SOPRA GLI INTEGRALI DEFINITI.

MEMORIA

DEL

CAV. GIULIANO FRULLANI

Ricevuta adì 21. Novembre 1829.

Nel IV. Volume del suo Calcolo Integrale Euler trattò il primo la formola trascendente $\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}$ estesa tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\infty$. In appresso altri geometri distintissimi si occuparono di quella formola stessa, e ciò con impegno tanto maggiore in quanto si riconobbe che varie estese classi di trascendenti ne dipendevano.

Io mi propongo in questa Memoria di esporre alcune considerazioni non tanto relative alla formola quì sopra citata, come riguardanti altre analoghe trascendenti.

1. Per determinare l' Integrale $\int\frac{\sin.\phi d\phi}{\phi}$ tra i limiti $\phi=0$ $\phi=\infty$ incomincierò con dividerne l' estensione in una infinità di parti; successivamente prendendolo da zero sino a π, da 2π sino a 3π, e così seguitando in infinito: ove π dinota la mezza circonferenza del circolo di cui l' unità sia il raggio.

Così formeremo una serie infinita e convergente, di cui troveremo facilmente la somma. Infatti noi avremo

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\int du\Sigma\,\frac{\sin.(u+i\pi)}{u+i\pi}.$$

Avvertendo che l'integrale relativo ad u deve estendersi da $u = 0$ sino ad $u = \pi$; mentre la somma denotata dal segno Σ deve essere estesa a tutti i valori interi e positivi di i, da $i = 0$, sino ad $i = \infty$.

Così la Equazione precedente si ridurrà alla seguente:

$$\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\left\{\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\int du.\sin.u\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{u+\pi}+\frac{1}{u+2\pi}-\frac{1}{u+3\pi}+\text{ec.}\right\}\right.$$

Ma tra i limiti $u = 0$, $u = \pi$ noi abbiamo

$$\int\frac{\sin.u.du}{i\pi+u}=\int\frac{\sin.u.du}{(i+1)\pi-u}$$

d'onde dedurremo:

$$\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\left\{\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\int du\sin.u\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{2\pi-u}+\frac{1}{2\pi+u}-\frac{1}{4\pi-u}+\frac{1}{4\pi+u}-\text{ec.}\right\}\right.$$

Or si ha pure per un Teorema dovuto ad Euler e che suol riportarsi nei trattati di Calcolo integrale,

$$\frac{1}{2}\text{ cotang. }\frac{u}{2}=\frac{1}{u}-\frac{1}{2\pi-u}+\frac{1}{2\pi+u}-\frac{1}{4\pi-u}+\text{ec.}$$

e quindi

$$\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\left\{\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\frac{1}{2}\int du.\sin.u.\text{ cotang. }\frac{u}{2}\right.$$

Effettuando l'integrazione nel secondo membro, otterremo immediatamente

$$\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\left\{\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\frac{\pi}{2}\right.$$

2. Io comunicai, già da tempo, questo modo di determinare l'integrale $\int\frac{d\phi\sin.\phi}{\phi}$ esteso tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \infty$ al

cel. Sig. Poisson, uno dei più distinti geometri dei nostri giorni. Inerendo Egli ad alcune mie vedute sulla teoria degli Integrali definiti, soggiungevami in proposito della ricerca quì sopra esposta con le riflessioni seguenti, che volentieri riferisco per la giustezza delle idee che vi si contengono „... On
„ faira disparoitre toutes les difficultés que les intégrales des
„ quantités périodiques peuvent présenter en les considerant
„ non pas isolément, mais comme les limites d'autres intégra-
„ les de quantités decroissantes. En général pour éviter de
„ commettre des erreurs dans le Calcul des Intégrales défi-
„ nies, il faut admettre les resultats qui seroient verifia-
„ bles approximativement en nombres, et les expressions
„ qui sont implicitement les limites de semblables resultats.
„ C' est là un principe dont je crois qu' il est important de
„ ne jamais s' écarter. Pour cette raison j'aime beaucoup vo-
„ tre manière de parvenir directement à la valeur de l' in-
„ tegrale $\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}$ en la decomposant en une somme d'inté-
„ grales prises depuis $\phi=0$ jusqu'à $\phi=\pi$. Ce procedé est,
„ en effet, l' imitation du calcul numerique qu' il faudroit
„ faire pour obtenir les valeurs approchées de l' intégrale en-
„ tre les limites zéro et l' infini ec. „

