MEMORIE
DI
MATEMATICA

APPENDICE ALLA MEMORIA SOPRA UN NUOVO METODO GENERALE DI ESTRARRE LE RADICI NUMERICHE

Del Signor Paolo Ruffini.

Ricevuta li 30 Settembre 1812.

1. Chiamato P, come nella Memoria (N.° 15) (*) un dato numero intiero, ed m il grado della radice, che se ne vuole estrarre, sappiamo, che per ottenere il valore di $\sqrt[m]{P}$, conviene da prima dividere, cominciando dalla destra esso P di m in m cifre, e formare così dei membri. Denominato poi, come nel citato (N.° 15), G il primo di essi, conviene determinare la massima potenza *mesima* esatta, che contiensi in G, ed a tal fine abbiamo indicato di servirci della Tavola delle potenze; ma come faremo noi, se questa Tavola non si avesse in pronto, oppure se il grado m della radice fosse tanto alto, che le potenze corrispondenti non vi si contenessero? La presente Appendice esporrà alcune formole, e alcune riflessioni, mediante le quali potremo indipendentemente dalla Tavola agevolare la determinazione della potenza che si richiede.

2. Poichè la massima potenza *mesima* domandata non è che quella di uno dei numeri 1, 2, 3, ec. 9, si potrebbe

(*) Vedasi nel Tomo XVI alla pag. 373 Parte I.

elevare attualmente ciascuno di tai numeri alla podestà *mesima*, osservare tra quali due di queste potenze esso G fosse prossimamente contenuto, e la minore tra le accennate due sarebbe la massima potenza *mesima* domandata: trovando per esempio $6^m < G > 7^m$, direi che 6^m è la potenza richiesta. Ma potremo abbreviare questa operazione col trovare a principio la potenza 5^m; poichè se si vede $G < 5^m$, potrem tralasciare la considerazione delle potenze de' numeri 6, 7, 8, 9, e vedendosi $G > 5^m$, si tralasceranno le potenze degli altri 1, 2, 3, 4.

3. In conseguenza di quello, che si è ora detto (N.° 2), apparisce, che sarà vantaggiosa al nostro intento la pronta, e facile determinazione di una potenza esatta qualunque del 5. Egli è perciò, che sonosi costruite le annesse formole (LXX), (LXXI); poichè per mezzo della prima di esse trovasi una qualunque potenza dispari del 5, e per mezzo della seconda se ne ritrova una qualunque pari. Tali formole sono costruite in modo, che suppongonsi note le prime potenze $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$; ponesi quindi m numero intero positivo, e tale che renda $2m - 1 > 3$, $2m > 4$, onde essere deve $m > 2$; l'andamento in fine delle due serie costituenti le formole, per poco che si riguardi, è assai facile a riconoscersi, e potrà perciò ognuno prolungarle, e troncarle opportunamente giusta i diversi valori di m, avendo sempre l'avvertenza, che non si debbano conservare se non se i termini, i quali risultano positivi. L'andamento costante delle due serie comincia soltanto dai termini, che sono moltiplicati per 10^6; e le espressioni (LXXII), (LXXIII) rappresentano le formole generali de' termini, che nelle serie (LXX), (LXXI) vanno soggetti all'andamento indicato. Si rifletta, che la lettera n nella formola (LXXII) esprime un intiero > 0, e $< \frac{m}{5}$, e nella (LXXIII) un intiero > 0, e $< \frac{m+1}{5}$.

1.° Vogliasi per esempio la potenza 15^a del 5. Servendomi perciò della formola (LXX), faccio $2m-1=15$, e traendo da ciò $m=8$, pongo nella serie questo numero 8 in vece di m. Da tale sostituzione verrà

$$5^{15}=5^3+3(5^0+5^2+4.5^4)10^3+3^2(3.5^1+3.5^3)10^6+3^3.5^0.10^9.$$

Ora determiniamo i valori

$$3^3.5^0=27.1=27,$$
$$3^2(3.5^1+3.5^3)=9(3.5+3.125)=3510,$$
$$3(5^0+5^2+4.5^4)=3(1+25+4.625)=7578,$$
$$5^3=125.$$

Sostituisco, e per la natura delle potenze del 10 avremo

$$5^{15}=\left.\begin{array}{r}27000000000\\3510000000\\7578000\\125\end{array}\right| = 30517578125.$$

