INTORNO AL METODO GENERALE PROPOSTO
DAL SIG. HOËNÉ WRONSKI
ONDE RISOLVERE LE EQUAZIONI DI TUTTI I GRADI

MEMORIA

DEL SIGNOR PAOLO RUFFINI

Ricevuta li 20. Marzo 1816.

Il Ch. Sig. Hoëné Wronski in un suo Opuscolo portante il titolo *Résolution générale des Équations de tous les dégrés* dedicato alla Polonia, e stampato in Parigi nel 1812 espone un metodo, col mezzo del quale asserisce ottenersi la soluzione di tutte le Equazioni algebriche determinate, qualunque ne sia il grado. Il pensiere di fare cosa grata ai Geometri, comunicando loro lo scioglimento completo di un Problema così famoso ha fatto sì, che Egli non ha esposti nel suo Opuscolo che i risultati indeterminati e generali e la traccia del suo metodo, riserbandosi a renderne pubblica in seguito la Teorica. Le regole pratiche e i calcoli, che in esso propone, sono indicati con chiarezza, e si possono agevolmente eseguire rapporto alle Equazioni di 2.° e di 3.° grado; ma relativamente alle Equazioni di grado più alto, e specialmente a quelle che superano il grado quarto, sono essi a cagione della loro lunghezza e complicazione, e a cagione della grandezza dei coefficienti per riescire laboriosissimi, e capaci di stancare qualunque più paziente Calcolatore. Ciò non ostante se dall'esecuzione dell'enorme lavoro realmente si ottenesse infine lo scioglimento delle Equazioni generiche di 5.°, di 6.°, ec. grado, potremmo anche affrontare la somma fatica, sicuri di trovarne finalmente un compenso nel vedere per noi determinate quelle radici, che per tanto tempo hanno inutilmente cercate i più grandi Geometri. Ma l'impossibilità già esattamente dimostrata di risolvere le Equazioni generiche di grado superiore al 4.° rendendoci certi, che qualunque metodo perciò immaginato è erroneo e qualunque fatica inutile; potremmo con ragione tralasciar di eseguire l'immenso calcolo del Sig. Wronski, e potremmo eziandio dispensarci con pieno diritto dall' effettuare alcun discorso, che ne dimostri la fallacia, allorquando alle Equazioni si voglia applicare di grado non inferiore al 5.° Ciò non ostante, siccome tale erroneità può agevolmente dimostrarsi con raziocinii assai semplici, e siccome per questa può la dimostrazione della menzionata impossibilità ricevere maggior lustro, ci accingiamo ad esporla.

1. Propostasi dall' Illustre Autore l'Equazione algebrica generale.

(I) $\quad 0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec.} + A_m x^m$,

di cui chiama x_1, x_2, x_3, ec. x_m le radici, e nella quale suppone per semplicità maggiore il coefficiente $A_{m-1} = 0$, e l'altro $A_m = 1$, indica il metodo, onde determinare dipendentemente da certe supposizioni un' altra Equazione di grado $m-1$*esimo*, cioè la

(II) $\quad 0 = Y_0 + Y_1 \xi + Y_2 \xi^2 + Y_3 \xi^3 + \text{ec.} + Y_{m-2} \xi^{m-2} + Y_{m-1} \xi^{m-1}$,

i coefficienti Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, ec. Y_{m-1} della quale dimostra essere, come sono difatti, funzioni razionali dei coefficienti A_0, A_1, A_2, A_3, ec. A_m, e denomina ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 ec. ξ_{m-1} le sue radici: chiamate in seguito ρ_1, ρ_2, ρ_3. ec. ρ_m le m radici della Equazione $z^m - 1 = 0$, in modo che sia