3. La formola più generale $\int\frac{d\phi\sin.r\phi}{\phi}$ estesa pur essa tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\infty$ si riduce alla precedente. Ha luogo difatti, sempre che sia r una quantità positiva e maggiore di zero, la equazione

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{d\phi.\sin r\phi}{\phi}=\int\frac{d\phi\sin.\phi}{\phi}$$

Per dimostrarla io considero la equazione $y=\frac{\sin.r\phi}{\phi}$. Questa si riferisce ad una curva anguiforme la quale all' origine delle coordinate ortogonali ϕ ed y taglia l' asse y ad una distanza r dall' asse delle ϕ, intorno al quale serpeggia successivamente tagliandolo nei punti ove $\phi = \frac{\pi}{r}, \frac{2\pi}{r}, \frac{3\pi}{r}, \frac{4\pi}{r}$ ec. in infinito; essendo π la mezza periferia del circolo di cui l' unità è il raggio. Infinite porzioni decrescenti, alternativamente positive e negative costituiranno le aree comprese tra la curva e l'asse delle ascisse ϕ; e quelle porzioni saranno rappresentate dalle formole

$$
\text{(A)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \phi = 0 \\ \phi = \frac{\pi}{r} \end{array}\right\} \int \frac{\sin . r\phi . d\phi}{\phi} \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} \phi = \frac{\pi}{r} \\ \phi = \frac{2\pi}{r} \end{array}\right\} \int \frac{\sin . r\phi . d\phi}{\phi} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\left.\begin{array}{l} \phi = \frac{m\pi}{r} \\ \phi = \frac{(m+1)\pi}{r} \end{array}\right\} \int \frac{\sin . r\phi . d\phi}{\phi} \\
\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}
\right.
$$

E tutte queste quantità insieme aggiunte è manifesto che comporranno la formola $\int \frac{\sin . r\phi . d\phi}{\phi}$ estesa tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \infty$.

Ora è facile a vedersi che ciascuna di quelle formole è indipendente da r.

Poichè, quanto alla prima, abbiamo integrando indefinitamente,

$$\int \frac{\sin . r\phi}{\phi} d\phi = C + r\phi - \frac{r^3\phi^3}{2.3.3} + \frac{r^5\phi^5}{2.3.4.5.5.} - \text{ec.}$$

ove C è una costante arbitraria. Indi si deduce

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\frac{\pi}{r}\end{array}\right\}\int\frac{\sin.r\phi}{\phi}\,d\phi=\pi-\frac{\pi^3}{2.3.3}+\frac{\pi^5}{2.3.4.5.5}-\text{ec.}$$

espressione che non dipende da r.

Più generalmente troveremo indipendente da r la formula

$$\left.\begin{array}{l}\phi=\frac{m\pi}{r}\\ \phi=\frac{(m+1)\pi}{r}\end{array}\right\}\int\frac{d\phi\sin.r\phi}{\phi}$$

che esprime il termine generale della serie (A); e quindi sarà pure indipendente da r la formula

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\}\int\frac{d\phi\sin.r\phi}{\phi}$$

che ne rappresenta la somma.

Così rimarrà dimostrata la equazione

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\}\int\frac{d\phi.\sin.r\phi}{\phi}=\int\frac{d\phi\sin.\phi}{\phi}$$

E poichè nel precedente articolo vedemmo essere tra gli indicati limiti $\int\frac{d\phi\sin.\phi}{\phi}=\frac{\pi}{2}$ ne inferiremo per i casi di r positivo maggiore di zero, e tra i limiti stessi

$$\int\frac{d\phi\sin.r\phi}{\phi}=\frac{\pi}{2}.$$

4. A questo stesso modo potrem noi rintracciare le proprietà della formola $\int\frac{d\phi.\cos.r\phi}{\phi}$, estesa tra i limiti $\phi=\omega$, $\phi=\infty$ purchè sia $\omega<\frac{\pi}{2r}$.