Poichè nelle nostre formule gli esponenti del 10 vanno sempre crescendo di 3 in 3, potremo, sopprimendo gli zeri, che determinano le potenze del 10, agevolare il calcolo, con lo scrivere, come nell'esempio supposto i numeri trovati 27, 3510, 7578, 625 nel modo qui sotto accennato, cioè in maniera che, posto nella prima linea orizzontale il primo numero 27, nella seconda si ponga il secondo 3510, e le tre ultime cifre 510 di questo rimangano senz'averne alcun'altra di sopra, il terzo 7578 si scriva nella linea terza, e le ultime sue tre cifre 578 non abbiano alcun'altra cifra di sopra; e così in progresso: poscia si sommino tutti questi numeri così scritti, e il risultato che se ne ottiene, sarà la potenza richiesta, nel caso nostro il valore di 5^{15}.

$$\begin{array}{l}27\\3510\\7578\\625\\\hline 5^{15}=30517578625.\end{array}$$

2.° Sia per secondo esempio domandata la potenza 26^a del 5. Fatto perciò $2m=26$, e quindi $m=13$, dalla formola (LXXI) otterremo $5^{26} = 625 + 3\,(5 + 10 \,.\, 125)\, 10^3 + 9 \times (9 + 8 \,.\, 25 + 28 \,.\, 625)\, 10^6 + 27\,(21 \,.\, 5 + 35 \,.\, 125)\, 10^9 + 81 \times (20 + 10 \,.\, 25 + 5 \,.\, 625)\, 10^{12} + 243 \,.\, 5 \,.\, 10^{15}$; ma effettuando le moltiplicazioni, e riduzioni, si ricava

$243 \,.\, 5 = 1215$,
$81\,(20 + 10 \,.\, 25 + 5 \,.\, 625) = 274995$,
$27\,(21 \,.\, 5 + 35 \,.\, 125) = 120960$,
$9\,(9 + 8 \,.\, 25 + 28 \,.\, 625) = 159381$,
$3\,(5 + 10 \,.\, 125) = 3765$
625.

Dunque scrivendo questi risultati con la regola sovraesposta, e poi sommandoli otterremo nella somma, che risulta, il chiesto valore di 5^{26}.

$$\begin{array}{r}
1215 \\
274995 \\
120960 \\
159381 \\
3765 \\
625 \\
\hline
5^{26} = 1490116119384765625\,.
\end{array}$$

3.° Supposto $2m = 36$ si domanda quali siano gli ultimi termini nella corrispondente serie (LXXI). Presa perciò la formola (LXXIII), siccome deve essere l'intiero $n < \frac{m+1}{5}$, e però nel caso nostro $< \frac{19}{5}$ il massimo valore, che potrà acquistare n sarà 3, e per conseguenza otterremo gli ultimi termini domandati, potendo in essa (LXXIII) $m = 18$, ed $n = 3$. Tali termini adunque saranno

$$3^6 \left(\frac{(18-10)(18-11)\ldots(18-14)}{1.2\ldots5} 5^0 + \frac{(18-11)(18-12)\ldots(18-15)}{1.2\ldots5} 5^2 + \frac{(18-11)(18-12)\ldots(18-16)}{1.2.3\ldots6} 5^4 \right) 10^{18} +$$

$$3^7 \left(\frac{(18-12)(18-13)\ldots(18-17)}{1.2.3\ldots6} 5^1 \right) 10^{21} =$$

$$729\,(56 + 21 \,.\, 125 + 7 \,.\, 625)\, 10^{18} + 2187 \,.\, 5 \,.\, 10^{21} =$$
$$5143824 \,.\, 10^{18} + 10935 \,.\, 10^{21} = 16078824 \times 10^{18}\,.$$

Volendo determinare i termini antepenultimi, faremo $n=2$, e la loro somma sarà

$$3^4\left(\frac{(18-7)(18-8)(18-9)}{2.3}5^0+\frac{(18-8)(18-9)(18-10)}{2.3}5^2+\frac{(18-8)(18-9)(18-10)(18-11)}{2.3.4}5^4\right)10^{12}+$$
$$3^5\left(\frac{(18-9)(18-10)\ldots(18-12)}{2.3.4}5^1+\frac{(18-9)(18-10)\ldots(18-13)}{2.3.4.5}5^3\right)10^{15}$$
$=3548967615\times10^{12}$.

