SOLUZIONE DI DUE PROBLEMI APPARTENENTI ALLA TEORIA DE' MASSIMI E MINIMI

Del Sig. Cav. Sebastiano Canterzani.

Ricevuta li 20 *Novembre* 1814.

I. Data la retta AB (*Fig.* 1) e dato in essa il punto C è stato dimostrato (*), che dividendola in E nella stessa maniera, nella quale trovasi divisa in C, e alzandole da E la perpendicolare indefinita ED, essa riesce la minima di tutte le rette, che per lo punto C si possono inscrivere all'angolo ADB formato da due rette DA, DB, che da qualsivoglia punto D della perpendicolare ED vanno a passare per le due di lei estremità A, B.

In fatti intendendole condotta per C la infinitamente vicina KH, e descritti dal centro C i due archetti circolari Kn, Bm, il decremento di essa da una parte è eguale all'incremento dall'altra parte, e così è nulla la differenza infinitesima della KH dalla AB, perchè essendo generalmente An : mH : : AC . AE : CB . BE (perciocchè generalmente abbiamo An : Kn : : AE : ED, e mH : Bm : : BE : ED, e nK : Bm : : AC : CB) la ragione AC . AE : CB . BE riesce ragione d'eguaglianza appunto quando sia AE : BE : : CB : AC, o vogliam dire quando sia AE = CB, e però anche BE = AC.

II. Apresi quindi la via alla soluzione di varj problemi di massimo, o minimo, i quali senza il presidio dell'esposto teorema porterebbero forse per le vie ordinarie dell'algebra un

(*) Vedi la Parte I del Tomo XIV di questa Società a pag. 167.

lavoro assai laborioso. Io qui supporrò che all'angolo ADB (*Fig.* 1, e 2) debba subentrare una curva; e siccome si avranno da aver in considerazione tre cose, la curva cioè, la retta AB, e il punto C, così a tre problemi principalmente viene a farsi luogo.

1.° *Data la curva, e dato il punto* C, *trovare la retta* AB, *che inscritta alla curva pel punto* C *riesce la massima, o la minima di tutte le inscrivibili pel punto medesimo* C.

2.° *Data la retta* AB, *e dato in essa il punto* C *trovare la curva di dato genere, e di data specie, a cui quella retta rimane inscritta in modo che sia la massima, o la minima di quant' altre rette le si possono inscrivere pel punto* C.

3.° *Data una curva coll' inscritta* AB *trovare in questa il punto* C *tale che faccia riuscirla massima o minima di tutte le rette, che per esso possono a quella curva inscriversi.*

Ovvia essendo la soluzione del primo, come quella che si ottiene col metodo ordinario de' massimi e minimi, mi limito a trattare soltanto il secondo problema, e il terzo. Ma prima convienmi notare alcuna cosa nel semplice caso dell' angolo ADB.

III. Posto che dall' estremo A il più vicino al punto C si prendano le ascisse positive x voltate verso l' altro estremo B, e che le corrispondenti ordinate positive y parallele alla perpendicolare ED sieno voltate verso l' angolo D, chiamisi $AB = a$, $AC = BE = b$, $ED = k$. Sarà (*Fig.* 1) $a - b : k :: x : y$, onde $(a-b)y - kx = 0$ l' equazione alla linea retta AD; e $b : k :: a - x : y$, onde $by + kx - ak = 0$ l' equazione all' altra linea retta BD, e quindi $[(a-b)y - kx][by + kx - ak] = 0$, cioè $yy + \frac{(a-2b)k}{b(a-b)}xy - \frac{k^2}{b(a-b)}xx - \frac{ak}{b}y + \frac{ak^2}{b(a-b)}x = 0$ l' equazione alle due rette AD, BD.

Differenziando quest' equazione risulta

$$dx : dy :: 2y + \frac{(a-2b)k}{b(a-b)}x - \frac{ak}{b} : \frac{2k^2}{b(a-b)}x - \frac{(a-2b)k}{b(a-b)}y - \frac{ak^2}{b(a-b)}$$

dove mettendo $x = 0$, e insieme $y = 0$ si ha $dx : dy$, cioè

$a-b:k::a-b:k$ analogìa che sussiste; mettendo poi $x=a$, e insieme $y=0$ si ha $dx:dy$, cioè $b:k::-b:k$ analogìa che non sussiste, e perchè sussista convien prendere negativamente o dx, o dy. Dunque per avere la ragione dei differenziali dx, dy nei due punti estremi della linea AB bisogna prendere questi differenziali affetti del medesimo segno per l'estremo, in cui è $x=0$, e $y=0$, ma prenderli affetti di segno contrario per l'estremo, in cui è $x=a$, e $y=0$. In fatti i due archi circolari infinitesimi Kn, Bm sono voltati uno in un senso, l'altro in senso contrario; e questa semplice osservazione avrebbe potuto bastare a far comprendere ciò, che per altro non sarà stata cosa inutile d'aver dimostrato.

Di qui apparisce, che qualora il punto C cade nel prolungamento della retta AB, come nella figura 2, nel qual caso i due archi circolari infinitesimi Kn, Bm sono voltati verso la stessa parte, per avere la ragione dei due differenziali dx, dy convien prenderli affetti del medesimo segno tanto per l'uno estremo A, quanto per l'altro B. Qualunque espressione poi, o equazione s'incontri pel caso che abbia luogo l'una delle due figure 1, e 2, è chiaro che per averla pel caso dell'altra non occorre ripigliare il calcolo da capo, ma basta nella ritrovata espressione, o equazione mutare il segno alle potestà dispari di b, che sta in luogo del segmento AC.

