LETTERA

AL SIGNOR ANTONIO CAGNOLI

Del Sig. Abbate Pietro Cossali

Ricevuta li 19. *Febbrajo* 1815.

Fra i tentativi fatti sulle prime osservazioni del Pianeta Olbers per determinarne l' orbita, uno ne vidi nel quale, per ritrovare la latitudine eliocentrica, senza sapersi la distanza dal Sole, si assumeva ad ipotetico principio, che i movimenti retrogradi de' Pianeti superiori tra se vicini intorno alle opposizioni sieno in ragione inversa delle distanze dal Sole. In ciò leggere mi si destò nell' animo voglia di sapere quanto un tal principio fosse concorde alla verità, o quanto da essa si discostasse, e cercai se una formola generale vi era dei piccoli movimenti geocentrici de' Pianeti considerate, come sono, le loro orbite elittiche. Trovai, che il Frisi, dopo aver data nel Capo V della sua Cosmografia Prob. VI, la formola del piccolo moto angolare geocentrico nell' orbita circolare, procede nel Prob. X ad insegnare la correzione da farsi ai luoghi delle stazioni determinati per l' orbita circolare, onde aver quelli nella vera orbita elittica, ma ivi si arresta lasciando desiderare la generica formola dei movimenti geocentrici nelle elittiche orbite reali. In buon punto mi risovvenne della diretta soluzione che voi il primo, come scrive eziandio il Lalande n. 1190. della sua Astronomia, avete data del problema, di assegnare nelle orbite elittiche i luoghi delle stazioni, e non ebbi che a scorrere il vostro calcolo per accorgermi, che, camminando sulle vostre traccie, sciogliere si poteva quest' altro universale delle geocentriche apparenze.

Problema. Determinare in una orbita elittica a qualunque dato tempo il piccolo movimento geocentrico?

Risoluzione. Conservate tutte le denominazioni da voi usate che sono

S . . . . Angolo di commutazione
T . . . . Angolo di elongazione
R . . . . Distanza dal Sole alla Terra
r . . . . Distanza dal Sole al luogo del Pianeta nell'Eclittica
V' . . . . Longitudine vera del Sole
g . . . . Longitudine Geocentrica del Pianeta
u' . . . . Longitudine Eliocentrica di lui
V . . . . Anomalia vera del Sole
u . . . . Anomalia vera del Pianeta
M . . . . il moto medio del Sole in un istante
m . . . . il moto medio del Pianeta nell' istante stesso
1 . . . . il semiasse maggiore dell' orbita terrestre
B . . . . il semiasse minore di essa
E . . . . l' eccentricità della medesima
a . . . . il semiasse maggiore dell' orbita del Pianeta
b . . . . il semiasse minore della stessa
e . . . . l' eccentricità
r' . . . . il raggio vettore del Pianeta
l . . . . l' inclinazione della sua orbita
L . . . . la sua latitudine Eliocentrica
P . . . . il tempo periodico della terra
p . . . . il tempo periodico del Pianeta.

Servendomi con voi delle due formole di trigonometria rettilinea

1.ª $\cot.T = \frac{R}{r \,\text{sen.S}} - \cot.S$ che si deduce da

$\tan g.T = \frac{r \,\text{sen.S}}{R - r\cos.S}$. Invertendo si porrà questa formola per 1ª, e la 1ª per 2.ª

2.ª $\text{sen.}^2 T = \frac{r^2 \,\text{sen.}^2 S}{R^2 + r^2 - 2r \,R\cos.S}$.

Delle due contenenti i paragoni delle longitudini

1.ª $T = g - V'$ . . . . . 2.ª $S = 180° - (u' - V')$

Delle quattro della teoria del moto elittico

1.ª $dv = \frac{MB}{R^2}$ . . . . . 2.ª $dR = -\frac{MEsen V}{B}$

3.ª $du = \frac{mab}{r'^2}$ . . . . . 4.ª $dr' = -\frac{mae sen. u}{b}$

E delle tre di Trigonometria sferica

1.ª $(du) = du \frac{\cos. l}{\cos.^2 L}$ intendendo per (du) il moto du ridotto all' Ecclittica

2.ª $r'^2 \cos.^2 L = r^2$

3.ª $dr = -\frac{mae sen. u \cos. L}{b} - \frac{mab sen.^2 L \cot. arg. lat.}{r}$

Io non mi diparto da voi, se non che nel computare il piccolo moto in Longitudine geocentrica dg, che voi avendo per oggetto le stazioni avete posto $= 0$.