Le serie, e formole sovraccennate sono le seguenti

$$\begin{aligned}5^{2m-1}=\;&5^3+3\left(5^0+5^2+(m-4)5^4\right)10^3+3^2\left((m-5)5^1+\frac{(m-5)(m-6)}{2}5^3\right)10^6+\\&3^3\left(\frac{(m-6)(m-7)}{2}5^0+\frac{(m-7)(m-8)}{2}5^2+\frac{(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3}5^4\right)10^9+\\&3^4\left(\frac{(m-8)(m-9)(m-10)}{2.3}5^1+\frac{(m-8)(m-9)(m-10)(m-11)}{2.3.4}5^3\right)10^{12}+\\&3^5\left(\frac{(m-9)\ldots.(m-12)}{2.3.4}5^0+\frac{(m-10)\ldots.(m-13)}{2.3.4}5^2+\frac{(m-10)\ldots.(m-14)}{2.3.4.5}5^4\right)10^{15}+\\&3^6\left(\frac{(m-11)\ldots.(m-15)}{2.3.4.5}5^1+\frac{(m-11)\ldots.(m-16)}{2.3.4.5.6}5^3\right)10^{18}+\\&\text{ec.}\end{aligned}\tag{LXX}$$

$$\begin{aligned}5^{2m}=\;&5^4+3\left(5^1+(m-3)5^3\right)10^3+3^2\left((m-4)5^0+(m-5)5^2+\frac{(m-5)(m-6)}{2}5^4\right)10^6+\\&3^3\left(\frac{(m-6)(m-7)}{2}5^1+\frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3}5^3\right)10^9+\\&3^4\left(\frac{(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3}5^0+\frac{(m-8)(m-9)(m-10)}{2.3}5^2+\frac{(m-8)\ldots.(m-11)}{2.3.4}5^4\right)10^{12}+\\&3^5\left(\frac{(m-9)\ldots(m-12)}{2.3.4}5^1+\frac{(m-9)\ldots.(m-13)}{2.3.4.5}5^3\right)10^{15}+\\&3^6\left(\frac{(m-10)\ldots.(m-14)}{2.3.4.5}5^0+\frac{(m-11)\ldots.(m-15)}{2.3.4.5}5^2+\frac{(m-11)\ldots.(m-16)}{2.3.4.5.6}5^4\right)10^{18}+\\&\text{ec.}\end{aligned}\tag{LXXI}$$

$$\begin{aligned}&3^{2n}\left(\frac{[m-(3n+2)]\ldots.(m-5n)}{2.3.4\ldots.(2n-1)}5^1+\frac{[m-(3n+2)]\ldots.[m-(5n+1)]}{2.3.4\ldots2n}5^3\right)10^{6n}+\\&3^{2n+1}\left(\frac{[m-(3n+3)]\ldots.[m-(5n+2)]}{2.3.4\ldots2n}5^0+\frac{[m-(3n+4)]\ldots.[m-(5n+3)]}{2.3.4\ldots2n}5^2+\right.\end{aligned}\tag{LXXII}$$

$$\left.\frac{[m-(3n+4)]\ldots\ldots[m-(5n+4)]}{2.3.4\ldots(2n+1)}5^4\right)10^{6n+3}.$$

$$3^{2n+1}\left(\frac{[m-(3n+1)]\ldots\ldots[m-(5n+1)]}{2.3\ldots\ldots(2n-1)}5^0+\frac{[m-(3n+2)]\ldots\ldots(m-5n)}{2.3\ldots\ldots(2n-1)}5^2+\right.$$

$$\text{(LXXIII)}\quad\left.\frac{[m-(3n+2)]\ldots\ldots[m-(5n+1)]}{2.3.4\ldots2n}5^4\right)10^{6n}+$$

$$3^{2n+1}\left(\frac{[m-(3n+3)]\ldots\ldots[m-(5n+2)]}{2.3.4\ldots2n}5^1+\frac{[m-(3n+3)]\ldots\ldots[m-(5n+3)]}{2.3.4\ldots\ldots2n}5^3\right)10^{6n+3}.$$

4. Vogliasi la potenza *pesima* del numero 9. Essendo $9^p=(10-1)^p$, mediante la formola Newtoniana otterremo

$$9^p=(10-1)^p=10^p-p.10^{p-1}+p\frac{(p-1)}{2}10^{p-2}-p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}10^{p-3}+\text{ec.}=$$

$$\text{(LXXIV)}\quad\left(10^p+p\frac{(p-1)}{2}10^{p-2}+p\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}10^{p-4}+\text{ec.}\right)-$$

$$\left(p.10^{p-1}+p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}10^{p-3}+p\frac{(p-1)\ldots(p-4)}{2.3.4.5}10^{p-5}+\text{ec.}\right).$$