La premessa avvertenza egualmente vale, come è evidente, per ogni curva, che passando per li punti A, B abbia per tangenti in questi punti le due rette DA, DB.

IV. Vengan pertanto proposti il genere, e la specie della curva da descriversi per rispondere al Problema secondo (§. II). Due principalmente possono essere i metodi da tenersi per trovare l'equazione di tale curva riferendola alla data retta AB mediante due coordinate ortogonali x, y. L'uno è del seguente tenore.

Suppongasi M (*Fig.* 3) uno de' punti della curva. Sup-

pongasi pure che preso il principio delle ascisse x in A, e condotta da B la BE $= n$ parallela alle ordinate PM $= y$, indi tirata la AE $= e = \sqrt{aa + nn}$, questa AE sia parallela all'asse DQ, al quale mediante le due coordinate ortogonali CQ $= z$, QM $= u$ vien riferito il medesimo punto M di curva nell'equazione la più semplice che possa aversi della curva stessa. Si denoti per r la distanza AD, o GF delle due parallele AE, DQ presa parallelamente alle ordinate y, e per s la distanza del punto D dal principio C delle ascisse CQ $= z$. Poste questa costruzione, e queste determinazioni sarà QM, cioè $u = \frac{ay - nx - ar}{e}$, e CQ, cioè $z = \frac{ny + ax - nr - es}{e}$. Pongansi dunque questi valori di u, e z nell'equazione semplicissima della curva, e risulterà l'equazione della medesima curva riferita alla retta data AB. In questa equazione introducansi le quattro condizioni 1.° che la curva passi pel punto A facendo in essa $x = 0$, e insieme $y = 0$; 2.° che passi pel punto B facendovi $x = e$, e insieme $y = 0$; 3.° che la retta DA sia tangente della curva in A ponendo $x = 0$, e $y = 0$ nel valore di $\frac{dx}{dy}$, e mettendo il risultato $= \frac{a-b}{k}$ nel caso della fig. 1, ma $= \frac{a+b}{k}$ nel caso della fig. 2; 4.° che la retta DB sia tangente in B ponendo $x = a$, $y = 0$ nel valore di $-\frac{dx}{dy}$ nel caso della fig. 1, o nel valore di $\frac{dx}{dy}$ nel caso della fig. 2, mettendo poscia il risultato $= \frac{b}{k}$. Ognuna di queste condizioni avrà somministrata un'equazione tra le quantità a, b, k, ec. date, o arbitrarie, e le n, r, s, ec. incognite; e tutta la difficoltà consisterà nel ricavare da tali equazioni i valori delle dette incognite dati per le cognite, e le arbitrarie, trovati i quali, e sostituitili nell'equazione, che riferisce la curva alla retta AB risulta l'equazione della curva del dato genere, e della data specie, che scioglie il problema.

V. L'altro metodo forse più semplice, e comodo del precedente consiste nel prender l'equazione generale a coefficienti indeterminati, che abbraccia tutte le curve del dato genere, e nell'introdurre in essa le quattro condizioni di già annoverate nel paragrafo precedente, con che verranno determinati tutti que' coefficienti, che in tal guisa possono determinarsi; indi determinarne altri mediante quelle proprietà, o vogliam dire condizioni, che servono a distinguere la data specie dalle altre sottoposte allo stesso genere. Così risulta l'equazione cercata, della curva cioè del dato genere, e della data specie, che scioglie il problema. Quei coefficienti indeterminati, che dopo tutto ciò rimanessero per avventura nell'equazione, sono arbitrarj, e lascian luogo a introdurre nel problema nuove condizioni.

Anche in questo secondo metodo l'angolo delle coordinate x, y si presuppone retto, poichè la terza, e la quarta delle quattro suddette condizioni involve questa supposizione, mercè che gli angoli in m, e n (*Fig.* 1, e 2) sono per costruzione retti.

VI. A chiarezza maggiore gioverà applicare l'uno, e l'altro metodo a qualche esempio nel caso della figura 1. Prendiam dunque le curve del primo genere, o vogliam dire le linee del secondo ordine, che sono le sezioni coniche, e cominciamo dalla parabola.

Esempio I. L'equazione semplicissima di questa curva è $u^2 = cz$, nella quale secondo il primo metodo metto $\frac{ay-nx-ar}{e}$ in luogo di u, e $\frac{ny+ax-nr-es}{e}$ in luogo di z, e ottengo

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2 - 2anxy + n^2x^2 - 2a^2ry + 2anrx + a^2r^2 \\ - cenx - acex + cenr \\ + ce^2s \end{array}\right\} = 0$$

equazione, in cui la medesima parabola viene riferita alla data retta AB. In questa equazione facendo $x = 0$, e insieme $y = 0$, risulta la prima equazione 1.ª $a^2r^2 + cenr + ce^2s = 0$

ponendo poi $x=a$, e insieme $y=0$ risulta la seconda 2.ª $n^2+2nr-ce=0$. Differenziando l'equazione della curva si ricava $\frac{dx}{dy}=\frac{2a^2y-2anx-2a^2r-cen}{2any-2n^2x-2anr+ace}$, dove mettendo $x=0$, $y=0$ risulta $\frac{2a^2r-cen}{-2anr+ace}$, il qual risultato fatto eguale a $\frac{a-b}{k}$ ne dà la terza equazione 3.ª $2a^2nr-a^2cr-2abnr+abce-2a^2kr-cken=0$. Finalmente nel valore di $\frac{-dx}{dy}=\frac{-2a^2y+2anx+2a^2r+cen}{2any-2n^2x-2anr+ace}$ metto $x=a$, $y=0$, e mi risulta $\frac{2a^2n+2a^2r+cen}{-2an^2-2anr+ace}$: metto questo risultato eguale a $\frac{b}{k}$, e ottengo la quarta equazione 4.ª $2a^2kn+2a^2kr+cken+2abn^2+2abnr-abce=0$.