$\rho_\mu = \cos.\frac{\mu\pi}{m} + \sqrt{-1} \times \text{sen}.\frac{\mu\pi}{m}$, e π esprima la circonferenza del circolo avente il raggio 1, conclude infine dover essere

$$\text{(III)}\quad\begin{cases} x_1 = \rho_1 \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_1^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_1^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_1^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}}, \\ x_2 = \rho_2 \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_2^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_2^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_2^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}}, \\ x_3 = \rho_3 \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_3^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_3^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_3^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}}, \\ \text{ec.} \\ x_m = \rho_m \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_m^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_m^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_m^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}}. \end{cases}$$

2. Per riconoscere se questa conclusione sia giusta, e quindi se gli esposti nel (n.° prec.) possano essere i veri valori della x nella Equazione data (I); comincio dal riflettere, che in conseguenza della ipotesi fatta dall' Autore nel (n.° prec.) deve essere $\rho_n = \rho_1^n$, rappresentandosi con la n un numero intero qualunque. Difatti, posto $\mu = 1$, dalla $\rho_\mu = \cos.\frac{\mu\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\mu\pi}{m}$ abbiamo $\rho_1 = \cos.\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\pi}{m}$, e posto $\mu = n$, abbiamo $\rho_n = \cos.\frac{n\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{n\pi}{m}$; ma dalle proprietà delle quantità circolari si sa essere $\left(\cos.\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\frac{\pi}{m}\right)^n = \cos.\frac{n\pi}{m} + \sqrt{-1} \times \text{sen}.\frac{n\pi}{m}$. Dunque ec.

Suppongasi successivamente $n = 1, 2, 3$, ec. m; risultando da ciò $\rho_1 = \rho_1$, $\rho_2 = \rho_1^2$, $\rho_3 = \rho_1^3$, ec., $\rho_m = \rho_1^m = 1$; ne segue, che come le ρ_1, ρ_2, ρ_3, ec. ρ_m tutte rappresentano le m radici della $z^m - 1 = 0$, così le radici medesime verranno rappresentate dalle ρ_1, ρ_1^2, ρ_1^3, ec. $\rho_1^m = 1$, ossia posto per semplicità ρ invece della ρ_1, dalle ρ, ρ^2, ρ^3, ρ^4, ec., $\rho^m = 1$.

Si faccia $\sqrt[m]{\xi} = u$, e si sostituisca nelle precedenti Equazioni (III); cangiatesi esse perciò nelle

$$x_1 = \rho u_1 + \rho^2 u_2 + \rho^3 u_3 + \text{ec.} + \rho^{m-1} u_{m-1},$$

$$x_2 = \rho^2 u_1 + \rho^4 u_2 + \rho^6 u_3 + \text{ec.} + \rho^{2(m-1)} u_{m-1},$$
$$x_3 = \rho^3 u_1 + \rho^6 u_2 + \rho^9 u_3 + \text{ec.} + \rho^{3(m-1)} u_{m-1}$$
$$\text{ec.}$$
$$x_m = u_1 + u_2 + u_3 + \text{ec.} + u_{m-1},$$

si moltiplichi la prima di loro per ρ^{m-1}, la seconda per ρ^{m-2}, la terza per ρ^{m-3}, ec. e la penultima per ρ; si sommino insieme le Equazioni, che ne risultano unitamente all'ultima $x_m = u_1 + u_2 + u_3 + \text{ec.}\, u_{m-1}$, e ne verrà evidentemente

$$mu_1 = \rho^{m-1} x_1 + \rho^{m-2} x_2 + \rho^{m-3} x_3 + \text{ec.} + \rho x_{m-1} + x_m,$$

e però

$$\text{(IV)}\quad \xi_1 = \frac{1}{m^m}\left(\rho^{m-1} x_1 + \rho^{m-2} x_2 + \rho^{m-3} x_3 + \text{ec.} + \rho x_{m-1} + x_m\right)^m.$$

Determinato così qual funzione delle x_1, x_2, x_3, ec. x_m sia la ξ_1, veggiamo, quanti valori diversi può essa ξ_1, che per semplicità dirò ξ, acquistare per tutte le permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec. x_m.

