NUOVE CONSIDERAZIONI

INTORNO AD UN PROBLEMA DI PROBABILITÀ

MEMORIA

DEL SIGNOR MARCHESE LUIGI RANGONI

SOCIO ONORARIO

Ricevuta li 18. *Febbrajo* 1820.

1. Il Geometra Malfatti in una (1) delle Memorie di questa Società presentò un esame critico della soluzione data (2) da Daniele Bernoulli di un problema appartenente al calcolo delle probabilità. Questo stesso problema esposto anche con una maggior generalità fu in seguito proposto, e risoluto (3) dall' immortale Lagrange. Per evitare inutili ripetizioni riporto l' enunciativa di esso quale trovasi nella citata Memoria di Lagrange. Eccone pertanto il tenore:

„ Soit un nombre *a* d'urnes rangées de suite, et dont „ chacune contienne *n* billets en partie blancs et en partie „ noirs à volonté; que l'on tire à la fois de chacune de ces „ urnes un billet au hasard, et que l'on mette ensuite le bil- „ let tiré de chaque urne dans l'urne suivante, en observant „ de mettre dans la premiere urne le billet tiré de la der- „ niere; on demande quel sera probablement le nombre des „ billets noirs dans chaque urne après un nombre *b* de pa- „ reils tirages. „

---

(1) V. Memorie di Mat. e di Fis. della Società Italiana. T. I. pag. 768.

(2) V. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imp. Petropolitanae. T. XIV. pro anno 1769 pag. 4.

(3) V. Nouvéaux Mémoires de l' Académie Royale de Berlin. 1775. pag. 270.

„ Soit $y_{x,t}$ le nombre des billets noirs qu'il y aura pro-
„ bablement dans l'urne xeme après t tirages, il est facile
„ de voir qu' après un nouveau tirage ce nombre sera pro-
„ bablement augmenté de $\frac{y_{x-1,t}}{n}$ et diminué de $\frac{y_{x,t}}{n}$. „

Fin quì il Lagrange, il quale dalle precedenti riflessioni ricava l' equazione

$$y_{x,t} + (n-1)y_{x+1,t} - ny_{x+1,t+1} = 0$$

che integrata con uno dei metodi generali da lui esposti nella stessa Memoria dà

$$y_{x,t} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t \left(y_{x,0} + \frac{t}{n-1} y_{x-1,0} + \frac{t(t-1)}{2(n-1)^2} y_{x-2,0} + \text{ec.}\right)$$

integrale in cui il numero dei termini è $t+1$, e che si applica ai casi particolari, osservando che $y_{0,t} = y_{a,t}$, e quindi $y_{0,0} = y_{a,0}$, ed in generale $y_{-s,0} = y_{a-s,0}$ essendo s numero intero positivo, ed anche zero.

2. Per fare alcuna delle più semplici applicazioni di questa formola integrale, suppongo primieramente che si abbia $a = 2$, $y_{x,0} = n$, $y_{x-1,0} = 0$, e si cerchi $y_{2,1}$, locchè secondo le viste dell'Autore riduce il problema al caso di due urne, la prima delle quali avanti ogni estrazione contiene n biglietti bianchi, e la seconda nel caso stesso ne contiene n neri, e trattasi di determinare il numero dei biglietti neri, che probabilmente rimarranno nella seconda urna dopo la prima operazione prescritta nell' enunciato generale, che chiamerò quind' innanzi *permutazione;* comprendendo sotto questo nome il complesso dell' estrazione contemporanea di un dei biglietti da ciascuna delle due urne ora supposte, e del reciproco loro traslocamento nelle medesime. Quindi il risultato di questa prima applicazione dà

$$y_{2,1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^1 n = n - 1,$$

cioè dopo una permutazione eseguita sulle supposte due ur-

ne, si ha il numero non probabile ma certo in questo caso, come è evidente, di $n-1$ biglietti neri nella seconda urna.

3. Passando ad altre applicazioni nella stessa supposizione di due sole urne contenenti prima di ogni permutazione n biglietti rispettivamente bianchi e neri, si otterrà cercando i biglietti neri probabilmente residui nella seconda urna dopo due permutazioni.

$$y_{2,2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(n+\frac{1}{(n-1)^2}n\right)=\frac{(n-1)^3+1}{n}=\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1.$$

E dopo tre permutazioni si avrà pure

$$y_{2,3}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\left(n+\frac{3}{(n-1)^2}n\right)=\frac{(n-1)^3+3(n-1)}{n^2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^2}+\frac{n-2}{n}+1$$

a cagione di $(n-1)^2=(n-2)^2+2n-3$.

In generale dopo t permutazioni, e nella supposizione sempre di due sole urne, si vede facilmente, che la formula suddetta diviene

$$y_{2,t}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^t\left(n+\frac{t(t-1)}{2(n-1)^2}n\right)=\frac{(n-1)^t}{n^{t-1}}+\frac{t(t-1)(n-1)^{t-2}}{2n^{t-1}}=\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}n\left(\frac{2(n-1)^t+t(t-1)(n-1)^{t-2}}{n^t}\right)=\frac{1}{2}n\left(\frac{n^t+(n-2)^t}{n^t}\right)$$

a cagione di $2(n-1)^t+t(t-1)(n-1)^{t-2}=n^t+(n-2)^t$ come si dimostra per lo sviluppo del binomio Neutoniano. Quindi fatto $\frac{n-2}{n}=m$, si ridurrà pure quest' ultima formola ad $\frac{1}{2}n(1+m^t)$.

4. Tanto questa formola generale quanto le altre trovate ne' precedenti numeri 2, 3. sono identiche a quelle che ottenne (1) il già citato Daniele Bernoulli limitandosi alla considerazione del problema nel caso di due sole urne. Conviene però avvertire che la probabilità quì considerata relativamente ai biglietti neri fu da Bernoulli riferita a biglietti o schedole bianche, ed è ben facile a vedersi che l' una e l' altra di queste due probabilità dev' essere la stessa, poichè la condizione dei biglietti dell' una specie corrisponde perfettamente alla condizione dei biglietti o schedole dell' altra. Pertanto il

(1) Dan. Bernoulli. Mem. citata pag. 4. e seg.

Malfatti affermò d' ignorare con quale raziocinio fosse quegli pervenuto a ritrovarle, e giudicò che egli avesse confuso questo problema con un altro assolutamente diverso in cui trattasi di determinare la ragione dei componenti di un misto di acqua, e di vino derivato dal permutamento reciproco e successivo di eguali misure dei due liquidi contenuti in due botti di eguale capacità, supposte da prima ripiene rispettivamente l' una di acqua, e l' altra di vino. Di fatti potè pure il Malfatti sciogliendo questo nuovo problema ricavare quelle stesse formole, che pel suo venivano dal Bernoulli stesso assegnate. Dando perciò luogo a nuove riflessioni, riguardò come erronea la soluzione del Bernoulli, e ve ne sostituì una propria di cui si parlerà in seguito. Intanto può notarsi come independentemente dal problema delle botti si possano trovare le formole di Bernoulli e con un raziocinio analogo a quello adoperato da Lagrange.

5. Sieno due urne A, B la prima delle quali contenga n palle bianche, e la seconda n palle nere, giacchè si possono sostituire le palle ai supposti biglietti. Se cercasi qual sarà il numero delle palle nere nell' urna B dopo una permutazione, si vede subito che queste debbono essere $n-1$ di numero per B, e conseguentemente 1 per A. Facendo una seconda permutazione alle $n-1$ palle nere già esistenti in B se ne aggiungeranno probabilmente $\frac{1}{n}$, e se ne leveranno probabilmente $\frac{n-1}{n}$, cosicchè dopo la seconda permutazione saranno probabilmente in B palle nere

$$n-1+\frac{1}{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1$$

come nel precedente n.° 3.

Ragionando allo stesso modo si vedrà pure che per essere rimaste probabilmente nell' urna B dopo la seconda permutazione palle nere $\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1$, esse dopo la terza saran-

no accresciute di $\frac{n^2-(n-1)(n-2)-n}{n^2}$ $\left[\text{poichè in A sono probabilmente rimaste palle nere } n-\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1\right)\right]$, e diminuite di $\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{1}{n}$, cosicchè il numero probabile di palle nere, che saranno in B dopo la terza permutazione verrà espresso da

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1+\frac{n^2-(n-1)(n-2)-n}{n^2}-\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^2}+\frac{n-2}{n}+1$$

formola identica alla corrispondente ricavata dalle soluzioni di Lagrange, e di Bernoulli: (Veggansi li prec.i n.i 3, 4.) E similmente procedendo si trovarebbero delle altre formole esprimenti ciascuna il numero probabile di palle nere che sono in B rispettivamente dopo la quarta, la quinta ec. permutazione, formole, le quali combinano perfettamente con quelle, che per gli stessi casi somministrano i metodi di questi Geometri.

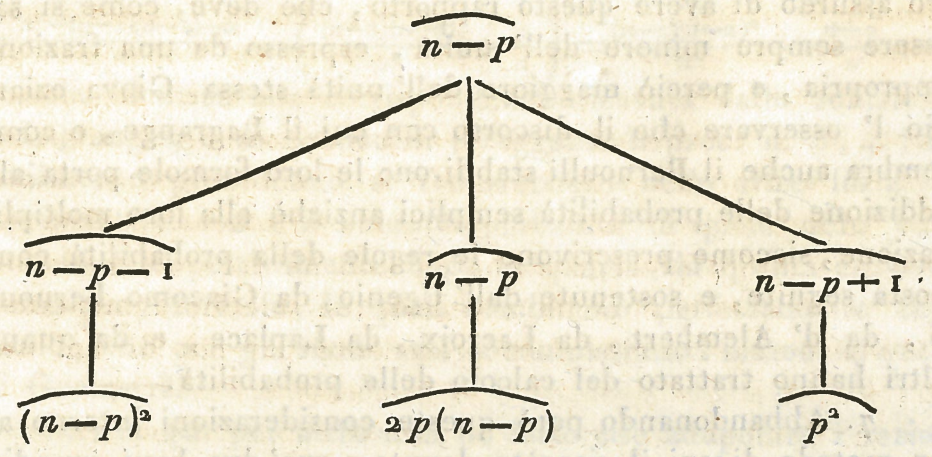
6. Fin quì per altro non ho fatto che adoperare i raziocinj, ed i metodi di que' due Sommi Uomini per mostrarli uniformi, non già perchè non mi sembrino assolutamente fallaci, ed erronei. Quindi adottando in parte le riflessioni del mentovato Malfatti, osservo che la ricerca del numero probabile di una data specie di palle secondo il modo di esprimersi di Bernoulli, e di Lagrange non offre alcuna idea precisa, e che possa concordare coi principj stabiliti del calcolo delle probabilità. Inoltre i risultati che si ottengono dalle particolari applicazioni della formola generale di Bernoulli $\frac{1}{2}n(1+m^t)$ identica a quella di Lagrange nell' ipotesi di due sole urne, possano essere numeri fratti, locchè succede ogni qualvolta niuno de' fattori n, $1+m^t$ è divisibile per 2. Supposto per esempio $n=4$, $t=2$, viene espresso il numero probabile delle palle nere nell' urna B dopo la seconda permutazione da $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$, che essendo appunto numero

