estendere la formola integrale

$$\int \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}d\phi}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}$$

tra i limiti $\phi = -\infty$, $\phi = \infty$, noi osserveremo che nel secondo membro della equazione che ne determina l'integrale completo ed indefinito, le quantità r e z dipendono da ϕ in virtù delle equazioni

$$a = r\cos.z; \qquad \phi = r\sin.z:$$

onde dedurremo che ai limiti $\phi = 0$, $\phi = \infty$ si avrà rispettivamente $z = -\frac{\pi}{2}$, $z = \frac{\pi}{2}$; e che nel risultato dovrà farsi $r = \infty$.

Sarà pertanto:

$$(34) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi.e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h} = 2e^{-a}.r^{-h}\left[\frac{r\sin.(1-h)\frac{\pi}{2}}{1-h} + \frac{r^2\sin.(2-h)\frac{\pi}{2}}{2-h}\right.$$

$$\left. + \frac{r^3\sin.(3-h)\frac{\pi}{2}}{2(3-h)} + \ldots\ldots + \frac{r^i\sin.(i-h)\frac{\pi}{2}}{2.3\ldots(i-1)(i-h)} + \text{ec.}\right]$$

Ma poichè

$$\sin.(i-h)\frac{\pi}{2} = \sin.\frac{i\pi}{2}.\cos.\frac{h\pi}{2} - \cos.\frac{i\pi}{2}.\sin.\frac{h\pi}{2}$$

noi avremo pure

$$(35)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi e^{\varphi\sqrt{-1}}}{(a+\varphi\sqrt{-1})^h} = 2e^{-a}.r^{-h}\cos.\frac{h\pi}{2}\left[\frac{r}{1-h} - \frac{r^3}{2(3-h)} + \frac{r^5}{2.3.4.(5-h)} - \text{ec.}\right.$$

$$\left. \ldots\ldots \pm \frac{r^{2n+1}}{2.3\ldots 2n(2n+1-h)}\right]$$

$$+2e^{-a}.r^{-h}\sin.\frac{h\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2-h} - \frac{r^4}{2.3.(4-h)} + \frac{r^6}{2.3.4.5.(6-h)} - \text{ec.}\right.$$

$$\left. \ldots\ldots \mp \frac{r^{2n}}{2.3.4\ldots(2n-1)(2n-h)} \pm \text{ec.}\right]$$

ove dobbiamo porre $r=\infty$, e dove i segni superiori convengono ad n pari, e gli inferiori ad n dispari.

Ma nel caso di r infinito si avrà:

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\cos.r.dr = r^{-h}\left[\frac{r}{1-h} - \frac{r^3}{2(3-h)} + \frac{r^5}{2.3.4(5-h)} - \text{ec.}\right.$$

$$\left. \ldots\ldots \pm \frac{r^{2n+1}}{2.3\ldots\ldots 2n(2n+1-h)} \mp \text{ec.}\right],$$

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\sin.r.dr = r^{-h}\left[\frac{r^2}{2-h} - \frac{r^4}{2.3.(4-h)} + \frac{r^6}{2.3.4.5.(6-h)} - \text{ec.}\right.$$

$$\left. \ldots\ldots \mp \frac{r^{2n}}{2.3\ldots(2n-1)(2n-h)} \pm \text{ec.}\right]$$

e pertanto sostituendo otterremo:

$$(36)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi e^{\varphi\sqrt{-1}}}{(a+\varphi\sqrt{-1})^h} = 2e^{-a}\left[\cos.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} r^{-h}\cos.r.dr\right.$$

$$\left. +\sin.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} r^{-h}\sin.r.dr\right].$$

Questa espressione potrà notabilmente semplificarsi se rammenteremo le note riduzioni:

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\cos.rdr = \sin.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r}.r^{-h}\,dr$$

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\sin.r.dr = \cos.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r}.r^{-h}\,dr$$

col soccorso delle quali conseguiremo:

$$(37)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi.e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=2e^{-a}\,\sin.h\pi\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}\,dr.$$

È noto pure che tra le trascendenti

$$\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr,\qquad \int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}\,dr$$

sussiste la relazione:

$$\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr\times\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}\,dr=\frac{\pi}{\sin.h\pi}$$

ovvero

$$\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}.dr=\frac{\pi}{\sin.h\pi.\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr}$$

cosicchè sostituendo otterremo:

$$(38)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi\,e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=\frac{2\pi.e^{-a}}{\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr}.$$

Questa formola, una delle più osservabili nella teoria degli integrali definiti è stata dimostrata nel particolare caso di $h=a$ dal cel. Laplace col metodo di cui abbiamo fatto menzione nell' articolo 7. E nel caso di a qualunque, e di h numero intero e positivo il Poisson ne ha data una elegante dimostrazione (che per induzione egli estende al caso di h qualunque) nel fascicolo 19$^{\text{esimo}}$ del giornale Politecnico: nel qual fascicolo stesso il ch. Cauchy è pervenuto egli pure alla equazione (38) senza nessuna restrizione dei valori di a e di h.

11. Il metodo che nei precedenti articoli abbiamo posto in uso può con maggiore generalità presentarsi come appresso.

Sia data tra u ed x una equazione qualunque $x=\mathrm{F}u$; dalla quale, risolvendo rapporto ad u si deduca

$$u = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec.}$$

così ottenuto il valore di u sempre che ciò sia possibile, espresso per una serie procedente per le potenze intere e positive di x, noi supporremo che posto $u = e^{\phi\sqrt{-1}}$ la equazione $x = Fu$ somministri $x = p + q\sqrt{-1}$ essendo p, q funzioni date di ϕ, e ϕ una quantità reale comunque.

Se ora ci proporremo di determinare il valore della formola integrale $\int \frac{du}{x}$, noi potremo in luogo di u sostituire il suo precedente valore; e quindi integrare per serie.

Così avremo

$$\int \frac{du}{x} = A_1 \log.x + 2A_2 x + 3A_3 \frac{x^2}{2} + 4A_4 \frac{x^3}{3} + \text{ec.} \ldots + \text{cost.}$$

Se in luogo di u porremo $e^{\phi\sqrt{-1}}$, e quindi in luogo di x sostituiremo il suo valore $p + q\sqrt{-1}$ che deriva dal legame stabilito tra u ed x dalla equazione $x = Fu$: se di più faremo $p = r\cos.z$, $q = r\sin.z$, e quindi $r = \sqrt{p^2 + q^2}$; $z = \text{arc.tang.}\frac{q}{p}$ noi otterremo finalmente:

$$(39) \qquad \int \frac{d\phi(q\cos.\phi - p\sin.\phi)}{p^2 + q^2} + \sqrt{-1} \int \frac{d\phi(\,p\cos.\phi + q\sin.\phi)}{p^2 + q^2}$$

$$= \sqrt{-1}.\left[A_1 z + 2A_2 r\sin.z + 3A_3 \frac{r^2\sin.2z}{2} + 4A_4 \frac{r^3\sin.3z}{3} + \text{ec.}\right]$$

$$+ A_1 \log.r + 2A_2 r\cos.z + 3A_3 \frac{r^2\cos.2z}{2} + 4A_4 \frac{r^3\cos.3z}{3} + \text{ec.} + \text{cost.}$$

E paragonando tra di loro separatamente le parti reali e le parti imaginarie, noi conseguiremo:

$$(40) \int \frac{d\phi(\,p\cos.\phi + q\sin.\phi)}{p^2 + q^2} = A_1 z + 2A_2 r\sin.z + 3A_3 \frac{r^2\sin.2z}{2} + 4A_4 \frac{r^3\sin.3z}{3}$$

$$+ \text{ec.} \quad + \text{cost.}$$

$$(41)\qquad \int \frac{d\phi(p\sin.\phi - q\cos.\phi)}{p^2+q^2} = -\mathrm{A}_1 \log.r - 2\mathrm{A}_2\, r\cos.z - 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2\cos.2z}{2}$$

$$-\text{ec.} + \text{cost.}$$

12. Potrebbero questi integrali completi delle formole

$$\frac{d\phi(p\cos.\phi + q\sin.\phi)}{p^2+q^2};\quad \frac{d\phi(p\sin\phi - q\cos.\phi)}{p^2+q^2}$$

verificarsi col mezzo diretto della differenziazione: ed a quelli potremo anco pervenire con trasformazioni opportune: siccome già vedemmo succedere per casi più speciali negli articoli 3, 9.