3. Cominciamo perciò dal portare nella funzione
$\rho^{m-1} x_1 + \rho^{m-2} x_2 + \rho^{m-3} x_3 + \text{ec.} + \rho x_{m-1} + x_m$
la radice esistente nell'ultimo termine al termine primo, quella del termine primo nel secondo, quella del secondo nel terzo, e così di seguito; e ottenuto per tal modo il risultato
$\rho^{m-1} x_m + \rho^{m-2} x_1 + \rho^{m-3} x_2 + \text{ec.} + \rho x_{m-2} + x_{m-1}$,
io dico che le potenze *mesime* di queste due funzioni sono uguali fra loro.

Supposto difatti chiamarsi la prima di esse t_1, e la seconda t_2; è chiaro risultare $\rho t_2 = t_1$ e quindi $\rho^m t^m_2 = t^m_1$; ma a cagione di $\rho^m = 1$ si ha $\rho^m t^m_2 = t^m_2$. Dunque sarà ancora $t^m_1 = t^m_2$.

4. Replicando successivamente quanto si può la permutazione supposta nel (n.° prec.) avremo evidentemente dalla funzione ivi indicata gli m seguenti risultati

$$\rho^{m-1}x_1+\rho^{m-2}x_2+\rho^{m-3}x_3+\text{ec.}+\rho x_{m-1}+x_m,$$
$$\rho^{m-1}x_m+\rho^{m-2}x_1+\rho^{m-3}x_2+\text{ec.}+\rho x_{m-2}+x_{m-1},$$
$$\rho^{m-1}x_{m-1}+\rho^{m-2}x_m+\rho^{m-3}x_1+\text{ec.}+\rho x_{m-3}+x_{m-2},$$
$$\text{ec.}$$
$$\rho^{m-1}x_2+\rho^{m-2}x_3+\rho^{m-3}x_4+\text{ec.}+\rho x_m+x_1,$$

i quali denomino rispettivamente t_1, t_2, t_3, ec. t_m. Ciò fatto col ripetere quel medesimo discorso, mediante il quale nel (n.° prec.) si è provato essere $t^m_1=t^m_2$, si dimostrerà ancora essere $t^m_2=t^m_3$, $t^m_3=t^m_4$, ec. $t^m_{m-1}=t^m_m$. Dunque le potenze *mesime* di tutte le m funzioni ora determinate sono uguali fra loro.

5. Eseguendo nella funzione (IV) tutte le possibili permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec. x_m, i risultati che se ne ottengono, sappiamo essere di numero $1.2.3\ldots(m-1)m$. Ma in conseguenza della permutazione supposta nel (n. 3) dalla stessa funzione si ottengono m risultati uguali fra loro (n. 4), e tale uguaglianza succede qualunque sia il valore particolare delle x_1, x_2, x_3, ec. x_m. Dunque tutti gli accennati $1.2.3\ldots(m-1)m$ risultati dovendo perciò essere tra loro uguali ad m ad m, i valori che dalla funzione (IV) provengono differenti fra loro sotto tutte le possibili permutazioni non potranno tutt' al più che essere in numero di

$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m}=1.2.3\ldots(m-1).$$

6. Aggiungo, che i risultati, i quali sotto tutte le permutazioni fra le x_1, x_2, x_3 ec. x_m, provenendo dalla funzione (IV), divengono disuguali fra di loro, sono necessariamente di numero $1.2.3\ldots(m-1)$.

