SUL TEOREMA GULDINIANO

MEMORIA

DEL PROFESSORE ANTONIO BORDONI

Ricevuta adì 3. *Marzo* 1826.

In questa breve Memoria dimostro in tutta la generalità il Teorema Guldiniano ed anco il reciproco di esso. Sebbene di questo famoso Teorema, di tanto uso sì nella teorica che nella pratica, abbiano parlato molti uomini sommi, fra i quali merita di essere distinto G. Monge, non ostante io spero che non ispiacerà ciò che ho quì divisato esporre relativamente ad esso e al suo reciproco.

1. L'area della superficie generata da una linea piana, che si mova conservandosi perpendicolare alle linee descritte dai punti di essa, è eguale al prodotto della lunghezza della medesima linea generatrice per quella percorsa dal suo centro di gravità: ecco la prima quistione che sarà quì trattata.

Essendo la linea generatrice di figura invariabile, ed il suo piano costantemente perpendicolare alle linee percorse dai punti di essa, queste medesime linee saranno fra loro parallele.

2. La linea generatrice nella sua primitiva posizione sia espressa dalla traccia AMB (*fig.* 1); e G sia il suo centro di gravità.

Riferiscansi sì i punti che le linee agli assi Ox, Oy ortogonali; e dal punto M qualsivoglia della linea AMB si conduca la MP ordinata; dal punto Q a distanza indeterminata del P conducasi la QN altra ordinata della medesima linea AMB, ed estendasi in T ad incontrare la retta MT toccante in M la curva stessa AMB: congiungasi la retta MN, e conducansi le . . Gx' . ., . . Gy' . . parallele ai medesimi assi Ox, Oy.

Chiaminsi x, y, ω, s le OP, PM, PQ, AM; ed $m(x, \lambda)$, $t(x, \lambda)$ le lunghezze delle linee parallele percorse dai punti M, T mentre il G centro di gravità percorre la parte λ della linea da esso trascorsa nel generare la intera superficie; ed $x'(\lambda), y'(\lambda)$ o semplicemente x', y' gli angoli descritti in questo movimento dalle rette . . Gx' . . , . . Gy' . . ed anco dalle rispettive loro parallele: in ultimo si chiami $F(x, \lambda)$ l'area di quella porzione di superficie, la quale è generata dalla AM mentre il centro G percorre λ.

Essendo $F(x, \lambda)$ l'area della superficie generata dalla AM, sarà $F(x+\omega, \lambda) - F(x, \lambda)$ l'area di quella generata dalla MrN; ed

$$F(x+\omega, \lambda+\alpha) - F(x, \lambda+\alpha) - F(x+\omega, \lambda) + F(x, \lambda)$$

l'area di quella superficie generata dallo stesso arco MrN mentre il punto G percorre l'incremento indeterminato α della λ.

Sviluppando il quattrinomio quì trovato, e riducendo, si trova esso eguale

$$\alpha\omega F'_{,} + A:$$

in A gli aumenti α, ω hanno almeno tre dimensioni.

Gli apici $'_{,}$ quì posti alla F per cui si ha $F'_{,}$ significano, quello in alto la derivata di $F(x, \lambda)$ rispetto alla variabile x, e l'altro la derivata della medesima funzione rispetto alla variabile λ: analogamente si farà per indicare le derivate rispetto alle x, λ di altre funzioni delle medesime variabili x, λ.

Essendo le linee percorse dai punti M, T; M, N fra loro parallele, le aree delle superficie generate dalle rette MT, MN, mentre il centro G percorre la α, saranno, per la proposizione settima della Memoria sulle linee e superficie parallele,

$$\tfrac{1}{2}\,(m(x,\lambda+\alpha)-m(x,\lambda)+t(x,\lambda+\alpha)-t(x,\lambda))\,\mathrm{MT},$$

$$\tfrac{1}{2}\,(m(x,\lambda+\alpha)-m(x,\lambda)+m(x+\omega,\lambda+\alpha)-m(x+\omega,\lambda))\,\mathrm{MN}$$

ossia

$$\tfrac{1}{2}\,(\alpha m_{,}+\alpha t_{,}+\text{ecc.})\,\mathrm{MT},\ \tfrac{1}{2}\,(\,2\alpha m_{,}+\text{ecc.}\,)\,\mathrm{MN}\ :$$

i termini ommessi contengono almeno α^2. Ma è notissimo che $\mathrm{MT}=\omega s'$, $\mathrm{MN}=\omega s'+$ ecc.; e dalla proposizione sesta della dianzi citata Memoria si ha

$$m(\,x,\lambda\,)=\lambda+x'\,\mathrm{GH}+y'\,\mathrm{HM},\ \text{e}$$

$$t(\,x,\lambda\,)=m\,(\,x,\lambda\,)+\omega x'+\omega y'y';$$

adunque le aree delle anzidette superficie generate dalle rette MT, MN saranno così espresse

$$\alpha\omega s'm_{,}+\mathrm{B},\ \alpha\omega s'm_{,}+\mathrm{C}:$$

nelle B, C gli aumenti α,ω hanno almeno tre dimensioni.

Similmente si dimostra che, la superficie generata dalla retta NT mentre G percorre l'α ha l'area talmente espressa, che in essa gli aumenti α,ω hanno almeno tre dimensioni; come anco dimostrasi facilissimamente, che nelle espressioni delle aree del triangolo rettilineo MTN ed in quella del segmento MrNM vi è almeno ω^3.