In conseguenza di ciò, determino da prima i coefficienti $1, p, p\frac{(p-1)}{2}, p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$, ec.; e siccome gli uni 1, $p\frac{(p-1)}{2}$, ec. presi alternativamente sono moltiplicati rispettivamente per le potenze 10^p, 10^{p-2}, ec. decrescenti di 10^2 in 10^2, e così gli altri, p, $p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$ ec. sono rispettivamente moltiplicati per le potenze 10^{p-1}, 10^{p-3}, ec. decrescenti esse pure di 10^2 in 10^2; e siccome, sottratta la somma di questi secondi termini dalla somma dei primi, il risultato, che ne viene, è il valore di 9^p, come apparisce in (LXXIV); scrivo in una linea orizzontale il primo coefficiente 1, poscia in una linea seconda il coefficiente $p\frac{(p-1)}{2}$ in modo, che le ultime sue due cifre a destra rimangano senz' averne alcun'altra di sopra, come si è praticato negli esempj 1.°, 2.°, del (N.° 3); scrivo quindi in una terza linea il coefficiente $p\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}$ nella stessa maniera, in modo cioè, che le ultime sue due cifre a destra non ne abbiano alcun'altra di sopra, e così di seguito; e ciò fatto, eseguisco la somma di tutti questi numeri. Nella stessa guisa scrivo, e sommo gli altri coefficienti p, $p\,\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$, $p\,\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2.3.4.5}$, ec. Finalmente, aggiunto uno zero alla destra di quella fra queste due somme, che contiene il penultimo coefficiente, sottraggo l'ultima dalla prima, e il residuo, che ne viene, sarà il chiesto valore di 9^p.

1.° Sia per esempio $p=12$: i corrispondenti coefficienti Newtoniani essendo 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1, li scrivo qui sotto, e li sommo nella maniera sovraindicata; alla seconda somma 142799942012, che contiene il penultimo coefficiente 12, unisco alla destra uno zero, e fatta la sovra esposta sottrazione, sarà il residuo $282429536481 = 9^{12}$.

1	
66	12
495	220
924	792
495	792
66	220
01	12
1710428956601	142799942012
1427999420120	
282429536481 .	

2.° Se p sia tale, che i corrispondenti coefficienti Newtoniani siano composti di un numero di cifre non >2, il che succede nella ipotesi di $p<9$; determineremo allora assai semplicemente il valore di 9^p, scrivendo l'un dietro l'altro i coefficienti $1, p\frac{(p-1)}{2}$, $p\,\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}$, ec., col porre uno zero alla sinistra di quelli tra essi, che contengono una cifra sola, e così scrivendo gli altri p, $p\,\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$, ec.;

poscia alla destra di quello tra questi due risultati, che contiene il penultimo termine, collocando un zero; e finalmente sottraendo il risultato secondo dal primo. Sia per esempio $p=8$. I coefficienti Newtoniani diventano 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, quindi i due risultati per la regola ora accennata saranno 128702801, 8565608, e aggiunto alla destra del secondo di essi, che contiene il penultimo termine 8, uno zero, e quindi sottratto questo dal primo, ci verrà $43046721=9^8$.

3.° Poichè si ha $11^p=(10+1)^p$, e per conseguenza

$$11^p=10^p+p\,.\,10^{p-1}+p\frac{(p-1)}{2}10^{p-2}+p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}10^{p-3}+\text{ec.},$$

vedesi, che, se sommeremo insieme quelle quantità, le quali sottratte l'una dall'altra ci somministrano il valore di 9^p, otterremo il valore di 11^p. Però negli esempj de' (prec. 1.°, 2.°) sommando i risultati avuti dalle somme ricaveremo $11^8=128702801+85656080=214358881$, $11^{12}=3138428376721$.

