SULLE OSCILLAZIONI DI UN CORPO PENDENTE DA UN FILO ESTENDIBILE

MEMORIA

Del Signor Pietro Paoli.

Ricevuta li 5 Agosto 1814.

Nel Tomo XIV delle Memorie della Società Italiana delle Scienze ho trattato delle piccole oscillazioni di un corpo appeso ad un punto fisso per mezzo di un filo capace di distendersi e di scorciarsi. Ho supposto nel principio del moto il pendolo in quiete nella situazione verticale, dalla quale venga rimosso mediante un piccolo impulso. Il Sig. *Poisson* ha in seguito preso in esame il medesimo problema senza fare alcuna particolare ipotesi sulle condizioni iniziali del moto, e per mezzo d' ingegnosi artifizj di calcolo ne ha data una elegante risoluzione. Ma questa maggior generalità non rende la questione più difficile, e l' analisi adoprata nel caso più particolare da me contemplato serve egualmente senza bisogno di altre considerazioni allo scioglimento di tutti, come mi propongo adesso di dimostrare.

Ritenute le medesime denominazioni della citata Memoria il moto del centro di oscillazione del pendolo è determinato dalle seguenti equazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{a}u+(a-u)\frac{\partial \theta^2}{\partial t^2}-g(1-\cos.\theta)=0\ \ldots\ (1)$$

$$(a-u)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t}+g\,\text{sen.}\,\theta=0\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

le quali conviene integrare per approssimazione nella ipotesi che θ, ω ed u siano quantità piccolissime.

Incominciamo dal trascurare nella seconda i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u, ed avremo

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\theta=0$$

di cui l'integrale completo è

$$\theta=h\,\text{sen.}\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)$$

ove lascio le costanti h e k sotto una forma indeterminata, perchè all'origine del moto tanto θ che $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ possano avere qualunque valore; e solo osservo che h è una piccolissima quantità, perchè tale per ipotesi dev'esser θ.

Sostituendo il valore trovato di θ nella equazione (1), e conservando solamente i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u avremo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{a}u-\frac{h^2g}{2}\text{sen.}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)+h^2g\cos.^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)=0;$$

la quale posti in luogo di $\text{sen.}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)$ e $\cos.^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)$ i loro valori $\frac{1-\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)}{2}$, ed $\frac{1+\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)}{2}$ diventerà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{a}u+\frac{h^2g}{4}\left[1+3\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)\right]=0.$$

L'integrale completo di questa equazione è

$$u=h'\,\text{sen.}\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k'\right)-\frac{h^2a}{4}\left[1+\frac{3}{1-\frac{4a}{a}}\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)\right]$$

ove possiamo scrivere l'unità in luogo della frazione $\frac{1}{1-\frac{4a}{a}}$, perchè in questa approssimazione ci proponghiamo di trascurare i termini moltiplicati per ω^2. Sarà perciò

$$u=h'\text{sen.}\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k'\right)-\frac{h^2a}{4}\left[1+3\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)\right].$$

Proseguendo l'approssimazione ripigliamo l'equazione (2) e trascurando i termini θ^5 e $\theta^3 u$ essa diventerà

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\theta=\frac{g}{a}\cdot\frac{\theta^3}{6}-\frac{g}{a^2}u\theta+\frac{2}{a}\,\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}=0$$

o sia facendo per più semplicità $t\sqrt{\frac{g}{a}}+k=t'$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t'^2}+\theta=\frac{\theta^3}{6}-\frac{u\theta}{a}+\frac{2}{a}\cdot\frac{\partial u}{\partial t'}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t'}=0.$$

Ponghiamo $\theta=h\,\text{sen.}\,t'+\theta'$, essendo θ' di un ordine più elevato di h, e mettendo nel secondo membro dell'equazione precedente in luogo di θ il suo valor prossimo $h\,\text{sen.}\,t'$, e riducendo i prodotti di seni e coseni in seni e coseni di archi multipli avremo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\theta'}{\partial t'^2}+\theta'=&\frac{h^3}{8}\left(1+\frac{110\varrho}{a}\right)\text{sen.}\,t'-\frac{h^3}{24}\left(1-\frac{45\varrho}{a}\right)\text{sen.}\,3t'\\&+\frac{hk'}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cos.\left[t'\left(\sqrt{\frac{a}{\varrho}}-1\right)+k'-k\sqrt{\frac{a}{\varrho}}\right]\\&+\frac{hk'}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}+\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cos.\left[t'\left(\sqrt{\frac{a}{\varrho}}+1\right)+k'-k\sqrt{\frac{a}{\varrho}}\right].\end{aligned}$$

