SULL' URTO DEI FLUIDI

MEMORIA

Del Signor Vincenzo Brunacci.

Ricevuta li 19 *Agosto* 1814.

Il Sig. Cav. *Morosi* celebre inventore di macchine e congegni meccanici si avvisò di aumentare l'urto di una vena fluida su di una lastra, col circondare questa di un orlo, congetturando che nel trattenere che questo faceva l'acqua, la quale per ogni banda sfuggiva dopo avere urtato, dovea essa in questo contrasto comunicare un'altra spinta alla lastra medesima; egli poi ne inferiva di qui che utile doveva essere il contornare di un bordo le palette, o ali delle rote idrauliche, in quanto che la stessa corrente dell'acqua, le avrebbe mosse o più velocemente, o caricate di maggior peso. Gli sperimenti confermarono le di lui congetture, ed ei ne diè sommaria contezza al Reale Istituto Italiano, del quale fa parte.

Questa cosa la mi è paruta tanto importante, che io mi sono determinato ad assoggettarla ad esame, rintracciandone la ragione nelle stesse leggi del moto dei fluidi. La sola osservazione ed esperienza, può in certe favorevoli circostanze scoprire un fenomeno, e da questo si possono congetturare alcune forze naturali; ma la scoperta di tutti gli altri fenomeni, che hanno relazione con quello, la di loro valutazione, e la determinazione delle circostanze più favorevoli a produrli, non si possono ottenere che coll'ajuto delle geometrie; così la pensò il divino *Neutono*, quando scrisse *a phoenomenis motuum investigemus vires naturae, et ab hisdem viribus phoenomena reliqua*.

§. 1. Per riuscire in quest'indagine io farò uso della dottrina che sull'urto dei fluidi ci dette l'immortale *La-Grange negli atti dell'Accademia di Turino del* 1784; non che questa dottrina non sia soggetta ad alcune difficoltà, come lo sono, e lo saranno sempre tutte quelle, le quali i Geometri hanno date su qualunque argomento, che al moversi dei fluidi si riferisca, ma la mi è sembrata la più sicura e la più conforme pel computo dell'effetto preso di mira.

Una colonna di fluido EF *fig.* 1, la quale per un momento fingiamo solo dotata di due dimensioni, cioè, della lunghezza EF, e della larghezza AE, si muova lungo la linea AB; a questa linea AB con un angolo qualunque ne sia unita un'altra BC, la quale obblighi la colonna EF a piegare e cangiare direzione. Nella piegatura questa colonna fluida descriverà un arco MN, e nel triangolo mistilineo MBN, il fluido resterà come stagnante; la qual cosa non è, per vero dire, che un'ipotesi, ma il mentovato Geometra pensa, che essa sia molto vicina alla verità, e per tale possa prendersi nell'attuale ricerca; ecco dunque che il fluido si muoverà entro un canale AMNC, la di cui porzione MN sarà curvilinea, e dalla forza centrifuga del fluido nel correre entro questa curva, ne verrà una pressione o spinta sul fondo del canale medesimo.

§. 2. Siccome nulla accelera o ritarda la velocità dell' acqua nel canale, ne segue che la sua larghezza sarà per tutto costante. Sia dunque b questa larghezza; sia a l'altezza dovuta alla velocità dell'acqua in una qualunque sezione pq; sia r il raggio di curvatura di qualunque punto p della curva MN; sia pq una linea fluida perpendicolare nel punto p all'arco MN: ora questa linea di fluido in virtù della sua forza centrifuga, eserciterà contro la curva MN, e precisamente nel punto p, una pressione eguale a $\frac{2a}{r}b$, essendo questo $\frac{2a}{r}$ l'espressione della forza centrifuga di una molecola qualunque. Risguardandosi poi il fluido MBN come stagnante, bisognerà

che

che la pressione su tutti i punti della superficie sua MN sia la stessa, e che perciò $\frac{2a}{r}b$ sia una quantità costante; sarà dunque anco costante il valore di r, e quindi MN sarà un arco di cerchio.

§. 3. La pressione fatta su ciascun punto p della superficie MN del fluido stagnante MBN si comunica a ciascun punto delle linee MB, BN, e giusta i principj dell'Idrostatica, ciascun punto di queste è premuto perpendicolarmente da una forza eguale a $\frac{2a}{r}b$; dunque tutta la forza perpendicolare ad MB, da cui è premuta la linea stessa sarà $\frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{MB}$; e quella perpendicolare a BN, e da cui la stessa BN è premuta, sarà $\frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{BN}$.