Ora si immaginino le tre superficie seguenti: quella generata dalla retta MN mentre il punto G percorre α aumento della λ; quella composta, della generata dall'arco MrN sopra considerata e dei due segmenti coi quali coincide l'MrNM, quando G trovasi nei termini delle linee λ, $\lambda+\alpha$; in ultimo quella composta, delle superficie generate dalle rette MT, TN di cui pure si è parlato dianzi, e dei due triangoli rettilinei nei quali cade successivamente l'MTN, quando il punto G si trova nei termini anzidetti delle $\lambda,\lambda+\alpha$. Queste tre superficie hanno tutte per contorno lo stesso contorno della prima di esse, e voltano le convessità dalla medesima banda, più la prima e la terza racchiudono la seconda; e però l'area di questa sarà compresa nel modo noto tra le due delle altre. Ma le espressioni delle aree di queste medesime tre superficie sono ordinatamente, per ciò che abbiamo detto e trovato,

$$\alpha\omega s' m_{,} + \mathrm{B},\ \alpha\omega \mathrm{F}'_{,} + \mathrm{D},\ \alpha\omega s' m_{,} + \mathrm{E};$$

ove si deve osservare che gli α, ω contenuti nelle quantità B, D, E hanno almeno tre dimensioni; adunque avrassi

$$\mathrm{F}'_{,} = s' m_{,}.$$

Quest'ultima equazione dà immediatamente

$$\mathrm{F}' = s'm \text{ ossia } \mathrm{F}' = gs' + x\cdot(g)s'.\mathrm{GH} + y\cdot(g)s'.\,\mathrm{HM},$$

dove g esprime la lunghezza della intera linea percorsa dal centro G e della quale è parte λ. Quindi avrassi l'area della intera superficie generata dalla curva AB eguale a

$$g\int s'dx + x\cdot(g)\int \mathrm{GH}s'dx + y\cdot(g)\int \mathrm{HM}s'dx,$$

purchè le primitive si estendano dal termine A al B cioè dalla $x = \mathrm{OD}$ alla $x = \mathrm{OC}$; e siccome $\int s'dx = \mathrm{AB}$, ed $\int \mathrm{GH}s'dx$, $\int \mathrm{HM}s'dx$, sono entrambe nulle per essere G centro di gravità della intera linea AB; così avrassi l'area della superficie di cui si parla eguale al prodotto g. AB, cioè della lunghezza della linea generatrice per quella della linea percorsa dal suo centro di gravità: appunto come si è annunciato sopra.

3. Dimostrerò l'esposta quistione anco nel modo seguente, al quale appoggerò, come vedrassi, la dimostrazione della proposizione reciproca di essa medesima.

La superficie generata consisterà generalmente in un quadrilatero ABCD (*fig.* 2.), che avrà due lati AD, BC paralleli agli altri due AB, CD eguali fra loro. I due lati paralleli saranno le linee percorse dai punti A, B termini della generatrice, ed i due altri cioè quelli fra loro eguali saranno i luoghi nelle estreme posizioni dalla stessa linea generatrice.

Si intendano riferiti i punti, le linee, e le superficie ai tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz; e si chiamino x, y, z le coordinate rettangole OV, VT, TM del punto M qualunque della superficie; e si immaginino in esse le due linee PM, QM, che hanno entrambe un termine in M e gli altri due cioè i loro principj P,Q nel contorno della medesima superficie, e siano l'una porzione della generatrice PN passante pel punto M e l'altra porzione della QR linea stessa, che è generata dal medesimo punto M loro comune, e si denomini μ la PM ed R la QM. Così, si chiami r quella porzione di contorno, che ha un termine nel principio di μ e l'altro nella prima situazione della linea generatrice cioè la AP; ed S esprima l'area del quadrilatero QMPA di cui tre lati sono R, μ, r; in ultimo K rappresenti la intera lunghezza della generatrice.

Considerando le S, x, y, z funzioni delle due μ, r, le quali sono indipendenti l'una dall'altra, la teorica dello spianamento delle superficie dà

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\sqrt{[(x'y_{,}-y'x_{,})^2+(x'z_{,}-z'x_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2]}:$$

le x', y', z' sono usate sì in questo luogo che altrove per esprimere le $\left(\frac{dx}{dr}\right)$, $\left(\frac{dy}{dr}\right)$, $\left(\frac{dz}{dr}\right)$ cioè le derivate delle x, y, z, rispetto alla r; e le $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, per esprimere le $\left(\frac{dx}{d\mu}\right)$, $\left(\frac{dy}{d\mu}\right)$, $\left(\frac{dz}{d\mu}\right)$ derivate delle stesse x, y, z rispetto alla variabile μ.

Sviluppando i tre quadrati, che vi sono indicati sotto il segno radicale, e sostituendo in vece dei binomj

$$y_{,}^2+z_{,}^2,\ x_{,}^2+z_{,}^2,\ x_{,}^2+y_{,}^2$$

rispettivamente i tre equivalenti

$$1-x_{,}^2,\ 1-y_{,}^2,\ 1-z_{,}^2,$$

si trova facilmente

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\sqrt{[x'^2+y'^2+z'^2-(x'x_{,}+y'y_{,}+z'z_{,})^2]}.$$

Ma per essere le $x':\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $y':\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $z':\left(\frac{dR}{dr}\right)$ i coseni degli angoli fatti cogli assi delle x, y, z dalla retta Mh tangente alla linea QM nel suo punto M; e le $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ gli analoghi coseni per la retta Mg tangente nello stesso punto M alla linea PM ossia μ; la frazione

$$(x'x_{,}+y'y_{,}+z'z_{,}):\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

eguaglia il coseno dell' angolo hMg compreso dalle medesime due tangenti Mh, Mg; per cui, essendo quest' angolo retto, sarà

$$x'x_{,}+y'y_{,}+z'z_{,}=0.$$

Adunque avrassi

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}\ \text{ossia}\ \left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\left(\frac{dR}{dr}\right),$$

per essere, come è d'altronde noto $\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}=\left(\frac{dR}{dr}\right)$.