In vigore della prima equazione sparisce dall'equazione della curva l'ultimo termine, onde essa si riduce ad essere

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2-2anxy+n^2x^2-2a^2ry+2anrx \\ -ceny-acex \end{array}\right\}=0$$

e in questa ponendo in luogo di ce il suo valore n^2+2nr somministrato dalla seconda nasce

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2-2anxy+n^2x^2-2a^2ry-an^2x \\ -n^3y \\ -2n^2ry \end{array}\right\}=0.$$

Questo stesso valore di ce posto nella terza, e nella quarta equazione, le trasforma in

$$abn^2-a^2n^2-2a^3kr-kn^3-2kn^2r=0$$
$$2a^2kn+2a^2kr+kn^3+2kn^2r+abn^2=0$$

che sommate insieme danno $n=\frac{2ak}{a-2b}$, e sottratte l'una dall'altra danno $r=-\frac{a^2n^2}{4k(a^2+n^2)}-\frac{n}{2}$. Posto questo valore di r nell'equazione della curva ridotta la riduce ad essere

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2-2anxy+n^2x^2+a^2ny-an^2x \\ +\frac{a^2n^2y}{2k} \end{array}\right\}=0.$$

Resta che in questa si sostituisca ad n il già trovato di lui valore. Il che fatto risulta finalmente $y^2 - \frac{4k}{a-2b}xy + \frac{4k^2}{(a-2b)^2}$ $xx + \frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2}y - \frac{4ak^2}{(a-2b)^2}x = 0$. E questa è l'equazione delle parabole, che sciolgono il problema: dico delle parabole, perchè l'arbitraria k dà luogo a infinite soluzioni del problema, quando non vi si voglia aggiunger qualche condizione di più, come sarebbe, che la parabola dovesse passare per un punto dato oltre A, e B, o avere un dato parametro. Solo non si può prendere $k = 0$, nè $= \infty$, perchè il parametro riuscirebbe zero, o infinito.

Esempio II. Con lo stesso metodo tratto il problema, quando si voglia che la curva sia il circolo. Chiamato $= c$ il raggio, e preso il principio delle ascisse z dal centro, l'equazione semplicissima del circolo è $u^2 + z^2 - c^2 = 0$, la quale fatte le solite sostituzioni in luogo di u, e z si trasforma in

$$\left.\begin{array}{l} y^2 + x^2 - 2ry - \frac{2as}{e}x + r^2 \\ \qquad - \frac{2nsy}{e} \qquad\qquad + \frac{2nrs}{e} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + ss \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - cc \end{array}\right\} = 0.$$

Facendo le quattro supposizioni di sopra esposte si ricavano le quattro equazioni 1.ª $rr + \frac{2nrs}{e} + ss - cc = 0$, 2.ª $s = \frac{e}{2}$, 3.ª $a^2s - abs + ker + kns = 0$, 4.ª $abs - abe - ker - kns = 0$.

Per la prima si riduce l'equazione del circolo ad essere

$$yy + xx - 2ry - \frac{4as}{e}x = 0.$$
$$- \frac{2nby}{e}$$

Sommando insieme le due ultime si cava $s = \frac{be}{a}$: ma per la

seconda si ha $s=\frac{e}{2}$; dunque $\frac{be}{a}=\frac{e}{2}$, onde $b=\frac{a}{2}$, il che mostra, che perchè sia possibile il problema bisogna che il punto C dato nella retta AB la divida in parti eguali. L'unica maniera di rendere non necessaria questa condizione si è di prendere l'arbitraria k infinita, perchè allora sparisce b dalle quattro equazioni, e così arbitrario riesce il segmento $AC=b$.

Tutto ciò si conferma col riflettere, che le due tangenti $DA=\sqrt{(a-b)^2+k^2}$, e $DB=\sqrt{bb+k^2}$ non possono essere eguali, come avviene nel circolo, se o non sia $b=\frac{a}{2}$, o non si prenda $k=\infty$.

Nel caso che si assuma $k=\infty$ la terza, e la quarta delle quattro equazioni diventano una sola equazione, che somministra $r=-\frac{n}{2}$, perchè abbiamo $s=\frac{e}{2}$. Posti questi valori di r, e s nella prima equazione risulta $\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{e^2}{4}-cc=0$ cioè $-\frac{n^2}{4}+\frac{e^2}{4}=cc$; ma $e^2=a^2+n^2$; dunque $cc=\frac{aa}{4}$. Non essendovi stato luogo a determinare n è ciò indizio, che questa linea è arbitraria. L'equazione pertanto dell'unico circolo, che in questo caso scioglie il problema col dare un massimo, è $yy+xx-ax=0$, tale divenendo l'equazione

$$yy+xx-2ry-\frac{2as}{e}x=0,$$

$$-\frac{2ns}{e}y$$

ove in essa si mettano invece di r, s i ritrovati loro valori.

Anche nel caso di $b=\frac{a}{2}$ le due ultime delle quattro equazioni diventano una sola equazione, perchè mettendo nell'altra $\frac{a}{2}$ in luogo di b, ed $\frac{e}{2}$ in luogo di s ottiensi $-\frac{a^2}{4}-kr$

$-\frac{kn}{2}=0$, che offre $r=-\frac{a^2}{4k}-\frac{n}{2}$. Ora mettendo nella prima questo valore di r, e quello di s risulta $\frac{a^4}{16k^2}+\frac{a^2}{4}=cc$: ponendoli poi nell'equazione del circolo questa diviene $yy+xx+\frac{a^2}{2k}y-ax=0$, ed ecco l'equazione, che scioglie il problema col somministrare infiniti (attesa l'arbitraria k) circoli, che hanno la corda AB minima di tutte le altre, che in ciaschedun di loro si possono condurre pel punto, che la divide per metà. Il raggio $c=\frac{a\sqrt{aa+4k^2}}{4k}$ dà a divedere, che l'arbitraria k solo non può assumersi $=0$: che se si assuma $k=\infty$, ritorna il caso precedente.