frazionario, non si comprende come possa corrispondere a quello delle palle, o biglietti per sua natura intero. Che se anche per l'indicato numero probabile volesse intendersi un rapporto di quantità, secondo la maniera generalmente adottata nel calcolare le probabilità, cioè il rapporto tra le combinazioni favorevoli a far entrare in un' urna una palla nera alla totalità di quelle che sono possibili, si urterebbe nell'altro assurdo di avere questo rapporto, che deve, come si sa, essere sempre minore dell' unità, espresso da una frazione impropria, e perciò maggiore dell' unità stessa. Giova eziandio l' osservare che il discorso con cui il Lagrange, e come sembra anche il Bernoulli stabilirono le loro formole porta all' addizione delle probabilità semplici anzichè alla loro moltiplicazione, siccome prescrivono le regole della probabilità composta seguite, e sostenute dall' Ugenio, da Giacomo Bernoulli, da d' Alembert, da Lacroix, da Laplace, e da quanti altri hanno trattato del calcolo delle probabilità.

7. Abbandonando però queste considerazioni intorno ad un metodo di cui il rispetto dovuto a que' due lumi grandissimi delle Scienze matematiche non può nascondere il paralogismo, conviene riguardare in altro aspetto il proposto problema. Osservò il Malfatti che se in una delle due urne fin quì considerate si hanno $n-p$ palle bianche e p nere, eseguita una permutazione non possono aversi nell' urna stessa che palle bianche $n-p-1$, ovvero $n-p$, ovvero $n-p+1$, vale a dire che il numero o stato delle palle bianche o nere contenute in ciascuna delle due urne, deve per una nuova permutazione o rimanere lo stesso, od aumentarsi o decrescere di un' unità. Si determinano quindi facilmente ed in generale i numeri delle combinazioni favorevoli a ciascuno dei tre eventi suddetti; ed ecco quanto si ottiene:

Eventi derivanti dallo stato $n-p$ di palle bianche in una delle due urne, i quali possono aver luogo dopo una permutazione, coi rispettivi numeri delle combinazioni favorevoli che li possono produrre scritti al di sotto

STATO PRIMITIVO



Ciò permesso trattasi d'indagare quale sia il numero delle combinazioni favorevoli ad un dato evento o stato di palle bianche o nere in una delle due urne dopo un dato numero di permutazioni. Ottenuto il numero ricercato si avrà anche la probabilità di quell'evento, dividendolo per il numero totale delle combinazioni sempre espresso da n^{2t}, posto che t denoti il numero delle permutazioni. Di fatto in ciascuna permutazione le n palle di una delle urne possono combinarsi colle n palle dell'altra il che da n^2 combinazioni. Ma le combinazioni date da una permutazione si legano pure con tutte quelle che appartengono alle successive permutazioni di numero t, dunque il loro numero totale sarà n^{2t}.

8. Cominciasi pertanto collo stesso Malfatti a determinare le combinazioni favorevoli ad aversi nell'urna, che chiamo A, palle bianche per esempio $n-2$ dopo una permutazione, nell'ipotesi che lo stato primitivo, cioè quello che precede

ogni permutazione riguardo alle due urne sia nell' urna A di $n-1$ palle bianche ed 1 nera, e viceversa nell' urna B.

Posto $p=1$, si vede subito che il numero delle combinazioni favorevoli, e corrispondenti all' evento $n-2$ è $(n-1)^2$, e la probabilità di esso è $\frac{(n-1)^2}{n^2}$. Così per le probabilità degli eventi $n-1$, n, si trovano le due espressioni $\frac{2(n-1)}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$. Quindi le probabilità dei tre eventi, che soli possono aver luogo dopo la prima permutazione, stanno fra loro come i numeri delle combinazioni che rispettivamente li producono. Prima di procedere ad altra ricerca è opportuno il riflettere, che se lo stato $n-p$ non può per una permutazione passare che ad uno dei tre altri $n-p-1$, $n-p$, $n-p+1$, viceversa non può essere preceduto che da uno de' tre stati medesimi, altrimenti, come è facile a vedersi, si sarebbe aumentato o diminuito rispetto allo stato precedente per più di un' unità, locchè si è veduto non poter accadere (n.° 7.)

9 Passando ora a determinare le combinazioni favorevoli allo stato $n-2$ come risultato della seconda permutazione, è facile lo scorgere, che esse saranno la somma delle combinazioni che dalla prima permutazione alla seconda possono produrre i passaggi dagli stati $n-3$, $n-2$, $n-1$ allo stato $n-2$ rispettivamente moltiplicate per le combinazioni, per le quali i detti stati si ottengono immediatamente dopo la prima permutazione. Però in questo caso non essendo possibile lo stato $n-3$ come risultato della prima permutazione, perchè lo stato primitivo si è supposto $n-1$, bisognerà escludere il prodotto corrispondente. Quindi pel preced. n.° 7. la totalità delle combinazioni favorevoli allo stato $n-2$ dopo la seconda permutazione sarà $4(n-1)^2(n-2)+2(n-1)^3$, che divisa per n^4 darà la probabilità dell' evento stesso.

Cercando ora le combinazioni favorevoli ai due stati $n-1$, $n-3$ nelle stesse condizioni, si otterranno ragionando nel medesimo modo le prime espresse da $8(n-1)^2+n^2$, e le altre da $(n-1)^2(n-2)^2$.

Se di più si cerchino le combinazioni favorevoli allo stato n dopo la seconda permutazione, osservando che questo non può essere in verun caso preceduto che dagli stati $n+1$, n, $n-1$, uno dei quali solamente può aver luogo nella presente ipotesi, cioè lo stato $n-1$, si troverà il numero di quelle espresso da $2(n-1)$.

Poichè si sono ottenute tutte le combinazioni rispettivamente favorevoli agli eventi n, $n-1$, $n-2$, $n-3$ risultanti dalla seconda permutazione, è opportuno il riflettere che questi sono i soli possibili dopo due permutazioni, giacchè da un canto è sempre impossibile per la natura del problema uno stato maggiore di n, e dall' altro non si avrà mai dopo due permutazioni uno stato minore di $n-3$, non potendo da una permutazione all' altra le palle di una delle due specie decrescere che di un' unità. Ciò posto è chiaro, che se si sommano tutte le combinazioni appartenenti ai detti quattro stati nascerà l' equazione identica ne' suoi membri

$$4(n-1)^2(n-2)+2(n-1)^3+8(n-1)^2+n^2+(n-1)^2(n-2)^2+2(n-1)=n^4$$

come può verificarsi.

10. Riesce pure adesso per le cose dette facile il trovare il numero delle combinazioni favorevoli allo stato $n-2$ dopo tre permutazioni. Di fatto riflettendo (n.° 8.) che questo non può essere preceduto che da uno dei tre stati $n-1$, $n-2$, $n-3$, che sono tutti possibili come risultati della seconda permutazione, basterà per ottenere il numero richiesto sommare le combinazioni favorevoli e corrispondenti ai detti tre stati dopo la seconda permutazione moltiplicate per quelle che producono i rispettivi passaggi di essi allo stato $n-2$ dalla seconda permutazione alla terza. Secondo questa regola si avrà quindi il numero ricercato espresso da

$$(8(n-1)^2+n^2)(n-1)^2+(4(n-1)^2(n-2)+2(n-1)^3)(4(n-2))+9(n-1)^2(n-2)^2=$$
$$8(n-1)^4+n^2(n-1)^2+16(n-1)^2(n-2)^2+8(n-1)^3(n-2)+9(n-1)^2(n-2)^2$$

formola, che differisce da quella che ritrovò (1) il Malfatti

(1) V Malfatti Mem. citata §§. 24. 18.

sciogliendo lo stesso problema pel termine $9(n-1)^2(n-2)^2$ da lui omesso per non avere tenuto conto dell' evento $n-3$ contingibile dopo la seconda permutazione.

Per avere poi il numero delle combinazioni favorevoli allo stato od evento $n-1$ dopo tre permutazioni, farà d' uopo sommare insieme le combinazioni favorevoli, e corrispondenti ai tre stati $n-1$, n, $n-2$ dopo la seconda permutazione, giacchè questi sono i soli, che pel caso in quistione possono aver luogo dopo tale permutazione, moltiplicati rispettivamente per le combinazioni che danno i passaggi di essi stati allo stato $n-1$ che si ottiene immediatamente dopo la terza permutazione. Quindi si ha pel numero ricercato l' espressione $(8(n-1)^2+n^2)2(n-1)+2(n-1)n^2+(2(n-1)^3+4(n-2)(n-1)^2)4=$ $=24(n-1)^3+16(n-2)(n-1)^2+4n^2(n-1)$.

Ragionando nell'istesso modo si troverà il numero delle combinazioni favorevoli all'evento $n-3$ dopo tre permutazioni espresso da $(n-1)^2(n-2)^2 6(n-3)+(2(n-1)^3+4(n-2)(n-1)^2)\times$ $(n-2)^2=6(n-3)(n-1)^2(n-2)^2+4(n-2)^3(n-1)^2+2(n-1)^3(n-2)^2$.

E così il numero delle combinazioni favorevoli all' evento $n-4$ sarà $=(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2$.

Finalmente pel numero delle combinazioni favorevoli all' evento n si otterrà l' espressione $8(n-1)^2+n^2$.

È poi facile a vedersi come essendo $n-1$ lo stato primitivo delle palle bianche in una delle due urne, non possono dopo la terza permutazione aver luogo che questi soli cinque eventi $n-2$, $n-1$, $n-3$, $n-4$, n; e dopo la quarta permutazione oltre i detti cinque eventi può aversi anche l'altro $n-5$; e dopo la quinta oltre i sei precedenti può verificarsi anche l' evento $n-6$, e così di seguito. Del resto chiaro apparisce il modo col quale si possono determinare le combinazioni favorevoli a ciascuno di tali eventi dopo un numero qualunque di permutazioni, la quale ricerca può rendersi ne' diversi casi particolari men laboriosa col far uso della tabella del n 7. più oltre continuata, ed ha poi luogo solamente rispetto allo stato $n-p$ generalmente considerato, qualora tra esso e lo

stato primitivo non siavi una differenza maggiore del numero delle permutazioni.