Ora prolungato il lato CB (*Fig.* 2) in H sia l'angolo $\mathrm{ABH} = \omega$: rappresentiamo con LF perpendicolare a BN la forza $\frac{2a}{r}b \times \mathrm{BN}$, e condotta FG parallela, ed LG perpendicolare ad AB, onde si abbia il triangolo rettangolo LFG, si avrà

$$\mathrm{LF} = \frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{BN};$$

$$\mathrm{LG} = \frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{BN}\,.\,\cos.\,\omega;$$

$$\mathrm{FG} = \frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{BN}\,.\,\mathrm{sen}.\,\omega;$$

§. 4. Supponendo che la linea BC sia tanto lunga, che il fluido allorchè l'abbandona, corra con direzione a lei parallela, l'arco di cerchio MN sarà toccato allora nei punti M, N dalle due rette AB, BC unite in B; e sarà BN = BM; di più conducendo nei punti M, N due perpendicolari alle rette AB, BC, il loro punto Q d'incontro sarà il centro dell'arco MN, e sarà MQ il raggio di curvatura, che rappresentato abbiamo con r; l'angolo poi MQN sarà eguale ad MBH; cioè, ad ω; avremo pertanto $\frac{\mathrm{MB}}{r} = \frac{\mathrm{NB}}{r} = \mathrm{tang}.\,\frac{\omega}{2}$.

La forza adunque che spingerà la linea AB in una direzione ad essa normale sarà $2ab\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega}{2}$;

La forza che spingerà la linea BC in una direzione parimente ad essa perpendicolare sarà ancor essa $2ab\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega}{2}$;

La forza che premerà questa stessa linea BC in una direzione perpendicolare ad AB, sarà $2ab\,.\,\cos.\,\omega\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega}{2}$;

La forza infine che premerà questa medesima linea in una direzioue parallela ad AB, sarà

$$2ab\,.\,\text{sen.}\,\omega\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega}{2}\,.$$

§. 5. Chiamando ψ la somma delle forze le quali spingono le due linee AB, BC unite insieme, nella direzione perpendicolare ad AB, sarà $\psi = 2ab\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega}{2} + 2ab\,.\,\cos.\,\omega\,\text{tang.}\,\frac{\omega}{2}$, che ridotta diviene

$$\psi = 2ab\,(1 + \cos.\,\omega)\,\text{tang.}\,\frac{\omega}{2}\,;$$

$$\psi = 2ab\left\{\overline{\cos.\frac{\omega}{2}}^{\,2} + \overline{\text{sen.}\frac{\omega}{2}}^{\,2} + \overline{\cos.\frac{\omega}{2}}^{\,2} - \overline{\text{sen.}\frac{\omega}{2}}^{\,2}\right\}\frac{\text{sen.}\,\frac{\omega}{2}}{\cos.\,\frac{\omega}{2}}\,;$$

$$\psi = 2ab\,.\,2\cos.\frac{\omega}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\omega}{2}\,;$$

$$\psi = 2ab\,.\,\text{sen.}\,\omega\,.$$

Il valore poi di ω, il quale rende la quantità ψ massima sarà $\omega = 90^\circ$, e si avrà allora $\psi = 2ab$; dovrà dunque BN esser perpendicolare ad MB affinchè la somma ψ di quei sforzi sia massima; conseguenza rimarcabile in quanto che allora è nulla quella forza, la quale si esercita sopra BN in direzione normale a BM.

§. 6. Supponiamo ora che la vena fluida dopo essersi ripiegata in MN *fig.* 3, abbandoni la linea BN facendo con essa prolungata in L un angolo LNF: anco in questa supposizione troviamo la spinta che le due linee AB, BN sopportano in direzione perpendicolare ad MB.