Difatti, lasciata nella funzione (IV) la x_m costantemente nell'ultimo luogo, supposto quindi $\rho^{m-1}x_1 + \rho^{m-2}x_2 + \rho^{m-3}x_3$ $+$ ec. $+ \rho x_{(m-1)} = \mathrm{X}$, onde si abbia $\xi = \frac{1}{m^m}(\mathrm{X} + x_m)$, e supposto che eseguita tra alcune o tutte le $m-1$ radici x_1, x_2, x_3, ec. x_{m-1} una qualche permutazione, la X divenga X_1, vogliasi, se è possibile, che si abbia $\frac{1}{m^m}(\mathrm{X}_1 + x_m)^m = \frac{1}{m^m}(\mathrm{X} + x_m)^m = \xi$. Per la supposizione ora fatta, e per l'altra di $u^m = \xi$ (n.° 2) avendosi tanto $\frac{1}{m^m}(\mathrm{X} + x_m)^m$, quanto $\frac{1}{m^m}(\mathrm{X}_1 + x_m)^m = u^m$, sarà valore della u sì la quantità $\frac{1}{m}(\mathrm{X} + x_m)$, come l'altra $\frac{1}{m}(\mathrm{X}_1 + x_m)$; ma per la necessaria disuguaglianza fra tutti i valori ρ, ρ^2, ρ^3, ec. ρ^{m-1}, e per la generalità della Equazione data (I) (n.° 1), e quindi per la indeterminazione delle x_1, x_2, x_3, ec. la X è necessariamente disuguale dalla X_1 e però la $\frac{1}{m}(\mathrm{X} + x_m)$ disuguale dalla $\frac{1}{m}(\mathrm{X}_1 + x_m)$: dunque queste due quantità non potranno che essere due radici dell'Equazione $u^m = \xi$ disuguali fra di loro. Ora, chiamate u_1, u_2 tali due radici, osservo che per la natura delle radici dell'unità, il valore u_2 deriva sempre dall'altro u_1 mentre venga questo secondo moltiplicato per una radice *mesima* dell'unità presa opportunamente, e diversa dall'unità medesima: dunque, chiamata μ simile radice, dovrà essere $u_2 = \mu u_1$ e però $\frac{1}{m}(\mathrm{X}_1 + x_m) = \frac{\mu}{m}(\mathrm{X} + x_m)$; ma quest'ultima Equazione deve verificarsi, qualunque siansi i valori delle x_1, x_2, x_3, ec., perchè l'Equazione data (I) è generica: dunque dovendo verificarsi indipendentemente dai valori medesimi, dovranno in essa i termini omogenei eguagliarsi fra loro, e avremo però $x_m = \mu x_m$, e quindi $1 = \mu$; ma ciò è impossibile, perchè μ è valore necessariamente diverso dall' unità: dunque sarà ancora impossibile, che si abbia $\frac{1}{m}(X + x_m) = \frac{\mu}{m}(X_1 + x_m)$, e però che la ξ non cambi sempre di valore sotto qualunque permutazione si voglia eseguire tra le x_1, x_2, x_3, ec. x_{m-1}. Ora queste radici sono di numero $m-1$, e tutte le permutazioni fra $m-1$ quantità sono di numero $1.2.3\ldots(m-1)$. Dunque la ξ sotto le varie permutazioni tra le x_1, x_2, x_3, ec. acquisterà necessariamente $1.2.3\ldots(m-1)$ valori disuguali fra loro; ma pel dimostrato nel (n.° prec.) non ne può acquistare un numero maggiore. Dunque ec.

7. Suppongasi $1.2.3\ldots(m-1) = \zeta$, e si chiamino ξ_1, ξ_2, ξ_3 ec. ξ_ζ tutti gli ζ valori della ξ, che pel (n.° prec.) sono necessariamente fra loro disuguali. Sapendosi da' principj noti nella Teorica delle Equazioni, potersi sempre trovare un' Equazione, le cui radici siano le precedenti ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_ζ, e i coefficienti della quale siano tante funzioni razionali dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ec. della data (I), supponghiamo determinata attualmente simile Equazione, e tale sia la

(V) $\quad 0 = T_0 + T_1\xi + T_2\xi^2 + T_3\xi^3 + \text{ec.} + \xi^\zeta$.