Pigliando pertanto da capo il calcolo con prendere il differenziale dell' equazione 1.ª di Trig. rettil. ho come voi.

$$(A) \ldots -\frac{dT}{sen.^2 T} = \frac{r sen. S dR - R sen. S dr}{r^2 sen.^2 S} - \left(\frac{r R \cos. S}{r^2} - 1\right) \frac{dS}{sen.^2 S}.$$

Ma prendendo i differenziali delle due equazioni contenenti i paragoni delle longitudini $T = g - V'$, $S = 180° - (u' - V')$, i quali differenziali sono $dT = dg - dV'$, $dS = -du' + dV'$ con fare le sostituzioni in (A), tenendo conto di dg in vece di supporlo zero, ne viene

$$(B) \ldots -\frac{dg + dV'}{sen.^2 T} = \frac{r sen. S dR - R sen. S dr}{r^2 sen.^2 S} - \left(\frac{r R \cos. S}{r^2} - 1\right) \frac{dV' - du'}{sen.^2 S}.$$

Ed in luogo di $sen.^2 T$ sostituendo il suo valore esibito dalla 2.ª delle formole di Trig. rettil. e facendo le convenienti riduzioni trovo

$$(C) \ldots dg = \frac{(R^2 - r R \cos. S) dV' - (r dR - R dr) sen. S - (r R \cos. S - r^2) du'}{R^2 + r^2 - 2 R r \cos. S}.$$

Potendosi ai piccoli movimenti in longitudine dV', du' computar uguali quelli in anomalia dV, du, se in luogo di dV' si sostituisca il valor di dV dato dalla 1.ª delle quattro equazioni del moto elittico, ed in luogo di du' il valore di (du) dato insieme dalla 3.ª formola del moto elittico, e dalla

1.ª di Trig. sferica; se inoltre si sostituiscano a dR, dr i valori loro esibiti dalla formola 2.ª del moto elittico, e dalla 3.ª di Trig. sferica, ed in fine ad r'^2 si sostituisca il suo valore dedotto dalla 2.ª delle tre formole di Trig. sferica, proviene

$$(D)\quad dg = \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cos.S}\Big[MB - \frac{MBr\cos.S}{R} + \frac{MrE}{B}\,\text{sen.}V\,\text{sen.}S$$
$$-\frac{Rmae}{b}\,\text{sen.}u\,\text{sen.}S\cos.L - \frac{Rmab}{r}\,\text{sen.}S\,\text{sen.}^2L\,\text{cot.arg.lat.}$$
$$-\left(\frac{R}{r}\cos.S-1\right)mab\cos.l\Big].$$

I moti medj M, m in un dato tempicello sono in ragione inversa dei periodi, ed i periodi P, p elevati al quadrato sono, per la legge Kepleriana, come i semi-assi maggiori a, 1 alzati al cubo, e quinci $M^2 : m^2 :: p^2 : P^2 :: a^3 : 1$, onde ricavasi $\frac{ma}{M} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Per la qual cosa dividendo tutta l' equazione (D) per M, e nei termini, ne' quali risulta $\frac{ma}{M}$, ponendo in vece $\frac{1}{\sqrt{a}}$, risulta

$$(E)\quad \frac{dg}{M} = \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cos.S}\Big[B - \frac{Br\cos.S}{R} + \frac{rE}{B}\,\text{sen.}V\,\text{sen.}S$$
$$-\frac{Re}{b\sqrt{a}}\,\text{sen.}u\,\text{sen.}S\cos.L - \frac{Rb}{r\sqrt{a}}\,\text{sen.}S.\text{sen.}^2L\,\text{cot.arg.lat.}$$
$$-\frac{b}{\sqrt{a}}\cos.l\left(\frac{R}{r}\cos.S-1\right)\Big].$$

In questa equazione si può trascurare il termine contenente sen.^{2}L allorchè la latitudine è piccola, ed allora si avrà l' equazione

$$(E')\quad \frac{dg}{M} = \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cos.S}\Big[B - \frac{Br\cos.S}{R} + \frac{rE}{B}\,\text{sen.}V\,\text{sen.}S$$
$$-\frac{Re}{b\sqrt{a}}\,\text{sen.}u\,\text{sen.}S\cos.L - \frac{b}{\sqrt{a}}\cos.l\left(\frac{R}{r}\cos.S-1\right)\Big].$$