In nissuno dei due casi è stato luogo a determinare la linea n, donde segue che essa è arbitraria senza per altro che tale arbitrio moltiplichi il numero de' circoli, che sciolgono il problema, poichè il luogo del centro del circolo, e il raggio cambiano bensì al cambiarsi di k nel secondo caso, ma ritenuto lo stesso valor di k al cambiarsi di n non cambia nè il raggio, nè il luogo del centro, come può facilmente dimostrarsi anche nel secondo caso.

Esempio III. Passando ora a far uso del secondo metodo sia la curva da descriversi la ellisse. L'equazione generale a coefficienti indeterminati delle curve del primo genere è

$$Fy^2+Exy+Dx^2+Cy+Bx+A=0.$$

La condizione che posta $x=0$ sia anche $y=0$ determina $A=0$, onde l'equazione diventa

$$Fy^2+Exy+Dx^2+Cy+Bx=0.$$

La condizione che posta $x=a$ torni $y=0$ porta che sia $a^2D+aB=0$, onde $B=-aD$, e l'equazione diventa

$$Fy^2+Exy+Dx^2+Cy-aDx=0.$$

Questa equazione differenziata dà $dx:dy::2Fy+Ex+C:aD-2Dx-Ey$, e però la condizione che posta $x=0$, e $y=0$

sia $\frac{dx}{dy}=\frac{a-b}{k}$ porta $a^2D-abD=kC$, onde $C=\frac{a^2D-abD}{k}$, e quindi l'equazione diventa $Fy^2+Exy+Dx^2+\frac{a(a-b)D}{k}-aDx=0$. Finalmente la condizione che posta $x=a$, e $y=0$ sia $-\frac{dx}{dy}=\frac{b}{k}$ porta $abD=akE+kC$, cioè (mettendo in luogo di C il valore già ritrovato) $2abD-a^2D=akE$, onde $E=-\frac{(a-2b)D}{k}$, e così l'equazione della curva si riduce ad essere $Fy^2-\frac{(a-2b)D}{k}xy+Dx^2+\frac{a(a-b)D}{k}y-aDx=0$.

Ora la proprietà, che distingue l'ellisse dalle altre curve del primo genere, è che disposta l'equazione in modo che il quadrato yy non abbia per coefficiente che l'unità, il coefficiente del quadrato xx sia maggiore del quadrato della metà del coefficiente del rettangolo xy. L'equazione adunque ricavata fin ora diventa l'equazione dell'ellisse subito che sia $\frac{D}{F}>\frac{(a-2b)^2D^2}{4k^2F^2}$, cioè $F>\frac{(a-2b)^2D}{4k^2}$. Mettasi dunque $F=\frac{(a-2b)^2D}{4k^2}+\omega D$, dove ω rappresenti un numero qualunque positivo. Quindi

$$yy-\frac{4(a-2b)k}{(a-2b)^2+4\omega k^2}xy+\frac{4k^2}{(a-2b)^2+4\omega k^2}xx+\frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2+4\omega k^2}y-\frac{4ak^2}{(a-2b)^2+4\omega k^2}x=0$$

è l'equazione dell'ellisse, che passa per li due punti A, B estremi della data retta AB, ed ha in essi per tangenti le rette DA, DB. Attese le arbitrarie k, ω havvi luogo a infinite soluzioni del problema, quando aggiunger non si vogliano altre condizioni. Non si può assumer $k=0$, perchè il diametro dell'ellisse riuscirebbe infinito.

Se l'arbitraria k si supporrà infinita, anche le due tangenti AD, BD riusciranno infinite, e siccome sono allora perpendicolari alla data AB, così è chiaro che questa verrà ad essere uno de' due assi dell'ellisse, cioè l'asse maggiore, se sia $\omega>1$, e il minore, se $\omega<1$; che se sia $\omega=1$, l'ellisse

si converte in un circolo, come mostra l'equazione della curva, che posta $k=\infty$, diventa $yy+\frac{xx}{\omega}-\frac{ax}{\omega}=0$.

Esempio IV. Per ultimo debba la curva essere la iperbola. È manifesto, che introducendo nell'equazione generale a coefficienti indeterminati delle curve del primo genere le quattro solite condizioni risulterà la stessa equazione, che è risultata trattando dell'ellisse, cioè $Fy^2-\frac{(a-2b)D}{k}xy+Dx^2+\frac{a(a-b)D}{k}y-aDx=0$. La proprietà, per cui si distingue l'iperbola dalle altre curve dello stesso genere, è che lasciata l'unità per coefficiente del quadrato yy il coefficiente del xx sia minore del quadrato della metà del coefficiente del rettangolo xy. Dovrà pertanto essere $\frac{D}{F}<\frac{(a-2b)^2D^2}{4k^2F^2}$, cioè $F<\frac{(a-2b)^2D}{4k^2}$, il che si otterrà facendo $F=\frac{(a-2b)^2D}{4k^2}-\omega D$ intendendo per ω un numero qualsivoglia positivo. Da tutto ciò apparisce, che l'equazione dell'iperbola, che passando per li due estremi A, B della retta data AB ha in questi punti per tangenti le DA, DB, è la medesima che è stata trovata per l'ellisse, se non che il numero ω vi è col segno $-$ invece del $+$. Sarà dunque