Infatti data la equazione $x = \mathrm{F}u$ dalla quale abbiasi inversamente $u = \Psi x$: se facendovi $u = e^{\phi\sqrt{-1}}$ sia $x = p + q\sqrt{-1}$, io dico che avrà luogo la identità:

$$(42)\qquad \frac{p\cos.\phi + q\sin.\phi}{p^2+q^2} = \frac{p\frac{dq}{d\phi} - q\frac{dp}{d\phi}}{p^2+q^2}\left[\frac{\Psi' re^{z\sqrt{-1}} + \Psi' re^{-z\sqrt{-1}}}{2}\right]$$

$$+\frac{p\frac{dp}{d\phi} + q\frac{dq}{d\phi}}{p^2+q^2}\left[\frac{\Psi' re^{z\sqrt{-1}} - \Psi' re^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right]$$

ove sia $r = \sqrt{p^2+q^2}$, $z = \text{arc. tang.}\frac{q}{p}$; e dove per semplicità faccio $\frac{d\Psi y}{dy} = \Psi' y$.

Per dimostrare quella identità si osservi che avendosi identicamente

$$e^{\phi\sqrt{-1}} = \Psi(p + q\sqrt{-1})$$

$$e^{-\phi\sqrt{-1}} = \Psi(p - q\sqrt{-1})$$

sarà pure

$$\sqrt{-1}.e^{\phi\sqrt{-1}}=\left(\frac{dp}{d\phi}+\sqrt{-1}\,\frac{dq}{d\phi}\right)\Psi'(p+q\sqrt{-1});$$

$$-\sqrt{-1}.e^{\phi\sqrt{-1}}=\left(\frac{dp}{d\phi}-\sqrt{-1}\,\frac{dq}{d\phi}\right)\Psi'(p-q\sqrt{-1}),$$

quindi trarremo per le denominazioni stabilite:

$$\Psi'r.e^{z\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}.e^{\phi\sqrt{-1}}}{\frac{dp}{d\phi}+\sqrt{-1}.\frac{dq}{d\phi}};$$

$$\Psi'r.e^{-z\sqrt{-1}}=\frac{-\sqrt{-1}.e^{-\phi\sqrt{-1}}}{\frac{dp}{d\phi}-\sqrt{-1}.\frac{dq}{d\phi}}$$

i quali valori, sostituiti nella equazione (42) la riducono di fatti alla identità.

Supponghiamo ora che la funzione $\Psi'x$ possa ridursi in serie della forma

$$\Psi'x=A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\text{ec.}$$

Se porremo in questa succesivamente

$$x=re^{z\sqrt{-1}};\qquad x=re^{-z\sqrt{-1}}$$

e quindi prenderemo la somma o la differenza dei risultati, è manifesto che noi perverremo a rappresentare le quantità

$$\Psi're^{z\sqrt{-1}},\qquad \Psi're^{-z\sqrt{-1}};$$

e facendo di queste la sostituzione nella equazione (42), otterremo:

$$\frac{p\cos.\phi+q\cos.\phi}{p^2+q^2}=$$

$$\frac{p\frac{dq}{d\phi}-q\frac{dp}{d\phi}}{p^2+q^2}\left[A_1+2A_2r\cos.z+3A_3r^2\cos.2z+\text{ec.}\right]+$$

$$+\frac{p\frac{dp}{d\phi}+q\frac{dq}{d\phi}}{\sqrt{p^2+q^2}}[\,2A_2\sin.z+3A_3 r\sin.2z+4A_4 r^2\sin 3z+\text{ec.}\,]$$

Ma poichè

$$z=\text{arc. tang.}\,\frac{q}{p};\qquad r=\sqrt{p^2+q^2}$$

sarà pure:

$$\frac{dz}{d\phi}=\frac{p\frac{dq}{d\phi}-q\frac{dp}{d\phi}}{p^2+q^2};\ \frac{dr}{d\phi}=\frac{p\frac{dp}{d\phi}+q\frac{dq}{d\phi}}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

E pertanto avremo:

$$\frac{p\cos.\phi+q\sin.\phi}{p^2+q^2}\,d\phi=dz[\,A_1+2A_2 r\cos.z+3A_3 r^2\cos.2z+\text{ec.}\,]$$

$$+dr[\,2A_2\sin.z+3A_3 r\sin.2z+4A_4 r^2\sin.3z+\text{ec.}\,]$$

È facile il vedere che il secondo membro è differenziale esatta; e che integrando otterremo:

$$\int\frac{p\cos.\phi+q\sin.\phi}{p^2+q^2}\,d\phi=A_1 z+2A_2 r\sin.z+3A_3\frac{r^2\sin.2z}{2}+4A_4\frac{r^3\sin.3z}{3}+\text{ec.}$$
$$+\text{cost.}_1$$

come sopra trovammo.

Egualmente potrà dimostrarsi la esistenza della identità

$$\frac{p\sin.\phi-p\cos.\phi}{p^2+q^2}=\frac{p\frac{dp}{d\phi}+q\frac{dq}{d\phi}}{p^2+q^2}\left[\frac{\Psi' re^{z\sqrt{-1}}+\Psi' re^{-z\sqrt{-1}}}{2}\right] \tag{43}$$

$$-\frac{\left(p\frac{dq}{d\phi}-q\frac{dp}{d\phi}\right)}{\sqrt{p^2+q^2}}\left[\frac{\Psi' re^{z\sqrt{-1}}-\Psi' re^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right]$$

nella quale operando come precedentemente, e sempre tenendo presenti le equazioni

$$p = r\cos.z, \qquad q = r\sin.z$$

si troverà dopo semplici riduzioni:

$$\frac{p\,\text{sen}.\phi - q\cos.\phi}{p^2+q^2}\,d\phi = -\,dr\left[\frac{A_1}{r} + 2A_2\cos.z + 3A_3 r\cos.2z\right.$$

$$\left. + 4A_4 r^2\cos.3z + \text{ec.}\right] +$$

$$+\,dz[2A_2 r\sin.z + 3A_3 r^2\sin.2z + 4A_4 r^3\sin.3z + \text{ec.}],$$

ovvero integrando da ambe le parti indefinitamente:

$$\int\frac{p\sin.\phi - q\cos.\phi}{p^2+q^2}\,d\phi = -\,A_1\log.r - 2A_2 r\cos.z - 3A_3\frac{r^2\cos.2z}{2} - \text{ec.}$$

$$+ \text{cost.}$$

13. Gli integrali completi come sopra assegnati alle formole differenziali

$$d\phi\,\frac{(p\cos.\phi + q\sin.\phi)}{p^2+q^2},$$

$$d\phi\,\frac{(p\sin.\phi - q\cos.\phi)}{p^2+q^2}$$

ci somministreranno talvolta il mezzo per passare ai loro integrali definiti.

