SOPRA LA FORZA
CON LA QUALE L'ACQUA DI UNA GRAN VASCA PRISMATICA SGORGANDO DA UNA PICCOLA LUCE SPINGE INNANZI LA COLONNA ACQUEA CONTENUTA IN UNA CANNA CILINDRICA, E ORIZZONTALE CONGIUNTA ALLA LUCE MEDESIMA

MEMORIA

Del Sig. Ab. Giuseppe Avanzini

Ricevuta il giorno 2. Febbrajo 1815.

§. 1°.

Oggetto della Memoria

ABDH (Fig. 1) è una gran vasca d'acqua mantenuta allo stesso livello AB; *cdef* è una lunga e sottile canna cilindrica unita ad un corto tubo conico CD*dc*, che ne seconda la vena; la bocca *ef* è chiusa così che l'acqua della vasca e della canna è in perfetta quiete. Se tutto ad un tratto si apre la bocca *ef*, l'acqua incomincierà a sgorgare e a correre nella canna con moto accelerato.

In un mio scritto (*a*) letto all' Accademia di Padova nell'Adunanza degli 11 Marzo 1813, e pubblicato con le stampe nell'anno stesso, io credo di avere evidentemente dimostrato, che (nella ipotesi assunta in simili casi da tutti gli Idraulici, che sopra la forza, qualunque siasi, con la quale l'acqua della vasca spingerà innanzi l'acqua della canna alla fine del tempo t, computato dall'istante in cui si è aperta

(*a*) Supplemento alla Memoria intitolata: *Della vera legge dell'urto de' fluidi contro ostacoli mobili. Padova nella Stamperia del Seminario* 1813.

la bocca *ef*, non abbia alcuna influenza l' aumento della velocità, che nel successivo tempetto dt acquisterà l' acqua della canna) quella forza dovrà stimarsi con la formola $a\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$, intendendo per a l'area della luce, per δ la densità dell' acqua, per c la velocità con la quale l'acqua della vasca sgorgherebbe se non ci fosse la canna; e per v la velocità dell' acqua della canna alla fine del tempo t.

L' oggetto della presente Memoria è di esaminare: se quell'aumento di velocità possa, o nò alterare la forza medesima, così che quando il moto dell' acqua della canna fosse accelerato, non potesse stimarsi più con la formola $a\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

§. 2.°

Osservazioni preliminari

1.ª L' acqua della vasca e della canna formando una massa continua di fluido, la velocità con la quale l' acqua della vasca sgorgherà da cd (Fig. 1) sarà perfettamente eguale alla velocità dell'acqua della canna.

2.ª L' acqua non potrà sgorgare da cd con la velocità v dell' acqua della canna senza che si muova, scendendo, l'acqua della vasca.

3.ª Essendo grandissima l' ampiezza della vasca (§. 1.), ed assai piccola la luce cd, potrà supporsi zero la velocità dell'acqua per la vasca.

4.ª Non potendo l' acqua passare da una velocità zero, o piccolissima ad una velocità finita se non per gradi, dovrà sopra la luce cd formarsi un gorgo, per esempio $ahDdcCb$, il quale, restringendo le sezioni, faccia aumentare la velocità dallo zero in ab fino a v in cd.

5.ª Supposta QPr la linea che percorre pel gorgo la molecola Q; u la velocità in P della molecola P; $QP=l$; $Pp=dl$; la verticale $PZ=y$; $pz=y+dy$; la molecola P avrà due velocità, l' una effettiva ed eguale alla velocità u, colla quale la molecola stessa discende per Pp, l' altra virtuale, ossia di tendenza per la medesima direzione Pp della velocità effettiva u.

Quanto alla velocità effettiva è manifesto. Rispetto alla velocità virtuale io rifletto 1.° che risolvendo la gravità assoluta g della molecola P nelle due agenti, la prima in direzione perpendicolare, l'altra parallela alla Pp, si trova la forza parallela eguale a $\frac{gdy}{dl}$. 2.° Che se la molecola P fosse libera, dopo il tempetto dt, cioè quando essa molecola è passata da P a p, avrebbe la velocità u che aveva in P, più la velocità $\frac{gdy}{dl}dt$. 3.° Che per non esser libera ha in p la velocità $u+du$ (osser.e 4.a); 4.° Che la velocità $u+\frac{gdy}{dl}dt$ potrà supporsi composta di $u+du$, che la molecola P ha alla fine del tempetto dt; e di un'altra, per esempio, W; 5.° Che la W dovrà estinguersi, altrimenti alla fine del tempetto dt la molecola P in luogo della velocità $u+du$, ne avrebbe un'altra maggiore, che è contro l'ipotesi; 6.° che essendo $u+\frac{gdy}{dl}dt=u+du+W$, sarà W, (cioè la velocità che si estingue) eguale ad $u+\frac{gdy}{dl}dt-u-du=\frac{gdy}{dl}dt-du$; 7.° Che per la stessa ragione in ciascun' altra molecola della QPr si estinguerà $\frac{gdy}{dl}dt-du$; che è quanto dire, che in tutte le molecole di QPr ci sarà una velocità $\frac{gdy}{dl}dt-du$ di sola tendenza.