11. Affine di meglio conoscere la natura del problema, e tentarne quella più generale soluzione di cui possa essere capace, è opportuno il considerarlo in altro aspetto e vedere se per avventura il calcolo delle differenze finite, che è pure la chiave adatta a svelare molta parte della dottrina delle probabilità, possa guidare anche in questo caso al bramato discoprimento. Perciò nell' ipotesi già divisata delle due urne contenenti ciascuna n palle suppongo che le palle nere, e le bianche si trovino da prima, cioè avanti ogni permutazione, comunque frammiste, così che però essendo x palle bianche nell' una di esse urne sieno $n-x$ le nere, e inversamente nell' altra. Col solo principio che lo stato x dopo la prima permutazione, e qualunque stato successivo dopo una unova permutazione non può che o rimanere invariato, o crescere, o decrescere di una unità, si formerà la tavola seguente nella quale x indica lo stato primitivo, e le x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, ec. $x-1$, $x-2$, $x-3$, ec. che si trovano disposte nelle linee orizzontali sotto ad x sono tutti gli eventi possibili dopo qualunque permutazione, il cui ordine progressivo segnato rispetivamente da (1), (2), (3), (4)....(t) è lo stesso che quello delle linee orizzontali anzidette

						x.			
(1)	.	.	.	.	.	$x+1$,	x,	$x-1$.	
(2)	.	.	.	.	$x+2$,	$x+1$,	x,	$x-1$,	$x-2$.
(3)	.	.	.	$x+3$,	$x+2$,	$x+1$,	x,	$x-1$,	$x-2$, $x-3$.
(4)	.	$x+4$,	$x+3$,	$x+2$,	$x+1$,	x,	$x-1$,	$x-2$,	$x-3$, $x-4$.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(t)	$x+t$,	$x+t-1$....		$x+2$,	$x+1$,	x,	$x-1$,	$x-2$,	...$x-t+1$, $x-t$.

12. Col mezzo di questa tavola si vede facilmente come si generi ciascuno de' notati eventi nelle varie permutazioni, riflettendo che per la prima di esse non si possono ottenere

che gli eventi $x+1$, x, $x-1$ della linea orizzontale (1): e siccome da $x+1$ considerato come esistente dopo la prima permutazione possono solamente nascere per effetto della seconda i tre eventi $x+2$, $x+1$, x, e da x nella stessa ipotesi i tre $x+1$, x, $x-1$, e così da $x-1$ i tre x, $x-1$, $x-2$, e d'altronde fra questi nuovi eventi se ne trovano di eguali, perciò la totalità dei diversi per la seconda permutazione si ridurrà ai cinque notati nella linea orizzontale (2). Ripetendo poi anche su questi le stesse osservazioni in ordine ai risultamenti possibili della terza, quarta ec. t^{ma} permutazione, sempre meglio si renderà palese la legge con cui procedono le serie d'eventi che corrispondono ad ogni permutazione. E quì è da notarsi che qualora il numero t di permutazioni sia maggiore di $n-x$, mancheranno nella parte crescente della serie (t) contata da x verso sinistra i termini $x+t$, $x+t-1$, $x+t-2$, ec. fino ad $x+t-y$ esclusivamente, supposto $y=t-(n-x)$, giacchè niuno degli stati compresi nella detta serie può mai essere maggiore di n. Inoltre non potendo alcuno dei termini della parte decrescente della serie medesima discendere oltre lo zero, altrimenti vi avrebbero stati negativi non ammessi dalla natura del problema, si arresterà essa al termine $x-t+y'$ inclusivo, supposto $y'=t-x$.

13. Giova ora osservare per le cose da dirsi in appresso come le funzioni che possono esprimere il numero delle combinazioni rispettivamente favorevoli ai diversi eventi possibili dopo qualunque permutazione non sono sempre simili, vale a dire costituite allo stesso modo, poichè gli eventi di ciascuna delle linee orizzontali dopo la prima nella tavola del n.° 11. nascono diversamente in rapporto ai risultati della permutazione precedente. Così a cagion d'esempio l'evento $x+2$ che ha luogo dopo la seconda permutazione non può essere preceduto che dall'evento $x+1$ risultante dalla prima, laddove nelle stesse circostanze $x+1$ deriva da $x+1$, e da x'; ed x da x, $x-1$, $x+1$, e così pure $x-1$ deriva da x, $x-1$, e $x-2$ deriva solamente da $x-1$.

Non fece alcun cenno il Geometra Laplace di questa dissimiglianza di funzioni quando nel trattare (1) dello stesso problema stabilì un' equazione, la quale si riduce facilmente alla seguente

(A) ..... $z_{x,t+1}=(x+1)^2 z_{x+1,t}+2x(n-x)z_{x,t}+(n-x+1)^2 z_{x-1,t}$

cambiando quì soltanto la significazione di $z_{x,t}$, $z_{x+1,t}$ ec. per rappresentare le combinazioni favorevoli rispettivamente allo stato x, $x+1$, ec. dopo t permutazioni, mentre il Geometra Francese si servì di que' segni per indicare le probabilità corrispondenti.

14. L' equazione (A), prescindendo dal discorso con cui fu ottenuta l' accennata del Laplace, si stabilisce col seguente facile raziocinio. L' evento x dopo t permutazioni non può essere preceduto che dai tre $x+1$, x, $x-1$ dopo la $(t-1)^{esima}$ permutazione. Dunque se $z_{x,t}$ indichi il numero delle combinazioni favorevoli all' evento x dopo t permutazioni, si intende facilmente ciò che significheranno le funzioni $z_{x+1,t-1}$, $z_{x,t-1}$, $z_{x-1,t-1}$, le quali essendo rispettivamente e per ordine moltiplicate pel numero delle combinazioni, che da una permutazione qualunque alla seguente producono i passaggi degli stati $x+1$, x, $x-1$ allo stato x, e riunite poscia in somma daranno pure un' altra espressione della totalità delle combinazioni favorevoli allo stato x dopo t permutazioni. Si avrà quindi l' equazione

(B) .... $z_{x,t}=(x+1)^2 z_{x+1,t-1}+2x(n-x)z_{x,t-1}+(n-x+1)^2 z_{x-1,t-1}$

dalla quale nasce l' equazione (A) facendo solamente crescere la t di un' unità.

15. La precedente formola (B) ritenuta senza alcuna modificazione, e riguardando la lettera z come segno di una

(1) V. Théorie Analytique des probabilités - seconde édition. pag. 287, e seg.

funzione generica, cioè tale che al variare degli stati e del numero delle permutazioni possa ricevere valori non riducibili ad una sola espressione generale, qualora venga applicata al caso di uno stato primitivo qualunque x, somministra una nuova prova della dissimiglianza delle funzioni per le quali è data l'equazione stessa. Fa d'uopo perciò premettere che in tal caso l'espressione $z_{x,0}$ equivale necessariamente ad 1, giacchè indicandosi con essa il numero delle combinazioni favorevoli allo stato x dopo zero permutazioni, rappresenta la medesima pur' anche la totalità delle combinazioni che appartengono a zero permutazioni. Ma queste pel n.° 7. sono $n^{2.0}=1$. Dunque sarà $z_{x,0}=1$. La quale equazione si può anche ottenere, osservando, che siccome stante l'ipotesi fatta la probabilità dell' evento x perviene al grado di certezza e perciò prende il valore 1, così (n.° 7.) si avrà

$z_{x,0}=1.n^{2.0}=1$. Ciò posto si ponga nella formola (B) $t=1$: si avrà

$$z_{x,1}=2x(n-x)z_{x,0}=2x(n-x)$$

poichè supposto essere x lo stato primitivo, deve nella stessa formola (B) necessariamente annullarsi ciascuna delle funzioni $z_{x+1,0}$, $z_{x-1,0}$, e quindi anche ciascuno dei termini di cui esse sono fattori.

Per avere poi le espressioni corrispondenti a $z_{x+1,1}$, e a $z_{x-1,1}$, sostituiscasi nella (B) successivamente $x+1$, e $x-1$ invece di x: si avranno le due equazioni

$$z_{x+1,t}=(x+2)^2z_{x+2,t-1}+2(x+1)(n-x-1)z_{x+1,t-1}+(n-x)^2z_{x,t-1}$$

$$z_{x-1,t}=x^2z_{x,t-1}+2(x-1)(n-x+1)z_{x-1,t-1}+(n-x+2)^2z_{x-2,t-1}$$

nelle quali ponendo $t=1$, e tralasciando anche quì i termini, che debbono svanire nella supposizione di x stato primitivo, si ha

$$z_{x+1,1} = (n-x)^2 z_{x,0} = (n-x)^2$$

$$z_{x-1,1} = x^2 z_{x,0} = x^2 .$$

Per $z_{x,1}$, $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$, si sono adunque ritrovate col mezzo dell' equazione (B) tre espressioni affatto identiche a quelle che somministrerebbe la regola del n.° 7; ed è ben facile a comprendersi, che la cosa doveva appunto riuscire così, poichè nello stabilire l'equazione (B) si sono impiegati raziocinj dipendenti da quella regola. Pertanto considerando questi valori di $z_{x,1}$, $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$, osservo che se essi fossero funzioni simili, ponendo $x+1$ in vece di x nell' equazione $z_{x,1} = 2x(n-x)$ dovrebbesi avere per $z_{x+1,1}$ l' espressione $(n-x)^2$, locchè non ha luogo: e così pure ponendo $x-1$ in vece di x nell' equazione stessa, si dovrebbe per $z_{x-1,1}$ ottenere l' espressione x^2, che nemmeno si verifica. Ne consegue non potersi, anche qualora l' integrazione dell' equazione (B) non isfuggisse ai metodi conosciuti, ricavare da essa un' espressione generale atta a somministrare tutti i valori richiesti dal problema, poichè supposta pure la negata simiglianza delle funzioni, se si trovasse in generale $z_{x,t} = \Psi$, denotando per Ψ la ricercata formola data per x, t, si avrebbe pure $z_{x,1} = \Psi'$ cioè ad un' altra espressione dedotta da Ψ col porre in essa $t=1$. Dovrebbe perciò Ψ' essere identica col valore di $z_{x,1}$ ottenuto nel modo testè dichiarato, e dovrebbe nel tempo stesso per l' ipotesi somministrare i valori di $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$ solo che in essa venisse rispettivamente sostituito $x+1$, $x-1$ in vece di x, locchè si vede essere assurdo.