8. L'Equazione (V) ora trovata non può avere alcun fattore, i coefficienti del quale siano tutti funzioni razionali de' coefficienti A_0, A_1, A_2, ec. della (I).

Concedasi per un momento l' esistenza di questo fattore, e supposto rappresentarsi pel polinomio

(VI) $\quad R_0 + R_1\xi + R_2\xi^2 + \text{ec.} + \xi^r$,

osservo che dovrà essere l' esponente $r < \zeta$, e chiamate ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_r quelle tra le radici della (V), che in esso si contengono, ciascuno de' coefficienti R_0, R_1, R_2, ec. dovrà essere funzione delle medesime, onde espresso per $R_k\xi^k$ uno qualunque de' termini del fattore (VI), porrò in generale $R_k = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \text{ec. } \xi_r)$. Ciò posto, si prenda uno degli ζ valori della ξ (n.° prec.) che sono differenti dai precedenti ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_r, il che può sempre farsi essendo $r < \zeta$; e denominato ξ_{r+1}, si osservi per quali tra le radici x_1, x_2, x_3, ec. x_m permutate fra loro dal risultato ξ_1 ottienesi l' altro ξ_{r+1}. Determinate per questa osservazione tali radici, si permutino esse medesime in simile maniera ancora nel risultato secondo ξ_2, nel terzo ξ_3, e così di seguito fino allo *resimo* ξ_r, e chiamati i risultati che ne vengono in corrispondenza, ξ_{r+2}, ξ_{r+3}, ξ_{r+4}, ec., ξ_{2r}, si formi il prodotto dei binomj $\xi_{r+1} - \xi$, $\xi_{r+2} - \xi$, $\xi_{r+3} - \xi$, ec., $\xi_{2r} - \xi$, e si rappresenti per

(VII) $S_0 + S_1\xi^1 + S_2\xi^2 + S_3\xi^3 + \text{ec.} + \xi^r$.

Denominato $S_k\xi^k$ il termine, che in questo corrisponde al termine $R_k\xi^k$ del fattore (VI), è chiaro, che in conseguenza delle supposizioni fatte dovrà essere $S_k = f(\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \xi_{r+3} \text{ec. } \xi_{2r})$; ma ciascuna delle ξ_{r+1} ξ_{r+2}, ξ_{r+3}, ec. ξ_{2r} deriva da ciascheduna delle rispettive ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_r per la permutazione fra le medesime tra le x_1, x_2, x_3; ec. dunque ancora tutta la S_k deriverà da tutta la R_k per una permutazione tra le accennate fra le radici x_1, x_2, x_3, ec. x_m. Ora dovendo per la ipotesi essere R_k funzione razionale de' coefficienti A_0, A_1, A, ec.; qualunque permutazione si faccia fra tutte, o alcune delle x_1, x_2, x_3, ec. x_m, essa R_k non cambia mai di valore; dunque non dovendolo cangiare neppure sotto la permutazione testè accennata, ne segue che dovrà risultare $S_k = R_k$. Il discorso fatto presentemente si verifica qualunque sia l' indice k: dunqne col fare successivamente $k = 0, 1, 2, 3,$ ec. r, risultando $S_0 = R_0$, $S_1 = R_1$, $S_2 = R_2$, $S_3 = R_3$, ec. $S_r = R_r = 1$; ne segue che i due polinomj (VI), (VII) sono identici fra di loro, e quindi formatene le due Equazioni

$$R_0 + R_1 \xi + R_2 \xi^2 + R_3 \xi^3 + \text{ec.} + \xi^r = 0,$$

$$S_0 + S_1 \xi + S_2 \xi^2 + S_3 \xi^3 + \text{ec.} + \xi^r = 0,$$

le radici di questa dovranno uguagliare rispettivamente le radici di quella; ma ξ_{r+1} è per la ipotesi una delle radici della seconda Equazione, e ξ_1, ξ_2, ξ_3 ec. ξ_r sono tutte le radici della prima. Dunque ξ_{r+1} dovrà necessariamente uguagliare uno dei valori $\xi_1, \xi_2, \xi_3,$ ec. ξ_r; ma ciò risultando contro la supposizione, non può essere; dunque non potrà neppure essere che il secondo membro della Equazione (V) abbia un fattore (VI), i coefficienti del quale siano funzioni razionali dei coefficienti della Equazione data (I).