Che se si ponga $dg = 0$ ne verrà

$$(F)\quad B - \frac{Br\cos.S}{R} + \frac{rE}{B}\,\text{sen.}V\,\text{sen.}S - \frac{Re}{b\sqrt{a}}\,\text{sen.}u\,\text{sen.}S\cos.L$$

$$-\frac{b}{\sqrt{a}}\cos.l\left(\frac{R}{r}\cos.S-1\right)=0$$

che coincide con l' equazione vostra dei luoghi delle stazioni.

Dall' equazione (E) apparisce evidentemente, che stando alla realità delle orbite elittiche, i piccoli movimenti geocentrici in diversi Pianeti non sono certamente nella semplice ragione inversa delle distanze dal Sole. Vediamo se ciò possa almen essere nelle orbite circolari. In tal caso, essendo le eccentricità E, e, $=0$, B ed R $=1$, b ed $r=a$, l' equazione (E) si restrigne in

$$(G)\quad \frac{dg}{M}=\frac{1-a\cos.S-\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{sen.S.sen.}^2\text{L cot.arg.lat.}-\frac{1}{\sqrt{a}}(\cos.S-a)\cos.l}{1+a^2-2a\cos.S}.$$

E nel caso di sen.^{2}L troppo piccolo

$$(G')\quad \frac{dg}{M}=\frac{1-a\cos.S+\frac{1}{\sqrt{a}}(a-\cos.S)\cos.l}{1+a^2-2a\cos.S}.$$

Supponiamo pure il Pianeta in opposizione o sì vicino ad essa che S si possa contar per nullo, e cos.S $=1$, e si avrà

$$(G'')\quad \frac{dg}{M}=\frac{1-a+\frac{1}{\sqrt{a}}\cos.l\,(a-1)}{1+a^2-2a}=\frac{a-\cos.l\sqrt{a}}{a(1-a)}.$$

Dalla qual formola manifestamente si raccoglie, che dg non può mai essere in semplice ragione inversa della distanza del Pianeta dal Sole, e che è ben lungi dall' esserlo anche nel supposto di orbite circolari. Molto più poi in orbite elittiche, e tanto più quanto sono più eccentriche. E l' orbita appunto di Olbers è di una grande eccentricità, e non è delle piccole la eccentricità dell' orbita di Marte, che nel tentativo da principio accennato era il Pianeta di confronto.

Intorno alla formola (G') io osservo che $\frac{1-a\cos.S}{1+a^2-2a\cos.S}$ è $=\frac{\cos.T}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}}$. Poichè dalla 1.^{a} delle due formole Trigonometriche si ha $\cos.T=\frac{1-a\cos.S}{a\,\text{sen.S}}\times\text{sen.T}$, e dalla 2.^{a}

$\text{sen.T} = \frac{a\,\text{sen.S}}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}}$, onde $\cos.T = \frac{1-a\cos.S}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}}$, e $\frac{\cos.T}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}} = \frac{1-a\cos.S}{1+a^2-2a\cos.S}$.

Se si dica P l' angolo al Pianeta, che unitamente ai due angoli T alla Terra, S al Sole, formano il triangolo avente per lati la distanza dal Sole alla Terra $= 1$, la distanza dal Sole al Pianeta $= a$, e la distanza dalla Terra al Pianeta $= \sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}$, varranno per P similmente che per T le tre formole trigonometriche cangiando solo 1 in a ed a in 1, e quinci sarà $\cos.P = \frac{a-\cos.S}{\text{sen.S}} \times \text{sen.P}$, e $\text{sen.P} = \frac{\text{sen.S}}{\sqrt{(a^2+1-2a\cos.S)}}$, conseguentemente $\cos.P = \frac{a-\cos.S}{\sqrt{(a^2+1-2a\cos.S)}}$, e $\frac{\cos.P}{\sqrt{(a^2+1-2a\cos.S)}} = \frac{a-\cos.S}{a^2+1-2a\cos.S}$.