16. Malgrado però le sovraesposte difficoltà si possono non ostante dall' equazione (B) per via di successive sostituzioni ricavare dopo una, due, tre, ec. permutazioni quelle stesse formole, che si ottennero già nei precedenti n.i 8. 9. 10. Suppongasi pertanto lo stato primitivo $x=n-1$, e s' in-

cominci tosto dal determinare le espressioni che danno le combinazioni favorevoli agli eventi $n-1$, n, $n-2$, che sono i soli che possano aver luogo dopo una permutazione. Mettendo $n-1$ in vece di x nelle equazioni del prec. n.° 15. che somministrano i valori di $z_{x,1}$, $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$: si avrà

$$z_{x,1} = z_{n-1,1} = 2(n-1)$$

$$z_{x+1,1} = z_{n,1} = 1$$

$$z_{x-1,1} = z_{n-2,1} = (n-1)^2.$$

dove $z_{n-1,1}$, $z_{n,1}$, $z_{n-2,1}$ secondo il significato loro attribuito al n.° 13. rappresentano le combinazioni che dopo una permutazione conducono rispettivamente gli eventi $n-1$, n, $n-2$. Si vede ora che tali risultati sono identici a quelli del n.° 8. locchè doveva verificarsi, siccome fu precedentemente avvertito.

17. Per dedurre poi dalla formola (B) le combinazioni favorevoli agli eventi n, $n-1$, $n-2$, $n-3$ dopo la seconda permutazione, i quali possono unicamente aver luogo, stante l' ipotesi fatta dello stato primitivo $n-1$ dopo tale permutazione, pongo in essa (B) $t=2$, ed x successivamente $=n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$; omettendo i termini che di necessità debbono svanire si avranno le equazioni

$$z_{n,2} = 1^2 z_{n-1,1}$$

$$z_{n-1,2} = n^2 . z_{n,1} + 2(n-1) z_{n-1,1} + 2^2 . z_{n-2,1}$$

$$z_{n-2,2} = (n-1)^2 z_{n-1,1} + 4(n-2) z_{n-2,1}$$

$$z_{n-3,2} = (n-2)^2 z_{n-2,1}$$

ovvero anche, sostituendo per $z_{n-1,1}$, $z_{n,1}$, $z_{n-2,1}$ i valori trovati nel prec. n.° 16.

$$z_{n,2} = 2(n-1)$$

$$z_{n-1,2} = n^2 + 8(n-1)^2$$

$$z_{n-2,2}=2(n-1)^3+4(n-2)(n-1)^2$$

$$z_{n-3,2}=(n-2)^2(n-1)^2$$

risultati, che sono appunto conformi a quelli del n.° 9.

18. Nello stesso modo ponendo nell' equazione (B) $t=3$, ed x successivamente $=n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, le combinazioni, che dopo la terza permutazione producono rispettivamente ciascuno di questi cinque eventi, i quali possono soltanto aver luogo dopo tale permutazione e sempre nella supposizione di $n-1$ stato primitivo, si ricaveranno dalle equazioni

$$z_{n,3}=1.^2z_{n-1,2}$$

$$z_{n-1,3}=n.^2z_{n,2}+2(n-1)z_{n-1,2}+2.^2z_{n-2,2}$$

$$z_{n-2,3}=(n-1)^2z_{n-1,2}+4(n-2)z_{n-2,2}+3.^2z_{n-3,2}$$

$$z_{n-3,3}=(n-2)^2z_{n-2,2}+6(n-3)z_{n-3,2}$$

$$z_{n-4,3}=(n-3)^2z_{n-3,2}\,.$$

ove sostituendo per $z_{n-1,2}$, $z_{n,2}$, $z_{n-2,2}$, $z_{n-3,2}$ i valori trovati nel prec. n.° 17. risulteranno le seguenti espressioni, che sono lè stesse che si ebbero al n.° 10

$$z_{n,3}=n^2+8(n-1)^2$$

$$z_{n-1,3}=24(n-1)^3+16(n-2)(n-1)^2+4n^2(n-1)$$

$$z_{n-2,3}=8(n-1)^4+25(n-2)^2(n-1)^2+8(n-2)(n-1)^3+n^2(n-1)^2$$

$$z_{n-3,3}=6(n-3)(n-1)^2(n-2)^2+4(n-2)^3(n-1)^2+2(n-2)^2(n-1)^3$$

$$z_{n-4,3}=(n-3)^2(n-2)^2(n-1)^2$$

Dopo ciò è quasi superfluo l' avvertire, che l' esposto metodo vale per trovare eziandio le combinazioni favorevoli a qualunque evento in ogni supposizione del numero delle palle, e di quello delle permutazioni.

19. Vi ha però un altro modo per determinare i valori di $z_{x,t}$ in qualunque supposizione di x e di t, il quale si deduce dal successivo sviluppo delle funzioni $z_{x+1,t-1}$, $z_{x,t-1}$, $z_{x-1,t-1}$, che entrano nell' equazione (B), e di quante altre da esse si ottengono coll' andamento che viene più sotto dichiarato. In tanto per brevità facciasi

$$(x+1)^2=M_x\,,\ 2x(n-x)=N_x\,,\ (n-x+1)^2=P_x$$

l' equazione (B) diverrà

$$\text{(C)}\ldots z_{x,t}=M_x z_{x+1,t-1}+N_x z_{x,t-1}+P_x z_{x-1,t-1}$$

dove posto $x+\omega$ in vece di x, e $t-\theta$ in vece di t, esprimendosi con ω un numero intero qualunque positivo, o negativo, ed anche zero, e con θ o lo zero, ovvero un numero intero positivo, ma però non $>t$; si avrà

$$\text{(D)}\ldots z_{x+\omega,t-\theta}=M_{x+\omega} z_{x+\omega+1,t-\theta-1}+N_{x+\omega} z_{x+\omega,t-\theta-1}+P_{x+\omega} z_{x+\omega-1,t-\theta-1}$$

formola dalla quale facilmente si deducono gli sviluppi delle accennate funzioni nei diversi casi, secondo i particolari valori che si attribuiscono ad ω, e a θ.

20. Col mezzo della (D) si trovino pertanto i valori di $z_{x+1,t-1}$, $z_{x,t-1}$, $z_{x-1,t-1}$, e si sostituiscano nella (C); si otterrà

$$\text{(E)}\ldots z_{x,t}=M_x M_{x+1} z_{x+2,t-2}+M_x(N_{x+1}+N_x)z_{x+1,t-2}+(M_x P_{x+1}+N^2_x+P_x M_{x-1})z_{x,t-2}$$
$$+P_x(N_x+N_{x-1})z_{x-1,t-2}+P_x P_{x-1} z_{x-2,t-2}\,.$$

Pongasi per brevità

$$M_x M_{x+1}=S\,,\ M_x(N_{x+1}+N_x)=S',\ M_x P_{x+1}+N^2_x+P_x M_{x-1}=S''$$
$$P_x(N_x+N_{x-1})=S'''\,,\ P_x P_{x-1}=S^{iv}\,,$$

e si mettano nella (E) per $z_{x+2,t-2}$, $z_{x+1,t-2}$, $z_{x,t-2}$, $z_{x-1,t-2}$, $z_{x-2,t-2}$ i valori dati similmente dalla (D): si avrà

$$\text{(F)}\ldots z_{x,t}=SM_{x+2} z_{x+3,t-3}+(SN_{x+2}+S'M_{x+1})z_{x+2,t-3}+(SP_{x+2}+S'N_{x+1}+S''M_x)z_{x+1,t-3}$$

$$+(S'P_{x+1}+S''N_x+S'''M_{x-1})z_{x,t-3}+(S''P_x+S'''N_{x-1}+S'^{v}M_{x-2})z_{x-1,t-3}$$
$$+(S'''P_{x-1}+S'^{v}N_{x-2})z_{x-2,t-3}+S'^{v}P_{x-2}\,z_{x-3,t-3}.$$

E qui pure facendo per brevità

$$SM_{x+2}=T,\ SN_{x+2}+S'M_{x+1}=T',\ SP_{x+2}+S'N_{x+1}+S''M_x=T'',$$
$$S'P_{x+1}+S''N_x+S'''M_{x-1}=T''',\ S''P_x+S'''N_{x-1}+S'^{v}M_{x-2}=T'^{v}$$
$$S'''P_{x-1}+S'^{v}N_{x-2}=T^{v},\ S'^{v}P_{x-2}=T^{v'},$$

e sviluppando nel modo sovraindicato le funzioni $z_{x+3,t-3}$, $z_{x+2,t-3}$, $z_{x+1,t-3}$, $z_{x,t-3}$, $z_{x-1,t-3}$, $z_{x-2,t-3}$, $z_{x-3,t-3}$ esistenti nel secondo membro dell' equazioue (F) si troverà

$$(G)\ ..\ z_{x,t}=TM_{x+3}\,z_{x+4,t-4}+(TN_{x+3}+T'M_{x+2})z_{x+3,t-4}$$
$$+(T\,P_{x+3}+T'N_{x+2}+T''M_{x+1})z_{x+2,t-4}+(T'P_{x+2}+T''N_{x+1}+T'''M_x)z_{x+1,t-4}$$
$$+(T''P_{x+1}+T'''N_x+T'^{v}M_{x-1})z_{x,t-4}+(T'''P_x+T'^{v}N_{x-1}+T^{v}M_{x-2})z_{x-1,t-4}$$
$$+(T'^{v}P_{x-1}+T^{v}N_{x-2}+T^{v'}M_{x-3})z_{x-2,t-4}+(T^{v}P_{x-2}+T^{v'}N_{x-3})z_{x-3,t-4}$$
$$+T^{v'}P_{x-3}\,z_{x-4,t-4}.$$

21. Si vede dall' andamento dell' operazione con cui dalla (C) si derivano le altre tre equazioni (E), (F), (G), che in queste si aumenta successivamente il numero dei termini della prima secondo la legge dei numeri dispari, che pure deve osservarsi ne' susseguenti sviluppi, giacchè per ognuno di essi s' introducono sempre due nuove funzioni di x e t, nelle quali tanto la differenza positiva che la negativa di x si accresce di un' unità. Si scorge egualmente come in ciascuno degli sviluppi già dati si formino i coefficienti dell' equazione, che ne nasce dipendentemente da quelli dell' altra che appartiene allo sviluppo immediatamente precedente, e dalle funzioni esplicite di x secondo una legge costante. Per conseguenza rappresentando con $V, V', V'', V'''....V^{(k-2)}, V^{(k-1)}$,