$$yy-\frac{4(a-2b)k}{(a-2b)^2-4\omega k^2}xy+\frac{4k^2}{(a-2b)^2-4\omega k^2}xx+\frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2-4\omega k^2}y-\frac{4ak^2}{(a-2b)^2-4\omega k^2}x=0$$

dove le due arbitrarie k, ω dan luogo anche qui a infinite soluzioni, avvertendo per altro di non prendere $k=0$, perchè infinito riuscirebbe il diametro della curva. Prendendo $k=\infty$ l'equazione diventa $yy-\frac{xx}{\omega}+\frac{ax}{\omega}=0$, e allora la data AB riesce l'asse trasverso dell'iperbola, la quale è equilatera, se sia $\omega=1$, ottusangola se sia $\omega<1$, acutangola se $\omega>1$.

Se si assumesse $4\omega k^2=a^2$, l'equazione della curva si convertirebbe in

$$yy+\frac{a(a-2b)}{2b(a-b)\sqrt{o}}xy-\frac{a^2}{4ob(a-b)}xx-\frac{a^2}{2b\sqrt{o}}y+\frac{a^3}{4ob(a-b)}x=0,$$

che è il prodotto delle due $y+\frac{ax}{2b\sqrt{o}}-\frac{a^2}{2b\sqrt{o}}=0$, $y-\frac{ax}{2(a-b)\sqrt{o}}=0$, ciascuna alla linea retta. E se si assumesse $4ok^2=(a-2b)^2$, l'equazione della curva diverrebbe $xy-\frac{k}{a-2b}xx-\frac{a(a-b)}{a-2b}y$ $+\frac{ak}{a-2b}x=0$, ovvero $xy-\frac{x^2}{2\sqrt{o}}-\frac{a(a-b)}{a-2b}y+\frac{ax}{2\sqrt{o}}=0$, che è tuttavia all'iperbola.

VII. Trovata che siasi l'equazione, che riferisce la curva del dato genere, e della data specie alla data retta AB, e che la determina a passare per li due di lei estremi A, B, e ad avere in questi per tangenti le rette DA, DB, non sempre sarà possibile definire, mediante l'andamento della curva, e qualche altra circostanza, se la inscritta AB riesca massima, o se riesca minima, o se non riesca nè massima, nè minima. Richiedesi dunque un metodo generale, onde scoprir ciò; e siccome l'essere massima, o minima, o non esser nè l'uno nè l'altro dipende dalla diversa proporzione, che può avere il segmento AC$=b$ a tutta la retta AB$=a$, e dai diversi valori, che dare si possono all'arbitraria k, e alle altre arbitrarie, se altre ve ne sono, così pare che il metodo opportuno possa essere il seguente.

Introducasi nella suddetta equazione in luogo di b quella quantità, che manifesta la relazione, che si vuol che abbia b ad a, come pure il valore, che si dà all'arbitraria k, e a ciascheduna delle altre arbitrarie, quando ve ne son altre. Preparatasi così l'equazione si concepiscano due rette (*Fig.* 4) RS, RS condotte pel dato punto C, che facciano ciascuna con la inscritta AB un angolo picciolissimo una da una parte, l'altra dall'altra parte della stessa AB, e trovisi l'espressione di quella porzione di ognuna, che resta inscritta alla curva. A tale effetto tirata per A la retta AR perpendicolare ad AB, e però parallela alle ordinate MP$=y$,

la quale incontrerà l'una e l'altra RS in qualche punto R, si nomini $a : h$ la ragione del raggio alla tangente dell'angolo ACR, onde sia h una quantità picciolissima, e tale che le più alte potestà di essa possano trascurarsi a fronte delle meno alte. L'ordinata MP tagli in G la retta RS, alla quale dal punto M sia perpendicolare MQ. Chiamando l'ascissa $RQ = f$, e l'ordinata $MQ = q$ sarà $a : h :: AC : AR$, e però $AR = \frac{bh}{a}$, e $CR = \frac{b\sqrt{aa+hh}}{a}$, e mettendo per comodo g invece di $\sqrt{aa+hh}$, $CR = \frac{bg}{a}$, essendo $AP = x$, e quindi $CP = x - b$, sarà $a : g :: x - b : CG = \frac{gx-bg}{a}$; sarà pure $a : h :: x - b : PG = \frac{hx-bh}{a}$, e quindi per una delle due RS si avrà $MG = \frac{ay-hx+bh}{a}$, e per l'altra $MG = \frac{ay+hx-bh}{a}$. Per maggiore speditezza d'ora innanzi si farà il calcolo per una sola delle due RS, giacchè è chiaro, che nell'ultimo risultato col semplice mutar il segno ai termini, che hanno le potestà dispari di h si ottiene l'ultimo risultato per l'altra RS. Tenendo dunque $MG = \frac{ay-hx+bh}{a}$, ed essendo $g : h :: GM : GQ$ si avrà $GQ = \frac{ahy-h^2x+bh^2}{ag}$, e perciò $RQ = CR + CG + GQ = \frac{g^2x+ahy-h^2x+bh^2}{ag} = f$. Essendo poi $g : a :: GM : MQ$ sarà $MQ = \frac{ay-hx+bh}{g} = q$. Ora da queste due equazioni si cava $x = \frac{af-hq}{g}$, e $y = \frac{g^2q-bgh+afh-h^2q}{ag}$, dove in luogo di b convien porre quella quantità, che esprime la relazione, che si suppone avere b ad a.