Per averne un esempio supponghiamo che quelle formole debbano estendersi tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \infty$. Per vedere cosa debba farsi nei secondi membri delle equazioni (40), (41) che rappresentano gli integrali completi delle formole di cui si tratta, riprenderemo le equazioni

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}; \qquad z = \text{arc. tang.}\ \frac{q}{p}$$

e di quì determineremo i valori di r e di z convenienti ai due limiti stabiliti. Se per esempio al limite $\phi=0$ si abbia $q=0$, ed al limite $\phi=\infty$ divenga $q=\infty$, è manifesto che al primo limite avremo $z=0$, ed al secondo limite $z=\frac{\pi}{2}$: quindi sostituendo nelle equazioni (40) (41) troveremo:

$$(44) \quad \int_0^{\infty}\frac{d\phi(p\cos.\phi+q\sin.\phi)}{p^2+q^2}=A_1\frac{\pi}{2}+2A_2 r-4A_4\frac{r^3}{3}+6A_6\frac{r^5}{5}-\text{ec.}$$

$$(45) \quad \int_0^{\infty}\frac{d\phi(p\sin.\phi-q\cos.\phi)}{p^2+q^2}=-A_1\log.r+3A_3\frac{r^2}{2}-5-A_5\frac{r^4}{4}+\text{ec.}$$

$$+A_1\log.p+2A_2 p+3A_3\frac{p^2}{2}+4A_4\frac{p^3}{3}+\text{ec.}$$

nei secondi membri delle quali equazioni deve farsi $r=\infty$; avvertendo altresì che nel secondo membro della equazione (45) deve farsi $\phi=0$ nel valore di p.

14. Ma per vedere anco più dappresso come nei casi particolari si debba procedere, riprendiamo la formola differenziale

$$\frac{d\phi(p\cos.\phi+q\sin.\phi)}{p^2+q^2}$$

ove p, q sono funzioni date di ϕ; e proponghiamoci di integrarla indefinitamente.

Noi faremo

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

e supporremo poi

$$u=e^{\phi\sqrt{-1}}.$$

Tra queste due equazioni eliminando ϕ, noi giungeremo ad una equazione tra u ed x che supporremo risoluta rapporto ad u onde si abbia $u=\Psi x$. Quindi sempre chè ciò sia possibile, svolgeremo la funzione Ψx in serie per le potenze intere e positive di x; e ne dedurremo:

$$u = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \text{ec.}$$

E calcolati i coefficienti

$$\mathrm{A},\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \text{ec.}$$

il problema sarà risoluto, ed avremo:

$$\int \frac{d\varphi(p\cos.\varphi + q\sin.\varphi)}{p^2+q^2} = \mathrm{A}_1 z + 2\mathrm{A}_2 r\sin.z + 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2\sin.2z}{2} + 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3\sin.3z}{3}$$
$$+ \text{ec.} \ldots\ldots + \text{cost.}$$

E sarà pure

$$\int \frac{d\varphi(p\sin.\varphi - q\cos.\varphi)}{p^2+q^2} = -\mathrm{A}_1 \log.r - 2\mathrm{A}_2 r\cos.z - 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2\cos.2z}{2}$$
$$- 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3\cos.3z}{3} - \text{ec.} \ldots\ldots + \text{cost.}$$

essendo

$$r = \sqrt{p^2+q^2}, \qquad z = \text{arc. taug.} \frac{q}{p}.$$

15. Riprendiamo presentemente la formola (44)

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(p\cos.\varphi + q\sin.\varphi)}{p^2+q^2} = \mathrm{A}_1 \frac{\pi}{2} + 2\mathrm{A}_2 r - 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3}{3} + 6\mathrm{A}_6 \frac{r^5}{5} - \text{ec.}$$

ove nel secondo membro deve farsi $r = \infty$.

I coefficienti A_1, A_2, A_4, ec. dipendono dalla evoluzione della funzione Ψx formata con la regola quì sopra stabilita, in modo che sia

$$\Psi x = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x^3 + \mathrm{A}_4 x^4 + \text{ec.}$$

Ora è manifesto che noi avremo:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d[\Psi(r\sqrt{-1})+\Psi(-r\sqrt{-1})]}{r}=2A_2r-4A_4\frac{r^3}{3}+6A_6\frac{r^5}{5}-\text{ec.}$$

purchè gli integrali si facciano principiare da $r=0$.

Onde per il caso di $r=\infty$ si avrà

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{d[\Psi(r\sqrt{-1})+\Psi(-r\sqrt{-1})]}{r}=2A_2r-4A_4\frac{r^3}{3}+6A_6\frac{r^5}{5}-\text{ec.}$$

E per tanto avremo, sostituendo:

$$(46)\quad\int_0^\infty\frac{d\phi(p\cos.\phi+q\sin.\phi)}{p^2+q^2}=A_1\frac{\pi}{2}+\int_0^\infty\frac{dr[\Psi'(r\sqrt{-1})-\Psi'(-r\sqrt{-1})]}{2r\sqrt{-1}}$$

facendo per semplicità $\Psi'y=\frac{d\Psi y}{dy}$.

Se adopreremo analoghe riduzioni per la formola integrale $\int_0^\infty d\phi\frac{(p\sin.\phi-q\cos.\phi)}{p^2+q}$ che nell'articolo 13 è determinata dalla equazione (45), noi troveremo:

$$(47)\quad\int_0^\infty\frac{d\phi(p\sin.\phi-q\cos.\phi)}{p^2+q^2}=\int_0^\beta\frac{\Psi'p.dp}{p}-\int_0^\infty\frac{dr[\Psi'(r\sqrt{-1})+\Psi'(-r\sqrt{-1})]}{2r}$$

essendo β quello che p diviene quando vi si ponga $\phi=0$.

Se fosse, per un esempio semplicissimo, $p=a$, $q=\phi$, essendo a una costante, noi dovremo secondo le prescrizioni dell' articolo 14 stabilire

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

$$u=e^{\phi\sqrt{-1}}$$

ovvero pel caso nostro:

$$x=a+\phi\sqrt{-1}$$

$$u=e^{\phi\sqrt{-1}}$$

e quindi dedurre la equazione $u=\Psi x$ che nel caso nostro sarà

$$u = \Psi x = e^{-a} \cdot e^{x}.$$

Indi risolvendo in serie per le potenze ascendenti di x la funzione Ψx in modo che si abbia

$$\Psi x = A + A_1 x + A_2 x^2 + \text{ec.}$$

noi avremo: $A = e^{-a}$; $A_1 = e^{-a}$, $A_2 = \frac{e^{-a}}{2}$, ec.; e sarà pure

$$\frac{\Psi'(r\sqrt{-1}) - \Psi'(-r\sqrt{-1})}{2r\sqrt{-1}} = e^{-a} \frac{\sin. r}{r}$$

$$\frac{\Psi'(r\sqrt{-1}) + \Psi'(-r\sqrt{-1})}{2r} = e^{-a} \frac{\cos. r}{r}$$

$$\frac{\Psi' p}{p} = \frac{e^{-a} \cdot e^{p}}{p}; \quad \beta = a.$$

Con queste determinazioni sostituendo nelle equazioni (46), (47), troveremo:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\phi(a\cos.\phi + \phi\sin.\phi)}{a^2 + \phi^2} = e^{-a} \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^{\infty} \frac{\sin. r}{r} dr \right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\phi(a\sin.\phi - \phi\cos.\phi)}{a^2 + \phi^2} = e^{-a} \left[\int_0^{a} \frac{e^{p}\, dp}{p} - \int_0^{\infty} \frac{\cos. r dr}{r} \right].$$

È inutile di avvertire che nell'esempio qui sopra scelto si verificano appunto le condizioni espresse nell' articolo 13; in grazia delle quali la quantità $\frac{q}{p}$ deve annullarsi e diventar infinita quando rispettivamente si faccia $\phi = 0$, $\phi = \infty$.