Quinci la formola (G') si trasforma nella seguente

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{dg}{\mathrm{M}} = \frac{\cos.T + \frac{1}{\sqrt{a}}\cos.P\cos.l}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}},$$

e rimettendo in luogo di $\frac{1}{\sqrt{a}}$ il suo valore $\frac{ma}{\mathrm{M}}$, e chiamando TP la distanza dalla Terra al Pianeta espressa per il denominatore $\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}$, si riduce ad

$$(\mathrm{H}') \qquad dg = \frac{ma\cos.P\cos.l + \mathrm{M}\cos.T}{\mathrm{TP}}.$$

Il Frisi, nel Prob. VI sul principio citato, dà per valore generale di dg nell' orbita circolare

$$(\mathrm{L}) \qquad dg = \frac{\mathrm{PG}\cos.P \mp \mathrm{TD}\cos.T}{\mathrm{TP}},$$

intendendo per PG una lineetta rappresentante la velocità del Pianeta, e per TD un' altra rappresentante la velocità della Terra. Equivale a PG il prodotto ma dell'angoletto m descritto dal Pianeta nel raggio della sua orbita a, ed a TD il prodotto $\mathrm{M} \times 1$ dell' angoletto M nel tempicello medesimo descritto dalla Terra nel rispettivo raggio dell' orbita sua 1.

La prima differenza che passa tra la formola del Frisi, e la mia (H') si è, che in quella del Frisi non trovasi considerata la inclinazione dell' orbita del Pianeta, o cos.l è supposto $= 1$ il che se potevasi in certo modo fare per i Pianeti sino allor conosciuti, non si può fare per Olbers. La seconda differenza si è, che nella formola del Frisi tra l' un termine e l' altro del numeratore vi è il doppio segno $\mp$, laddove nella mia non vi è che il segno di addizione $+$. Essendo un Pianeta superiore in opposizione, l' angolo alla Terra T riesce ottuso, e conseguentemente cos. T negativo, onde il $-$ di questo cos. negativo finisce in $+$. Pretende il Frisi che il segno $-$ vaglia per i Pianeti di quà dal Sole, valendo il $+$ per essi di là dal Sole. Ma rispetto primieramente ai Pianeti superiori io osservo che essendo un di loro di quà dal Sole cioè nei due quadranti intorno all' opposizione, l' angolo alla Terra T riesce ottuso, ed il suo coseno negativo, onde senz' altro nasce la sottrazione dei due termini, se fra essi vi sia il solo segno $+$ convertendosi per la qualità negativa che prende il cos.T in $-$, laddove se già fra i due termini si ponga per il caso $-$, dalla sottrazione di un negativo ne risulterà contro intenzione $+$, vale dire addizion dei due termini. E quanto poi ai Pianeti inferiori nei due quadranti intorno alla congiunzione inferiore osservo, che diventa ottuso l' angolo al pianeta P, e perciò negativo cos.P, onde di nuovo nasce nel numerator della formola la sottrazion dai due termini, e si apre luogo al valor negativo di dg, ossia al moto retrogrado nei convenienti siti.

È bene raccogliere sotto uno sguardo le variazioni degli angoli S, P, T e conseguentemente di cos.S, cos.P, cos.T. L' angolo S è ottuso, ed in conseguenza cos.S negativo pei due quadranti intorno alla congiunzione superiore di un Pianeta qualunque. All' opposto è acuto, ed il suo coseno positivo pei due quadranti intorno alla congiunzione di sotto di un Pianeta inferiore od intorno all' opposizione di un Pianeta superiore.

L' angolo P è acuto, e cos. P positivo pei due quadranti intorno alla congiunzione superiore di un qualunque Pianeta, e pei due intorno alla opposizione di un Pianeta superiore; ma si fa ottuso, ed il suo coseno negativo, pei due quadranti intorno alla congiunzione di sotto di un Pianeta inferiore.

L' angolo T è sempre acuto, e cos.T sempre perciò positivo per un Pianeta inferiore; ma per un superiore non è così che nei quadranti intorno alla congiunzione, divenendo l' angolo ottuso, ed il suo coseno negativo nei due intorno alla opposizione.