Resta ora a vedere che questa velocità $\frac{gdy}{dl}dt-du$ sarà all' ingiù, siccome lo è la velocità u.

È manifesto che a tal uopo basterà dimostrare, che $\frac{gdy}{dl}dt$ è maggiore di du $\frac{gdy}{dl}dt$, è eguale a $\frac{gdy}{u}$, essendo $dt=\frac{dl}{u}$. Ora io dico che $\frac{gdy}{dl}dt$ è maggiore di du, perchè $\frac{gdy}{u}$ è maggiore di

du, ossia perchè gdy è maggiore di udu. Chiamata W la velocità, che acquisterebbe un grave cadendo dall'altezza y, sarà $gdy = WdW$; ora WdW è maggiore di udu, perchè la velocità u in Q è minore della velocità W dovuta all'altezza y. Che in Q la velocità u sia minore della velocità dovuta all' altezza Qk, è certo, imperciocchè in Q la velocità u è zero, o piccolissima (osserv.^{e} 4.^{a}). Similmente nel punto r la velocità u è minore della velocità dovuta all' altezza del livello AB sopra r; per la ragione che in r la velocità u è eguale alla velocità dell' acqua della canna (osserv.^{e} 1.^{a}), e la velocità dell' acqua della canna è minore della velocità dovuta all' altezza del livello AB sopra cd, poichè quella sarebbe c (§. 1.), e la velocità dell' acqua nella canna è v, che si suppone minore di c. Ora se in Q ed in r, udu è minore di WdW, ossia di gdy, è evidente, che dovrà esserlo tanto più in ciascun altro punto P.

§. 3.°

In che consista la forza motrice dell' acqua nella canna

È palese 1.° che per la velocità effettiva u della molecola P, e di ciascun' altra del filo QPr non potrà nascere forza alcuna sopra la molecola anteriore, poichè anche la molecola contigua anteriore discende con velocità u eguale a quella, con la quale è inseguita dalla molecola posteriore. 2.° Che per la velocità virtuale $\frac{gdy}{dl}dt - du$ della molecola P, e di ciascun' altra del filo QPr dovrà nascere sopra la particella contigua anteriore una pressione, e che questa pressione sarà eguale alla forza capace di produrre la suddetta velocità virtuale, cioè eguale a $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$. Da ciò rendesi manifesto, che la forza con la quale l' acqua della vasca spingerà innanzi l' acqua della canna alla fine del tempo t, consisterà nella pressione che, per cagione delle forze $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$ di tutte le molecole del gorgo, l' acqua della vasca farà in cd sopra l' acqua della canna.

§. 4.°

Formola della forza motrice quando il moto dell' acqua della canna è uniforme.

Consistendo la forza motrice dell' acqua della canna nella pressione in cd cagionata dalla somma delle pressioni $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$ di tutte le molecole del gorgo (§. precedente), per trovare l' espressione della forza medesima, basterà trovar l' espressione della somma delle suddette pressioni.

A tal uopo si osserverà che, essendo $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$ la pressione della molecola P, sarà $\left(\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}\right) dl = gdy - \frac{du}{dt} dl = gdy - udu$ $\left(\text{essendo } dt = \frac{dl}{u}\right)$ la pressione in p delle molecole di $Pp = dl$; e $C^k + \int (gdy - udu)$ la pressione in P delle molecole di tutta la $QP = l$.