16. Per altro esempio sia data la formola differenziale

$$\frac{d\phi(m(am-1)\cos.\phi + m\cos.(m-1)\phi)}{(am-1)^2 + 2(am-1)\cos.m\phi + 1}$$

di cui vogliasi l' integrale completo col metodo dell' articolo 14. Potrà essa mettersi sotto la forma

$$\frac{d\phi(p\cos.\phi + q\sin.\phi)}{p^2 + q^2}$$

facendo

$$p = \frac{\cos.m\phi + am - 1}{m}$$

$$q = \frac{\sin.m\phi}{m}.$$

Quindi dovremo stabilire:

$$\frac{\cos.m\phi + am - 1}{m} + \sqrt{-1}\,\frac{\sin.m\phi}{m} = x$$

$$u = e^{\phi\sqrt{-1}}.$$

Ed eliminando ϕ si otterrà tra u ed x la equazione

$$u^m = 1 - ma + mx$$

dalla quale risolvendo in serie dedurremo:

$$u = (1-ma)^{\frac{1}{m}}\left[1 + \frac{x}{1-ma} + \frac{1-m}{2(1-ma)^2}x^2 + \frac{(1-m)(1-2m)}{2.3(1-ma)^3}x^3 + \text{ec.}\right]$$

onde avremo per le denominazioni che abbiamo usate nell'articolo 14,

$$A = (1 - ma)^{\frac{1}{m}}$$

$$A_1 = (1 - ma)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{1-ma}$$

$$A_2 = (1 - ma)^{\frac{1}{m}} \frac{(1-m)}{2.3(1-ma)^2}$$

$$\vdots$$

$$A_n = (1 - ma)^{\frac{1}{m}} \frac{(1-m)(1-2m)\ldots\ldots(1-(n-1)m)}{2.3\ldots\ldots n(1-ma)^n}$$

E per tanto sarà:

$$(48) \qquad \int \frac{d\varphi(m(am-1)\cos.\varphi + m\cos.(m-1)\varphi)}{(am-1)^2+2(am-1)\cos.m\varphi+1} = (1-ma)^{\frac{1}{m}} \Big[\frac{z}{1-ma}$$

$$+ \frac{(1-m)}{2(1-ma)^2} 2r\sin z + \frac{(1-m)(1-2m)}{2.3\,(1-ma)^3} \cdot \frac{3}{2} r^2 \sin 2z$$

$$+ \frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)}{2.3.4(1-ma)^4} \cdot \frac{4}{3} r^3 \sin.3z + \text{ec.} \Big] + \text{cost.}$$

ove $r = \sqrt{p^2+q^2}$; $z = \text{arc. tang.}\,\frac{q}{p}$, ovvero nel caso nostro:

$$r = \frac{1}{m}\sqrt{[(am-1)^2 + 2(am-1)\cos.m\varphi + 1]}$$

$$z = \text{arc. tang.}\,\frac{\sin.m\varphi}{\cos.m\varphi + am - 1}\,.$$

17. Così avremo espresso in serie l' integrale completo della proposta formola. Se vorremo passare al di lei integrale definito estendendolo tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{m}$, noi troveremo

$$(49) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{d\varphi(m(am-1)\cos.\varphi + m\cos.(m-1)\varphi)}{(am-1)^2+2(am-1)\cos.m\varphi+1} = (1-ma)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{\pi}{1-ma}.$$

L' integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{d\varphi(a\cos.\varphi + \varphi\sin.\varphi)}{a^2+\varphi^2} = \pi e^{-a}$$

non è che un caso particolare della precedente formola (49).

Facciamo in essa $m = 0$. In tal caso la funzione

$$\frac{m(am-1)\cos.\varphi + m\cos.(m-1)\varphi}{(am-1)^2+2(am-1)\cos.m\varphi+1}$$

diverrà $\frac{0}{0}$. Cercandone il valore con i metodi noti, lo troveremo $= \frac{a\cos.\varphi + \varphi\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}$.

Per il caso di $m=0$ è noto dalla dottrina degli esponenziali che

$$(1 - ma)^{\frac{1}{m}} = e^{-a}.$$

Pertanto sarà sostituendo:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\varphi(a\cos.\varphi + \varphi\sin.\varphi)}{a^2+\varphi^2} = \pi e^{-a}.$$

18. Nella serie (48) facciamo $a=0$. Per questo particolare caso sarà

$$r = \frac{\sqrt{2}}{m}\sqrt{(1-\cos.m\phi)}; \quad z = -\text{Arc. tang.} \frac{\sin.m\phi}{1-\cos.m\phi}$$

ovvero:

$$r = -\frac{2}{m}\sin.\frac{m\phi}{2};$$

$$z = -\text{Arc. tang.} \frac{\sin.\frac{m}{2}\phi\cos.\frac{m}{2}\phi}{\overline{\sin.\frac{m}{2}\phi}^2} = \frac{m\phi - \pi}{2}.$$

Quindi avremo, facendo le corrispondenti mutazioni nella serie (48)

$$(50) \quad m\int\frac{d\phi(\cos.(m-1)\phi - \cos.\phi)}{2(1-\cos.m\phi)} = \frac{m\phi}{2} + 2\frac{(1-m)}{m}.\sin.\frac{m\phi}{2}.\cos.\frac{m\phi}{2}$$

$$-\frac{2^2(1-m)(1-2m)}{2^2.m^2}.\sin.\overline{\frac{m\phi}{2}}^2\sin.m\phi$$

$$-\frac{2^3(1-m)(1-2m)(1-3m)}{2.3^2m^3}.\sin.\overline{\frac{m\phi}{2}}^3\cos.3\frac{m\phi}{2}$$

$$+\frac{2^4(1-m)(1-2m)(1-3m)(1-4m)}{2.3.4^2.m^4}.\sin.\overline{\frac{m\phi}{2}}^4.\sin.2m\phi + \text{ec.} + \text{cost.}$$

Da questo risultato noi potremo dedurre alcune conseguenze.

Poichè esso rappresenta l'integrale completo della formola

$$\frac{md\varphi(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}$$

noi potremo concluderne il definito tra limiti determinati. Siano i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{m}$; e noi dedurremo tosto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} d\varphi.\frac{m(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}=\frac{\pi}{2}.$$

Se faremo $m=0$, in tal caso la formola

$$\frac{m(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}$$

diverrà $\frac{0}{0}$. Cercandone il valore in questo caso, noi lo troveremo $=\frac{\sin.\varphi}{\varphi}$; onde sarà:

$$\int_0^{\infty} d\varphi.\frac{\sin.\varphi}{\varphi}=\frac{\pi}{2}.$$

Che se per il caso di $m=0$ vorremo l'integrale indefinito e completo della formola $d\varphi.\frac{m(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}$, ci òconseguiremo dalla equazione (50) ove notandosi che quando sia $m=0$ si ha $\frac{\sin.\frac{m\varphi}{2}}{m}=\frac{\varphi}{2}$, otterremo:

$$\int d\varphi.\frac{\sin.\varphi}{\varphi}=\text{cost.}+\varphi-\frac{\varphi^3}{2.3^2}+\frac{\varphi^5}{2.3.4.5^2}-\text{ec.}$$

come deve essere.