Si denomini λ la lunghezza della linea percorsa dal centro di gravità della generatrice K, nel mentre che un suo punto percorre la QM; e p, q esprimano le coordinate rettangole del medesimo punto M per rispetto a due assi mobili esistenti nel piano della μ e passanti pel centro di gravità della intera PMN.

La teorica delle linee parallele dà

$$R=\lambda+mp+nq,$$

ove le m, n sono funzioni della r e costanti rispetto alla μ e per conseguenza anco rispetto alle p, q; per cui sarà

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)=\lambda'+pm'+qn'.$$

Quindi avrassi

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\lambda'+pm'+qn',\ \text{ossia}$$

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)=\lambda'\int d\mu+m'\int pd\mu+n'\int qd\mu,\ \text{ovvero}$$

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)=K\lambda'$$

essendo $\int pd\mu=0$, $\int qd\mu=0$, ed $\int d\mu=K$, estesi che siano gli integrali ossia le primitive agli estremi AD, BC della superficie.

Dall'ultima relazione $\left(\frac{dS}{dr}\right)=K\lambda'$, osservando che ad

$S = 0$ corrisponde $\lambda = 0$, si desume la

$$S = K\lambda,$$

La quale significa, che, l'area della superficie ABNP di cui si tratta, eguaglia il prodotto della linea generatrice per quella percorsa dal suo centro di gravità: proprietà che avrà evidentemente luogo anco per la intera superficie ABCD.

4. Se più linee AB, CD, EF, ecc. (*fig.* 3), esistenti nello stesso piano yox, si movessero, come si è supposto sopra, che si movesse la AB della figura prima, la somma delle aree delle superficie generate da esse sarebbe eguale alla somma delle medesime linee generatrici moltiplicata per la linea percorsa dal loro centro di gravità.

Si conducano le rette . . $Gx^{\cdot}$ . . , . . $Gy^{\cdot}$ . . pel punto G centro di gravità di tutte le linee AB, CD, EF, ecc. e ad esse le perpendicolari gg', hh', ii', ecc. dai punti g, h, i, ecc. loro rispettivi centri di gravità. Chiaminsi g, h, i, ecc. G le lunghezze delle linee parallele percorse dai medesimi centri g, h, i, ecc. G; e si ritengano i simboli $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$ per significare ciò, che hanno significato nel paragrafo terzo.

La somma delle aree delle superficie generate dalle linee AB, CD, EF, ecc. sarà

$$AB.g + CD.h + EF.i + \text{ecc. ossia}$$

$$AB(G + y^{\cdot}.gg' + x^{\cdot}.g'G) + CD(G + y^{\cdot}.hh' - x^{\cdot}.h'G) + \text{ecc. cioè}$$

$$(AB + CD + EF + \text{ec.})G + (AB.gg' + CD.hh' - EF.ii' + \text{ecc.})y^{\cdot}$$

$$+ (AB.g'G - CD.h'G - EF.i'G + \text{ecc.})x^{\cdot}$$

Ma i moltiplicatori delle $y^{\cdot}$, $x^{\cdot}$ sono nulli, perchè esprimono i momenti delle linee AB, CD, EF rispetto alle rette . . $Gy^{\cdot}$, . . $Gx^{\cdot}$ . . passanti pel loro centro di gravità; adunque la somma delle aree di cui si parla sarà eguale ad

$$(AB + CD + EF + \text{ecc.})\, G,$$

come si è enunciato al principio di questo paragrafo.

Questa proprietà non cessa di aver luogo anco nel caso che le linee generatrici siano in piani differenti, purchè esse si movano conservandosi invariabilmente unite, e le linee percorse dai loro punti siano perpendicolari ai rispettivi piani delle linee generatrici medesime: ciò è facile a dimostrarsi.

5. Passo a fare altrettanto per le solidità; vale a dire a dimostrare che, il volume di un corpo generato da una superficie piana, la quale nel moversi si mantenga perpendicolare alla linea percorsa dal suo centro di gravità, è eguale al prodotto della lunghezza di questa linea per l' area della stessa superficie generatrice.

Comincio a trattare il caso che tutte le linee percorse dai punti della superficie generatrice siano parallele fra loro, e però anco a quella percorsa dal centro di gravità della medesima superficie generatrice.

La superficie generatrice sia in primo luogo il trapezio ADCB (*fig.* 4) avente gli angoli D, C retti, i lati CD, AD, BC rettilinei, e l' AMB qualsivoglia anzi curvilineo.

Si riferiscano i punti e le linee alle due rette perpendicolari Ox, Oy scelte per assi delle coordinate. Per E punto qualunque del trapezio si tirino le rette PEL . . VEF . . parallele alle Oy, Ox; e dall' H, avente dalle rette PEL . . VEF . . distanze indeterminate, si tirino le HL, HFUQ parallele anch'esse alle Ox, Oy; in ultimo pel punto G centro di gravità del trapezio ABCD tirinsi le . . Gx' . . , . . . Gy'. . . pure parallele agli assi Ox, Oy.

Per semplicità si chiamino x, y, ω, θ ordinatamente le OP, PE, PQ, EL, ed h, l, f, ecc. le lunghezze delle linee parallele percorse rispettivamente dai punti H, L, F, ecc. mentre il G percorre λ; in ultimo $V(x, y, \lambda)$ il volume del corpo generato dalla porzione AVEPD della figura ABCD mentre il punto G percorre l' arco λ, ed x', y' angoli analoghi ai già indicati con questi medesimi simboli superiormente.

