SU LA DETERMINAZIONE DELLA CAPACITÀ DI UNA BOTTE O ELITTICO-CIRCOLARE OD ELITTICO-ELITTICA, A FONDI UGUALI O DISUGUALI, ED A PARTI ANTERIORE E POSTERIORE SIMILI O DISSIMILI.

MEMORIA

Del Signor Don Pietro Cossali.

Ricevuta li 10 Novembre 1814.

Il celebre *Barnaba Oriani* ha insegnata la seguente bellissima Regola pratica per determinare la capacità di una Botte a fondi disuguali. *Moltiplichiamo tra loro i rispettivi diametri di ciascuna delle tre sezioni di una Botte, ed avremo tre prodotti: al quadruplo del prodotto che ci danno i diametri della maggior sezione aggiungansi gli altri due prodotti: se ne moltiplichi la somma per il sesto della lunghezza della Botte, e questo prodotto si moltiplichi anche pel 0,785398, che è la quarta parte della circonferenza di un circolo che ha per diametro 1, ed avremo espressa da quest' ultimo prodotto la capacità della Botte*. V. Tomo II dell' esteso corso di Calcolo Sublime del chiariss. Cav. *Vincenzo Brunacci* Calcolo Integrale Capo I, §. 100. Curioso io di vedere i principj, e le condizioni di tal Regola mi proposi in generale il Problema di determinare la capacità di una Botte.

PROBLEMA.

Determinare la capacità di una Botte o Elittico-Circolare, o Elittico-Elittica, o sieno i suoi fondi uguali o disuguali, e le due parti anteriore e posteriore o simili o dissimili.

Sia FOPG la sezione della Botte verticale in lungo, $Q\varphi\varphi'Q'$ la sua sezione orizzontale in lungo, AZBZ' la sua sezione trasversale massima, $AZBP\phi'GQ'Z$ la sua parte anteriore, e $G\phi'PQ'$ il fondo che a distinzione chiamerò testa, $AZBO\phi FQZ'$ la parte posteriore, della quale $F\phi OQ$ il fondo. Sia CA il semiasse maggiore della sezione elittica trasversale massima $=$B, ed il suo semiasse minore $CZ = a$. Sia il semiasse della testa $IG = b$, e supposta la parte anteriore tutta regolare, e perciò la testa simile alla sezion trasversale massima, sarà $I\phi' = \frac{a}{B} b$; e sia il semiasse maggiore $DF = b'$ conseguentemente per il supposto medesimo della regolarità della parte posteriore il semiasse minore $D\phi = \frac{a}{B} b'$. Sia poi l'elissi dell'arco anteriore verticale AG espressa per l'equazione $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$, e l'elissi dell'arco anteriore orizzontale $Z\phi'$ per l'equazione $\theta^2 = \frac{F^2}{G^2}(G^2 - x^2)$. L'elissi dell'arco vertical posteriore AF abbia per equazione $y'^2 = \frac{B^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$ e l'ellissi dell'arco posteriore orizzontale abbia a sua equazione $\theta'^2 = \frac{F'^2}{G'^2}(G'^2 - x^2)$. Sia C il centro di tutte e quattro le elissi. Si concepisca nella parte anteriore ad una indeterminata ascissa $x = CR$ la sezione trasversale $S\phi''NQ''$. A fine che questa sia simile alla massima $AZBZ'$ dovrà essere $B : a :: y : \theta$, e perciò $\theta = a \times \frac{y}{B}$, $\theta^2 = a^2 \cdot \frac{y^2}{B^2}$. Dunque le due equazioni delle due elissi costituenti la forma della parte anteriore saranno $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$, $\theta^2 = \frac{a^2}{A^2}(A^2 - x^2)$. Similmente si troverà che le due equazioni delle elissi costituenti la forma della parte posteriore esser dovranno $y'^2 = \frac{B^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$, $\theta^2 = \frac{a^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$. Ciò posto non ostante la diversa curvatura della botte da A in G, e da A in F; da Z in ϕ e da Z in ϕ' le sezioni trasversali tutte saranno simili alla sezione massima $AZBZ'$ e simili tra loro.

Sia ora la lunghezza intera DI della Botte $=k$, e sia indeterminatamente $\frac{1}{m}k=$ CI la lunghezza della parte anteriore, $\left(1-\frac{1}{m}\right)k$ quella CD della posteriore. Significata per π la circonferenza del circolo di diametro $=1$ sarà $\frac{a}{B}.\pi y^2$ l'area della elittica trasversale indeterminata sezione Sϕ''NQ'', ed essendo RS$=y$, CR$=x$ sarà $\frac{a\pi}{B}y^2dx$ l'elemento della solidità della parte anteriore della Botte, e la porzione di essa da C in R sarà $\frac{a\pi}{B}\int y^2dx=\frac{a\pi}{B}\int\left(B^2-\frac{B^2}{A^2}x^2\right)dx=\frac{a\pi}{B}\left(B^2x-\frac{B^2}{A^2}.\frac{x^3}{3}\right)$, e fatto $x=\frac{1}{m}k$ si avrà l'intiera parte anteriore della Botte $=\frac{a\pi}{B}\left(B^2.\frac{1}{m}k-\frac{B^2}{A^2}.\frac{k^3}{3m^3}\right)$. Similmente si vede risultare la intiera parte posteriore $\frac{a\pi}{B}\left[B^2\left(1-\frac{1}{m}\right)k-\frac{B^2}{A'^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^3\frac{k^3}{3}\right]$. Dunque la capacità della Botte intera che chiamerò (C) sarà