Potremo anche avvertire che la precedente equazione

(48) ove si faccia $1-ma=b$, si muterà nella seguente più semplice:

$$(51)\qquad m\int\frac{d\varphi(\cos.(m-1)\varphi-b\cos.\varphi)}{b^2-2b\cos.m\varphi+1}=b^{\frac{1}{m}}\Big[\frac{z}{b}+\frac{(1-m)}{2b^2}\,.\,2r\sin.z$$

$$+\frac{(1-m)(1-2m)}{2.3.b^3}\,.\,\frac{3}{2}\,r^2\sin.2z+\ldots..$$

$$+\frac{(1-m)(1-2m)\ldots..(1-nm)}{2.3\ldots(n+1)b^{n+1}}\,.\,\frac{n+1}{n}\,r^n\sin.nz+\text{ec.}\Big]+\text{cost.}$$

ove sarà

$$r=\frac{1}{m}\sqrt{(b^2-2b\cos.m\varphi+1)}$$

$$z=\text{Arc.tang.}\frac{\sin.m\varphi}{\cos.m\varphi-b}\,.$$

Dalla quale potremo dedurre espresso in un numero finito di termini l' integrale completo della formola differenziale

$$\frac{d\varphi(\cos.(m-1)\varphi-b\cos.\varphi)}{b^2-2b\cos.m\varphi+1}$$

ogni qualvolta m sia una quantità della forma $\frac{1}{n}$ ed n un numero intero e positivo qualunque.

Osservazioni sopra la convergenza delle Serie.

19. Nei precedenti articoli abbiamo dedotto qualche volta l' integrale definito di una formola differenziale dal suo integrale indefinito espresso in serie. Per questi casi abbiamo tenuta presente la condizione (ed ognuno potrà accertarsi che ella si verifica nei particolari esempj di sopra trattati) che le serie messe in uso risultino convergenti nella estensione assegnata all'integrale; che se una tal condizione si fosse negletta, non avremmo potuto contare sulla esattezza delle formole a cui si fosse pervenuti. Infatti, e per servirmi del-

la adequata espressione di alcuni illustri geometri, una serie divergente non ha somma: ovvero ciò che viene allo stesso, manca di limite: e quindi tornerebbe fallace ogni conseguenza che si traesse dalla supposta esistenza o cognizione di quel limite.

Possono vedersi a tal proposito le eccellenti riflessioni dei celebri Poisson e Cauchy (*), alle quali potranno aggiungersi le seguenti per sempre meglio convincerne, che senza rischio di cadere in errore non si potranno mai nel calcolo integrale ammettere le serie, se prima non siasi certi della loro convergenza e della loro estensione.

20. Abbiamo la equazione identica:

$$ax\sin.ax = -\frac{(e^{2ax\sqrt{-1}}-1)}{2e^{ax\sqrt{-1}}}\log.(1+e^{ax\sqrt{-1}})$$

$$-\frac{(e^{-2ax\sqrt{-1}}-1)}{2e^{-ax\sqrt{-1}}}\log.(1+e^{-ax\sqrt{-1}})$$

che facilmente si verifica in grazia dei noti rapporti tra le funzioni del circolo e gli esponenziali imaginarj.

Se dei due termini che compongono il secondo membro risolveremo in serie il primo per le potenze di $e^{ax\sqrt{-1}}$, e l' altro per le potenze di $e^{-ax\sqrt{-1}}$, noi troveremo immediatamente:

$$(52) \qquad ax\sin.ax = 1 - \frac{\cos.ax}{2} - \frac{2\cos.2ax}{2^2-1} + \frac{2\cos.3ax}{3^2-1} - \frac{2\cos.4ax}{4^2-1} + \text{ec.}$$

ove la legge è manifesta.

A questa serie potremmo giungere anche per altra via. Se di fatti stabiliremo:

(*) Poisson, Mémoire sur les intégrales definies; Journal Polytechnique 19. cahier. Cauchy. Cours d'Analyse.

$$ax\sin.ax = A_0 + A_1\cos.ax + A_2\cos.2ax + \ldots + A_m\cos.max + \text{ec.}$$

noi potremo da ambe le parti moltiplicare per $\cos.max$, ed integrar poi tra i limiti $x=0$, $ax=\pi$; e quindi facilmente troveremo:

$$A_0 = 1\,;\quad A_1 = -\tfrac{1}{2}\,;\quad A_m = -\frac{2\cos.m\pi}{m^2-1}\,.$$

Le quali determinazioni ci ricondurranno alla serie precedente.

Or moltiplicando tutti i termini di questa serie per $\frac{dx}{1+x^2}$, ed integrando tra i limiti $x=0$, $x=\infty$ noi otteremo:

$$(53)\qquad \int_0^\infty \frac{adx.x\sin.ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{e^{-a}}{2}\right)$$
$$-\pi\left(\frac{e^{-2a}}{2^2-1} - \frac{e^{-3a}}{3^2-1} + \frac{e^{-4a}}{4^2-1} - \frac{e^{-5a}}{5^2-1} + \text{ec.}\right)$$

la quale risulta dal sostituire in luogo del termine della forma $\int_0^\infty \frac{dx\cos.hax}{1+x^2}$ il suo valore $\frac{\pi}{2}.e^{-ha}$.

La serie che nella formola precedente stà compresa tra le parentesi può facilmente sommarsi. Infatti noi abbiamo:

$$\frac{e^{-2a}-1}{2e^{-a}}\log.(1+e^{-a}) + \frac{2-e^{-a}}{4} = \frac{e^{-2a}}{2^2-1}$$
$$-\frac{e^{-3a}}{3^2-1} + \frac{e^{-4a}}{4^2-1} - \text{ec.}$$

Pertanto sarà, sostituendo:

$$\int_0^\infty \frac{xdx\sin.ax}{1+x^2} = \frac{e^a - e^{-a}}{2a}\,.\,\pi\log.(1+e^{-a}).$$

Il qual risultato è erroneo, e non ha veruna analogia con quello conosciuto e che si ottiene differenziando rapporto ad a la equazione:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx \cos. ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-a}.$$

22. L'errore è derivato dall'uso che abbiamo fatto della serie (52), che si è supposto potersi legittimamente adoprare per tutta la estensione dell'integrale: e vale a dire per tutti i valori di x compresi tra $x=0$, ed $x=\infty$: mentre invero la detta serie non si estende di gran lunga a tanto intervallo.

Per assicurarci di ciò dedurremo la serie (52) da altra origine.

È nota la serie

$$\frac{ax}{2} = \sin ax. - \frac{\sin. 2ax}{2} + \frac{\sin 3ax}{3} - \frac{\sin. 4ax}{4} + \text{ec.}$$

Se d'ambe le parti moltiplicheremo per $\sin. ax$, avremo una seconda serie il cui termine generale sarà

$$\pm \frac{\sin. hax. \sin ax}{h} = \pm \frac{(\cos (h-1)x - \cos. (h+1)x)}{2h}$$

ove il segno superiore conviene ad h dispari, e l'inferiore ad h pari.

Avremo pertanto:

$$ax \sin. ax = 1 - \frac{\cos. ax}{2} - \frac{2\cos 2ax}{2^2-1} + \frac{2\cos. 3ax}{3^2-1} - \text{ec.}$$

come sopra trovammo.

Ora è dimostrato rigorosamente che la serie

$$\frac{ax}{2} = \sin. ax - \frac{\sin. 2ax}{2} + \frac{\sin. 3ax}{3} - \text{ec.}$$

sussiste unicamente per i valori di x compresi tra i limiti $x = -\frac{\pi}{a}$, $x = \frac{\pi}{a}$ esclusi i limiti stessi. E quindi negli stessi confini sarà ristretta la serie (52): nè pertanto sarà maraviglia se inopportunamente estendendola a tutti i valori di x

compresi tra zero e l'infinito siamo giunti nel precedente articolo ad un resultato erroneo.

23. All'arco qualunque ax possono appartenere una infinità di serie che lo rappresentino, e procedenti per i seni degli archi molteplici di ax.