Infatti è chiaro che questa formola si compone di una infinità di parti decrescenti, alternativamente positive e negative, e rappresentate dai termini della serie

$$(\mathrm{B}) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \phi=\omega \\ \phi=\frac{\pi}{2r} \end{array}\right\} \int \frac{d\phi.\cos.r\phi}{\phi} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \phi=\frac{\pi}{2r} \\ \phi=\frac{3\pi}{2r} \end{array}\right\} \int \frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \left.\begin{array}{l} \phi=\frac{(2m+1)\pi}{2r} \\ \phi=\frac{(2m+3)\pi}{2r} \end{array}\right\} \int \frac{\cos.r\phi.\,d\phi}{\phi} \\ \qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right.$$

Incominciando dalla seconda di queste è chiaro che tutte queste formole sono indipendenti da r: cosicchè la differenza delle due formole simili $\int \frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi}$, $\int \frac{d\phi\cos.r'\phi}{\phi}$ estese l'una e l'altra tra i limiti $\phi=\omega$, $\phi=\infty$ sarà rappresentata dalla differenza dei soli primi termini delle due serie che vi corrispondono; l'una delle quali è la serie (B), e l'altra è analoga e corrisponde alla formola $\int d\phi.\frac{\cos.r'\phi}{\phi}$.

Avremo dunque

$$\left.\begin{array}{l} \phi=\omega \\ \phi=\infty \end{array}\right\} \int \frac{\cos.r\phi-\cos.r'\phi}{\phi}\,d\phi = \left\{\begin{array}{l} \phi=\omega \\ \phi=\frac{\pi}{2r} \end{array}\right\} \int d\phi\,\frac{\cos.r\phi}{\phi}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} \phi=\omega \\ \phi=\frac{\pi}{2r} \end{array}\right\} \int \frac{d\phi.\cos.r'\phi}{\phi}$$

purchè sia ω minore di $\frac{\pi}{2r}$, e di $\frac{\pi}{2r'}$.

Ora abbiamo, integrando indefinitamente,

$$\int d\phi \, \frac{\cos.r\phi}{\phi} = \mathrm{C} + \log.\phi - \frac{r^2\phi^2}{2.2} + \frac{r^4\phi^4}{2.3.4.4} - \text{ec.}$$

essendo C la costante arbitraria. Sarà dunque tra i limiti $\phi = \omega$, $\phi = \frac{\pi}{2r}$

$$\left.\begin{matrix} \phi = \omega \\ \phi = \frac{\pi}{2r} \end{matrix}\right\} \int \frac{d\phi \cos.r\phi}{\phi} = \log.\frac{\pi}{2} - \log.r - \frac{\pi^2}{2^2.2.2} + \frac{\pi^4}{2^4.2.3.4.4} - \text{ec.}$$

$$-\log.\omega + \frac{\omega^2 r^2}{2.2} - \frac{\omega^4 r^4}{2.3.4.4} + \text{ec.}$$

Quindi sarà ancora

$$\left.\begin{matrix} \phi = \omega \\ \phi = \frac{\pi}{2r} \end{matrix}\right\} \int \frac{d\phi.\cos.r\phi}{\phi} - \left\{\begin{matrix} \phi = \omega \\ \phi = \frac{\pi}{2r'} \end{matrix}\right\} \int \frac{d\phi.\cos.r'\phi}{\phi}$$

$$= \log.\frac{r'}{r} + \omega^2 \frac{(r^2 - r'^2)}{2.2.} - \omega^4 \frac{(r^4 - r'^4)}{2.3.4.4} + \text{ec.}$$

Ma noi osservammo essere

$$\left.\begin{matrix} \phi = \omega \\ \phi = \frac{\pi}{2r} \end{matrix}\right\} \int d\phi \, \frac{\cos.r\phi}{\phi} - \left\{\begin{matrix} \phi = \omega \\ \phi = \frac{\pi}{2r'} \end{matrix}\right\} \int d\phi \, \frac{\cos.r'\phi}{\phi}$$

$$= \left\{\begin{matrix} \phi = \omega \\ \phi = \infty \end{matrix}\right\} \int \frac{(\cos r\phi - \cos.r'\phi) d\phi}{\phi}$$

e pertanto sarà

$$\left.\begin{matrix} \phi = \omega \\ \phi = \infty \end{matrix}\right\} \int \frac{d\phi(\cos.r\phi - \cos.r'\phi)}{\phi} = \log.\frac{r'}{r} + \frac{\omega^2(r^2 - r'^2)}{2.2} - \frac{\omega^4(r^4 - r'^4)}{2.3.4.4} + \text{ec.}$$

ove ω esser deve minore di $\frac{\pi}{2r}$, e di $\frac{\pi}{2r'}$.