$$(C)=\frac{a\pi}{B}\left[B^2k-\frac{B^2}{A^2}.\frac{k^3}{3m^3}-\frac{B^2}{A'^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^3\frac{k^3}{3}\right],$$

ma dall'equazione $y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)$ fatto $y=$ IG $=b$, $x=\frac{1}{m}.k$ ricavasi $A^2=\frac{B^2k^2}{m^2(B^2-b^2)}$. E dall'equazione

$$y'^2=\frac{B^2}{A'^2}(A'^2-x^2) \text{ fatto } y'=\text{DF}=b',\ x=\left(1-\frac{1}{m}\right)k$$

ricavasi $A'^2=\frac{B^2k^2\left(1-\frac{1}{m}\right)^2}{B^2-b'^2}$ sostituendo sarà

$$(C)=\frac{a\pi}{3B}\left[3B^2k-\frac{k}{m}(B^2-b^2)-\left(1-\frac{1}{m}\right)k(B^2-b'^2)\right]$$

$$=\frac{a\pi k}{3B}\left[2B^2+\frac{1}{m}b^2+\left(1-\frac{1}{m}\right)b'^2\right].$$

Passo io al presente ai casi particolari: se la parte anteriore e la posteriore siano ugualmente lunghe, cioè se sia

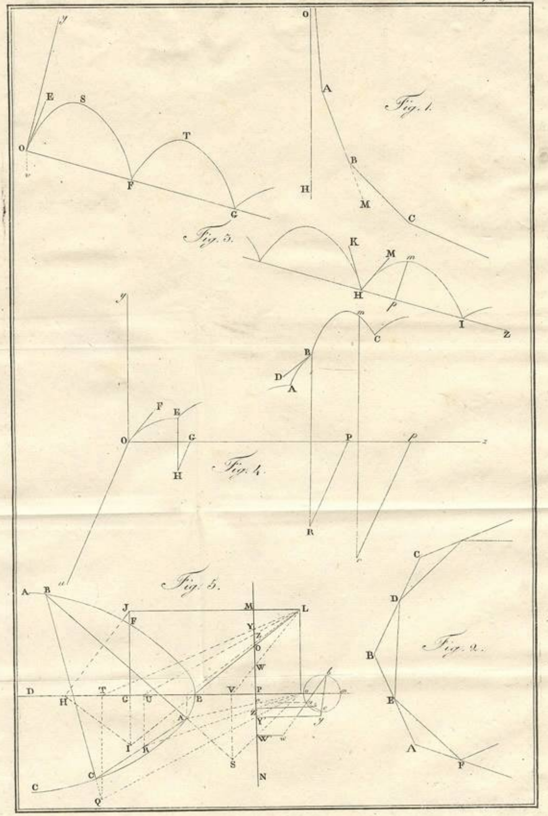
Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 2.

$\frac{1}{m}k = \frac{1}{2}k$, e ciò non ostante siano i semi-assi b, b' della testa e del fondo disuguali, saranno A ed A' disuguali, cioè la curvatura della parte anteriore sarà diversa dalla curvatura della parte posteriore, e si avrà

$$(C) = \frac{a\pi k}{3B}\left(2B^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b'^2}{2}\right) = \pi \,.\, \frac{k}{3.2}\left(4Ba + \frac{b^2.a}{B} + \frac{b'^2.a}{B}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \,.\, \frac{k}{6}\left(4 \,.\, 2B \,.\, 2a + 2b \,.\, \frac{2ab}{B} + 2b' \,.\, \frac{2ab'}{B}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \,.\, \frac{k}{6}\left(4 \,.\, AB \,.\, 2CZ + CP \,.\, 2I\phi' + FO \,.\, 2D\phi\right);$$

questo è il caso del Teorema dell'*Oriani*, nè può che sotto tali condizioni aver luogo. Si può anche adoperare la formola

$$\pi \,.\, \frac{k}{6}\left(4AC \times CZ + GI \times I\phi' + FD \times D\phi\right)$$

che anzi tornerà più comoda essendo più facile tenere a memoria il numero esprimente la circonferenza π del diametro 1 che è 3,141592 di quello che la sua quarta parte.

Se $A = A'$, cioè se la curvatura della Botte sia la stessa nella parte anteriore e nella posteriore, ed i semiassi b, b' siano disuguali si avrà

$$\frac{B^2k^2}{m^2(B^2 - b^2)} = \frac{B^2k^2}{B^2 - b'^2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2, \text{ d'onde}$$

$$m^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 = (m-1)^2 = \frac{B^2 - b'^2}{B^2 - b^2}, \text{ ed } m - 1 = \frac{\sqrt{(B^2 - b'^2)}}{\sqrt{(B^2 - b^2)}},$$

e quindi $(C) = \frac{a\pi k}{3B}\left(2B + \frac{b^2\sqrt{(B^2-b^2)}}{\sqrt{(B^2-b^2)}+\sqrt{(B^2-b'^2)}} + \frac{b'^2\sqrt{(B^2-b^2)}}{\sqrt{(B^2-b^2)}+\sqrt{(B^2-b'^2)}}\right)$ che moltiplicando e dividendo le frazioni per $\sqrt{(B^2 - b^2)} - \sqrt{(B^2 - b'^2)}$ si riduce alla forma più semplice $(C) = \frac{a\pi k}{3B} \times [B^2 + b^2 + b'^2 + \sqrt{(B^2 - b^2)(B^2 - b'^2)}]$. Se $b' = b$ si avrà $(C) = \frac{a\pi k}{3B}(2B^2 + b^2)$: se oltre questo fassi $a = B$, nel qual caso la Botte è elittico-circolare, si avrà $(C) = \frac{\pi k}{3}(2B^2 + b^2)$.

SOLU-