Questi valori di x, e di y sostituiti che sieno nell'equazione preparata, come di sopra si è indicato, la trasformeranno in un'equazione tra le coordinate ortogonali f, q, nella quale ponendo $q = 0$ avrassi un'equazione in f determinata, e in questa i valori di f somministreranno quei punti,

ne' quali la retta RS incontra la curva. Di questi valori di f quello, che appartiene al punto di curva vicinissimo al punto A, si sottrerrà da quello, che appartiene al punto di curva vicinissimo al punto B, e facilmente si vede, che verrà così ad ottenersi l'espressione d'una inscritta pel dato punto C vicinissima alla data AB da una parte della stessa AB. L'espressione di tale nuova inscritta si paragoni con a, che è l'espressione dell'inscritta data AB. Se in questo paragone si troverà che la nuova inscritta sia maggiore della data AB, vedasi col mutare il segno alla h se anche l'altra nuova inscritta riesce maggiore della AB; oppure se quella prima nuova inscritta si troverà che sia minore della data AB, vedasi col mutare il segno alla h se sia minore anche l'altra. Quando amendue le nuove inscritte riescano maggiori della data AB, è evidente che la data AB è minima, e quando riescano amendue minori di AB è parimenti evidente che la data AB è massima. Che se una delle due nuove inscritte riesca maggiore della data AB, e l'altra riesca minore, la data AB non godrà della proprietà nè di massimo, nè di minimo.

Molto più semplice ancora si renderà il calcolo, se la condizione di $q=0$ non si aspetterà a adempierla nell'equazione tra f, e q, ma anzi si passerà a trovare l'equazione determinata in f dopo d'averla introdotta nelle formole stesse, che debbon sostituirsi ad x, e y, il che fa riuscire queste medesime formole assai semplici, cioè $x=\frac{af}{g}$, e $y=\frac{afh-bgh}{ag}$.

Fin ora si è supposto il punto dato C collocato tra i due estremi della data AB. Se fosse collocato nel prolungamento di essa, altro non s'avrebbe a fare se non se mutare nelle ritrovate espressioni il segno alla potestà dispari di b, come ognun sa, e come si è già altrove avvertito.

VIII. Qui pure per chiarezza maggiore gioverà vedere l'esposto metodo applicato a qualche esempio.

Esempio I. Sia dunque l'equazione della parabola trova-

ta già di sopra (§. VI), in cui la curva viene riferita alla retta AB con la condizione che abbia in A, e B per tangenti la DA, e la DB, cioè

$$yy-\frac{4k}{a-2b}xy+\frac{4k^2}{(a-2b)^2}xx+\frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2}y-\frac{4ak^2}{(a-2b)^2}x=0.$$

Suppongasi il dato punto C collocato nell' estremo A della data AB, onde sia $b=0$. Questa condizione muta l' equazione della curva in quest' altra $yy-\frac{4k}{a}xy+\frac{4k^2}{a^2}xx+4ky-\frac{4k^2}{a}x=0$, nella quale mettendo $\frac{af}{g}$ in luogo di x, e $\frac{fh}{g}$ (giacchè abbiamo $b=0$) in luogo di y ottiensi la seguente equazione in f, $(h^2-4kh+4k^2)f^2+4g(kh-k^2)f=0$, in cui i valori di f sono $f=0$, e $f=\frac{4g(k^2-kh)}{4k^2-4kh+h^2}$. Sottraendo il minore, cioè zero, dall' altro si ha l' espressione di una delle nuove due inscritte $=\frac{4g(k^2-kh)}{4k^2-4kh+h^2}$. Paragonando questa espressione con a, la prima parte della comparazione sarà $4g(k^2-kh)$, e la seconda $4ah^2-4akh+ah^2$. Essendo $g=\sqrt{aa+hh}=a+\frac{h^2}{2a}-\frac{h^4}{8a^3}$ ec. la prima parte diventa $4ak^2+\frac{2k^2h^2}{a}-\frac{k^2h^4}{2a^3}$ ec. $-4akh-\frac{2kh^3}{a}+\frac{kh^5}{2a^3}$ ec. Sottratti da una parte e dall'altra i due termini $4ak^2$, e $-4akh$ la prima parte riesce $\frac{2k^2h^2}{a}-\frac{k^2h^4}{2a^3}$ ec. $-\frac{2kh^3}{a}+\frac{kh^5}{2a^3}$ ec., e la seconda $+ah^2$. Dividendo ora tutti i termini per la quantità sempre positiva $\frac{2h^2}{a}$, e trascurando nel quoziente le potestà di h superiori alla prima, la comparazione viene ad avere nella prima parte k^2-kh, e nella seconda $+\frac{a^2}{2}$. Finalmente trasportando il termine $+\frac{a^2}{2}$ dalla seconda nella prima parte, e il termine $-kh$ dalla prima parte nella secon-

da si riduce la prima parte ad essere $k^2 - \frac{a^2}{2}$, e la seconda ad essere $+kh$.

Qui tre casi possono aver luogo, perchè o è $k^2 > \frac{a^2}{2}$, o è $k^2 < \frac{a^2}{2}$, o è $k^2 = \frac{a^2}{2}$. Nel primo caso attesa la picciolezza di h è chiaro che la prima parte è maggiore della seconda, e a più forte ragione quando si muta il segno ad h; dunque in questo caso la AB si trova in mezzo a due inscritte maggiori di lei, e quindi ella è minima. Nel secondo caso riuscendo negativa la prima parte essa è certamente minore della seconda, che è positiva: che se si muti il segno ad h, onde sia negativa anche la seconda parte, questa attesa la picciolezza di h è al di sotto di zero meno che la prima, e quindi la prima seguita ad esser minore della seconda, per lo che la AB si trova in mezzo a due inscritte amendue di lei minori, e perciò ella è massima. Finalmente nel terzo caso riuscendo zero la prima parte essa è certamente minore della seconda $+kh$; ma mutando il segno ad k la prima parte, che è zero, è maggiore della seconda, che è divenuta $-kh$, cioè negativa: dunque in questo caso la AB si trova in mezzo a due inscritte una minore di lei, l'altra maggiore, e per conseguenza ella non è nè massima, nè minima.