Essendo $V(x, y, \lambda)$ il volume del corpo generato dalla figura VEPDA, mentre G percorre λ, sarà

$$V(x+\omega,\ y+\theta,\lambda) - V(x, y+\theta,\lambda) - V(x+\omega,\ y,\ \lambda) + V(x, y, \lambda)$$

il volume di quello generato dal rettangolo EFHL; e però

$$V(x+\omega,y+\theta,\lambda+\alpha)-V(x,y+\theta,\lambda+\alpha)-V(x+\omega,y,\lambda+\alpha)+V(x,y,\lambda+\alpha)$$
$$-V(x+\omega,\, y+\theta,\, \lambda)+V(x,\, y+\theta,\, \lambda)+V(x+\omega,\, y,\, \lambda)-V(x,\, y,\, \lambda)$$

esprimerà il volume del corpo generato dal rettangolo ELHF mentre il centro G percorre α aumento di λ.

Sviluppando quest' ultima espressione secondo le dimensioni crescenti degli aumenti ω, θ, α, e riducendo, trovasi essa eguale ad

$$\alpha\omega\theta\left(\frac{d^3V}{dx dy d\lambda}\right)+A$$

in A gli ω, θ, α hanno almeno quattro dimensioni.

La proposizione della Memoria sulle linee e superficie parallele usata già più volte dà

$$l=e+\theta y^{\cdot},\, f=e+\omega x^{\cdot},\ h=e+\theta y^{\cdot}+\omega x^{\cdot},$$

per cui i prodotti dell' $\omega\theta$ area del rettangolo ELHF successivamente per gli incrementi delle e, l, f, h corrispondenti all' α della λ saranno

$$\omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+B,\ \omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+C,$$
$$\omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+D,\ \omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+E,$$

ove le B, C, D, E contengono le α, ω, θ almeno a quattro dimensioni.

Ora riflettendo al volume del corpo generato dal rettangolo ELHF, mentre G percorre α, ed a quelli dei quattro primi anzidetti, non è difficile il concepire, che il primo sarà compreso tra il più grande ed il più piccolo di questi volumi; e per tanto dovendo essere

$$\alpha\omega\theta\left(\frac{d^3V}{dx dy d\lambda}\right)+A$$

compreso tra due delle quattro quantità pocanzi trovate, si avrà

$$\left(\frac{d^3V}{dxdyd\lambda}\right)=\left(\frac{de}{d\lambda}\right),\ \text{e però}\ \left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)=e.$$

6. Quest'ultima equazione si può desumere anco dalla proprietà, che, il volume di un corpo compreso tra due superficie parallele e corrispondenti, è eguale ad un terzo della distanza di queste superficie moltiplicata per la loro semisomma insieme al doppio della superficie parallela corrispondente ed equidistante da esse, la quale è dimostrata nel corollario secondo della proposizione tredicesima della sopra citata Memoria.

Di fatto, il corpo generato dal rettangolo ELHF ha le faccie generate dalle rette LH, EF, non che quelle generate dalle EL, FH, fra loro parallele; e però il volume di esso sarà eguale al prodotto di $\frac{1}{3}$ EL per la semisomma delle aree delle faccie generate dalle rette LH, EF più il doppio di quella generata dalla retta IK parallela ed equidistante dalle stesse LH, EF. Ma le aree delle superficie generate dalle rette EF, LH, IK sono, per la proposizione settima della Memoria sopra citata, eguale ad

$$\frac{1}{2}(e+f)\omega,\ \frac{1}{2}(l+h)\omega,\ \frac{1}{2}(i+k)\omega=\frac{1}{4}(l+e+f+h)\omega;$$

adunque il volume del corpo anzidetto eguaglierà

$$\frac{\theta}{3}\left(\frac{\omega}{4}(e+f+l+h)+\frac{\omega}{2}(e+l+f+h)\right)$$

$$\text{ossia}\ \frac{\omega\theta}{4}(e+f+h+l):$$

espressione che si riduce alla seguente

$$\omega\theta e+\frac{1}{2}\omega\theta^2y'+\frac{1}{2}\omega^2\theta x',$$

ponendovi per f, h, l i loro valori usati poc' anzi.

Ma il volume del corpo generato dal rettangolo EFHL mentre G percorre λ è anco eguale a

$$V(x+\omega,y+\theta,\lambda)-V(x,y+\theta,\lambda)-V(x+\omega,y,\lambda)+V(x,y,\lambda)$$

ossia ad $\omega\theta\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)+Q$, ove la Q contiene ω, θ a tre dimensioni almeno; adunque sarà

$$\omega\theta\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)+Q=\omega\theta e+\frac{1}{2}\,\omega\theta^2 y^{\cdot}+\frac{1}{2}\,\omega^2\theta x^{\cdot}\ ;$$

e conseguentemente avrassi, come superiormente, $\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)=e$.

7. Essendo, per la proposizione relativa alle linee parallele già usata replicatamente,

$$e=\lambda+x^{\cdot}.\ \mathrm{GT}+y^{\cdot}.\ \mathrm{TE},$$

l'equazione trovata nei paragrafi antecedenti si riduce alla

$$\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)=\lambda+x^{\cdot}.\ \mathrm{GT}+y^{\cdot}.\ \mathrm{TE},$$

la quale insegna, che, il volume del corpo generato dal trapezio ABCD, eguaglia

$$\lambda\int\!\!\int dxdy+x^{\cdot}\int\!\!\int \mathrm{GT}dxdy+y^{\cdot}\int\!\!\int \mathrm{ET}dxdy;$$

purchè le primitive si estendano all'intero trapezio stesso. Ma siccome, estendendo in questa guisa tali primitive doppie, si ha la prima eguale all'area dello stesso trapezio ABCD, e le altre due entrambe nulle; così il corpo generato dal trapezio medesimo ABCD avrà il volume eguale all'area di esso moltiplicata per λ, che esprime la lunghezza della linea percorsa dal suo centro di gravità, come si è enunciato.

8. Quest'ultimo risultamento si può dimostrare anco in quest'altra maniera. Si facciano i rettangoli MRQP, SNQP; e chiamisi u l'ordinata MP corrispondente alla ascissa $\mathrm{OP}=x$ della linea AB, $F(x,\lambda)$ il volume del corpo generato dal trapezio AMPD mentre il punto G percorre la linea λ.