5. 1.° Determinati, come nel (3.° N.° 3) in una delle due serie (LXX), (LXXI) i termini ultimi, ossia quelli, che contengono la più alta, o le due più alte potenze del 10, e conosciuto così il numero delle cifre, che si contengono nella loro somma, potremo conoscere il numero delle cifre, che si contengono nella corrispondente potenza del 5, senzacchè tal potenza venga determinata attualmente. Così nell'Esempio 1.° (N.° 3) contenendosi undici cifre nel termine 27000000000, e altrettante nella somma di esso col termine susseguente 3510000000, dirò che anche undici cifre esistono nel valore sviluppato di 5^{15}, come di fatti si vede nel cit. (1.° N.° 3). Così nell'Esempio 2.° (N.° 3) essendo 19 le cifre dell'ultimo termine 1215×10^{15}, e 19 le cifre esistenti nella somma di questo col termine susseguente 274995×10^{12}, dirò che nella potenza 5^{26} esistono 19 cifre. Finalmente poichè 26 è il numero delle cifre che nell'Esempio (3.° N.° 3) esistono nel termine ultimo 10935×10^{21}, e nella somma 16078824×10^{18} degli ultimi due, dirò, che ancora la potenza 5^{26} conterrà 26 cifre. In tutti e tre questi casi bastava osser-

osservare il numero delle cifre solamente dell'ultimo termine, per determinare il numero delle cifre, che si contengono nella rispettiva potenza del 5.

2.° Dicasi a il numero delle cifre, che esistono nella potenza 5^p, e siano di numero x le cifre esistenti in 2^p; si avrà $x=p-a+1$. Di fatti avendosi $5^p>10^{a-1}$, ed insieme $<10^a$, e $2^p>10^{x-1}$, ed insieme $<10^x$, sarà $2^p\times 5^p>10^{a+x-2}$, ed insieme $<10^{a+x}$. Ora abbiamo $2^p\times 5^p=(2.5)^p=10^p$. Dunque sarà 10^p una quantità compresa tra le due 10^{a+x-2}, 10^{a+x}, e per conseguenza p sarà un intero compreso tra i due $a+x-2$, $a+x$; ma tra questi due numeri non vi è compreso altro intero, che $a+x-1$. Dunque dovendo essere $a+x-1=p$, ne verrà $x=p-a+1$. Pertanto, conosciuto il numero a delle cifre esistenti in 5^p, e conosciuto l'esponente p, conosceremo tosto in $p-a+1$, il numero delle cifre che esistono nella potenza 2^p.

3.° Inoltre si ha $4^p=2^p.2^p$; ma supposto $p-a+1=6$, per la natura della moltiplicazione le cifre nel prodotto $2^p.2^p$ sono di numero $26-1$, oppure 26. Dunque nella potenza 4^p si conterranno $2(p-a)+1$, oppure $2(p-a)+2$ cifre.

4.° Sia c il numero delle cifre, che si contengono in 4^p: il numero di quelle, che si contengono in $8^p=4^p.2^p$ sarà $c+b-1$, ovvero $c+b$; ma, sostituiti in vece delle b, c i valori corrispondenti, si ottengono i tre risultati $3(p-a)+1$, $3(p-a)+2$, $3(p-a)+3$. Dunque da uno di questi tre risultati verrà sempre determinato il numero delle cifre, che esistono nella potenza 8^p.

5.° Chiamisi e il numero delle cifre, che esistono in 9^p, ed x il numero delle esistenti in 3^p. Avendosi $9^p=3^p.3^p$; il numero delle cifre in 9^p sarà ancora $2x$, oppure $2x-1$; poichè adunque si ha $2x=e$, oppure $2x-1=e$, risulterà $x=\frac{e}{2}$, ovvero $x=\frac{e+1}{2}$; ma tanto x, come e devono essere numeri intieri: dunque quando e è numero pari, sarà $x=\frac{e}{2}$, e quando e è numero dispari, sarà $x=\frac{e+1}{2}$; e per conseguenza il numero delle cifre in 3^p sarà $\frac{e}{2}$, oppure $\frac{e+1}{2}$ secondochè il numero e delle cifre in 9^p è pari, o dispari.

6.° Denominato f il numero delle cifre in 3^p, il numero delle cifre in $6^p=2^p.3^p$ sarà $b+f$, oppure $b+f-1$, e sostituiti i valori corrispondenti (prec. 3.°, 5.°) tal numero, quando e (prec. 5.°) è pari sarà $p-a+\frac{e}{2}+1$, ovvero $p-a+\frac{e}{2}$, e quando e è dispari sarà $p-a+\frac{e+1}{2}+1$, oppure $p-a+\frac{e+1}{2}$.

Passiamo ora a considerare il numero delle cifre nelle potenze dei numeri intieri in un modo generale.