Esempio II. Sia l'equazione

$$yy - \frac{4(a+2b)k}{(a+2b)^2-4\omega k^2}xy + \frac{4k^2}{(a+2b)^2-4\omega k^2}xx + \frac{4a(a+b)k}{(a+2b)^2-4\omega k^2}y - \frac{4ak^2}{(a+2b)^2-4\omega k^2}x = 0$$

che nel caso della fig. 2 riferisce l'iperbola alla retta AB con la condizione che le due rette DA, DB le sieno tangenti nei due estremi A, B della medesima AB. Assumendo il numero $\omega = 1$, e supponendo che la ragione del prolungamento $AC = b$ alla retta $AB = a$ sia quella di $1 : 4$, onde si abbia $b = \frac{a}{4}$, l'equazione diventa $yy - \frac{24ak}{9a^2-16k^2}xy + \frac{16k^2}{9a^2-16k^2}xx + \frac{20a^2k}{9a^2-16k^2}y - \frac{16ak^2}{9a^2-16k^2}x = 0$.

In

In questa per passare all'equazione in f si metta $\frac{af}{g}$ in luogo di x, e $\frac{4fh+gh}{4g}$ in luogo di y perchè siamo nel caso della figura 2, e abbiamo $b=\frac{a}{4}$. Fatto il calcolo, i due valori di f trascurando le potestà di h superiori alla seconda risultano tali, che sottraendo il minore dal maggiore l'espressione d'una delle due nuove inscritte, che così si ottiene, si riduce a $\frac{4akg\sqrt{16a^2k^2-48a^2kh+20k^2h^2+31a^2h^2}}{16a^2k^2-24a^2kh-16k^2h^2+9a^2k^2}$.

Paragono dunque questa espressione con a, e in questo paragone trascuro le sole potestà di h superiori alla terza. Essendo $g=a+\frac{h^2}{2a}$, e $\sqrt{16a^2k^2-48a^2kh+20k^2h^2+31a^2h^2}$ $=4ak-6ah-\frac{5ah^2}{8k}+\frac{5kh^2}{2a}-\frac{15ah^3}{16k^2}+\frac{15k^3}{4a}$, la prima parte della comparazione riesce $16a^2k^2-24a^2kh-\frac{5a^2h^2}{2}+18k^2h^2-\frac{15a^2h^3}{4k}$ $+3kh^3$, e la seconda $16a^2k^2-24a^2kh-16k^2h^2+9a^2h^2$, onde trasportando tutti i termini della seconda parte nella prima questa diventa $-\frac{23a^2h^2}{2}+34k^2h^2-\frac{15a^2h^3}{4k}+3kh^3$ rimanendo zero nella seconda. Dividendo ora per la quantità h^2 positiva, e trasportando nella seconda parte i due termini, che restano affetti da h, la prima parte è $34k^2-\frac{23a^2}{2}$, e la seconda è $\frac{15a^2h}{k}-3kh$.

È chiaro, che la seconda parte mutando il segno ad h, se è positiva, diventa negativa, e viceversa se è negativa, diventa positiva; e però se si assuma l'arbitraria $k=a\sqrt{\frac{23}{68}}$, onde la prima parte della comparazione sia zero, ella è minore della seconda, quando questa è positiva, e maggiore, quando questa col mutar il segno ad h passa ad essere ne-

gativa, così che una delle due nuove inscritte è minore di AB, e l'altra maggiore, e quindi la AB non è nè massima, nè minima: che se si prenda $k > a\sqrt{\frac{23}{68}}$ la prima parte della comparazione è positiva, e però maggiore della seconda non solo quando questa è negativa, ma attesa la piccolezza di h ancora quando è positiva; onde in questo caso l'una e l'altra delle due nuove inscritte è maggiore della AB, e quindi AB è minima: finalmente se si prenda $k < a\sqrt{\frac{23}{68}}$, la prima parte della comparazione è negativa, e minore certamente della seconda, quando questa è positiva, e minore pure di essa quando è ancor essa negativa, e ciò attesa la picciolezza di h; in questo caso pertanto la data AB è massima.

IX. Ma abbastanza, se non anche soverchiamente ci siam trattenuti nel secondo dei tre problemi enunciati nel §. II. Veniamo al terzo. E qui basterà per evitare ogni prolissità indicare le semplici costruzioni lasciando da parte i calcoli, giacchè questi mediante le cose notate nel problema precedente potranno sempre dall' industre analista eseguirsi.

Dunque *data l'equazione d'una curva, e data la posizione d'una inscritta* AB *debba trovarsi in questa inscritta* (Fig. 1, e 2) *il punto* C *tale, che tra tutte le rette, che per esso si possono alla curva inscrivere riesca la data* AB *massima, o minima*.

Soluzione. Dalla data equazione della curva, e dalla data posizione della inscritta AB ricavisi la posizione delle due tangenti AD, BD, che appartengono ai due punti estremi dell'inscritta AB. Conducansi queste tangenti, e dal punto del loro concorso D menisi la DE perpendicolare alla AB. Verrà così la AB ad essere divisa in due segmenti AE, EB. Notisi per ultimo nella stessa AB il punto C, che la divide nella stessa maniera, nella quale trovasi divisa in E. È chiaro pel Teorema (§. I.) che il punto C scioglie il Problema.