Per farne la integrazione convien riflettere, che comunque la u dipenda, e dalla posizione della molecola P, cioè dalla y, e dal tempo t, per la ragione che nel principio del tempo t, in cui tutta l' acqua della vasca e della canna è in quiete (§. 1.°), anche la velocità u della molecola P deve esser zero, e crescere aumentandosi il tempo, e la y tuttavia nel nostro caso, in cui $C^k + \int (gdy - udu)$ esprime la pressione delle molecole di tutto il filo QP alla fine del tempo t, l'integrale di udu dovrassi prendere relativamente alla sola variabile y. In oltre la du, essendo costante la velocità v dell' acqua nella canna, non varierà se non pel variare della posizione della molecola P, cioè della y. Si avrà dunque

$C^k + gy - \frac{u^2}{2}$ per la pressione in P di tutte le molecole della QP.

Per trovar la costante C si osserverà ch' essa deve determinarsi con la condizione, che nel principio dell' integrale, cioè in Q, la pressione deve essere eguale al peso della colonna QK del filo fluido sopra incombente, la quale per essere stagnante (§. 2.° osserv.^{e} 4.^{a}) il fluido del filo medesimo, sarà gh, supposta g la gravità assoluta d' ogni molecola dell' acqua, ed h l' altezza QK. Perciò la pressione in P del fluido QP sarà $= gh + gy - \frac{u^2}{2}$. Onde ottenere la pressione in r del filo intero QPr, basterà nella espressione $gh + gy - \frac{u^2}{2}$ sostituire in luogo di y l' altezza di ab sopra r, la quale altezza chiameremo h', ed in luogo di u la velocità v che ha l'acqua in r (§. 2.° osserv.^{e} 1.^{a}); quindi per la pressione in r del filo QPr si avrà $g(h+h') - \frac{v^2}{2}$; la quale $\Big($osservando, che $h+h'$ è l' altezza del livello AB sopra r, e quest' altezza $= \frac{c^2}{2g}\Big)$ si cambia in quest' altra $\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

Con lo stesso ragionamento si trova essere $\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$ la pressione di ciascun altro filo STs; talmente che la pressione di tutti i fili del gorgo sarà, (supposta a la sezione dc, δ la densità del fluido), $a\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$; siccome con altro metodo ho trovato nell' enunziato mio scritto (§. 1.°).

§. 5.°

Formola della Forza motrice quando il moto dell' acqua nella canna è accelerato.

Anche nel caso del moto accelerato dell' acqua nella canna la $C^k + \int(gdy - udu)$ (§. 4.°) esprimerà la pressione in P di tutto il fluido QP; ma è da avvertire che il suo integrale non sarà, come nel caso del moto uniforme, $C + gy - \frac{v^2}{2}$, per la ragione che esso integrale si dovrà bensì prendere, come nel caso suddetto, relativamente alla sola variabile y, ma la u nel caso del moto accelerato non sarà una funzione della sola y, ma sì bene della y e della velocità dell'acqua della canna, e del tempo.

Per dimostrarlo sia STs la linea percorsa da un'altra molecola S vicinissima alla molecola Q. È facile a conoscere 1.° che il moto del fluido pel cannellino QPrsTS potrà supporsi lineare; 2.° che chiamate x, a le sezioni PT, rs del cannellino medesimo; u, v le velocità del fluido nelle dette sezioni, si avrà $u = \frac{av}{x}$; e $du = \frac{adv}{x} - \frac{avdx}{x^2}$; ed $udu = \frac{a^2vdv}{x^2} - \frac{a^2v^2dx}{x^3} = \frac{adv}{dt} \cdot \frac{dl}{x} - a^2v^2 \cdot \frac{dx}{x^3}$; (sostituendo nel termine $\frac{avdv}{x^2}$, $\frac{a}{x} \cdot \frac{dt}{dl}$ in luogo di v, poichè essendo $v = \frac{ux}{a}$; e $dt = \frac{dl}{u}$, ossia $u = \frac{dl}{dt}$, v diventa $\frac{x}{u} \cdot \frac{dl}{dt}$).

Nel caso adunque del moto accelerato dell'acqua per la canna, la $C + \int(gdy - udu)$ si cambia in $C + \int\left(gdy - \frac{adv}{dt} \cdot \frac{dl}{x} + \frac{a^2v^2dx}{x^3}\right)$, la quale integrata relativamente alle sole variabili l, x, per le ragioni dette di sopra, porgerà $C^k + gy - \frac{adv}{dt}\int\frac{dl}{x} - \frac{a^2u^2}{2x^2}$ per la pressione in P del filo QP.