Se supporremo $\omega = 0$ avremo

$$\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \frac{d\phi(\cos.r\phi - \cos.r'\phi)}{\phi} = \log.\frac{r'}{r}$$

come è noto.

5. Alla equazione

$$\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \frac{d\phi \sin.r\phi}{\phi} = \int \frac{d\phi \sin.\phi}{\phi}$$

suol pervenirsi anco nel modo seguente. Posto

$$\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \frac{d\phi \sin.r\phi}{\phi} = y$$

si ha, differenziando per rapporto ad r

$$\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \cos.r\phi.d\phi = \frac{dy}{dr}$$

Or per un teorema dovuto al Sig. Poisson, la funzione periodica $\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \cos.r\phi.d\phi$ deve riguardarsi $= 0$; come la congenere $\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \sin.r\phi.d\phi$ deve eguagliarsi ad $\frac{1}{r}$ sintanto che sia r positivo e maggiore di zero.

Poichè dunque abbiamo $\frac{dy}{dr} = 0$, sarà $y =$ cost. e quindi

$$\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \frac{d\phi \sin.r\phi}{\phi} = \text{cost.}$$

D'onde immediatamente si deduce

$$\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix} \Big\} \int \frac{d\phi \sin.r\phi}{\phi} = \int \frac{d\phi \sin.\phi}{\phi}$$

6. Per dimostrare le formule

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\} \int d\phi.\cos.r\phi = 0\ ;\ \int d\phi.\sin.r\phi = \frac{1}{r}$$

sogliono considerarsi le più generali equazioni ambedue dovute ad Euler

$$(C)\ldots\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\} \int e^{-b\phi}\cos.r\phi.\phi^{n-1}d\phi = \dfrac{\cos.nt}{(b^2+r^2)^{\frac{n}{2}}}\int e^{-\phi}\phi^{n-1}d\phi \\[2ex] \left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\} \int e^{-b\phi}\sin.r\phi.\phi^{n-1}d\phi = \dfrac{\sin.nt}{(b^2+r^2)^{\frac{n}{2}}}\int e^{-\phi}\phi^{n-1}d\phi \end{array}\right.$$

Ove t dinota l'arco della tangente $\frac{b}{r}$. In quelle facendo $b=0$, $n=1$ abbiamo appunto

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\} \int \cos r\phi\ d\phi = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\} \int \sin.r\phi.d\phi = \frac{1}{r}\ .$$

Ma poichè la supposizione di $b=0$ e di $n=1$ possa corispondere ai dati fondamentali che hanno servito alla dimostrazione delle Equazioni (C), sarà necessario di appoggiare questi resultati a qualche nuova considerazione.

Onde giungervi prendiamo ad esaminare generalmente l'integrale $\int d\phi.Fr\phi$ esteso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\infty$. Sia k una costante indeterminata; e supponghiamo che tra i limiti $\phi=k$, $\phi=\infty$ abbiasi $\int Fr\phi.d\phi=\beta_k$.

È facile il convincersi che l'integrale indefinito della formola differenziale $\int Fr\phi.d\phi$ sarà $C-\beta_\phi$, C essendo una costante arbitraria, e β_ϕ cioè che β_k diviene se in luogo di k si sostituisca ϕ.

Per determinare β_k riprendiamo la Equazione

$$\left.\begin{array}{l}\phi = k\\ \phi = \infty\end{array}\right\} \int d\phi \mathrm{F} r\phi = \beta_k$$

ed in essa ponendo $\phi = x + k$ i nuovi limiti saranno $x = 0$ $x = \infty$; onde avremo

$$\left.\begin{array}{l}x = 0\\ x = \infty\end{array}\right\} \int dx\, \mathrm{F} r(x + k) = \beta_k$$

sarà dunque ancora

$$\left.\begin{array}{l}x = 0\\ x = \infty\end{array}\right\} \int dx \mathrm{F} r\,(x + \phi) = \beta_\phi$$

onde per ciò che quì sopra abbiamo notato, l' integrale indefinito della formola differenziale $\mathrm{F} r\phi . d\phi$ sarà dato dalla equazione

$$\int \mathrm{F} r\phi . d\phi = \mathrm{C} - \left\{\begin{array}{l}x = 0\\ x = \infty\end{array}\right\} \int dx\, \mathrm{F} r(x + \phi)$$