Esempio. La proposta curva (*Fig.* 5) sia l'epicicloide semplicissima LABR riferita all'asse LR mediante le coordinate ortogonali x, y nell'equazione $y^4 + 2x^2y^2 - 2cxy^2 - c^2y^2 + x^4 - 2cx^3 = 0$, nella quale $2c$ esprime l'asse LR, il cui punto L è il principio delle ascisse x. La data posizione dell'inscritta data AB sia tale, che l'estremo A corrisponda all'ascissa negativa $LI = -\frac{c}{8}$, e l'altro estremo B all'ascissa positiva $LS = \frac{5c}{4}$. L'equazione della curva porta che la sottangente IG positiva per l'estremo A sia $= \frac{(23 + 16\sqrt{2})c}{40 + 32\sqrt{2}}$, e la ST negativa per l'estremo B sia $= \frac{(48 + 3\sqrt{6})c}{8 - 12\sqrt{6}}$. Trovati questi due punti G, T tirinsi le due tangenti GA, TB, e dal punto D del loro concorso conducasi su l'inscritta AB la perpendicolare DE. Finalmente al segmento AE prendasi eguale dall'altra parte dell'inscritta medesima il segmento BC. Il citato Teorema non lascia dubitare che non sia C il punto cercato.

Qualora non incresca al paziente calcolatore d'ingolfarsi in un calcolo, che per lo più sarà assai prolisso, potrà egli anche trovare il valore del segmento $AE = BC$ dato per i parametri della curva proposta, riflettendo che qualunque ella siasi, abbiamo sempre $AE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2AB}$ da prendersi positivamente, se il punto E cade tra A, e B, e negativamente, se E cade di qua da A; e $BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2AB}$ da prendersi positivamente nel primo caso, e negativamente, se E cade oltre B. Quanto poi ai tre quadrati $\overline{AB}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{BD}^2$, il primo si ottiene sommando il quadrato della differenza tra le due ascisse corrispondenti ai punti A, B con quello della differenza tra le due ordinate, come ognuno sa; e trovato che siasi questo quadrato $\overline{AB}^2$, e messolo eguale ad aa (volendo chiamare $= a$ la inscritta AB) si avrà la relazione tra a,

e i suddetti parametri della curva. Gli altri due quadrati si otterranno intendendo condotta da D all'asse la perpendicolare DQ, la quale sarà $= \frac{AI \cdot BS \cdot GT}{AI \cdot ST + GI \cdot BS}$, e taglierà l'asse in maniera che si avrà $GQ = \frac{DQ \cdot GI}{AI}$, e $QT = \frac{DQ \cdot ST}{BS}$; trovate le quali quantità è pure trovato $\overline{AD}^2 = (GQ - GI)^2 + (DQ - AI)^2$, e $\overline{BD}^2 = (TQ - ST)^2 + (DQ - BS)^2$.

Per conoscere poi se la AB sia massima, o minima delle inscrivibili pel ritrovato punto C, o se non sia nè l'uno, nè l'altro, si potrà usare un metodo analogo a quello, che è stato proposto di sopra (§. VII).

Se la curva proposta fosse una sezion conica, speditissima sarebbe la costruzione, che conduce alla soluzione del problema. In fatti sia proposta la parabola AVB (*Fig.* 6) con la inscritta AB. Inscrivasi parallela alla AB una qualunque altra FS, e l'una e l'altra inscritta dividasi per metà, la prima in O, l'altra in Q. Per O, e Q tirisi la retta OQ, che incontrerà la curva in un punto V, e sarà un diametro, che avrà V per vertice. Prolunghisi questo diametro oltre il vertice in D, così che sia VD = VO. È noto cadere appunto in D il concorso delle tangenti della curva nei punti A, B. Dunque da D calisi alla AB la perpendicolare DE. Ecco trovato il punto E, trovato il quale è insieme trovato C.

Venga mo proposta la ellisse AVB (*Fig.* 7) o la iperbola AVB (*Fig.* 8) con la inscritta AB. Se non vi è notato il centro K, questo si trovi mediante l'intersecazione di due diametri, ciascun de' quali si conduce come si è poco fa condotto quello della parabola. Dal centro K sia la KO, che divida per metà la AB, e tagli la curva in V; indi facciasi KO : KV :: KV : KD. È noto essere D il punto di concorso delle tangenti ai due punti di curva A, B. È dunque D il punto, da cui deesi calare alla AB la perpendicolare DE.

Se l'inscritta giacesse tra le due opposte iperbole, come nella fig. 9, allora non potendo più il concorso delle tangenti

ne' due punti A, B cadere in un diametro cognito, bisogna, se non fosse già notato, trovar il centro K mediante il concorso di due diametri, come si è detto di sopra: indi condotte da K ai punti A, B le rette KA, KB, che prolungate ciascuna entro la propria iperbola sono due diametri, tirar comunque due parallele M*m*, M*m* equidistanti da KA una da una parte, l'altra dall'altra parte della stessa KA, ed altre due N*n*, N*n* equidistanti da KB; poichè unendo i due punti M, M, e gli altri due N, N, dove esse incontrano la rispettiva iperbola, la MM sarà una doppia ordinata al diametro KA, e la NN una doppia ordinata al diametro KB. Per lo che condotta pel vertice A del diametro KA la AD parallela alla doppia ordinata MM, e pel vertice B del diametro KB la BD parallela alla doppia ordinata NN saranno questa AD, e questa BD le tangenti delle due opposte iperbole nei punti estremi della data inscritta A, B. Il punto pertanto D, dove queste due tangenti s'incontrano, è quello, da cui si dee condur alla inscritta AB la perpendicolare, che va a segnare in essa il punto E, il qual serve a trovare il punto cercato C.