Per conoscere la costante C si osserverà: che, chiamato N ciò che diventa $\int\frac{dl}{x}$ in Q, la costante dovrà determinarsi con la condizione, che la pressione in Q, dove ha principio l'integrale, cioè quando $y = 0$; $\int\frac{dl}{x} = N$; x eguale alla sezione QS, che supporremo A, dovrà essere eguale al peso del filo KQ, cioè $= gh$, (§. 4.°), perciò la costante sarà eguale a $gh + \frac{adu}{dt} N + \frac{a^2v^2}{2A^2}$; per conseguenza

$gy - \frac{adv}{dt}\int\frac{dl}{x} - \frac{a^2v^2}{2x^2} + gh + \frac{adv}{dt}\mathrm{N} + \frac{a^2v^2}{2\mathrm{A}^2}$ la pressione di QP in P. E supposto M ciò che diventa $\int\frac{dl}{x}$ in r, per conoscere la pressione in r di tutto il filo QPr basterà, siccome è manifesto, sostituire, nella formola della pressione di QP, h' in luogo di y; luogo di M in $\int\frac{dl}{x}$, a in luogo di x, e per la pressione in r di tutto il filo QPr si avrà $gh' - \frac{adu}{dt}\mathrm{M} - \frac{a^2v^2}{2a^2} + gh + \frac{adv}{dt}\mathrm{N} + \frac{a^2v^2}{2\mathrm{A}^2}$

$$= g(h+h') + \frac{adv}{dt}(\mathrm{N}-\mathrm{M}) + a^2v\left(\frac{1}{2\mathrm{A}^2} - \frac{1}{2a^2}\right)$$

$$= \left(\frac{c^2-v^2}{2}\right) + \frac{adv}{dt}(\mathrm{N}-\mathrm{M})$$

imperciocchè $g(h+h') = \frac{c^2}{2}$ (§4.°), ed $\frac{1}{2\mathrm{A}^2}$ può considerarsi zero in confronto di $\frac{1}{2a^2}$, per la ragione che la sezione A nella quale la velocità è zero (§. 2. osserv.^{e} 4.^{a}) deve essere grandissima in confronto della sezione a dove la velocità è finita.

Con lo stesso ragionamento si troverà $\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right) + \frac{adv}{dt}(\mathrm{N}-\mathrm{M})$ per la pressione di ciascun altro filo, di modo che per la pressione di tutti i fili del gorgo sopra $cd = a$, si avrà $a\partial\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right) + \int a\, a\, \frac{dv}{dt}(\mathrm{N}-\mathrm{M})$.

Per determinare N, ed M osserveremo che, per l' esperienze di celebri Idraulici, quando il fluido sgorga da un vaso cilindrico inesausto per una luce piccolissima in confronto dell' ampiezza del vaso, l' altezza del gorgo è piccolissima. Potremo adunque supporre le linee QPr, STs (Fig. 1.) prossimamente rette. Inoltre essendo STs vicinissima a QPr, il cannellino QPrsTS potrà supporsi un cono retto troncato QrsS (Fig. 3.), le di cui basi QS, rs sieno eguali alle sezioni QS, rs (Fig. 1.), e i lati rettilinei Qr, Ss (Fig. 3.) eguali alle linee QTr, STs (Fig. 1.).

Ciò posto sia O (Fig. 3.) l' apice del cono, ed YO il suo asse; $YX = l$; la sezione $PT = x$, come sopra, sarà $OX : XT = OY : YS$, ossia $OY - XY : XT = OY : YS$; perciò $XT = \left(\frac{OY - YX}{OY}\right) YS = YS \frac{(OY - l)}{OY}$. Chiamato π il rapporto del diametro alla circonferenza, l' area circolare della sezione PT, ossia x, sarà $x . \overline{XT}^2$; perciò $x = \pi . \overline{YS}^2 - \frac{(OY - l)^2}{OY^2}$, e per conseguenza $\int \frac{dl}{x} = \frac{\overline{OY}^2}{\pi . \overline{YS}^2} \int \frac{dl}{(OY - l)^2} = \frac{\overline{OY}^2}{\pi . \overline{YS}^2} \left(\frac{1}{OY - l}\right)$; quindi $N = \frac{\overline{OY}^2}{\overline{YS}^2} \left(\frac{1}{OY}\right)$; (imperciocchè in Y l è eguale a zero), ed $M = \frac{\overline{YO}^2}{\pi . \overline{YS}^2} \left(\frac{1}{OY - Ye}\right)$; ed $M - N = \frac{\overline{OY}^2}{\pi . \overline{YS}^2} \left(\frac{Ye}{OY(OY - Ye)}\right) = \frac{OY . Ye}{\pi . \overline{YS}^2 (OY - Ye)}$; ma $\pi . YS^2 = A$; perciò $M - N = \frac{OY . Ye}{A(OY - Ye)} = \frac{OY . Ye}{A . Oe}$; per conseguenza $a\,(M - N) = \frac{a}{A} \left(\frac{OY . Ye}{Oe}\right)$; ma a è piccolissima relativamente ad A; perciò $\frac{a}{A}$ si potrà considerare eguale a zero.