Una tale indeterminazione può facilmente riconoscersi dalla seguente riduzione. Sia m un numero intero qualunque, noi avremo la identità:

$$e^{2max\sqrt{-1}}=\frac{(c_1+e^{ax\sqrt{-1}})(c_2+e^{ax\sqrt{-1}})(c_3+e^{ax\sqrt{-1}})\ldots(c_{2m}+e^{ax\sqrt{-1}})}{(c_1+e^{-ax\sqrt{-1}})(c_2+e^{-ax\sqrt{-1}})(c_3+e^{-ax\sqrt{-1}})\ldots(c_{2m}+e^{-ax\sqrt{-1}})}$$

purchè $c_1,\ c_2,\ c_3,\ldots\ldots c_{2m}$ siano le $2m$ radici di una equazione reciproca del grado $2m$ della forma

$$0=1+p_1y+p_2y^2+\ldots\ldots+p_2y^{2m-2}+p_1y^{2m-1}+y^{2m}$$

ove $p_1,\ p_2,\ldots p_m$ siano quantità qualunque.

Indi consegue che se col segno $S^{(k)}$ dinoteremo la somma delle potenze k^{esime} delle $2m$ radici della quì sopra assegnata equazione algebrica: cosicche si abbia

$$S^{(k)}=c_1^k+c_2^k+c_3^k+\ldots\ldots+c_{2m}^k$$

l'arco ax risulterà espresso dalla seguente serie:

(54) $$max=S^{(1)}\sin.ax-\frac{S^{(2)}}{2}\sin.2ax+\frac{S^{(3)}}{3}\sin.3ax-\text{ec.}$$

la quale per la natura delle radici delle equazioni reciproche sarà necessariamente divergente.

Moltiplicando d'ambe le parti per cos.ax otterremo:

$$2max.\cos.ax = S^{(1)}(1-\cos.2ax) - \frac{S^{(2)}}{2}(\cos.ax - \cos.3ax)$$

$$+\frac{S^{(3)}}{3}(\cos.2ax - \cos.4ax) - \text{ec.}$$

Quindi nuovamente moltiplicando per $\frac{dx}{1+x^2}$ ed integrando rapporto ad x tra i limiti $x=0$, $x=\infty$ si avrà:

$$\frac{4m}{\pi}\int_0^\infty \frac{ax \sin.ax.dx}{1+x^2} = (e^{a} - e^{-a})\left(S^{(1)}e^{-a} - \frac{S^{(2)}}{2}e^{-2a}\right.$$

$$\left. + \frac{S^{(3)}}{3}e^{-3a} - \frac{S^{(4)}}{4}e^{-4a} + \text{ec.}\right).$$

Ma poichè le quantità $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_{2m}$ sono le $2m$ radici della equazione reciproca del grado $2m$

$$0 = 1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots + p_2 y^{2m-2} + p_1 y^{2m-1} + y^{2m}$$

così noi pure avremo:

$$(55) \qquad \frac{4m}{\pi}\int_0^\infty \frac{ax \sin.ax}{1+x^2}\, dx =$$

$$(e^{a} - e^{-a})\log.(1 + p_1 e^{-a} + p_2 e^{-2a} + \ldots + p_1 e^{-(2m-1)a} + e^{-2ma})$$

ove $p_1, p_2, \ldots p_m$ sono quantità qualunque.

A tale assurdo ci condurrebbe l' adoperare la serie non convergente (54): la quale ciò nonostante, ed attesa appunto la sua indeterminazione potrebbe in infiniti casi condurne a resultati esatti.

Se per esempio le quantità arbitrarie $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_m$ fossero tra di loro dipendenti in virtù della equazione

$$1 + p_1 e^{-a} + p_2 e^{-2a} + \ldots\ldots + p_1 e^{-(2m-1)a} + e^{-2ma} = e^{\frac{2ma}{e^{a} - e^{-a}}}$$

in tal caso la equazione (55) ci condurrebbe al vero. Ma tali anomalie provano vie meglio l' incertezza che sempre deriva dall' uso delle serie divergenti: e come elleno non possano nell' analisi essere di uso nessuno.

24. Essendo u la funzione generatrice di una data equazione differenziale tra y_x ed x il cel. Laplace dà per determinarne l' integrale il metodo seguente.

Poichè u è la funzione generatrice di y_x noi avremo:

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots\ldots + y_x t^x + \text{ec.}$$

Facciamo in questa equazione $t = e^{z\sqrt{-1}}$ e sia U quello che u diviene in virtù di tale sostituzione. Indi moltiplicando la equazione risultante per $e^{-xz\sqrt{-1}}$ ed integrando si avrà

$$\int \mathrm{U} dz . e^{-xz\sqrt{-1}} = \int dz [y_0 e^{-xz\sqrt{-1}} + y_1 e^{-(x-1)z\sqrt{-1}}$$

$$+ y_2 e^{-(x-2)z\sqrt{-1}} + \text{ec.} + \ldots\ldots + y_x + y_{x+1} e^{z\sqrt{-1}} + \text{ec.}].$$

Se ora estenderemo gli integrali tra i limiti $z = -\pi$, $z = \pi$, è manifesto che il secondo membro si riduce a $2\pi y_x$, e che quindi avremo:

$$y_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathrm{U} . dz \, e^{-xz\sqrt{-1}}$$

Si veda la prima parte della Teoria Analitica delle probabilità art. 21.

Ma questo metodo non è esatto e può facilmente condurre in errore.

Per averne un esempio semplicissimo ponghiamo

$$u = \frac{2t}{nt^2 + 2t + n}$$

n essendo una quantità qualunque. Sia y_x il coefficiente di t^x nello sviluppo di u per le potenze intere e positive di t. Se dalla cognizione della funzione generatrice u vorremo aver quella del coefficiente y_x, noi faremo.

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots\ldots + y_x t^x + \ldots\ldots + y_\infty t^\infty .$$

Ed adoperando il metodo del Laplace troveremo:

$$y_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos.xzdz}{1+n\cos.z} - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin.xz.dz}{1+n\cos.z}.$$

Ora è evidente che l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin.xz.dz}{1+n\cos.z}$ è nullo per identità: poichè di esso gli elementi negativi sono distrutti dagli equivalenti positivi.

Abbiamo inoltre identicamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos.xz.dz}{1+n\cos.z} = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\cos.xz.dz}{1+n\cos.z}.$$

Ma nel caso di $n<1$ sappiamo per i conosciuti teoremi di Euler che

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\cos.xz.dz}{1+n\cos.z} = \pm \frac{\pi}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x.$$

ove il segno superiore deve preferirsi nel caso dell' esponente pari, e l' inferiore nel dispari.

Pertanto dedurremo

$$y_x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x.$$

Il qual risultato è falso, poichè dalla dottrina delle serie ricorrenti noi abbiamo, qualunque sia n

$$y_x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x - \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x\right].$$

25. È facile di riconoscere che la sorgente dell' errore stà nella mancanza di convergenza della serie adoprata.

Infatti riprendendo le denominazioni di sopra usate, la funzione generatrice u diverrà U postovi $e^{z\sqrt{-1}}$ in luogo di t; e la funzione U si svolgerà nella serie

$$(56)\quad \mathrm{U} = y_0 + y_1 \cos.z + y_2 \cos.2z + y_3 \cos.3z + \ldots\ldots + y_x \cos.xz + \text{ec.}$$
$$+ \sqrt{-1}\,(y_1 \sin.z + y_2 \sin.2z + \ldots\ldots + y_x \sin.xz + \text{ec.})$$

dalla quale, se non sarà convergente, non potremo ricavare alcun profitto.