6. Chiamati h, p due numeri interi positivi qualunque, cercasi il numero delle cifre, che si contengono nella potenza h^p.

Denominato x questo numero, lo stesso numero di cifre si conterrà ancora in 10^{x-1}, e siccome tra i numeri, che contengono x cifre, 10^{x-1} è il minimo, dovrà essere h^p non $<10^{x-1}$. Prendansi ora i logaritmi da una parte e dall'altra nel sistema delle tavole, e avremo x non $>p\log.h+1$. Ma contenendosi in 10^x un numero di cifre $x+1$, abbiamo $10^x>h^p$, e prendendo quindi i logaritmi, ottiensi $x>p\log.h$. Dunque, dovendo x essere un numero intero, uguaglierà quell' intero, che supera immediatamente il valore $p\log.h$. Questo valore di x altro evidentemente non è che la caratteristica di $\log.h^p$ accresciuta di 1.

1.° Sia per esempio $h=5$, e $p=26$, oppure $h=11$, e $p=12$. Nel primo di questi casi abbiamo $p\log.h=26\log.5=26\times0,699$, non tenendo conto nell'espressione logaritmica che di tre decimali per maggiore semplicità, e perchè non ne abbisogna nel caso presente un maggior numero.

Dunque risultando p log. $h = 18, 174$, il numero delle cifre esistenti nella potenza 5^{26} sarà 19, come appunto si vede nell'Esempio 2.° del (N.° 3). Nel caso secondo avendosi p log. $h = 12$ log. $11 = 12 \times 1, 041 = 12, 492$, sarà 13 il numero delle cifre esistenti in 11^{12} come di fatti si vede nel (3.° N.° 4).

2.° Poichè, ritenendo come di sopra tre sole cifre decimali, nelle espressioni logaritmiche abbiamo

$$
\text{(LXXV)} \quad \begin{aligned}
&\log.\ 1 = 0 \\
&\log.\ 2 = 0, 301 \\
&\log.\ 3 = 0, 477 \\
&\log.\ 4 = 0, 602 \\
&\log.\ 5 = 0, 699 \\
&\log.\ 6 = 0, 778 \\
&\log.\ 7 = 0, 845 \\
&\log.\ 8 = 0, 903 \\
&\log.\ 9 = 0, 954,
\end{aligned}
$$

potremo agevolmente col mezzo di questi numeri determinare quante cifre si contengono in ciascuna delle potenze 1^p, 2^p, 3^p, ec. 9^p, estendendosi il valore dell'intero p dallo zero fino inclusivamente al 100.

7. Conservate le denominazioni del (N.° prec.), e supposto di più, che q rappresenti un intiero positivo $< p$, si domanda, qual debba essere p acciocchè la potenza h^p contenga $p - q$ cifre.

Col discorso medesimo del (N.° prec.) trovasi dover essere h^p non $< 10^{p-q-1}$ ed insieme $h^p < 10^{p-q}$; presi adunque i logaritmi, poichè risulta p log. h non $< p - q - 1$, p log. $h < p - q$, si otterrà p non $> \frac{q+1}{1 - \log. h}$, $p > \frac{q}{1 - \log. h}$. Dunque, dovendo p essere numero intiero, avrà tanti valori quanti sono gl'intieri, che sono al di sopra del valore $\frac{q}{1 - \log. h}$, e non superano l'altro $\frac{q+1}{1 - \log. h}$.

Fig. 2.

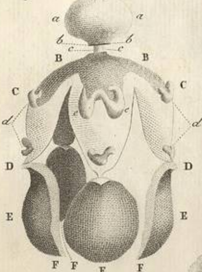

Fig. 1.

Fig. 3

8. Pongasi h successivamente $= 1, 2, 3$, ec. 9. Col ritenere per maggiore semplicità tre soli decimali nelle espressioni logaritmiche, poichè si hanno le Equazioni (LXXV); i valori di p, corrispondentemente ai quali le potenze *pesime* dei primi nove numeri intieri contengono $p-q$ cifre, verranno determinati dai limiti, che in conseguenza del (N.° prec.) sonosi ritrovati, e vengono esposti qui sotto in (LXXVI)

$$\text{(LXXVI)}\quad \begin{array}{l} \frac{q}{1}\,1^p,\frac{q+1}{1};\ \frac{q}{0,699}\,2^p,\frac{q+1}{0,699};\ \frac{q}{0,522}\,3^p,\frac{q+1}{0,522};\\ \frac{q}{0,398}\,4^p,\frac{q+1}{0,398};\ \frac{q}{0,301}\,5^p,\frac{q+1}{0,301};\ \frac{q}{0,222}\,6^p,\frac{q+1}{0,222};\\ \frac{q}{0,155}\,7^p,\frac{q+1}{0,155};\ \frac{q}{0,097}\,8^p,\frac{q+1}{0,097};\ \frac{q}{0,046}\,9^p,\frac{q+1}{0,046}. \end{array}$$