9. Allorchè sia $m > 3$, il valore (IV) non può essere giammai radice dell' Equazione (II).

Nella ipotesi ora fatta di $m > 3$ risultando $\zeta > m - 1$ (n.° 7), non potrà l' Equazione (II) essere identica con la (V). Aggiungo non potere neppur essere, che il secondo membro di quella sia divisore esatto del secondo membro di questa, nè che questi due secondi membri abbiano un esatto comun divisore funzione della ξ: perchè se o l' uno o l' altro di tali casi avesse luogo; allora, essendo i coefficienti della (II) funzioni razionali dei coefficienti della (I) (n.° 1), il secondo membro della (V) avrebbe un fattore esatto, i coefficienti del quale sarebbero funzioni razionali de' coefficienti della (I), il che non può essere (n.° prec.). Dunque il valore (IV) essendo radice della (V) (n.° 7), non potrà esser tale della (II); perchè se lo fosse, i secondi membri di queste due Equazioni sarebbero amendue divisibili esattamente almeno per $\xi_1 - \xi$, il che è contro ciò, che si è dimostrato presentemente.

10. Suppongasi m numero primo. In questo caso le funzioni ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_{m-1} (n.° 1) non essendo che tanti risultati, i quali provengono dal valore (IV) per tante permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec. (n.° 2), saranno altrettante radici della (V); e ninna per conseguenza di esse pel dimostrato nel (n.° prec.) potrà nella ulteriore ipotesi di $m > 3$ essere radice della Equazione (II).

11. Sia m numero composto. In questa supposizione non tutte le funzioni ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. provengono dal solo valore (IV) in conseguenza di semplici permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec.

Abbiasi per esempio $m = 4$. Essendo in questa ipotesi $\rho_1 = \sqrt{-1}$, $\rho_2 = -1$, $\rho_3 = -\sqrt{-1}$, $\rho_4 = 1$, ne verrà pel (n.° 2).

$$\xi_1 = \frac{1}{4^4}\left(-x_1\sqrt{-1} - x_2 + x_3\sqrt{-1} + x_4\right)^4,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{4^4}\left(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4\right)^4,$$

$$\xi_3 = \frac{1}{4^4}\left(-x_3\sqrt{-1} - x_2 + x_1\sqrt{-1} + x_4\right)^4,$$

e di questi risultati essendo il primo ξ_1 identico col (IV) mentre si faccia $m = 4$, il terzo ξ_3 proviene bensì da esso (IV) per la semplice permutazione delle x_1, x_3 fra di loro; ma il risultato secondo ξ_2 è una funzione affatto diversa dalla

ξ_1, e quindi non può derivarne per una semplice permutazione.

In questa supposizione di $m=4$ nè la ξ_1, nè la ξ_3 potranno pel (n.° prec.) essere radici della Equazione (II). Avuto però riguardo semplicemente al grado di essa (II), ed al non poter avere il suo secondo membro alcun fattore comune col secondo membro della (V) (n.° 9), potrebbe essere radice di essa (II) il valore ξ_2, perchè questo non può essere radice della (V), e di più per tutte le permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, x_4 non può acquistare che tre valori fra loro diversi, cioè i tre

(VIII) $$\frac{1}{4^4}\left(-x_1+x_2-x_3+x_4\right)^4,\ \frac{1}{4^4}\left(-x_2+x_1-x_3+x_4\right)^4,\ \frac{1}{4^4}\left(-x_4+x_2-x_3+x_1\right)^4.$$

Nel caso poi in cui ξ_2 fosse radice della Equazione (II) divenuta nel presente caso di grado terzo, il che nè asserisco nè nego, non avendone effettuato il calcolo; le radici di essa (II) sarebbero necessariamente le tre funzioni (VIII) ora determinate.