Giusta la prima regola, contemplando un Pianeta superiore nei due punti contrarj di congiunzione e di opposizione, facciasi pel 1.° caso cos. S $= -1$, pel 2.° cos. S $= 1$; e si segni per $\frac{dg}{M}$ il moto suo diretto nel 1.° caso, per $-\frac{dg'}{M}$ il moto retrogrado nel caso 2.°; suppongasi inoltre la inclinazione l sì piccola, che possasi computare cos.$l = 1$: dall' equazione (G') si ricava $dg : -dg' :: \frac{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}{1+a} : \frac{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}{1-a} :: \frac{\sqrt{a}+1}{1+a} : \frac{\sqrt{a}-1}{1-a}$. Similmente considerando un Pianeta inferiore nei punti delle due congiunzioni di sopra e di sotto, si trova

$$dg : -dg' :: \frac{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}{1+a} : \frac{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}{1-a} :: \frac{\sqrt{a}+1}{1+a} : \frac{\sqrt{a}-1}{1-a}.$$

Si deducono le medesime proporzioni della formola (H) con fare rispetto ad un Pianeta superiore.

Pel caso della congiunzione cos:S$=-1$, cos.P$=1$, cos.T$=1$

Pel caso della opposizione cos.S$=1$, cos.P$=1$, cos.T$=-1$.

Rispetto ad un Pianeta inferiore.

Per la congiunzione di sopra cos.S$=-1$, cos.P$=1$, cos.T$=1$.

Per la congiunzione di sotto cos.S$=1$, cos.P$=-1$, cos.T$=1$.

Il Frisi tira le stesse proporzioni dalla sua formola (L), ma intanto riescegli di ciò fare, in quanto che un secondo errore distrugge l'effetto dell'error primo, prendendo $\cos.P = \cos.T = 1$ ogni qualvolta il Sole, la Terra, il Pianeta si trovano nella medesima linea, *cum Sole Terra ac Planetis ad eamdem lineam rectam delatis sit* $\cos.SPT = \cos.STP = 1$, son le sue parole nel coroll. III, quando realmente ciò vale unicamente nel caso di trovarsi il Pianeta nella congiunzione superiore, non già pel caso di essere nella congiunzione inferiore o nella opposizione.

Se proseguendo a supporre l'orbita circolare, e nulla la inclinazione si faccia nella formola (G') $dg = 0$, che è quanto supporre il Pianeta stazionario, risulterà

$1 - a\cos.S + \frac{1}{\sqrt{a}}(a - \cos.S) = 0$ e quindi per formola determinante i luoghi delle stazioni

$$(K) \qquad \cos.S = \frac{\sqrt{a}+a}{a\sqrt{a}+1}.$$

Se si ami di avere espressi i luoghi stessi delle stazioni per $\tang.T = \frac{a\,\mathrm{sen}.S}{1-a\cos.S}$, si troverà $a\,\mathrm{sen}.S. = \frac{a\sqrt{(a^3+1-a-a^2)}}{a\sqrt{a}+1} =$ $\frac{a\sqrt{(1-a)(1-a^2)}}{a\sqrt{a}+1}$, ed $1 - a\cos.S = \frac{1-a^2}{a\sqrt{a}+1}$; onde $\tang.T = \frac{a}{\sqrt{(1+a)}}$.

Il Frisi nel Prob. VII dà $\tang.T = \frac{\pm a}{\sqrt{(1+a)}}$; ma il doppio segno $\mp$ è inutile nel numeratore, avendo già $\frac{a}{\sqrt{(1+a)}}$ due valori pel doppio valore positivo e negativo del denominatore. Del resto fa di subito maraviglia come esso Frisi con la sua falsa formola di dg arrivi alla vera formola dei luoghi delle stazioni. Ma cessa presto la maraviglia osservando il secondo errore che egli commette a distruggimento del primo, con tirare dalla sua formola (L) pel caso di $dg = 0$,

$\frac{PG}{TD}\cos.P = \cos.T$, quando tirar ne dovrebbe $\frac{PG}{TD}\cos.P = \pm\cos.T$.

Tanto dunque è vero, che il giugner a delle verità non è sempre prova della esatta rettitudine del cammino, e della verità delle proposizioni intermedie, potendo accadere che siasi uscito di sentiero, e poi ritornato su di esso, e parlando fuor d'immagine, che con secondo errore siasi riparato al primo. Laonde si manifesta la necessità di star attento su d'ogni passo, e ben esaminare se sia giusto, o no.