1.° Sia $q=0$. In questa ipotesi tutti i primi limiti diventando zero, ed i secondi divenendo rispettivamente

$$\text{(LXXVII)}\quad \begin{array}{l} \frac{1}{1}=1;\ \frac{1}{0,699}=1\frac{301}{699};\ \frac{1}{0,522}=1\frac{478}{522};\ \frac{1}{0,398}=2\frac{204}{398};\\ \frac{1}{0,301}=3\frac{97}{301};\ \frac{1}{0,222}=4\frac{112}{222};\ \frac{1}{0,155}=6\frac{70}{155};\ \frac{1}{0,097}=10\frac{30}{97};\\ \frac{1}{0,046}=23\frac{42}{46}; \end{array}$$

ne segue, essere solo la prima potenza di ciascuno dei numeri 1, 2, 3, quella che contiene tante cifre, quanto è il grado della potenza medesima; che riguardo al numero 4 tanto la prima che la seconda delle sue podestà contiene tante cifre, quanto è il grado rispettivo della potenza; che rapporto al numero 5 gode di questa proprietà soltanto ciascheduna delle sue prime tre potenze; che relativamente al 6 godono tale proprietà solamente le sue quattro podestà prime; e che la godono egualmente, e solamente, riguardo al 7, le sue sei potenze prime; rapporto allo 8 le sue prime dieci; e riguardo al 9 le sue prime ventitre.

2.° Si faccia $q=1$. In questo caso dei limiti (LXXVI) i primi diverranno gli esposti in (LXXVII), ed i secondi diverranno

$\frac{2}{1}=2$; $\frac{2}{0,699}=2\frac{602}{699}$; $\frac{2}{0,522}=3\frac{434}{522}$; $\frac{2}{0,398}=5\frac{10}{398}$;

$\frac{2}{0,301}=6\frac{194}{301}$; $\frac{2}{0,222}=9\frac{2}{222}$; $\frac{2}{0,155}=12\frac{140}{155}$; $\frac{2}{0,097}=20\frac{60}{97}$;

$\frac{2}{0,046}=47\frac{38}{46}$.

Dunque delle potenze, le quali contengano una cifra di meno di quel che sia il grado delle potenze stesse, i numeri 1, 2 ne hanno una sola, cioè la seconda, il 3 ne ha due, cioè la seconda, e la terza; il 4 ne contiene tre, cioè la terza, la quarta, e la quinta; il 5 ne contiene tre, cioè la quarta, la quinta, e la sesta; cinque ne contiene il 6, che sono la quinta, la sesta, ec. la nona; sei se ne contengono dal 7, tali essendo le potenze settima, ottava, ec. duodecima; dieci ne contiene lo 8, essendo tali le podestà undecima, duodecima, ec. vigesima; e ventiquattro se ne contengono dal 9, le quali sono la ventiquattresima, la venticinquesima, ec. la quarantasettesima.

3.° Col fare $q=2$, potremo, come nei (prec. 1.°, 2.°) determinare quante, e quali potenze dei numeri 1, 2, 3, ec. 9 contengono due cifre di meno del numero p esprimente il grado delle potenze medesime. Così in progresso.

9. Venga dato il valore del primo membro G, il grado m della potenza, che vuole estraersi; e venga richiesta indipendentemente dalla Tavola delle potenze la massima potenza *mesima* esatta, che si contiene in G.

Denominato r il numero delle cifre in G, determino quale, o quali tra i logaritmi (LXXV) moltiplicati per m danno una caratteristica $=r-1$. Chiamati a, b, c, ec. i numeri corrispondenti a questi logaritmi, e supposto $a>b>c>$ ec., truovo attualmente il valore a^m, e lo paragono con G: se veggo a^m non $>$ G, dirò che a^m è la massima potenza *mesima* domandata: che se sia $a^m>$ G, determino b^m, e paragonato questo valore con G, dirò essere b^m la massima potenza richiesta, mentre risulti b^m non $>$ G; ma se risulta

$b^m > G$, passo innanzi, trovando successivamente le potenze c^m, ec., finchè ottiensi quella, che sia non $> G$, dicendo poi essere questa la domandata. Che se niuno dei numeri a, b, c, ec. determinati di sopra somministri potenza *mesima* non $> G$; prenderò allora l'intiero prossimamente ad essi inferiore, e la *mesima* di questo sarà non $> G$, e sarà la richiesta.