$V^{(k)}$ rispettivamente e per ordine i coefficienti del primo, secondo, terzo ec. termine della funzione $z_{x,t}$ sviluppata fino a $t-s+1$, l' equazione che esprimerà generalmente la stessa $z_{x,t}$ ma sviluppata fino a $t-s$ sarà manifestamente

$$
\begin{aligned}
(H) \ldots z_{x,t} = {} & VM_{x+s-1}\, z_{x+s,t-s} + (VN_{x+s-1} + V'M_{x+s-2})\, z_{x+s-1,t-s} \\
& + (VP_{x+s-1} + V'N_{x+s-2} + V''M_{x+s-3})\, z_{x+s-2,t-s} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (V^{(k-2)}P_{x-s+3} + V^{(k-1)}N_{x-s+2} + V^{(k)}M_{x-s+1})\, z_{x-s+2,t-s} \\
& + (V^{(k-1)}P_{x-s+2} + V^{(k)}N_{x-s+1})\, z_{x-s+1,t-s} \\
& + V^{(k)}P_{x-s+1}\, z_{x-s,t-s},
\end{aligned}
$$

la qual formola generale può utilmente adoperarsi per continuare oltre a $t-4$ lo sviluppo (G) della funzione $z_{x,t}$. Di fatto esprimendosi con $V, V', V'', V''', \ldots V^{v'''}$ rispettivamente e per ordine ciascuno dei coefficienti dei nove termini della (G), e posto $s=5$, la formola (H) dà subito lo sviluppo di $z_{x,t}$ protratto sino a $t-5$. Similmente da questo sviluppo col mezzo della stessa (H) si ricava quello di $z_{x,t}$ protratto sino a $t-6$, e così di seguito.

22. Per rendere manifesto l' uso, che può farsi delle precedenti formole (C), (E), (F), (G) ec. conviene notare la corrispondenza che passa fra il numero dei termini contenuti nel secondo membro di ciascuna di esse, e quello degli eventi che risultano dalle successive permutazioni, e che sono indicati dalle serie della tavola del n.° 11. Serve infatti l' equazione (C) dotata nel secondo membro di tre soli termini a determinare, nell' ipotesi di x stato primitivo, le combinazioni favorevoli ai tre eventi, che possono solamente aver luogo dopo una permutazione, siccome l' equazione (E), che nel secondo membro contiene cinque termini soltanto, mostra le combinazioni che appartengono ai cinque eventi possibili do-

po la seconda permutazione; e così proseguendo può similmente ragionarsi rispetto alle altre equazioni di ulteriore sviluppo. Pertanto fatto nella (C) $t=1$ si ricava subito (n.° 15.)

$$z_{x,1}=N_x\,,\ z_{x+1,1}=P_{x+1}\,,\ z_{x-1,1}=M_{x-1}\,.$$

E posto $t=2$ nell' equazione (E), stante sempre la supposizione di x stato primitivo, si ha

$$z_{x,2}=M_x P_{x+1}+N^2_x+P_x M_{x-1}\,.$$

Per avere poi nella stessa ipotesi le combinazioni, che conducono gli altri quattro eventi $x-2$, $x-1$, $x+1$, $x+2$ che insieme coll' evento x sono i soli possibili dopo due permutazioni, pongasi in essa (E) successivamente $x-2$, $x-1$, $x+1$, $x+2$ in vece di x, si avranno le equazioni

$$z_{x-2,2}=M_{x-2}M_{x-1}$$

$$z_{x-1,2}=M_{x-1}(N_x+N_{x-1})$$

$$z_{x+1,2}=P_{x+1}(N_{x+1}+N_x)$$

$$z_{x+2,2}=P_{x+2}P_{x+1}\,.$$

È poi chiaro che in un modo analogo si potrebbero trovare col mezzo delle equazioni (F), (G) ec. le combinazioni corrispondenti a ciascheduno degli eventi notati nelle linee orizzontali (4) ec. della tavola del n.° 11. dopo tre, quattro ec. permutazioni.

23. Il vantaggio adunque, che si ha dalle equazioni (C), (E), (F), (G) ec. stabilite nei precedenti n.^{i} 19. 20. 21. allorchè sono sviluppate in corrispondenza di un numero dato di permutazioni, di potersi dedurre qualunque valore particolare di $z_{x,t}$ da un solo de' loro termini, mostra pure la via per ricavare altri particolari valori di $z_{x,t}$ per un maggior numero di permutazioni, senza che sia d' uopo perciò di sviluppare ulteriormente le equazioni stesse. Intanto giova osservare, che il coefficiente del primo termine nell' equazione (C) è M_x quello dello stesso termine nella (E) è $M_x M_{x+1}$ il corrispon-

dente nella (F) è $M_x M_{x+1} M_{x+2}$, e nella (G) è $M_x M_{x+1} M_{x+2} M_{x+3}$. Quindi essendo l'equazione (G) sviluppata sino a $t-4$, s'inferisce dalla legge manifesta con cui procede il coefficiente di un tal termine nelle successive equazioni dipendentemente dall'operazione per cui si ottiene, che esso per un'altra equazione sviluppata generalmente sino a $t-s$ sarà

$M_x M_{x+1} M_{x+2} M_{x+3} \ldots\ldots M_{x+s-2} M_{x+s-1}$, così che supposto x lo stato primitivo, e ponendo nella formola (H) $x-s$ in vece di s, e $t=s$, si avrà pel numero delle combinazioni favorevoli all'evento $x-s$ dopo s permutazioni l'espressione generale

(K) . . . $z_{x-s,s} = M_{x-s} M_{x-s+1} M_{x-s+2} M_{x-s+3} \ldots\ldots M_{x-2} M_{x-1}$.

Parimenti si vede, che essendo rispettivamente P_x, $P_x P_{x-1}$ $P_x P_{x-1} P_{x-2}$, $P_x P_{x-1} P_{x-2} P_{x-3}$, il coefficiente dell'ultimo termine in ciascuna delle suddette equazioni, il corrispondente nell'equazione sviluppata sino a $t-s$ sarà $P_x P_{x-1} P_{x-2} P_{x-3} \ldots\ldots$ $P_{x-s+2} P_{x-s+1}$. Ponendo poi nella (H) $x+s$ in vece di s, e $t=s$, si avrà, nella stessa ipotesi di x stato primitivo, pel numero delle combinazioni favorevoli all'evento $x+s$ dopo s permutazioni l'altra formola generale

(I) . . . $z_{x+s,s} = P_{x+s} P_{x+s-1} P_{x+s-2} P_{x+s-3} \ldots\ldots P_{x+2} P_{x+1}$.

24. Passando ora ad indagare la legge con cui procedono i coefficienti del secondo, e del penultimo termine in ciascuna delle anzidette equazioni, considero i due $VN_{x+s-1} + V'M_{x+s-2}$, $V^{(k-1)}P_{x-s+2} + V^{(k)}N_{x-s+1}$ della (H) per determinarli in un modo analogo a quello con cui si sono ottenuti nel prec. n.° 23. i coefficienti dei due termini estremi della medesima equazione, e quindi anche per avere altre due formole generali, di cui l'una dia le combinazioni che conducono l'evento $x-s+1$ dopo s permutazioni, e l'altra quelle che dopo lo stesso numero di permutazioni conducono l'evento $x+s-1$. Osservo

perciò, che il coefficiente di tal termine nella (E) sviluppata sino a $t-2$ è $M_x(N_{x+1}+N_x)$, nella (F) sviluppata sino a $t-3$ si trova $=M_x M_{x+1}(N_{x+2}+N_{x+1}+N_x)$, ed il corrispondente nella (G) sviluppata sino a $t-4$ si trova $=M_x M_{x+1} M_{x+2} \times (N_{x+3}+N_{x+2}+N_{x+1}+N_x)$, dopo di avere sostituito nei coefficienti di queste due ultime equazioni per S, S', T, T', i valori loro assegnati nel n.° 20. Di quì si scorge manifestamente, che il coefficiente $VN_{x+s-1}+V'M_{x+s-2}$ del secondo termine dell' equazione (H) sviluppata sino a $t-s$ sarà $M_x M_{x+1} M_{x+2} \ldots M_{x+s-3} M_{x+s-2}(N_{x+s-1}+N_{x+s-2}+N_{x+s-3}+\ldots+N_{x+1}+N_x)$. Mettendo poi in essa (H) $x-s+1$ in vece di x e fatto $t=s$, nell' ipotesi anche quì di x stato primitivo si avrà generalmente

$$(L)\ldots z_{x-s+1,s}=M_{x-s+1} M_{x-s+2} M_{x-s+3} \ldots M_{x-2} M_{x-1}(N_x+N_{x-1}+N_{x-2}+\ldots+N_{x-s+2}+N_{x-s+1}).$$

Similmente si vede, che essendo $P_x(N_x+N_{x-1})$ il coefficiente del penultimo termine nell' equazione (E), e $P_x P_{x-1} \times (N_x+N_{x-1}+N_{x-2})$, $P_x P_{x-1} P_{x-1}(N_x+N_{x-1}+N_{x-2}+N_{x-3})$ i corrispondenti nella (F), e nella (G), il coefficiente $V^{(k-1)}P_{x-s+2}+V^{(k)}N_{x-s+1}$ del penultimo termine dell' equazione (H) sarà $P_x P_{x-1} P_{x-2} \ldots P_{x-s+3} P_{x-s+2}(N_x+N_{x-1}+N_{x-2}+\ldots+N_{x-s+2}+N_{x-s+1})$. Posto frattanto in essa (H) $x+s-1$ in vece di x e $t=s$ si otterrà quest' altra formola generale

$$(M)\ldots z_{x+s-1,s}=P_{x+s-1} P_{x+s-2} P_{x+s-3} \ldots P_{x+2} P_{x+1}(N_{x+s-1}+N_{x+s-2}+N_{x+s-3}+\ldots+N_{x+1}+N_x).$$