Così nel caso particolare in cui

$$u = \frac{2t}{nt^2 + 2t + n}$$

noi sappiamo dalla dottrina delle serie ricorrenti che

$$y_x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \left(a^x - \frac{1}{a^x} \right)$$

ove $a = \frac{1 - \sqrt{1-n^2}}{n}$. Quindi la serie (56) è essenzialmente divergente: nè potremmo per conseguenza farne uso senza incorrere in errore.

In altri casi potremmo usare bensì la serie analoga e corrispondente alla (56) quando chè fosse ella convergente: ma di ciò non saremmo certi senza conoscere preventivamente il valore di y_x da cui dipende la convergenza o la divergenza della serie di che si tratta. Ma quel metodo è diretto appunto a determinare il valore di y_x: onde il metodo stesso esige per essere adoperato la cognizione di ciò che si cerca; esso è pertanto inammissibile nell' analisi, meno che nei casi evidenti in cui la serie terminandosi non sia d'uopo aver riguardo al residuo di lei, perchè si tratti di funzioni razionali ed intere.

26. Per maggiore chiarezza di ciò, riprendiamo l'esempio

$$u = \frac{2t}{nt^2 + 2t + n}.$$

Svolgendo in serie per le potenze di t, e tenendo conto dei residui, e per semplicità facendo

$$a = 1 - \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}$$

noi avremo identicamente:

$$\frac{2t}{nt^2+2t+n} = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)t - \left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)t^2 + \text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\pm\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)t^x \mp \text{ec.}\ldots\pm\left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)t^m\right]$$

$$\pm\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}}\,\frac{\left(a^{m+1}-\frac{1}{a^{m+1}}\right)t^m + \left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)t^{m+1}}{1+\frac{n}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}.$$

Se in questa equazione faremo $t=e^{z\sqrt{-1}}$; quindi $t=e^{-z\sqrt{-1}}$ noi troveremo aggiungendo i resultati, la seguente equazione vera pur' essa per identità:

$$(57)\quad \frac{1}{1+n\cos.z} = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)\cos.z - \left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)\cos.2z + \text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\pm\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)\cos.xz \mp \text{ec.}\ldots\pm\left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)\cos.mz\right]$$

$$\pm\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}}\,\frac{\left(a^{m+1}-\frac{1}{a^{m+1}}\right)\cos.mz + \left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)\cos.(m+1)z}{1+n\cos.z}.$$

Se d'ambe le parti moltiplicheremo per $\cos.xz.dz$, e prenderemo poi gli integrali tra i limiti $z=0$, $z=\pi$, otterremo l'altra identità:

$$\int_0^\pi \frac{dz\cos.xz}{1+n\cos.z}=\mp\frac{\pi}{\sqrt{1-n^2}}\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)$$

$$\pm\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}}\left(a^{m+1}-\frac{1}{a^{m+1}}\right)\int_0^\pi\frac{dz\cos.mz.\cos.xz}{1+n\cos.z}$$

$$\pm\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}}\left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)\int_0^\pi\frac{dz\cos.(m+1)z\cos.xz}{1+n\cos.z}$$

ove m ed x sono numeri interi, ed $m>x$.

Ma per quanto la m si faccia crescere, e si estenda anche all' infinito, non potremo giammai dalla quazione precedente concludere che il secondo membro si riduca al suo primo termine, come inopportunamente si dedurrebbe se non si facesse attenzione al residuo della serie (57).

Questa serie ammette per altro una trasformazione molto utile per l' oggetto di cui si tratta.

Sarà facilissimo di verificare la identità seguente:

$$0=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\Big[1-\left(a+\frac{1}{a}\right)\cos.z+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\cos.2z$$

$$-\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\cos.3z+\text{ec.}\ldots\ldots\pm\left(a^x+\frac{1}{a^x}\right)\cos.xz+\text{ec.}$$

$$\ldots\ldots\pm\left(a^m+\frac{1}{a^m}\right)\cos.mz\Big]$$

$$\mp\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}}\cdot\frac{\left(a^{m+1}+\frac{1}{a^{m+1}}\right)\cos.mz+\left(a^m+\frac{1}{a^m}\right)\cos.(m+1)z}{1+n\cos.z}.$$

Se aggiungeremo questa identità alla equazione (57) vera pur essa per identità, otterremo una terza identità, e sarà la seguente:

$$\frac{1}{1+n\cos.z}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\big[1-2a\cos.z+2a^2\cos.2z-2a^3\cos.3z+\text{ec.}\ldots\ldots$$

$$\pm 2a^x\cos.xz\mp\text{ec.}\ldots\ldots\pm 2a^m\cos.mz\big]\mp$$

$$\mp \frac{na^m}{\sqrt{1-n^2}} \frac{a\cos.mz+\cos.(m+1)z}{1+n\cos.z}.$$

Se moltiplicheremo per $\cos.xzdz$, e quindi integreremo tra i limiti $z=0$, $z=\pi$ si avrà

$$\int_0^\pi \frac{dz\cos.xz}{1+n\cos.z} = \pm \frac{a^x}{\sqrt{1-n^2}} \mp \frac{na^m}{\sqrt{1-n^2}} \int \frac{dz(a\cos.mz+\cos.(m+1)z)\cos.xz}{1+n\cos.z}$$

ora noi abbiamo:

$$n < 1;\ a = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$$

quindi sarà sempre $a < 1$.

Poichè pertanto la precedente equazione sussiste comunque grande si supponga m, noi faremo $m=\infty$, e ne dedurremo rigorosamente:

$$\int_0^\pi \frac{dz\cos.xz}{1+n\cos.z} = \pm \frac{a^x}{\sqrt{1-n^2}}.$$

come è noto.

27. Le osservazioni precedenti debbono tenersi presenti quando si facesse uso delle equazioni (40), (41); e che da queste si volessero dedurre gli integrali definiti delle formole

$$\frac{p\cos.\varphi+q\sin.\varphi}{p^2+q^2}\,d\varphi\,,\quad \frac{p\sin.\varphi-q\cos.\varphi}{p^2+q^2}\,d\varphi$$

come appunto si è fatto negli articoli 13. 15. tra i limiti $\varphi=0$ $\varphi=\infty$; cosicchè le riduzioni ivi riferite cesseranno di essere dimostrate quando le serie d'onde sono dedotte non siano convergenti in tutta la estensione dell'integrale.

Converrà pertanto ricorrere ai noti criterj della convergenza e della estensione delle serie.

Supponghiamo infatti che l'integrale indefinito $\int F\varphi.d\varphi$, ove $F\varphi$ è una funzione qualunque di φ, sia determinato dalla serie

$$\int F\varphi . d\varphi = A_1 z + A_2 r \sin . z + A_3 r^2 \sin . 2z + A_4 r^3 \sin . 3z + \text{ec.} + \text{cost.}$$

ove z, r siano funzioni date di φ.

Or perchè questa serie riesca convergente, è necessario in primo luogo che all' indefinito accrescersi di n la quantità $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ si avvicini ad un fisso limite; e chiamato Δ questo limite, la nostra serie sarà convergente quando il valore della quantità r rapporto a cui è ordinata resti, per tutta la estensione dell' integrale, compresa tra i limiti $-\frac{1}{\Delta}$, $\frac{1}{\Delta}$.