Or supponghiamo $\mathrm{F} r\phi = \cos . r\phi$, ed avremo

$$\int \cos . r\phi . d\phi = \mathrm{C} - \left\{\begin{array}{l}x = 0\\ x = \infty\end{array}\right\} \int dx \cos . r(x + \phi)$$

ovvero

$$\int \cos . r\phi . d\phi = \mathrm{C} - \left\{\begin{array}{l}x = 0\\ x = \infty\end{array}\right\} \cos . r\phi \int dx \cos . rx$$

$$+ \left\{\begin{array}{l}x = 0\\ x = \infty\end{array}\right\} \sin . r\phi \int dx \sin . rx$$

Ma si ha $\int \cos . r\phi d\phi = \frac{\sin . r\phi}{r} + \mathrm{C}'$; onde sostituendo, sarà non meno ed identicamente

$$\frac{\sin.r\phi}{r}+C'=C-\left\{\begin{matrix}x=0\\x=\infty\end{matrix}\right\}\cos.r\phi\int dx\cos.rx$$

$$+\left(\begin{matrix}x=0\\x=\infty\end{matrix}\right)\sin.r\phi\int dx\sin.rx$$

Dovrà essere per tanto $C'=C$, ed anco

$$\left.\begin{matrix}x=0\\x=\infty\end{matrix}\right\}\int dx\cos.rx=0$$

$$\left.\begin{matrix}x=0\\x=\infty\end{matrix}\right\}\int dx\sin.rx=\frac{1}{r}$$

le quali formole trattavasi appunto di dimostrare.

Questo metodo, estendibile a molti analoghi casi nei quali si tratti di funzioni periodiche, può servire a mostrare il legame che unisce alcuni integrali indefiniti ai corrispondenti definiti; i quali senza di ciò comparirebbero indeterminati.

7. Vedemmo già nel precedente Articolo 4. come possa determinarsi il valore dell'integrale

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\\phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\cos.r\phi-\cos.r'\phi}{\phi}\,d\phi$$

e lo trovammo $=\log.\frac{r'}{r}$.

Questa formola non è che un caso speciale di una assai più generale, come apparirà dall'analisi seguente.

Sia data la formola

$$y=\int\frac{Fr\phi.d\phi}{\phi}$$

da integrarsi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\frac{h}{r}$. Differenziando rapporto ad r, noi avremo in riguardo della variabilità del secondo limite,

$$\frac{dy}{dr} = \int F' r\phi . d\phi - \frac{Fh}{r}$$

ove $F' r\phi$ dinota la funzione $\frac{dFr\phi}{dr\phi}$.

Sarà pertanto

$$\frac{dy}{dr} = \frac{Fr\phi}{r} - \frac{Fh}{r}$$

e passando ai limiti, e supponendo che al limite $\phi = o$ la funzione $Fr\phi$ non divenga infinita, avremo

$$\frac{dy}{dr} = - \frac{Fo}{r}$$

E quindi integrando

$$y = - Fo . \log. r + C$$

sarà pertanto

$$\left.\begin{matrix} \phi = o \\ \phi = \frac{h}{r} \end{matrix}\right\} \int \frac{Fr\phi . d\phi}{\phi} = - Fo . \log. r + C$$

La costante C essendo indipendente da r, noi potremo determinarla per mezzo della stessa formola $\int \frac{Fr\phi . d\phi}{\phi}$ attribuendo ad r un valore particolare. Così se faremo $r = 1$, sarà

$$\left.\begin{matrix} \phi = o \\ \phi = h \end{matrix}\right\} \int \frac{F\phi . d\phi}{\phi} = C$$

onde sarà pure, sostituendo,

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\frac{h}{r}\end{array}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r\phi.d\phi}{\phi}=-\mathrm{Fo.log.}r+\left\{\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=h\end{array}\right\}\int\frac{\mathrm{F}\phi.d\phi}{\phi}$$