25. Nello stesso modo osservando la legge dei coefficienti del terzo, e dell' antepenultimo termine in ciascuna delle equazioni (F), (G) ec. dopo di avere in essi sostituito per S, S', S'', S''', S^{iv}, T, T', T'', T^{iv}, T^{v}, T^{vi}, i valori loro assegnati nel preced. n.° 20 si trova facilmente pel coefficiente $VP_{x+s-1}+V'N_{x+s-2}+V''M_{x+s-3}$ del terzo termine dell' equazione (H) sviluppata sino a $t-s$ l' espressione

$$M_x M_{x+1} M_{x+2} \ldots M_{x+s-4} M_{x+s-3}\Big[M_{x-1} P_x + M_x P_{x+1} + M_{x+1} P_{x+2} + \ldots\ldots + M_{x+s-3} P_{x+s-2} + M_{x+s-2} P_{x+s-1} + N^2_x + N^2_{x+1} + N^2_{x+2} + \ldots + N^2_{x+s-3} + N^2_{x+s-2} + N_x (N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + N_{x+1}(N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + N_{x+2}(N_{x+3} + \ldots + N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + \text{ec.} + N_{x+s-4}(N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + N_{x+s-3} N_{x+s-2}\Big],$$

e pel coefficiente dell' antepenultimo termine $V^{(k-2)}P_{x-s+3}+V^{(k-1)}N_{x-s+2}+V^{(k)}M_{x-s+1}$ dell' equazione stessa si trova l' espressione

$$P_x P_{x-1} P_{x-2} \ldots\ldots P_{x-s+4} P_{x-s+3}\Big[M_x P_{x+1} + M_{x-1} P_x + M_{x-2} P_{x-1} + \ldots\ldots + M_{x-s+2} P_{x-s+3} + M_{x-s+1} P_{x-s+2} + N^2_x + N^2_{x-1} + N^2_{x-2} + \ldots\ldots + N^2_{x-s+3} + N^2_{x-s+2} + N_x (N_{x-1} + N_{x-2} + N_{x-3} + \ldots\ldots + N_{x-s+2} + N_{x-s+2}) + N_{x-1}(N_{x-2} + N_{x-3} + \ldots + N_{x-s+3} + N_{x-s+2}) + N_{x-2}(N_{x-3} + \ldots + N_{x-s+3} + N_{x-s+2}) + \text{ec.} + N_{x-s+4}(N_{x-s+3} + N_{x-s+2}) + N_{x-s+3} N_{x-s+2}\Big].$$

Ponendo poi nella (H) $x-s+2$ in vece di x, e $t=s$, sussistendo sempre l' ipotesi di x stato primitivo, si avrà pel numero delle combinazioni favorevoli all' evento $x-s+2$ dopo s permutazioni la formola generale

$$(N) \ldots z_{x-s+2,s} = M_{x-s+2} M_{x-s+3} M_{x-s+4} \ldots\ldots M_{x-2} M_{x-1}$$
$$\Big[M_{x-s+1} P_{x-s+2} + M_{x-s+2} P_{x-s+3} + M_{x-s+3} P_{x-s+4} + \ldots$$
$$+ M_{x-1} P_x + M_x P_{x+1} + N^2_{x-s+2} + N^2_{x-s+3} + N^2_{x-s+4} + \ldots$$
$$+ N^2_{x-1} + N^2_x + N_{x-s+2} (N_{x-s+3} + N_{x-s+4} + N_{x-s+5} + \ldots$$
$$+ N_{x-1} + N_x) + N_{x-s+3} (N_{x-s+4} + N_{x-s+5} + \ldots + N_{x-1} + N_x)$$
$$+ N_{x-s+4} (N_{x-s+5} + \ldots + N_{x-1} + N_x) + \text{ec.} + N_{x-2} (N_{x-1} + N_x)$$
$$+ N_{x-1} N_x \Big].$$

E così pure ritenuto nella stessa equazione (H) $t = s$, e posto $x+s-2$ in vece di x si avrà pel numero delle combinazioni favorevoli all' evento $x+s-2$ dopo s permutazioni quest' altra formola generale

$$(O) \ldots z_{x+s-2,s} = P_{x+s-2} P_{x+s-3} P_{x+s-4} \ldots P_{x+2} P_{x+1} \Big[M_{x+s-2} P_{x+s-1}$$
$$+ M_{x+s-3} P_{x+s-2} + M_{x+s-4} P_{x+s-3} + \ldots + M_x P_{x+1} + M_{x-1} P_x$$
$$+ N^2_{x+s-2} + N^2_{x+s-3} + N^2_{x+s-4} + \ldots + N^2_{x+1} + N^2_x$$
$$+ N_{x+s-2} (N_{x+s-3} + N_{x+s-4} + N_{x+s-5} + \ldots + N_{x+1} + N_x)$$
$$+ N_{x+s-3} (N_{x+s-4} + N_{x+s-5} + \ldots + N_{x+1} + N_x) + N_{x+s-4} (N_{x+s-5}$$
$$+ \ldots + N_{x+1} + N_x) + \text{ec.} + N_{x+2} (N_{x+1} + N_x) + N_{x+1} N_x \Big].$$

26. Quantunque si potesse portare più innanzi questa analisi trovando oltre le (K), (I), (L), (M), (N), (O) nuove formole generali corrispondenti ad altri termini della (H) equidistanti dal termine medio, è d' uopo però confessare che ciò esigerebbe una soverchia operosità di calcolo per cui queste formole riuscirebbero assai complicate e prolisse. Da esse inoltre difficilmente si ricaverebbe una legge comune a tutti i termini dell' equazione (H) indefinitamente sviluppata, e l' espressione generale che per avventura potesse comprenderli, dedotta anche da una non bene manifesta induzione sarebbe

pur essa di troppo intralciata ed estesa. Mi basta perciò di avere considerato il problema in tutta la sua generalità, e di avere mostrato come allo sviluppo della formola (B) non isfugga alcuno dei casi possibili notati nella tavola del n.° 11.

27. Rimane ora a mostrarsi come per facilitare il ritrovamento del numero delle combinazioni richiesto ne' diversi casi particolari secondo il metodo fin quì spiegato, giova dedurre il termine per cui viene stabilito il numero cercato corrispondentemente ad un dato sviluppo, dai termini dell' equazione ottenuta per lo sviluppo immediatamente precedente, locchè si fa chiaro col seguente esempio. Vogliasi il terzo termine che nascerebbe dalla (H) qualora fosse sviluppata sino a $t-s-1$. Senza compiere intieramente tale sviluppo di (H) si vede in primo luogo che il detto termine dovrà contenere la funzione $z_{x+s-1,t-s-1}$ con un coefficiente, che si determina tenendo conto soltanto di quelli che negli sviluppi parziali di $z_{x+s,t-s}$, $z_{x+s-1,t-s}$, $z_{x+s-2,t-s}$ secondo l'equazione (D) moltiplicano $z_{x+s-1,t-s-1}$. La somma di tali coefficienti rispettivamente e per ordine moltiplicati per quelli de' tre primi termini dell' equazione (H) sarà il coefficiente che si cercava. Ciò che si è detto riguardo al ritrovamento del terzo termine dell' equazione (H) sviluppata sino a $t-s-1$, mostra pure la regola per ottenere egualmente il quarto, quinto ec. di quà però dal penultimo. È poi evidente che la regola stessa si estende a qualunque sviluppo della (H) in relazione allo sviluppo immediatamente successivo. Sarà eziandio facile il convincersi, che il primo termine e l'ultimo di qualunque equazione risultante da uno degli sviluppi della (H) rispettivamente derivano da un solo de' termini dell' equazione data dallo sviluppo precedente, siccome il secondo ed il penultimo di quella nascono rispettivamente da due soli termini di questa. Ciascuno poi de' rimanenti termini della prima nasce da tre della seconda, l'uno de' quali trovasi

nella stessa sede rispettiva riguardo al primo termine, e gli altri due occupano le sedi più prossime retrocedendo verso questo stesso primo termine.

28. Per estendere, e viemmaggiormente far conoscere l'uso del metodo testè esposto, è opportuno di considerare un altro problema del tutto analogo al fin quì trattato ed alquanto più semplice, comecchè presenti le stesse difficoltà che non furono avvertite da Laplace, a cui pure piacque di tradurlo in simboli non diversi da quelli ai quali sottomise l'altro. Suppongasi perciò una sola urna che contenga la totalità di n palle in parte bianche e in parte nere, dalla quale per una operazione ripetuta si estragga una palla a sorte sostituendovi costantemente una nera. Si cerca il numero delle combinazioni favorevoli ad un qualunque stato possibile di palle bianche nell'urna. Si denoti per x lo stato primitivo delle palle bianche nell'urna, e conseguentemente per $n-x$ quello delle nere. È evidente, che allo stato x, eseguita la prescritta estrazione e la successiva sostituzione, le quali entrambe comprenderò in seguito sotto il solo nome di *trasmutamento*, non può succedere che uno degli stati x, $x-1$. Il primo ha luogo, come è abbastanza chiaro, quando si estrae dall'urna una palla nera, ed il secondo quando se ne estrae una bianca. È poi anche evidente, che il numero delle palle bianche nei successivi trasmutamenti può bensì scemare, quantunque solo di un'unità per ciascuno di essi, ed anche talvolta rimanere il medesimo, ma non può crescere giammai. All'incontro il numero $n-x$ delle palle nere può esso pure rimanere lo stesso dall'uno all'altro degli indicati trasmutamenti, o crescere di un'unità, ma non può scemarsi. Con queste osservazioni si costruisce facilmente la serie seguente di palle bianche, o nere, che ponno succedersi da un trasmutamento qualunque all'altro contiguo fino al $r.^{mo}$ partendo dai supposti stati primitivi:

x stato primitivo di palle bianche, $n-x$ stato primitivo di palle nere

$x,\ x-1\ \ldots\ldots\ (1)\ \ldots\ n-x,\ n-x+1$

$x,\ x-1,\ x-2\ \ldots\ldots\ (2)\ \ldots\ n-x,\ n-x+1,\ n-x+2$

$x,\ x-1,\ x-2,\ x-3\ \ldots\ (3)\ \ldots\ n-x,\ n-x+1,\ n-x+2,\ n-x+3$

. . . . . .

. . . . . .