12. L'esposto metodo del Sig. Wronski potrà essere atto, come lo è realmente alla soluzione delle Equazioni di secondo, e di terzo grado, perchè in amendue questi casi risulta $\zeta=m-1$, e la Equazione (II) diviene identica con la (V).

Nella ipotesi di $m=4$ potrebbe la (II) pel (n.° prec.) avere per radici le tre funzioni (VIII), e se ciò fosse, l' indicato metodo somministrerebbe eziandio la soluzione delle Equazioni di 4.° grado; ma si avverta, che, se ciò accadesse, chiamate coll' illustre Autore ξ_1, ξ_2, ξ_3, (n.° 1) le tre radici di essa (II), e però le tre funzioni (VIII) (n.° prec.), i valori delle x_1, x_2, x_3, x_4 non uguaglierebbero già le funzioni di esse ξ_1, ξ_2, ξ_3, che propone il Sig. Wronscki (n.° 1), ma si avrebbe

$$x_1=-\sqrt[4]{\xi_1}+\sqrt[4]{\xi_2},+\sqrt[4]{\xi_3},$$

$$x_2 = \sqrt[4]{\xi_1} - \sqrt[4]{\xi_2} + \sqrt[4]{\xi_3},$$

$$x_3 = -\sqrt[4]{\xi_1} - \sqrt[4]{\xi_2} - \sqrt[4]{\xi_3},$$

$$x = \sqrt[4]{\xi_1} + \sqrt[4]{\xi_2} - \sqrt[4]{\xi_3}.$$

13. Nella ipotesi di $m > 4$ il metodo proposto dal Sig. Wronski, onde sciogliere le Equazioni generali, è fallace.

Quanto quivi asserisco era pruovato pienamente in conseguenza della impossibilità già dimostrata di risolvere le Equazioni generiche di grado superiore al 4.°: ciò non ostante potremo riconoscerne ancora la verità in conseguenza di quanto si è detto nei (n.i prec.i). Di fatti sia in primo luogo m numero primo > 4; la funzione (IV), onde aversi la soluzione della (I), dovrebbe in questo caso essere necessariamente radice della (II) (n.i 1, 2), ma ciò pel (n.° 9) non può essere. Dunque nel caso di $m > 4$, e numero primo, il metodo presente è erroneo. Restando $m > 4$, sia esso numero composto; pel cit.° (n.° 9) non potrà neppure in questo caso la funzione (IV) essere, come vorrebbe l' Autore, radice della Equazione (II); pure potrebbe essa (II) contenere siccome radici i valori di un' altra funzione, i quali, come si è osservato relativamente alle Equazioni di 4.° grado (n.° prec.) avessero solamente $m - 1$ valori; ora il numero composto più piccolo maggiore del 4 è il 6: dunque se avesse mai luogo la nostra considerazione, il minimo grado della Equazione (II) sarebbe il 5°., ma simile Equazione di 5.° grado pel già detto non si può risolvere. Dunque ancora nel caso di $m > 4$, e numero composto, il metodo presente è incapace di somministrare la soluzione della data Equazione (I).

La fallacia finalmente di questo metodo deducesi ancora dal Teorema, che un' Equazione generale di grado m, essendo $m > 4$, se si vuole abbassare ad un' altra, che sia di un grado minore di un numero p, essendo p un numero primo non $>m$; essa non potrà giammai abbassarsi, che ad un' Equazione di 1.°, oppure di 2.° grado: Teorema dimostrato da me da prima nel caso particolare di $p=5$, e dimostrato in seguito generalmente dal Ch. Sig. A. L. Couchy (*Journ. de l'Écol. Polytech. Cahier* 17.)