28. Così per esempio se sia data la funzione Fy la quale ridotta in serie per le potenze di y ci dia:

$$Fy = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3 + \ldots\ldots + b_\infty y^\infty$$

noi avremo manifestamente:

$$\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} F e^{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} F e^{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}}{2} = b_1 \cos . \varphi \tag{58}$$

$$+ b_2 e^{\cos . \varphi} \cos . (\varphi + \sin . \varphi) + b_3 e^{2\cos . \varphi} \cos . (\varphi + 2 \sin . \varphi)$$

$$+ b_4 e^{3\cos . \varphi} \cos . (\varphi + 3 \sin . \varphi) + \text{ec.}$$

e la serie contenuta nel secondo membro sarà convergente quando, chiamato Δ il limite di $\frac{b_{m+1}}{b_m}$ rispetto all' accrescimento di m, la quantità ϕ sia tale che l'esponenziale $e^{\cos.\phi}$ rimanga compreso per tutta la estensione della variabile, tra i limiti $-\frac{1}{\Delta}$, $\frac{1}{\Delta}$, ovvero in questo caso, inferiore al limite $\frac{1}{\Delta}$; poichè ϕ ritenuta come quantità reale, non potrebbe l'esponenziale divenire negativo.

Poichè e sarà il massimo valore di $e^{\cos.\phi}$, noi concluderemo che se la variabile ϕ avrà nella sua estensione il valore $2m\pi$, potendo m essere anco $=0$, la serie precedente convergerà quando si abbia $\Delta < \frac{1}{e}$.

Ciò premesso; e moltiplicando la equazione (58) per $d\phi$, ed integrando poi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$ noi osserveremo che qualunque sia h abbiamo evidentemente:

$$\int_0^\pi d\phi . e^{h\cos\phi} \cos.(\phi + h\sin.\phi) = 0$$

e quindi si dedurrà

$$(59) \quad \int_0^\pi d\phi \left(e^{\phi\sqrt{-1}} \mathrm{F} e^{e^{\phi\sqrt{-1}}} + e^{-\phi\sqrt{-1}} \mathrm{F} e^{e^{-\phi\sqrt{-1}}} \right) = 0$$

ove la condizione $\Delta < \frac{1}{e}$ stabilirà le restrizioni cui dovranno assoggettarsi le costanti comprese nella funzione $\mathrm{F}y$ affinchè la equazione (59) risulti dimostrata.

Per un caso semplicissimo si assuma $\mathrm{F}y = \frac{1}{1-ay}$. Ripetendo il calcolo sopra questa formula, si troverà $\frac{b_{m+1}}{b_m} = a$, quindi la quantità $e^{\cos.\phi}$ dovrà rimanere in tutta la estensione dell'integrale, inferiore al limite $\frac{1}{a}$; onde se l' integrale si estenda da $\phi=0$ sino a $\phi=\pi$ è manifesto, che la quantità a dovrà rimanere ella medesima inferiore ad $\frac{1}{e}$. E perchè nulla vieta che a possa esser negativa, noi comprenderemo i due casi in una condizione sola, e supporremo che a resti intercetta tra i limiti $-\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e}$.

Il che ritenuto, la formola $(59')$ diverrà nell'attuale caso

$$\int_0^\pi d\phi.\frac{\cos.\phi+ae^{\cos.\phi}\cos.(\phi-\sin.\phi)}{1+2ae^{\cos.\phi}\cos.\sin.\phi+a^2e^{2\cos.\phi}}=0.$$

29. Abbiamo tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$\int_0^\pi d\phi.e^{-a\cos.\phi}\cos.a\sin.\phi=\pi.$$

Questa riduzione, dovuta io credo al cel. Poisson, può verificarsi facilmente. Facciamo

$$y=\int d\phi.e^{-a\cos.\phi}\cos.a\sin.\phi.$$

Avremo, differenziando rapporto ad a

$$\frac{dy}{da}=-\int d\phi.e^{-a\cos.\phi}\cos.(\phi-a\sin.\phi).$$

Ma tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$ noi abbiamo:

$$\int_0^\pi d\phi.e^{-a\cos.\phi}\cos.(\phi-a\sin.\phi)=0$$

onde sarà:

$$\int_0^\pi d\phi . e^{-a\cos.\phi}\cos.a\sin.\phi = \mathrm{C}$$

essendo C indipendente da a. Per determinarne il valore faremo $a=0$, e si otterrà come sopra

$$\int d\phi . e^{-a\cos.\phi}\cos.a\sin.\phi = \pi.$$

Or se la funzione qualunque $\mathrm{F}y$ possa risolversi in serie per le potenze intere e positive di y onde si abbia

$$\mathrm{F}y = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3 + \text{ec.}$$

noi dedurremo:

$$\frac{\mathrm{F}e^{e^{\phi\sqrt{-1}}} + \mathrm{F}e^{e^{-\phi\sqrt{-1}}}}{2} = b_1 + b_2 e^{\cos.\phi}\cos.\sin.\phi + b_3 e^{2\cos.\phi}\cos.2\sin.\phi + \text{ec.}$$

la qual serie sarà convergente ogni volta che chiamato Δ il limite di $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ relativo all' indefinito accrescimento di n si abbia $e^{\cos.\phi} < \frac{1}{\Delta}$.

Pertanto, moltiplicando per $d\phi$ la equazione precedente, ed integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$ si otterrà

$$\int_0^\pi d\phi\left(\mathrm{F}e^{e^{\phi\sqrt{-1}}} + \mathrm{F}e^{e^{-\phi\sqrt{-1}}}\right) = 2\pi(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_\infty)$$

ovvero:

$$(60) \qquad \int_0^\pi d\phi\left(\mathrm{F}e^{e^{\phi\sqrt{-1}}} + \mathrm{F}e^{e^{-\phi\sqrt{-1}}}\right) = 2\pi\mathrm{F}1$$

essendo F1 ciò che Fy diviene quando in luogo di y si ponga l'unità.

Quì pure osserveremo che il massimo valore di $e^{\cos.\phi}$ tra i limiti dell'integrale, essendo e; la equazione (60) sarà dimostrata quando per $n=\infty$ e prescindendo da segni si abbia $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{1}{e}$.

Se fosse per uno speciale caso $Fy = \frac{1}{a+by}$, sarebbe $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \pm \frac{b}{a}$; onde le condizioni della convergenza saranno che la quantità $\frac{b}{a}$ resti compresa tra i limiti $-\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e}$.

Indi troveremo:

$$(61) \qquad \int_0^\pi \frac{d\phi(a+be^{\cos.\phi}\cos.\sin\phi)}{a^2+2abe^{\cos.\phi}\cos.\sin.\phi+b^2e^{2\cos.\phi}} = \frac{\pi}{a+b}.$$

Se in luogo di $Fy = \frac{1}{a+by}$ si fosse assunto $Fy = \frac{1}{a+by^i}$ essendo i quantità comunque purchè positiva, troveremmo che la quantità $\frac{b}{a}$ deve restar compresa tra i limiti $-\frac{1}{e^i}$, $\frac{1}{e^i}$; e che questa condizione ammessa si avrà

$$(62) \qquad \int_0^\pi \frac{d\phi(a+be^{i\cos.\phi}\cos.i\sin.\phi)}{a^2+2abe^{i\cos.\phi}\cos.i\sin.\phi+b^2e^{2i\cos.\phi}} = \frac{\pi}{a+b}.$$

Così pure si otterrebbe

$$(63) \qquad \frac{1}{2}\int_0^\pi d\phi\log.(a^2+2abe^{i\cos.\phi}\cos.i\sin.\phi+b^2e^{2i\cos.\phi}) = \pi\log.(a+b).$$

Non mi tratterrò attualmente più a lungo nella esposizione dei casi speciali che discendono dalle formole referite nel corso di questa memoria: principalmente perchè nella dottrina degli integrali definiti non tanto consiste il pregio dell'opera nella molteplice esposizione di singoli casi che l'esercizio del calcolo talvolta somministra spontanei; come piuttosto nel comprendere sotto forme meno particolari estese classi di trascendenti; delle quali così risulti palese il legame e la dipendenza.