Per un altro valore r' di r avremo parimente

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\frac{h}{r'}\end{array}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r'\phi.d\phi}{\phi}=-\mathrm{Fo.\,log.}r'+\left\{\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=h\end{array}\right\}\int\frac{\mathrm{F}\phi.d\phi}{\phi}$$

ovvero, sottraendo,

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\frac{h}{r}\end{array}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r'\phi.d\phi}{\phi}-\left\{\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\frac{h}{r'}\end{array}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r\phi.d\phi}{\phi}=\mathrm{Fo.log.}\frac{r}{r'}.$$

Se faremo $h=\infty$, sarà

$$\left.\begin{array}{l}\phi=0\\ \phi=\infty\end{array}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r'\phi-\mathrm{F}r\phi}{\phi}\,d\phi=\mathrm{Fo.\,log.}\frac{r}{r'}$$

Io comunicai questo risultato al ch. Plana sino dal 1821. Successivamente, e nel giornale della Scuola Politecnica per l'anno 1823 ne ho veduta una dimostrazione dovuta al ch. Cauchy, e dedotta da principj differentissimi dai precedenti.

8. Col metodo quì sopra esposto noi possiam giungere ad altre più generali conseguenze.

Consideriamo la formola $\int\frac{\mathrm{F}r\phi.d\phi}{\phi^n}$, di cui si voglia il valore esteso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\frac{h}{r}$.

Ponghiamo

$$y=\int\frac{\mathrm{F}r\phi}{\phi^n}\,d\phi$$

avremo differenziando rapporto ad r, ed avuto riguardo alla variabilità del secondo limite,

$$\frac{dy}{dr} = \int \frac{\mathrm{F}r'\phi.d\phi}{\phi} - \frac{\mathrm{F}h}{h}$$

ma per le cose precedenti noi abbiamo tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \frac{h}{r}$,

$$\int \frac{\mathrm{F}'r\phi.d\phi}{\phi} = -\mathrm{F}'0.\log.r + \left\{ \begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = h \end{matrix} \right\} \int \frac{\mathrm{F}'\phi.d\phi}{\phi}$$

onde avremo sostituendo

$$\frac{dy}{dr} = \left\{ \begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = h \end{matrix} \right\} \int \frac{\mathrm{F}'\phi\, d\phi}{\phi} - \mathrm{F}'0.\log.r - \frac{\mathrm{F}h}{h}$$

ovvero integrando, e poichè

$$y = \left\{ \begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \frac{h}{r} \end{matrix} \right\} \int \frac{\mathrm{F}r\phi.d\phi}{\phi^2},$$

sarà

$$\left. \begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \frac{h}{r} \end{matrix} \right\} \int \frac{\mathrm{F}r\phi.d\phi}{\phi^2} = \left\{ \begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = h \end{matrix} \right\} r \int \frac{\mathrm{F}'\phi.d\phi}{\phi}$$

$$- \mathrm{F}'0.r\,(\log.r - 1) - r\frac{\mathrm{F}h}{h} + \mathrm{C}$$

Essendo C una costante indipendente da r. Avremo quindi in egual modo

$$\left. \begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \frac{h}{r'} \end{matrix} \right\} \int \frac{\mathrm{F}r'\phi d\phi}{\phi^2} = \left\{ \begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = h \end{matrix} \right\} r' \int \frac{\mathrm{F}'\phi.d\phi}{\phi}$$

$$- \mathrm{F}'0.r'\,(\log.r' - 1) - r'\frac{\mathrm{F}h}{h} + \mathrm{C}$$

e sottraendo, otterremo il teorema

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\frac{h}{r}\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r\phi\,d\phi}{\phi^2}-\left\{\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\frac{h}{r'}\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r'\phi.d\phi}{\phi^2}$$

$$=\mathrm{F'o}[r'(\log.r'-1)-r(\log.r-1)]$$

$$+(r-r')\left[\left(\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=h\end{matrix}\right)\int\frac{\mathrm{F'}\phi.d\phi}{\phi}-\frac{\mathrm{F}h}{h}\right]$$

Da questo generale risultato potremo inferirne alcun altro più particolare. Così se sia $h=\infty$, avremo immediatamente

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r\phi-\mathrm{F}r'\phi}{\phi^2}\,d\phi=\mathrm{F'o}[r'(\log.r'-1)-r(\log.r-1)]$$

$$+(r-r')\int\frac{\mathrm{F'}\phi.d\phi}{\phi}$$

or sia per ulteriore esemplificazione $\mathrm{F}r\phi=\cos.r\phi-1$. Sarà $\mathrm{F}\phi=\cos.\phi-1$, $\mathrm{F'o}=0$, $\mathrm{F'}\phi=-\sin.\phi$.