Facilmente si dimostra, che i corpi generati dalle superficie MNQP, MRQP, SNQP mentre il punto G percorre l'aumento α della λ, hanno i volumi espressi dalle quantità

$$\alpha\omega F'_{,}+\text{ecc.},\ \frac{\alpha}{4}(m_{,}+r_{,}+p_{,}+q_{,})\,\mathrm{PQ.\,MP}+\text{ecc.},$$

$$\frac{\alpha}{4}(s_{,}+n_{,}+p_{,}+q_{,})\,\mathrm{PQ.\,QN}+\text{ecc.}$$

ove le m, n, q, p, n, s, esprimono le linee parallele percorse dai punti M, N, Q, P, N, S mentre il G percorre la λ.

$$\text{Essendo NQ} = u + \omega u' + \frac{\omega^2}{2} u'' + \text{ecc.}$$

$$n = r \pm y \cdot \text{NR}, \; s = m + y \cdot \text{SM},$$

le ultime due quantità quì esposte si riducono alle

$$\frac{\alpha}{4}(m_1 + q_1 + p_1 + r_1)\omega u + \text{ecc.}, \; \frac{\alpha}{4}(m_1 + p_1 + q_1 + r_1)\omega u + \text{ecc.}$$

e però anco alle seguenti

$$\frac{\omega\alpha}{2}(m_1 + p_1)u + \text{ecc.}, \; \frac{\omega\alpha}{2}(m_1 + p_1) + \text{ecc.} :$$

nei termini ommessi gli aumenti ω, α hanno almeno tre dimensioni.

Ma d'altronde è facile il concepire, che la quantità $\alpha\omega F_1' +$ ecc. dev'essere compresa fra le ultime due esposte; adunque sarà

$$F_1' = \frac{u}{2}(m_1 + p_1), \text{ ossia } F' = \frac{u}{2}(m + p).$$

Ponendo in quest' equazione in luogo delle m, p i loro valori seguenti $t + y \cdot \text{MT}$, $t - y \cdot \text{PT}$, essa si riduce alla

$$F' = ut + \frac{u}{2} y \cdot (\text{MT} - \text{PT}) \text{ ossia } F' = ut + \frac{1}{2} y \cdot (\overline{\text{MT}}^2 - \overline{\text{PT}}^2),$$

la quale, posto per t il valore $\lambda + x \cdot \text{GT}$, dà

$$F' = \lambda u + x \cdot u\,\text{GT} + \frac{1}{2}(\overline{\text{MT}}^2 - \overline{\text{PT}}^2)y,$$

cioè il volume dell'intero corpo generato dal trapezio ABCD eguale a

$$\lambda \int u dx + x \cdot \int \text{GT}.u dx + \frac{y}{2} \int (\overline{\text{MT}}^2 - \overline{\text{PT}})^2 dx;$$

purchè le primitive si estendano da $x = \text{OD}$ ad $x = \text{OC}$. Ma tali primitive sono, la prima l'area del trapezio stesso ABCD, la seconda e la terza nulle; adunque il volume di cui si parla eguaglierà il prodotto di λ per l'area del trapezio generante ABCD.

9. Essendo $\frac{u}{2}(m+p)$ l' area della superficie generata dalla retta MP, l'equazione $F' = \frac{u}{2}(m+p)$ insegna, che, il volume del corpo in quistione eguaglia la primitiva rispetto alla x dell' area della superficie generato dalla MP ed estesa dalla $x = OD$ alla $x = OC$. Così per essere nulla la primitiva di $\overline{MT}^2 - \overline{PT}^2$, l' altra relazione

$$F' = ut + y\cdot(\overline{IP}^2 - \overline{MT}^2)$$

ci insegna che, il volume medesimo eguaglia la primitiva del prodotto ut, presa anch' essa rispetto alla x ed estesa come le anzidette.

10. Ora, senza ammettere la restrizione dichiarata quasi sul principio del paragrafo settimo, passerò a dimostrare la quistione di cui si tratta, seguendo un metodo, al quale appoggerò, come vedrassi, la dimostrazione della quistione reciproca di essa.

Si chiamino s, t, u le coordinate rettangole, per rispetto a tre assi fissi, del centro di gravità della superficie generatrice, considerata in qualsivoglia sua posizione; ed x, y, z le analoghe coordinate di un punto qualunque di essa. Così chiaminsi p, q le coordinate rettangole di quest' ultimo punto riportato a due assi rettangolari mobili ed esistenti nella stessa superficie generatrice e passanti per lo stesso suo centro di gravità; e λ esprima la linea percorsa dal centro di gravità per arrivare nel punto corrispondente alle s, t, u.

Una leggera riflessione farà comprendere la sussistenza delle tre equazioni

$$x = s + Ap + Bq,$$

$$y = t + Cp + Dq,$$

$$z = u + Ep + Fq,$$

nelle quali le A, B; C, D; E, F sono costanti rispetto alle

p, q, e funzioni delle s, t, u; giacchè esprimono i coseni degli angoli fatti dagli assi delle p, q con quelli delle x, y, z.

Considerando il volume del corpo, che chiameremo $V(p, q, \lambda)$, e le coordinate x, y, z funzioni delle tre quantita λ, p, q indipendenti l' una dall' altra, dalla teorica delle cubature si ha

$$\left(\frac{d^3V}{d\lambda dp dq}\right)=\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)-\left(\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dp}\right)\right]+$$
$$\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{dx}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dp}\right)-\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)\right]+$$
$$\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)-\left(\frac{dx}{dq}\right)\left(\frac{dy}{dp}\right)\right];$$

e però, siccome le derivate $\left(\frac{dx}{dp}\right)$, $\left(\frac{dx}{dq}\right)$, $\left(\frac{dy}{dp}\right)$, $\left(\frac{dy}{dq}\right)$, $\left(\frac{dz}{dp}\right)$, $\left(\frac{dz}{dq}\right)$ sono ordinatamente eguali ad A, B, C, D, E, F; così sarà

$$\left(\frac{d^3V}{d\lambda dp dq}\right)=(CF-DE)\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)$$

$$\text{ossia } \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)=\left\{\begin{array}{l}(CF-DE)\int\int\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)dpdq+\\ (BE-AF)\int\int\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)dpdq+\\ (AD-BC)\int\int\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)dpdq\end{array}\right\}$$

ove le tre primitive doppie si debbono estendere a tutta la superficie generatrice.