$x,\ x-1,\ x-2,\ \ldots\ldots\ x-r\ \ldots\ (r)\ \ldots\ n-x,\ n-x+1,\ n-x+2,\ \ldots\ldots\ n-x+r.$

29. Anche nelle condizioni del presente problema se si esprimano collo stesso segno di funzione i numeri delle combinazioni rispettivamente favorevoli agli stati di palle bianche o nere dopo un qualunque numero di trasmutamenti, s' incontrerà l' inconveniente che confonde insieme funzioni dissimili nel senso indicato ai precedenti n.^{i} 13. 15. A cagion d' esempio, poichè dopo il trasmutamento (1) gli stati x, $x-1$ delle palle bianche nascono diversamente da x, portando l' uno la conservazione dello stato primitivo, e l' altro il decrescimento del medesimo per un' unità, ne viene che le funzioni esprimenti le rispettive combinazioni favorevoli che essi hanno sono dissimili. Lo stesso può dirsi riguardo agli stati, che possono esistere dopo il trasmutamento (2), giacchè l' uno di essi cioè x non può nascere che da x supposto esistere dopo il trasmutamento (1), ed $x-1$ può nascere da x, ovvero da $x-1$, e lo stato $x-2$ non può nascere che da $x-1$. Si vede poi come un tale discorso può estendersi generalmente a tutte le combinazioni relative ad ogni evento sia di palle bianche quanto di nere, che possa verificarsi dopo qualunque altro numero di trasmutamenti.

30. Frattanto per istabilire un' equazione, che esprima le condizioni del problema s' indichi con $z_{x,r}$ il numero delle combinazioni favorevoli allo stato qualunque x di palle bianche nell' urna dopo r trasmutamenti. Non potendo, anche per le cose dette, lo stato x aver luogo dopo il trasmutamento r^{esimo} se non qualora sia preceduto da uno degli stati x, $x+1$ risultanti dal trasmutamento $(r-1)^{mo}$, se si rappresentino per

$z_{x,r-1}$, $z_{x+1,r-1}$ le combinazioni che ad essi corrispondono, queste rispettivamente moltiplicate per quelle che appartengono ai passaggi dagli stati x, $x+1$ allo stato x, e ridotte in somma equivaranno a $z_{x,r}$, cioè si avrà l'equazione

$$(A') \ldots z_{x,r} = (x+1)z_{x+1,r-1} + (n-x)z_{x,r-1},$$

ossia facendo crescere la r di un' unità

$$z_{x,r+1} = (x+1)z_{x+1,r} + (n-x)z_{x,r},$$

la quale diviene identica all' altra ritrovata (1) da Laplace, rivolgendo le funzioni da lui usate per esprimere le probabilità degli eventi a significare i rispettivi numeri delle combinazioni favorevoli ai medesimi.

Volendo poi le combinazioni favorevoli ad aversi $n-x$ palle nere dopo r trasmutamenti, facendo uso di analoghi raziocinii si trovarebbe l' equazione

$$(B') \ldots z_{n-x,r} = (n-x)z_{n-x,r-1} + (x+1)z_{n-x-1,r-1}.$$

31. Ponendo per brevità nell' equazione (A')

$$x+1 = Q_x, \quad n-x = R_x,$$

si avrà

$$(C') \ldots z_{x,r} = Q_x z_{x+1,r-1} + R_x z_{x,r-1},$$

la quale può svilupparsi in un modo simile a quello che fu indicato al n.° 20. relativamente all' altro problema, variando in essa opportunamente la x, e la r per avere i valori di $z_{x+1,r-1}$, $z_{x,r-1}$, $z_{x+2,r-2}$, $z_{x+1,r-2}$, $z_{x,r-2}$, $z_{x+3,r-3}$, $z_{x+2,r-3}$ ec. $z_{x+4,r-4}$ ec. $z_{x+5,r-5}$ ec. da sostituirsi nell' equazione (C') e in quelle che successivamente da essa derivano. Per tal modo si otterranno le seguenti equazioni, sviluppando la funzione $z_{x,r}$ sino ad $r-5$ onde meglio si vegga la legge con cui procedono i coefficienti dei termini di ognuna delle medesime:

(1) V. Théo. Analyt. des probabilités ed. cit. pag. 284.

$$(D')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} z_{x+2,r-2} + Q_x\left(R_x + R_{x+1}\right) z_{x+1,r-2} + R_x^2 z_{x,r-2}$$

$$(E')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} z_{x+3,r-3} + Q_x Q_{x+1}\left(R_x + R_{x+1} + R_{x+2}\right) z_{x+2,r-3}$$

$$+ Q_x\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_x R_{x+1}\right) z_{x+1,r-3} + R_x^3 z_{x,r-3}$$

$$(F')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} Q_{x+3} z_{x+4,r-4} + Q_x Q_{x+1} Q_{x+2}\left(R_x + R_{x+1} + R_{x+2} + R_{x+3}\right) z_{x+3,r-4}$$

$$+ Q_x Q_{x+1}\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_{x+2}^2 + R_x\left(R_{x+1} + R_{x+2}\right) + R_{x+1} R_{x+2}\right) z_{x+2,r-4}$$

$$+ Q_x\left(R_x^3 + R_{x+1}^3 + R_x R_{x+1}\left(R_x + R_{x+1}\right)\right) z_{x+1,r-4} + R_x^4 z_{x,r-4}$$

$$(G')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} Q_{x+3} Q_{x+4} z_{x+5,r-5}$$

$$+ Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} Q_{x+3}\left(R_x + R_{x+1} + R_{x+2} + R_{x+3} + R_{x+4}\right) z_{x+4,r-5}$$

$$+ Q_x Q_{x+1} Q_{x+2}\Big[R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_{x+2}^2 + R_{x+3}^2 + R_x\left(R_{x+1} + R_{x+2} + R_{x+3}\right)$$

$$+ R_{x+1}\left(R_{x+2} + R_{x+3}\right) + R_{x+2} R_{x+3}\Big] z_{x+3,r-5}$$

$$+ Q_x Q_{x+1}\Big[R_x^3 + R_{x+1}^3 + R_{x+2}^3 + R_x R_{x+1}\left(R_x + R_{x+1}\right)$$

$$+ R_{x+2}\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_x\left(R_{x+1} + R_{x+2}\right) + R_{x+1} R_{x+2}\right)\Big] z_{x+2,r-5}$$

$$+ Q_x\Big[R_x^4 + R_{x+1}^4 + R_x R_{x+1}\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_x R_{x+1}\right)\Big] z_{x+1,r-5} + R_x^5 z_{x,r-5}$$

32. L' andamento dell' operazione per cui si ottengono dalla (A') le formole (D'), (E'), (F'), (G') fa scorgere che ne' successivi sviluppi si aumenta sempre di un solo termine il secondo membro di ognuna delle medesime in corrispondenza al numero degli eventi che appartengono ad ogni trasmu-

tamento secondo la tavola del n.° 28. È inoltre da osservarsi che il primo termine di ciascuna delle anzidette equazioni ha per coefficiente il prodotto di tante funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. per ordine incominciando da Q_x quante sono le unità sottratte da r; che il coefficiente del secondo termine ha per uno de' suoi fattori il prodotto delle funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. esclusa l' ultima che trovasi nel coefficiente del primo termine, e per altro fattore la somma di tutte le funzioni R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. sino a quella inclusivamente in cui l' aumento di x è minore di un' unità del numero sottratto da r; che il coefficiente del terzo termine è composto di due fattori, l' uno dei quali è lo stesso prodotto delle funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. esclusa l' ultima che entra nel coefficiente del termine precedente, e l' altro fattore è la somma dei prodotti di due dimensioni che possono formarsi coll' adoperare le funzioni R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. fino a quella esclusivamente che è l' ultima nel coefficiente del termine precedente, tanto moltiplicandole per se medesime, che fra loro. Tutti i coefficienti degli altri termini che vengono dopo si riducono sempre al prodotto di due fattori, ne' quali progressivamente si adempie la stessa legge di diminuzione nel numero delle funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. che entrano a comporli, e si aumenta sempre di un' unità l' egual dimensione di tutti i prodotti che possono farsi colle stesse R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. Questa regola ne insegna, che volendosi in generale il coefficiente del termine $p.^{simo}$ dell' equazione (A') sviluppata sino ad $r-s$, si avrà l' uno de' fattori espresso da Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} . . . Q_{x+s-p}, dove p non può mai essere per la natura degli anzidetti sviluppi $> s$. Per avere poi l' altro fattore in cui entrano le funzioni R_x,

R_{x+1}, R_{x+2} ec. si rifletta, che mentre il primo termine di ognuna delle prec. equazioni (D'), (E'), (F'), (G') non contiene alcuna di esse funzioni, il coefficiente del secondo ne contiene un numero eguale alle unità sottratte da r, il qual numero va poi sempre scemando di un' unità ne' successivi termini. Adunque il termine $p.^{simo}$ dell' equazione sviluppata sino ad $r-s$ ne conterrà un numero $s-p+2$; cioè le funzioni stesse saranno R_x, R_{x+1}, R_{x+2}, ... $R_{x+s-p+1}$, le quali però si dovranno moltiplicare per se medesime, e fra loro, per ottenere tutti i possibili prodotti di $p-1$ dimensioni. Sarà così determinata un' espressione generale, la quale servirà a dare il valore di $z_{x,r}$ in qualunque supposizione di x, e di r. Indicando infatti per X la somma di tutti i prodotti di $p-1$ dimensioni che costituisce questo secondo fattore del coefficiente del termine $p.^{simo}$, siffatto termine verrà pertanto rappresentato da $Q_x\ Q_{x+1}\ Q_{x+2} \ldots Q_{x+s-p}.X.z_{x+s-p+1,\,r-s}$. E supponendo $x+s-p+1$ lo stato primitivo, ed $r=s$, dall' equazione che somministra lo sviluppo di $z_{x,r}$ protratto sino a $t-s$ si ricaverà l' altra

$$z_{x,s} = Q_x\ Q_{x+1}\ Q_{x+2} \ldots Q_{x+s-p}.X,$$

giacchè, stante la fatta ipotesi, $z_{x+s-p+1,0}$ diviene $=1$, e svanisce manifestamente ciascuno degli altri termini di quell' equazione.