Se facciamo per più brevità

$$\frac{1}{16}\left(1+\frac{110\varrho}{a}\right)=\mathrm{A}$$

$$\frac{1}{192}\left(1-\frac{45\varrho}{a}\right)=\mathrm{B}$$

otterremo per mezzo della integrazione

$$\begin{aligned}\theta'=&-\mathrm{A}h^3t'\cos.\,t'+\mathrm{B}h^3\,\text{sen.}\,3t'\\&-\frac{2hk'\sqrt{\varrho}}{a\sqrt{a}}\cos.\,t'\cos.\left[\left(t'-k\right)\sqrt{\frac{a}{\varrho}}+k'\right]\end{aligned}$$

ove tralascio le costanti arbitrarie, perchè possono reputarsi comprese nelle indeterminate h e k. Sarà dunque

$$\begin{aligned}\theta=&\,h\,\text{sen.}\,t'-\mathrm{A}h^3t'\cos.\,t'+\mathrm{B}h^3\,\text{sen.}\,3t'\\&-\frac{2hk'\sqrt{\varrho}}{a\sqrt{a}}\cos.\,t'\cos.\left[\left(t'-k\right)\sqrt{\frac{a}{\varrho}}+k'\right].\end{aligned}$$

Per trovare le massime deviazioni del pendolo dalla verticale dobbiamo porre $0=\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial t'}\sqrt{\frac{g}{a}}$, cioè

$$0=h\cos.\,t'-\mathrm{A}h^3\cos.\,t'+\mathrm{A}h^3t'\,\text{sen.}\,t'+3\mathrm{B}h^3\cos.\,3t'$$

$$+\frac{2hh'\sqrt{o}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.}\,t'\cos.\left[\left(t'-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right]$$
$$+\frac{2hh'}{a}\cos.\,t'\,\text{sen.}\left[\left(t'-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right].$$

per mezzo della qual equazione potremo esprimere t' in una serie ordinata per le potenze e per i prodotti di h^2 ed h'. Facciamo $t'=\text{M}+\text{N}h^2+\text{P}h'+\text{ec.}$, e sostituendo questo valore nella equazione precedente, e trascurando i termini h^5 ed h^3h' come sopra avremo

$$o=h\cos.\text{M}-h\,\text{sen.}\,\text{M}\,(\text{N}h^2+\text{P}h')-\text{A}h^3\cos.\text{M}+\text{A}h^3\text{M}\,\text{sen.M}$$
$$+\frac{2hh'\sqrt{o}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.M}\cos.\left[\left(\text{M}-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right]$$
$$+\frac{2hh'}{a}\cos.\text{M}\,\text{sen.}\left[\left(\text{M}-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right].$$

Il paragone dei termini simili ci darà $\cos.\text{M}=o$, cioè $\text{M}=\frac{2i+1}{2}\pi$, essendo i un numero intero qualunque, e 2π la circonferenza del cerchio che ha per raggio l'unità; $\pm\text{N}\mp\text{AM}=o$, $\pm\text{P}\mp\frac{2\sqrt{o}}{a\sqrt{a}}\cos.\left[\left(\text{M}-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right]=o$, cioè $\text{N}=\text{A}\,\frac{2i+1}{2}\pi$, e $\text{P}=\frac{2\sqrt{o}}{a\sqrt{a}}\cos.\left[\left(\frac{2i+1}{2}\pi-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right]$. Sarà pertanto

$$t'=t\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\left(1+\text{A}h^2\right)\frac{2i+1}{2}\pi+\frac{2h'\sqrt{o}}{a\sqrt{a}}\cos.\left[\left(\frac{2i+1}{2}\pi-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right].$$

Relativamente a questi valori di t' troveremo dentro i limiti della nostra approssimazione

$$\pm\theta=h-\text{B}h^3$$

lo che ci avverte che le massime deviazioni del pendolo da una parte e dall'altra della verticale sono tutte eguali tra loro.