Quindi sostituendo sarà

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\cos.r\phi-\cos.r'\phi}{\phi^2}\,d\phi=-(r-r')\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}$$

Or noi abbiamo tra quei limiti

$$\int\frac{\sin.\phi}{\phi}\,d\phi=\frac{\pi}{2}$$

sarà pertanto

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\cos.r\phi-\cos.r'\phi}{\phi^2}\,d\phi=\frac{\pi}{2}(r'-r)$$

risultato importante nella teoria degli integrali definiti, e che il ch. Bidone ottenne il primo per mezzo di considerazioni diverse da queste.

Facciamo per altro esempio

$F r\phi = \log.\cos. r\phi$. Sarà

$$F\phi = \log.\cos.\phi;\ F'o = o;\ F'\phi = -\frac{\sin.\phi}{\cos.\phi}$$

quindi sostituendo,

$$\left.\begin{matrix}\phi = o\\ \phi = \infty\end{matrix}\right\} \int \frac{\log.\cos.r\phi - \log.\cos.r'\phi}{\phi^2}\, d\phi = -(r-r')\int \frac{d\phi \sin.\phi}{\phi\cos.\phi}$$

Ora noi abbiamo, come è noto, tra quei limiti stessi,

$$\int \frac{d\phi\sin.\phi}{\phi\cos.\phi} = \frac{\pi}{2}$$

sarà dunque

$$\left.\begin{matrix}\phi = o\\ \phi = \infty\end{matrix}\right\} \int \frac{1}{\phi^2}\log.\frac{\cos.r\phi}{\cos.r'\phi}\, d\phi = \frac{\pi}{2}(r'-r)$$

Se ne dedurrà tra i limiti $\phi = o$, $\phi = \infty$

$$\int \frac{\cos.r\phi - \cos.r'\phi}{\phi^2}\, d\phi = \int \frac{\log.\cos.r\phi - \log.\cos.r'\phi}{\phi^2}\, d\phi$$

Non mi estenderò ad altri esempj, potendo ciascuno da per se stesso supplirvi, non che estendere il precedente metodo ad altri casi in cui la variabile fosse nel denominatore elevata a potenze maggiori.

9. L'analisi di cui ho fatto uso nell'articolo 6. trattando le formole $\int \cos. r\phi.\, d\phi$, $\int \sin. r\phi.\, d\phi$ può qualchè volta applicarsi alla trasformazione di altre formole integrali definite.

Per ridurre ad espressione concisa il principio adoperato nel citato articolo, consideriamo la formola integrale $\int Fx.dx$ che debba principiare con $x = o$.

Sarà generalmente

$$\int F x dx = -\left\{\begin{matrix}u = o\\ u = \infty\end{matrix}\right\} \int \Delta F u.\, du$$

ove la differenza finita della funzione Fu, dinotata dal segno ΔFu si referisce ad u, che varia della differenza finita x.

Infatti è manifesto in primo luogo che l' integrale indefinito della formula Fxdx potrà rappresentarsi dalla Equazione

$$\int F\,xdx = C - \left\{ \begin{matrix} u=x \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int Fu.\,du$$

essendo C una costante arbitraria. Onde se vorremo che l'integrale $\int Fx.dx$ cominci con $x=0$, noi avremo la costante C determinata dalla Equazione

$$0 = C - \left\{ \begin{matrix} u=0 \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int F\,u.\,du$$

sarà per tanto

$$\int Fxdx = \left\{ \begin{matrix} u=0 \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int Fu.du - \left\{ \begin{matrix} u=x \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int Fu.du$$

ma si ha identicamente

$$\begin{matrix} u=x \\ u=\infty \end{matrix} \left\{ \int Fu.du = \left\{ \begin{matrix} u=0 \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int F(u+x)\,dx \right.$$

onde sostituendo

$$\int Fxdx = \left\{ \begin{matrix} u=0 \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int Fu.du - \left\{ \begin{matrix} u=0 \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int F(u+x)\,du$$

ovvero più concisamente

$$\int Fxdx = - \left\{ \begin{matrix} u=0 \\ u=\infty \end{matrix} \right\} \int \Delta Fu.du$$

come sopra.