33. Venendo ora a considerare l' equazione (B'), si fa manifesto che essa esprime le stesse condizioni della (A'), e può riguardarsi come identica alla medesima, giacchè le combinazioni che danno x palle bianche dopo r trasmutamenti espresse da $z_{x,r}$ sono evidentemente le stesse di quelle, che danno $n-x$ palle nere dopo lo stesso numero r di trasmutamenti e sono indicate da $z_{n-x,r}$. Giova ciò non pertanto col mezzo degli sviluppi di questa equazione (B') conformi ai prati-

cati sulla (A') dedurre qualche altra osservazione intorno ai coefficienti dei diversi termini, che conduca a facilitare l'applicazione dell'una e dell'altra ai casi particolari. Si faccia quindi nella (B') $n-x=y$; si avrà

$$(H') \ldots\ldots\ldots \quad z_{y,r}=yz_{y,r-1}+(n-y+1)z_{y-1,r-1}.$$

Per abbreviare poi i risultati che si ottengono sviluppando l'equazione (H') fino ad $r-6$, si premettono le seguenti posizioni $n-y+1=T_y$

$$y+(y-1)=A,\quad A+(y-2)=B,\quad B+(y-3)=C,\quad C+(y-4)=D,\quad D+(y-5)=E$$
$$y^2+A(y-1)=A',\quad A'+B(y-2)=B',\quad B'+C(y-3)=C',\quad C'+D(y-4)=D'$$
$$y^3+A'(y-1)=A'',\quad A''+B'(y-2)=B'',\quad B''+C'(y-3)=C''$$
$$y^4+A''(y-1)=A''',\quad A'''+B''(y-2)=B'''$$
$$y^5+A'''(y-1)=A^{iv}.$$

Nasceranno così le altre equazioni

$$(K')\ldots\ z_{y,r}=y^2z_{y,r-2}+AT_y z_{y-1,r-2}+T_y T_{y-1} z_{y-2,r-2}$$
$$(I')\ldots\ z_{y,r}=y^3z_{y,r-3}+A'T_y z_{y-1,r-3}+BT_y T_{y-1} z_{y-2,r-3}+T_y T_{y-1} T_{y-2} z_{y-3,r-3}$$
$$(L')\ldots\ z_{y,r}=y^4z_{y,r-4}+A''T_y z_{y-1,r-4}+B'T_y T_{y-1} z_{y-2,r-4}+CT_y T_{y-1} T_{y-2} z_{y-3,r-4}$$
$$+T_y T_{y-1} T_{y-2} T_{y-3} z_{y-4,r-4}$$
$$(M')\ldots\ z_{y,r}=y^5z_{y,r-5}+A'''T_y z_{y-1,r-5}+B''T_y T_{y-1} z_{y-2,r-5}+C'T_y T_{y-1} T_{y-2} z_{y-3,r-5}$$
$$+DT_y T_{y-1} T_{y-2} T_{y-3} z_{y-4,r-5}+T_y T_{y-1} T_{y-2} T_{y-3} T_{y-4} z_{y-5,r-5}$$
$$(N')\ldots\ z_{y,r}=y^6z_{y,r-6}+A^{iv}T_y z_{y-1,r-6}+B'''T_y T_{y-1} z_{y-2,r-6}+C''T_y T_{y-1} T_{y-2} z_{y-3,r-6}$$
$$+D'T_y T_{y-1} T_{y-2} T_{y-3} z_{y-4,r-6}+ET_y T_{y-1} T_{y-2} T_{y-3} T_{y-4} z_{y-5,r-6}$$
$$+T_y T_{y-1} T_{y-2} T_{y-3} T_{y-4} T_{y-5} z_{y-6,r-6}.$$

34. Dalla considerazione del primo termine in ciascuna di queste equazioni è facile a rilevarsi, che per un qualunque sviluppo protratto fino ad $r-s$ il coefficiente del primo termine è y^s. Quello poi del secondo oltre il fattore T_y contiene anche l'altro $A^{(s-2)}=y^{s-1}+A^{(s-3)}(y-1)$, osservato l'ordine degli apici di A secondo le posizioni del preceden-

te n.° 33. E quì è da avvertirsi che quando $s=2$, $A^{(s-3)}=A^{(-1)}$ rappresenta l'unità, la quale appunto è l'altro fattore che oltre a T_y compone il coefficiente del secondo termine nella (H'). Colle opportune sostituzioni del valore di A in A', di quello di A' in A'', di quello di A'' in A''', e di quello di A''' in A'^{v} si troverà

$$A'=y(y+(y-1))+(y-1)^2$$
$$A''=y^2(y+(y-1))+y(y-1)^2+(y-1)^3$$
$$A'''=y^3(y+(y-1))+y^2(y-1)^2+y(y-1)^3+(y-1)^4$$
$$A'^{v}=y^4(y+(y-1))+y^3(y-1)^2+y^2(y-1)^3+y(y-1)^4+(y-1)^5;$$

così che in generale per lo sviluppo protratto fino ad $r-s$ si avrà

$$(O')\ldots A^{(s-2)}=y^{s-2}(y+(y-1))+y^{s-3}(y-1)^2+y^{s-4}(y-1)^3+y^{s-5}(y-1)^4+\text{ec.}$$
$$+y(y-1)^{s-2}+(y-1)^{s-1}.$$

Non è fuor di proposito l'aggiungere che le posizioni del prec. n.° 33. in relazione al coefficiente del secondo termine in ciascuna delle equazioni (K'), (I'), (L') ec. maneggiate convenientemente in altro modo somministrano pure le seguenti equazioni

$$A=2y-1$$
$$A'=3y^2-3y+1$$
$$A''=4y^3-6y^2+4y-1$$
$$A'''=5y^4-10y^3+10y^2-5y+1$$
$$A'^{v}=6y^6-15y^4+20y^3-15y^2+6y-1,$$

nelle quali osservando l'andamento dei termini de' loro secondi membri s'inferisce, che generalmente sarà

$$(P')\ldots A^{(s-2)}=sy^{s-1}-\frac{s(s-1)}{2}y^{s-2}+\frac{s(s-1)(s-2)}{2.3}y^{s-3}$$
$$-\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2.3.4}y^{s-4}+\text{ec.}\mp\frac{s(s-1)}{2}y^2\pm sy\mp 1,$$

ove i segni superiori valgono quando s è numero pari, e gli inferiori quando s è dispari. In tal modo si è trovata per $A^{(s-2)}$

un' altra espressione più semplice, che deve però immancabilmente essere identica all' altra (O'), e che si riduce manifestamente ad $y^s-(y-1)^s$.

35. L' ispezione dei coefficienti de' terzi termini nelle equazioni (K'), (I') ec. fa vedere che ciascuno di essi ha sempre per uno de' fattori il prodotto $T_y\ T_{y-1}$, e per altro in generale l' espressione $B^{(s-3)}=A^{(s-3)}+B^{(s-4)}(y-2)$ (n.° 33.), ove pure conviene notare che quando $s=2$ dev' essere $B^{(-2)}=0$, e $B^{(-1)}=A^{(-1)}=1$. Ora sostituendo nelle posizioni dello stesso n.° 33. a B, B', B'' i loro valori dati per A, A', e A'', si otterranno le equazioni

$$B'=A'+A(y-2)+(y-2)^2$$
$$B''=A''+A'(y-2)+A(y-2)^2+(y-2)^3$$
$$B'''=A'''+A''(y-2)+A'(y-2)^2+A(y-2)^3+(y-2)^4.$$

Adunque in generale per lo sviluppo protratto sino ad $r-s$ si avrà

$$(Q')\ldots B^{(s-3)}=A^{(s-3)}+A^{(s-4)}(y-2)+A^{(s-5)}(y-2)^2+A^{(s-6)}(y-2)^3+\text{ec.}$$
$$+A(y-2)^{s-3}+(y-2)^{s-2},$$

la quale formola si potrà esprimere soltanto per y, ponendo in vece di $A^{(s-3)}$, $A^{(s-4)}$, $A^{(s-5)}$, ec. i loro valori in y, che si ricavano dalla (P') ridotta, facendo all' uopo variare la s.

Il coefficiente poi del quarto termine in ciascuno dei suddetti sviluppi, come in qualunque altro che potesse successivamente eseguirsi, contiene sempre il fattore $T_y\ T_{y-1}\ T_{y-2}$, e generalmente per lo sviluppo fino ad $r-s$ ha inoltre l' altro $C^{(s-4)}=B^{(s-4)}+C^{(s-5)}(y-3)$ secondo le posizioni del citato n.° 33. Eliminando dalle medesime le C, C' in modo analogo al già praticato sulle B, B', B'' si avrà

$$C'=B'+B(y-3)+(y-3)^2$$
$$C''=B''+B'(y-3)+B(y-3)^2+(y-3)^3,$$

e quindi

$$(R')\ldots C^{(s-4)}=B^{(s-4)}+B^{(s-5)}(y-3)+B^{(s-6)}(y-3)^2+\text{ec.}+B(y-3)^{s-4}+(y-3)^{s-3},$$

ove ponendo per $B^{(s-4)}$, $B^{(s-5)}$, $B^{(s-6)}$ ec. le espressioni in y, che si possono dedurre dalla formola (Q'), si avrà pur'anche $C^{(s-4)}$ data soltanto per y.

36. Passando agli altri coefficienti si vede, che ciascuno di essi conterrà due fattori, uno dei quali è il prodotto delle funzioni T_y, T_{y-1}, T_{y-2} ec. il cui numero gradatamente si accresce di un' unità dal secondo termine al terzo, dal terzo al quarto, dal quarto al quinto, e così successivamente, e l' altro vien dato dall' analogo nel coefficiente del termine che precede, e quindi sempre retrocedendo potrà esprimersi per una funzione della sola y. Il coefficiente però dell' ultimo termine dell' equazione comunque sviluppata fino ad $r-s$ rimane sempre determinato per se medesimo in relazione ad y, contenendo soltanto il fattore $T_y\,T_{y-1}\,T_{y-2}\,T_{y-3}\ldots T_{y-s+1}$ moltiplicato per l' unità. Questa operazione, che guida a ritrovare le combinazioni favorevoli ad ogni stato di palle nere nell' urna dopo un qualunque numero di trasmutamenti, nel modo stesso che fu indicato al n.° 32. rispetto alle bianche, potrebbe forse abbreviarsi dando luogo, in proposito delle serie in cui sono disposti i suindicati coefficienti, a nuove considerazioni, le quali si omettono perchè condurrebbero il presente scritto a soverchia prolissità. Il ritrovamento di tali coefficienti può eziandio qualche volta facilitarsi, cominciando dal determinarli in ogni equazione dagli ultimi termini retrocedendo verso il primo, locchè sempre giova pe' coefficienti che rimangono di quà dal termine, o dai termini di mezzo, i quali altrimenti dovrebbero determinarsi con più lunga operazione partendo dal primo termine.

Il metodo fin quì spiegato, che sarebbe desiderabile di poter ridurre almeno per molti casi a maggiore semplicità, si ravvisa però facilmente tale da potersi applicare con uti-

lità a quelle equazioni alle differenze, che contenendo funzioni simili non sono integrabili coi metodi conosciuti, non meno che a quelle, le quali appunto come le già considerate contengono funzioni dissimili, e non sono perciò trattabili coi processi del calcolo delle differenze finite.

Fine della Parte Matematica del T.° XVIII.