1.° Supposto per esempio $m = 10$, sia $G = 35438956$. Essendo in questo il numero delle cifre $r = 8$, cerco in (LXXV) quali tra i logaritmi ivi esistenti sono quelli che moltiplicati per 10 somministrano la caratteristica 7; trovo agevolmente non esservi fornito di tale proprietà che il logaritmo 0,778, il cui numero corrispondente è 6. Dunque per la regola stabilita di sopra non dovrò che cercare il valore di 6^{10}; ma per l'attuale operazione truovasi $6^{10} = 13810176$, ed è $13810176 < 35438956$: dirò dunque essere 6^{10} la massima potenza decima, che si contiene in 35438956. Che se fosse $G = 11935686$; allora avendosi $13810176 > 11935686$, direi non essere già 6^{10}, ma bensì 5^{10} la massima potestà decima esatta, che contiensi nel dato 11935686.

2.° Abbiasi $m = 5$, e $G = 25468$. In questo caso tutti e tre i logaritmi 0,954; 0,903; 0,845 (LXXV) moltiplicati per 5 somministrano la caratteristica 4. Dunque converrà, che riteenghiamo tutti e tre i numeri 9, 8, 7, e, fattene successivamente le potestà quinte, che successivamente le paragoniamo col dato 25468, come si è indicato di sopra relativamente alle potenze a^m, b^m, c^m, ec. con la G. Ora si trova $9^5 = 59049$, $8^5 = 32768$, $7^5 = 16807$. Dunque essendo fra queste solamente la potestà $7^5 < 25468$, ne segue, che sarà essa 7^5 la massima potenza quinta esatta che si contiene nel dato numero 25468.

3.° Sia $G = 3560438495$, ed $m = 25$. In questa ipotesi, non esiste alcuno dei numeri a, b, c, ec. il quale elevato alla potenza 25.*esima* contenga tante cifre, quante ne contiene il dato 3560438495 cioè 10, perchè in (LXXV) non esiste alcun logaritmo, il quale moltiplicato per 25 produca la caratteristica 9; ma il logaritmo del 2 cioè 0, 301 moltiplicato per 25 dà il prodotto 7, 525, e però la caratteristica 7; ed il logaritmo del 3, cioè 0, 477 moltiplicato parimenti per 25 somministra la caratteristica 11, somministrando il prodotto 11, 925. Dunque essendo 3^{25} fornito di 12 cifre, e 2^{25} di 8, sarà 2^{25} la massima potenza 25 *esima* esatta, che contiensi in 3560438495.

10. Quanto minore è il numero delle quantità a, b, c, ec. del (N.° prec.), tanto più semplice riescirà la soluzione del Problema ivi proposto. Ora quanto è maggiore l'esponente m; dal valore dei logaritmi esistenti in (LXXV), e dai tre esempj del (N.° prec.) apparisce, tanto essere minore l'indicato numero delle a, b, c, ec., il quale ben presto riducesi assai ristretto. Dunque, mentre abbiansi presenti i logaritmi (LXXV), potremo assai agevolmente risolvere il citato Problema del (N.° 9), il quale è quello, che forma il soggetto principale della presente Appendice, ed esso anzi diventerà sempre tanto più facile, quanto è più alto il valore di m. Che se gli accennati logaritmi non si abbiano presenti, allora il numero delle cifre, che formano la potenza richiesta, potrà ricercarsi dipendentemente dalle proprietà esposte nel (N.° 5), avvertendo che il numero e nel (5.° N.° 5) è sempre $= m$ ogniqualvolta sia m un intiero non > 23 (1.° N.° 8); esso e uguaglia $m - 1$, mentre m sia > 23, e < 48 (2.° N.° 8): uguaglia $m - 2$, allorchè m superi 47, e sia < 66. Così di seguito. Che se non si conoscono neppure queste proprietà, allora conviene per isciogliere il Problema, ricorrere al metodo proposto nel (N.° 2), ed alle formole (LXX), (LXXI), (LXXIV).