Ma per essere i punti della superficie generatrice invariabilmente uniti fra loro, dimostrasi facilmente che

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)=a+bz-cy,\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)=d+cx-ez,\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)=f+ey-bx,$$

dove è bene osservare, che le a, b, c, d, e, f sono quantità costanti rispetto alle p, q; per cui si ha

$$\iint\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)dpdq = a\int\int dpdq + b\int\int zdpdq - c\int\int ydpdq,$$

$$\iint\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)dpdq = d\int\int dpdq + c\int\int xdpdq - e\int\int zdpdq,$$

$$\iint\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)dpdq = f\int\int dpdq + e\int\int ydpdq - b\int\int xdpdq;$$

ossia

$$\iint\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)dpdq = (a+bu-ct)\int\int dpdq = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)\mathrm{G},$$

$$\iint\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)dpdq = (d+cs-eu)\int\int dpdq = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)\mathrm{G},$$

$$\iint\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)dpdq = (f+et-bs)\int\int dpdq = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)\mathrm{G},$$

ove G è posta per semplicità in luogo della doppia primitiva definita $\int\int dpdq$ cioè dell'area della superficie generatrice; così avrassi

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}\left((\mathrm{CF}-\mathrm{DE})\left(\frac{ds}{d\lambda}\right) + (\mathrm{BE}-\mathrm{AF})\left(\frac{dt}{d\lambda}\right) + (\mathrm{AD}-\mathrm{BC})\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\right).$$

D'altronde si sa che le tre quantità CF—DE, BE—AF, AD—BC sono i coseni degli angoli fatti cogli assi delle s, t, u dalla retta perpendicolare al piano delle p, q, per cui esse eguagliano i coseni degli angoli fatti coi medesimi tre assi delle s, t, u dalla tangente la linea λ nel suo termine corrispondente alle coordinate s, t, u, cioè esse quantità sono rispettivamente eguali alle derivate $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)$. Adunque sarà

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}\left(\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\right),$$

ossia $\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}$, per essere $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 = 1$.

Da quest' ultima relazione trovata, cioè dalla $\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}$, osservando che a $\lambda = 0$ corrisponde $\mathrm{V} = 0$, si desume la seguente

$$V = \lambda G,$$

la quale rappresenta visibilmente la proprietà enunciata e dimostrata in parte superiormente.

11. Suppongasi la superficie o figura generatrice del corpo la ABHCLDG (*fig.* 5.) qualsivoglia. Si divida nei trapezj ABFG, BHCEF, e nel segmento CLDC, e triangolo ECD figure tutte analoghe a quella della generatrice considerata qui sopra.

I punti 1, 2, 3, 4 siano i centri di gravità di queste quattro figure e si chiamino A, B, C, D le loro aree, ed α, β; α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 le ascisse ed ordinate dei medesimi centri riferiti ai due assi . . Qx' . . , . . Qy' . . passanti pel punto Q centro di gravità di tutte le figure stesse ossia centro di gravità della intera generatrice.

Il volume del corpo generato da tutta la figura ABCHLDG sarà eguale ad

$$A.A_1 + B.B_1 + C.C_1 + D.D_1$$

ove le A_1, B_1, C_1, D_1 esprimono le lunghezze delle linee fra loro parallele percorse dai punti 1, 2, 3, 4.

Si ponga in questa espressione in luogo delle A_1, B_1, C_1, D_1 i loro rispettivi valori

$$Q + \alpha\, x' + \beta\, y',\; Q - \alpha_1 x' - \beta_1 y',$$

$$Q - \alpha_2 x' + \beta_2 y',\; Q - \alpha_3 x' + \beta_3 y',$$

ove Q esprime la lunghezza della linea percorsa dal punto Q, ed essa si ridurrà alla seguente

$$(A+B+C+D)\,Q + (A\alpha - B\alpha_1 - C\alpha_2 - D\alpha_3)\,x'$$
$$+ (A\beta - B\beta_1 + C\beta_2 + D\beta_3)\,y';$$

ma le quantità, che moltiplicano le x', y', sono nulle; giacchè esprimono i momenti delle superficie A, B, C, D aventi il centro di gravità nella origine delle coordinate $\alpha, \beta; \alpha_1, \beta_1$, $\alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3$; adunque il volume del corpo generato dalla figura ABHCLD, che è qualsivoglia, è eguale al prodotto

$$(A + B + C + D) Q;$$

cioè eguaglia l'area della stessa figura generatrice moltiplicata pel viaggio percorso dal suo centro di gravità.

12. Se nel piano delle rette Ox, Oy, ove si è supposta la figura ABHCLD, vi fossero altre figure qualsivogliano, e si movessero tutte in modo di conservarsi perpendicolari alle linee percorse dai rispettivi loro centri di gravità, avrebbesi la somma dei volumi dei corpi da esse generate, eguale alla somma delle aree delle medesime figure generatrici moltiplicata per la lunghezza della linea percorsa dal loro centro di gravità. Anzi una proprietà affatto analoga ha luogo anco nel caso, che le figure generatrici non siano nel medesimo piano, purchè esse si movano conservandosi unite invariabilmente e perpendicolari ognuna alla linea percorsa dal suo centro di gravità: tutto questo è facile a dimostrarsi dopo le cose esposte.