Facciasi per esempio

$$Fx = e^{-x} \frac{\sin cx}{x}$$

e proponghiamo di trasformare con la formola precedente l'integrale $\int \frac{e^{-x}\sin.cx}{x}\,dx$, esteso da $x=0$ sino ad $x=b$ essendo b una costante qualunque. Noi avremo

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\x=b\end{array}\right\}\int\frac{e^{-x}\sin.cxdx}{x}=\int\frac{e^{-u}\sin.cudu}{u}-e^{-b}\cos.cb\int\frac{\sin.cu.du.e^{-u}}{u+b}$$

$$-e^{-b}\sin.cb\int\frac{\cos.cu.du.e^{-u}}{u+b}$$

ove nel secondo membro gli integrali devono estendersi da $u=0$, sino ad $u=\infty$.

10. L'equazione precedente si trasforma immediatamente nella seguente:

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\x=b\end{array}\right\}\int\frac{e^{-x}\sin.cxdx}{x}=\int\frac{e^{-\frac{u}{c}}\sin.u.du}{u}-e^{-b}\cos.cb\int\frac{e^{-\frac{u}{c}}\sin.udu}{u+bc}$$

$$-e^{-b}\sin.cb\int\frac{e^{-\frac{u}{c}}\cos.u.du}{u+bc}$$

ove nel secondo membro i limiti sono $u=0$, $u=\infty$.

Quindi si deduce che relativamente all' accrescimento indefinito di c il limite dell' integrale

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\x=b\end{array}\right\}\int\frac{e^{-x}\sin.cx.dx}{x}$$

sarà

$$\left.\begin{array}{l}u=0\\u=\infty\end{array}\right\}\int\frac{\sin.udu}{u}=\frac{\pi}{2}$$

Noi troveremmo nelle circostanze stesse

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\x=b\end{array}\right\}\int\frac{e^{x}\sin.cxdx}{x}=\frac{\pi}{2}$$

Or noi abbiamo, incominciando gli integrali da $h=0$,

$$\int e^{h}\cos.hx.dh = e^{h}\frac{(x\sin.hx+\cos.hx)}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int e^{-h}\cos.hx.dh = e^{-h}\frac{(x\sin.hx-\cos.hx)}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Se da ambe le parti noi moltiplicheremo per dx, sarà prendendo gli integrali in modo che svaniscano per $x=0$,

$$e^{h}\int\frac{(x\sin.hx+\cos.hx)}{1+x^2}dx = \text{Arc. tang.}x + \int\frac{e^{h}\sin.hxdh}{h},$$

$$e^{-h}\int\frac{(x\sin.hx-\cos.hx)}{1+x^2}dx = -\text{Arc.tang.}x + \int\frac{e^{-h}\sin.hxdh}{h}$$

ove gli integrali rapporto ad x si estendono sino ad x qualunque, e gli integrali rapporto ad h sino ad h qualunque pur essi.

Se supporremo h infinita avremo dalla seconda equazione

$$\left.\begin{matrix} h=0 \\ h=\infty \end{matrix}\right\} \int\frac{e^{-h}\sin.hxdh}{h} = \text{Arc. tang.}x$$

Se vorremo invece supporre x infinita, noi osserveremo primieramente che per quanto di sopra avvertimmo si ha quando sia x infinita,

$$\int\frac{e^{h}\sin.hxdh}{h} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{e^{-h}\sin.hxdh}{h} = \frac{\pi}{2}$$

cosicchè le equazioni precedenti diverranno:

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix}\right\} e^{h}\int\frac{(x\sin.hx+\cos.hx)dx}{1+x^2} = \pi$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix}\right\} e^{-h}\int\frac{(x\sin.hx-\cos.hx)dx}{1+x^2}=0$$

onde trarremo

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix}\right\}, \int\frac{\cos.hx\,dx}{1+x^2}=\int\frac{x\sin hx\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\ e^{-h}$$

come è noto.