La pressione adunque in *cd*, ossia la forza motrice, nel caso del moto accelerato dell' acqua nella canna, non è perfettamente eguale alla forza motrice nel caso del moto uniforme, ma potrà considerarsi eguale senza incorrere in errore sensibile.

§. 6.°

Altra dimostrazione della formola della forza motrice pel caso del moto uniforme dell' acqua nella canna.

La velocità v effettiva, con la quale l' acqua della vasca sgorga da *cd* (Fig. 1.) quando c' è la canna, sia dovuta all' altezza per esempio h, la velocità v essendo minore della velocità c con la quale l' acqua della vasca sgorgherebbe se la canna non ci fosse, anche l' altezza cui è dovuta la velocità v sarà minore dell' altezza, alla quale è dovuta la velocità c. Ma l' altezza alla quale è dovuta la velocità c è la distanza H del livello AB sopra *cd*, perciò l' altezza alla quale è dovuta la velocità v sarà minore dell' altezza H.

Sia quest' altezza eguale alla distanza della sezione $a'b'$ da cd; essendo le velocità dell' acque sgorganti da piccole luci aperte in gran vasi, dovute alle altezze dell' acque sopra le luci, è manifesto che, se fosse tutto ad un tratto tolta via la canna $cdfe$ e l' acqua del vaso giungesse alla sola altezza h di $a'b'$ sopra cd, l' acqua continuerebbe a sgorgare da cd con la velocità v, e se l' acqua giungesse ad un' altezza sopra cd eguale ad $H-h$; l' acqua sgorgherebbe da cd con velocità dovuta all' altezza $H-h$; cioè con velocità $= \sqrt{2g(H-h)}$, ossia $= \sqrt{c^2-v^2}$, poichè $2gH = c^2$; $2gh = v^2$.

Ora se quando c' è la canna, e l' acqua della vasca giunge fino ad AB, cioè all' altezza $(H-h)+h$, l' acqua sgorga con velocità v dovuta alla sola altezza h, è pur forza conchiudere, che si estingue, ossia che rimane virtuale ovvero di sola tendenza la velocità $\sqrt{c^2-v^2}$, dovuta all' altezza $(H-h)$, imperciocchè se non si estinguesse $\sqrt{c^2-v^2}$, l'acqua non sgorgherebbe più con la velocità v, che sarebbe contro la ipotesi.

È dunque indubitato che l' acqua sgorgante da cd, quando c' è la canna, avrà due velocità, l' una effettiva, ed eguale a v, l' altra virtuale, ed eguale a $\sqrt{c^2-v^2}$. Ora per la velocità effettiva v, essendo essa eguale (§. 2.° osserv.e 1.) alla velocità dell' acqua della canna, è chiaro che l' acqua sgorgante non potrà fare forza alcuna sopra l'acqua della canna, e che per la velocità di tendenza $\sqrt{c^2-v^2}$, dovrà fare su l' acqua della canna una pressione eguale al peso d' una colonna d' acqua, che abbia per base l' area premuta cd e per altezza $H-h$, cioè eguale ad $a\delta g(H-h) = a\delta g\left(\frac{c^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right)$ $\left(\text{per essere } H = \frac{c^2}{2g}, h = \frac{v^2}{2g}\right) = a\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

Ciò posto, e non potendo, siccome è evidente, la forza motrice consistere se non nella suddetta pressione, si fa manifesto ch' essa forza sarà misurata dalla formola $a\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

§. 7.°

Osservazioni sopra la formola della forza motrice proposta da alcuni Idraulici.

Riflettendo che, se non vi fosse la canna, l'acqua della vasca sgorgherebbe da *cd* con la velocità c (§. 1.°), si conchiuse da qualche Idraulico: che quando vi sarà la canna piena fino in *cd* d'acqua mobile con velocità v, l' acqua sgorgante dalla vasca urterà l' acqua della canna con velocità relativa $c-v$, e che perciò la forza con la quale l' acqua della vasca spingerà innanzi l'acqua della canna, consisterà in quell' urto.