13. Non ommetterò di far osservare, che dalle proposizioni usate per dimostrare le due quistioni costituenti il Teorema di Guldino in tutta la sua estensione, risulta, che le cose esposte reggono sempre che le linee e le superficie generatrici abbiano tali movimenti, che le superficie sviluppabili alle quali si mantengono tangenti i loro piani non siano toccate dalle effettive generatrici medesime.

14. Sia V il volume del corpo generato nel modo ammesso nel paragrafo settimo da una superficie piana di area Q; e siano, K la lunghezza del contorno della superficie generatrice ed S l'area della medesima superficie generata da esso.

Se la linea percorsa dal centro di gravità della superficie generatrice del corpo e quella percorsa dal centro di gravità del contorno di essa saranno fra loro eguali, evidentemente avrassi

$$V : S = Q : K \text{ ossia } V = \frac{Q}{K} S;$$

e però, se l'area Q eguaglierà il prodotto del contorno K, per una linea N, sarà $V = SN$; vale a dire il volume del corpo eguale alla superficie convessa di esso moltiplicata per l'apotema della figura generatrice del medesimo: questa proprietà ha evidentemente luogo, quando la figura generatrice sia un cerchio od un poligono regolare.

15. Ora parlerò delle quistioni reciproche alle due esposte, cioè del Teorema reciproco di quello di Guldino, e comincierò dalla quistione reciproca alla prima delle medesime esposte.

Se la superficie generata da una linea piana ha l'area di una qualunque di quelle sue parti, che si possono supporre generate dalla stessa porzione della linea generatrice la intera superfirie, eguale al prodotto di questa porzione della stessa generatrice per la lunghezza della linea percorsa dal suo centro di gravità, la linea generatrice sarà dovunque perpendicolare a quelle percorse dai suoi punti; e queste saranno per conseguenza parallele fra loro ed anco a quella percorsa dal centro di gravità della stessa generatrice.

Ritengo tutte le denominazioni e dichiarazioni fatte nel paragrafo terzo per la stessa prima quistione, eccettuate le proprietà del parallelismo delle linee r, λ, R e la perpendicolarità di esse al piano della μ generatrice della superficie.

Egli è evidente che tra le x, y, z e la S area di quella parte della superficie, che fra gli estremi ha le linee R, μ, r, sussisterà la relazione usata nello stesso paragrafo terzo cioè la

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right) = \sqrt{[(x'y_{,} - y'x_{,})^2 + (x'z_{,} - z'x_{,})^2 + (y'z_{,} - z'y_{,})^2]}.$$

Così per essere, come nel paragrafo decimo e per le stesse ragioni,

$$\left(\frac{ds}{dr}\right) = a + bu - ct, \left(\frac{dt}{dr}\right) = d + cs - eu, \left(\frac{du}{dr}\right) = f + et - bs,$$

e d'altronde $s=\frac{1}{\mu}\int x d\mu$, $t=\frac{1}{\mu}\int y d\mu$, $u=\frac{1}{\mu}\int z d\mu$, sarà

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right),$$

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right),$$

$$\left(\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right);$$

e però avrassi

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right)^2+\\ \left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right)^2+\\ \left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right)^2\end{array}\right\}}:\mu$$

essendo, come è noto

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=\sqrt{\left[\left(\frac{ds}{dr}\right)^2+\left(\frac{dt}{dr}\right)^2+\left(\frac{du}{dr}\right)^2\right]}.$$

Ma dev' essere

$S=\mu\lambda$ ed anco $\left(\frac{dS}{dr}\right)=\mu\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)$; adunque sarà

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right)^2+\\ \left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right)^2+\\ \left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right)^2.\end{array}\right\}}$$

Quest' ultima relazione, dovendo sussistere qualunque sia μ, somministra la seguente

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(a+bz-cy)\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right)+\\ (d+cx-ez)\left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right)+\\ (f+ey-bx)\left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right)\end{array}\right\}}:\left(\frac{dS}{dr}\right)$$

ossia

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)\text{ eguale a }\left(\frac{dx}{dr}\right)\mu\left(\frac{ds}{dr}\right)+\left(\frac{dy}{dr}\right)\mu\left(\frac{dt}{dr}\right)+\left(\frac{dz}{dr}\right)\mu\left(\frac{du}{dr}\right)$$

diviso per la radice quadrata di $\mu^2\left(\frac{ds}{dr}\right)^2+\mu^2\left(\frac{dt}{dr}\right)^2+\mu^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2$;
cioè

$$\left(\frac{d^2S}{drd\mu}\right)=(x'y'+y't'+z'u'):\left(\frac{d\lambda}{dr}\right).$$

Quindi, affinchè abbia luogo la proprietà ammessa nel teorema di Guldino, dovrà sussistere la equazione

$$(x's'+y't'+z'u):\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=\sqrt{[(x'y_{,}-y'x_{,})^2+(x'z_{,}-z'x_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2]}$$

e conseguentemente anco la seguente

$$(x's'+y't'+z'u'):\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)\left(\frac{dR}{dr}\right)=$$
$$\sqrt{[(x'y_{,}-yx_{,})^2+(x'z_{,}-z'x_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2]}:\left(\frac{dR}{dr}\right),$$

la quale significa, che, il seno dell'angolo compreso dalle tangenti le linee R, λ nei loro punti corrispondenti alle coordinate x, s eguaglia il seno di quello compreso dalla medesima tangente la R e la tangente la μ nello stesso punto loro comune. Indicarò questi due angoli rispettivamente coi simboli $\widehat{R\lambda}$, $\widehat{R\mu}$.