Chiamando $t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}$, ec. i tempi, che il pendolo impiega per giungere dall'origine del moto alla massima deviazione la prima volta, la seconda, la terza ec., avremo

$$t^{(1)}\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\left(1+\text{A}h^2\right)\frac{\pi}{2}+\frac{2h'\sqrt{o}}{a\sqrt{a}}\cos.\left[\left(\frac{\pi}{2}-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right]$$
$$t^{(2)}\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\left(1+\text{A}h^2\right)\frac{3\pi}{2}+\frac{2h'\sqrt{o}}{a\sqrt{a}}\cos.\left[\left(\frac{3\pi}{2}-k\right)\sqrt{\frac{a}{o}}+k'\right]$$

e generalmente

$$t^{(i)}\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\left(1+\mathrm{A}h^2\right)\frac{2i-1}{2}\pi+\frac{2h'\sqrt{\omega}}{\alpha\sqrt{a}}\left[\left(\frac{2i-1}{2}\pi-k\right)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right].$$

Pertanto la durata di una oscillazione qualunque sarà

$$t^{(i+1)}-t^{(i)}=(1+\mathrm{A}h^2)\pi\sqrt{\frac{a}{g}}-\frac{4h'\sqrt{\omega}}{\alpha\sqrt{g}}\,\mathrm{sen.}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{\omega}}.\,\mathrm{sen.}\left[(i\pi-k)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right].$$

Nel caso contemplato nella memoria citata h' è dell'ordine $h^2\omega$, e quindi $h'\sqrt{\omega}$ dell'ordine $h^2\omega\sqrt{\omega}$, cioè una quantità piccolissima quando il filo è pochissimo estendibile. Se in grazia della sua piccolezza ci permettiamo di trascurare il termine moltiplicato per $\frac{4h^2\omega\sqrt{\omega}}{\alpha\sqrt{g}}$, le oscillazioni saranno isocrone, e chiamando T la durata di ciascuna di esse avremo

$$\mathrm{T}=(1+\mathrm{A}h^2)\pi\sqrt{\frac{a}{g}}=\left[1+\frac{h^2}{16}\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)\right]\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Facendo $\mathrm{T}=1$ ricaveremo da questa equazione la lunghezza a del pendolo, il quale compie le sue oscillazioni nell'unità di tempo, che sarà

$$a=\frac{g}{\pi^2}\left[1-\frac{h^2}{8}\left(1+\frac{11\omega\pi^2}{g}\right)\right].$$

Questi valori sono un poco diversi da quelli della predetta memoria per un piccolo sbaglio ivi occorso, che abbiamo adesso corretto.

Ma se per le condizioni del problema $\frac{4h'\sqrt{\omega}}{\alpha\sqrt{g}}$ non sarà così piccola perchè possiamo trascurare il termine per essa moltiplicato, allora le oscillazioni non saranno isocrone a motivo della quantità $\mathrm{sen.}\left[\left(i\pi-k\right)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right]$ la quale varia da una oscillazione all'altra. Qualora però, come si pratica d'ordinario, cercheremo la durata media di una oscillazione deducendola dal tempo che il pendolo impiega nel fare un gran numero di vibrazioni, dopo che per la prima volta è giunto alla massima deviazione dalla verticale, essa si troverà eguale al valor precedente di T; e questa riflessione si deve al

Sig. *Poisson*. Infatti questa durata media è $= \frac{t^{(i+1)} - t^{(1)}}{i}$, o sia

$$(1+Ah^2)\pi\sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{4h'\sqrt{o}}{ia\sqrt{g}}\,\text{sen.}\frac{i}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{o}}.\,\text{sen.}\left[\left(\frac{i+1}{2}\pi - k\right)\sqrt{\frac{a}{o}} + k'\right]$$

ove quantunque il coefficiente $\frac{4h'\sqrt{o}}{a\sqrt{g}}$ non sia abbastanza piccolo per esser trascurato, lo diviene però quando è diviso pel numero considerabile i. È facile il vedere che otterremo il medesimo resultato, se invece d'incominciare l'osservazione dalla prima massima deviazione la incominceremo da una qualunque delle seguenti.