A conoscere poi come si avrebbe esso urto a computare si considerò, che, siccome l'urto di una vena, la quale con velocità relativa $c-v$ percuotesse un piano, o ciò che torna allo stesso, che con velocità effettiva c inseguisce un piano mobile con velocità v minore di c, per l'esperienze dei Sigg. Professori Zuliani e Ferrari, e per la Teoria del Sig. de la Grange, sarebbe eguale ad $a\delta(c-v)^2\gamma$ (intendendo per α la sezione della vena, per δ la densità dell' acqua e per γ un coefficiente indeterminato); così anche l' urto dell' acqua sgorgante dalla vasca contro l'acqua della canna vorrà stimarsi con la formola $a\delta(c-v)^2\gamma$ (intendendo per α l'area della luce *cd*, per δ la densità dell' acqua, e per γ un coefficiente indeterminato).

Intorno a questi ragionamenti io osservo primieramente che, posto anche vero, che la forza motrice si avesse ad esprimere con la formola $a\delta(c-v)^2\gamma$ dell' urto della vena, questa formola non potrebbe con sicurezza applicarsi se non al caso del moto equabile dell' acqua per la canna; imperciocchè tanto per l'esperienze dei Sigg. Zuliani e Ferrari, quanto per la teoria del Sig. de la Grange (*a*) l' urto della vena

(*a*) Saggi Scientifici, e letterari dell'Accademia di Padova Tom. 3.° Parte 1.ª Memorie di Turino 1784-1785.

Fig. 1.

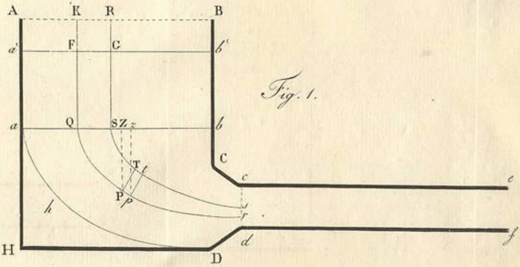


Fig. 2

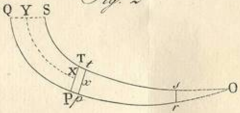
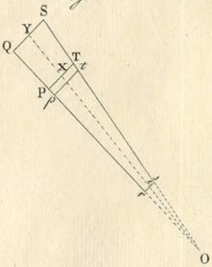


Fig. 3



non sarebbe eguale ad $a\partial(c-v)^2\gamma$ se non nel caso che la velocità v del piano fosse costante.

Osservo in secondo luogo, che non è poi nemmen vero, che la forza motrice si possa esprimere con la formola $a\partial(c-v)^2\gamma$ dell' urto della vena, nè pure nel caso del moto equabile dell' acqua nella canna, e ciò perchè non è vero che in tal caso l' acqua sgorgante dalla vasca urti l' acqua della canna con velocità $(c-v)$. Si è veduto (§. 6.°) che l' acqua sgorgante dalla vasca ha le due velocità, v effettiva, $\sqrt{c^2-v^2}$ virtuale; che per la effettiva l' acqua sgorgante non urta, nè preme l' acqua della canna, e che per la velocità virtuale $\sqrt{c^2-v^2}$ l' acqua sgorgante fa sopra l' acqua della canna una pressione, e che questa pressione è eguale ad $a\partial\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

Persuaso pei suddetti ragionamenti che la forza motrice abbiasi ad esprimere con la formola $a\partial(c-v)^2\gamma$ lo stesso Idraulico cercò di determinare il coefficiente γ, e disse ch' esso deesi prendere $=1$; 1.° perchè l' urto della vena, nel caso che in tutti i filetti si estinguesse per l' incontro del piano la velocità $(c-v)$, per le stesse sperienze del Zuliani, e per la teorica stessa del la Grange, sarebbe eguale ad $a\partial(c-v)^2$. 2.° perchè in tutti i fili dell'acqua sgorgante si estingue $(c-v)$.

Si è veduto che nell' acqua sgorgante dalla vasca per la opposizione dell' acqua della canna si estingue $\sqrt{c^2-v^2}$, e che per l' estinzione di questa velocità l' acqua sgorgante preme l' acqua della canna con forza eguale ad $a\partial\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.