Riflettendo, che, l'equazione quì trovata ossia la proprietà di essere $\cos.\widehat{R\lambda}=\text{sen}.\widehat{R\mu}$, deve aver luogo qualunque sia l'altro termine della μ ossia qualunque parte μ sia della linea generatrice della superficie, e che col diminuire la μ, avvicinando l'altro suo termine al termine comune colla R, l'angolo $\widehat{R\lambda}$ deve finalmente annullarsi, si comprenderà, che le rette tangenti delle differenti linee analoghe alla λ debbono essere tutte parallele alla suddetta tangente della R, ossia che dev'essere $\text{sen}.\widehat{\mu R}=1$ cioè retto l'angolo $\widehat{\mu R}$, qualunque sia la μ; ed anco comprenderassi, che debbono essere le tangenti delle linee analoghe alla R corrispondenti a differenti valori della μ tutte fra loro parallele. Anzi, dovendo essere l'angolo $\widehat{\mu R}$ ed ogni suo analogo retto, esse saranno nei corrispondenti piani normali alla linea μ, i quali sono tutti perpendicolari allo stesso piano di essa medesima; vale a dire, le tangenti delle linee R debbono essere parallele fra loro ed in piani perpendicolari al piano della μ generatrice della superficie, e conseguentemente saranno esse pure perpendicolari al piano di questa medesima linea, o ciò che è lo stesso, le linee percorse dai punti della generatrice di una superficie per la quale sussista la proprietà Guldiniana, saranno parallele fra loro ed anco parallele alla linea percorsa dal centro di gravità di qualsivoglia parte della medesima linea generatrice; il che è appunto quanto si è dichiarato superiormente.

16. In ultimo passo a dimostrare che, se un corpo generato da una superficie, ha il volume di una qualunque sua parte compresa tra due posizioni della superficie generante eguale al prodotto dell'arco della superficie stessa per la lunghezza della linea percorsa dal suo centro di gravità nel passare dall' una all' altra di queste posizioni, la superficie generante il corpo si manterrà costantemente perpendicolare alla stessa linea percorsa dal suo centro di gravità; sia poi che essa roti o non roti intorno di questa linea medesima.

Ritengansi quì pure tutte le denominazioni e condizioni già usate per trattare la quistione diretta nel paragrafo decimo, eccettuata la condizione che la superficie generante mantengasi perpendicolare alla linea percorsa dal suo centro di gravità.

Comunque si mantenga la superficie generatrice del corpo rispetto alla linea percorsa dal suo centro di gravità, mediante le considerazioni occorse nel luogo dianzi citato, si dimostra che

$$\left(\frac{dV}{d\lambda}\right)=\left[(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\right]G.$$

La proprietà che si deve verificare dà l'equazione $V=\lambda G$, la quale dovendo sussistere qualunque sia la λ, somministra la

$$\left(\frac{dV}{d\lambda}\right)=G;$$

e però dovrà essere soddisfatta la seguente equazione

$$\left[(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\right]G=G$$

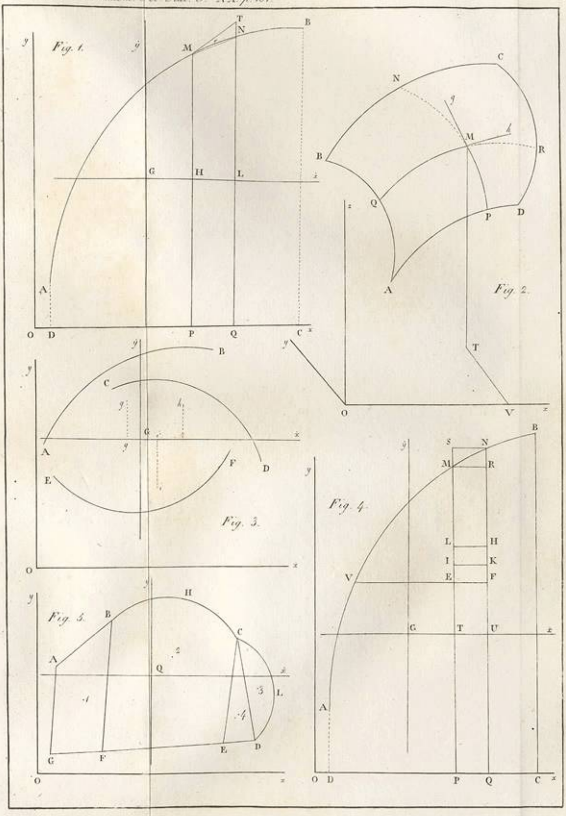
Fig. 1.
y
y
T
N
B
M
G
H
L
x
A
O
D
P
Q
C
x
Fig. 2.
N
C
g
M
h
R
B
Q
z
P
D
A
y
T
O
V
x
Fig. 3.
y
y
B
C
g
h
G
x
A
g
F
D
E
O
x
Fig. 4.
y
y
S
N
B
M
R
L
H
I
K
V
E
F
G
T
U
x
A
O
D
P
Q
C
x
Fig. 5.
y
y
H
B
C
A
Q
x
2
1
3
L
4
G
F
E
D
O
x

ovvero la

$$(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)=1.$$

Ma i binomj CF—ED, BE—AF, AD—BC, come si è già detto, eguagliano i coseni degli angoli fatti cogli assi delle coordinate x, y, z da una retta perpendicolare al piano delle p, q ossia della superficie generatrice, ed i simboli $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)$ esprimono i coseni degli angoli fatti coi medesimi assi dalla tangente la λ nel suo termine corrispondente alle coordinata s, t, u; adunque per la equazione quì sopra esposta cioè per la

$$(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)=1$$

quest' ultima tangente e la retta anzidetta saranno fra loro parallele; vale a dire il piano della superficie generatrice del corpo per cui si verifica la suddetta proprietà Guldiniana, sarà costantemente perpendicolare alla linea percorsa dallo stesso centro di gravità di essa, come si è enunciato.