Prolungata BN in H, ed NF in D sia DBH $=\omega$, DBN $=180^\circ-\omega$; LNF $=\phi$; BDN $=\omega-\phi$; e sarà

$$BD = DN \,.\, \frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,(180^\circ-\omega)};$$

$$BN = DN \,.\, \frac{\text{sen.}\,(\omega-\phi)}{\text{sen.}\,(180^\circ-\omega)};$$

nei punti M, N condotti i raggi MQ, NQ dell'arco MN, ed unito il punto D col centro Q sarà DQM $=\frac{\omega-\phi}{2}$; dunque

$$DN = r \,.\, \text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2} = DM; \text{ e quindi } DB = r\,\frac{\text{sen.}\,\phi\ \text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2}}{\text{sen.}\,(180^\circ-\omega)};$$

$$BN = r\,\frac{\text{sen.}\,(\omega-\phi)}{\text{sen.}\,(180^\circ-\omega)}\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2};$$

È poi BN premuto perpendicolarmente da una forza eguale a BN $.\frac{2a}{r}b$; e questa decomposta in due, che una normale, l'altra a DB parallela, si avrà $\frac{2a}{r}b\,.\,\text{BN}\,.\,\text{cos.}\,\omega$ per la forza normale alla DB; e postovi il valore di BN, sarà una tale forza

$$\frac{2a}{r}br\,.\,\frac{\text{sen.}\,(\omega-\phi)}{\text{sen.}\,(180^\circ-\omega)}\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2}\,.\,\text{cos.}\,\omega;$$

tutto lo sforzo adunque che fa la vena fluida EF per spingere le due linee AB, BN in una direzione ad AB normale, sarà

$$\frac{2a}{r}b\,.\,\text{MD}+\frac{2a}{r}b\,.\,\text{DB}+\frac{2a}{r}b\,.\,\text{BN}\,.\,\text{cos.}\,\omega;$$

e fatte le opportune sostituzioni, e riduzioni, sarà questa forza, la quale indicheremo per ψ,

$$\psi = 2ab\left\{1+\frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega}+\frac{\text{sen.}\,(\omega-\phi)}{\text{sen.}\,\omega}\,\text{cos.}\,\omega\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2};$$

$$\psi = 2ab\left\{1+\frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega}+\frac{\text{sen.}\,\omega\,.\,\text{cos.}\,\phi-\text{sen.}\,\phi\ \text{cos.}\,\omega}{\text{sen.}\,\omega}\,\text{cos.}\,\omega\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2};$$

$$\psi = 2ab\left\{1+\frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega}+\text{cos.}\,\phi\ \text{cos.}\,\omega-\frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega}\,.\,\text{cos.}\,\omega^2\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2};$$

$$\psi = 2ab\left\{1+\text{sen.}\,\phi\,.\,\text{sen.}\,\omega+\text{cos.}\,\omega\,.\,\text{cos.}\,\phi\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2};$$

$\psi = 2ab\left\{1 + \cos.(\omega - \phi)\right\} \text{tang.} \frac{\omega - \phi}{2}$;

$\psi = 2ab \text{ sen.}(\omega - \phi)$;

onde poi questa forza ψ sia massima, dovrà essere $\omega - \phi = 90°$, e sarà allora $\psi = 2ab$.

§. 7. Una colonna fluida EO *fig.* 4, come quella immaginata al §. 1 vada a battere sulla linea CC′, alle cui estremità siano le linee C′D′, CD unite ad essa con qualunque angolo. Cerchiamo lo sforzo che fa l' acqua su questo sistema di linee in una direzione perpendicolare a CC′, supponendo che l' urto si faccia in una tal direzione, cioè che EO sia normale a CC′.

La colonna EO all' avvicinarsi alla linea su di cui ha da urtare, si dividerà in due rami OF, OF′ e ciascuno di questi rami, dopo essersi ripiegato, anderà scorrendo l' uno da una banda, l' altro dalla opposta, lungo il piano CC′. Verso il punto B centro dell' urto, cui corrisponde l' asse della colonna urtante, si formerà un ridosso triangolare NON′ di fluido, il quale si potrà sensibilmente considerare stagnante. I due rami poi della colonna fluida OFH, OF′H′ incontrando le linee CD, C′D′ da esse saranno obbligati a ripiegarsi per potere scappar via, lasciando negli angoli C, C′ due masse di fluido stagnanti come nel caso del §. 2. Non faccio una descrizione più minuta delle circostanze fisiche dell' urto, perchè è facile ad immaginarsele.

Ora indicando con $2b$ la larghezza della colonna fluida urtante, ognuno dei due rami in cui si divide avrà per larghezza b, ed a tenore di ciò che si è dimostrato al §. 4, lo sforzo o pressione sopra NB nella direzione a lei normale sarà

$$2ab \text{ sen. } 90° \text{ tang. } \frac{90°}{2} = 2ab;$$

egualmente la spinta, o la pressione sopra BN′ sarà $2ab$; onde se non ci fossero le due linee CD, C′D′ l' impulsione sopra il piano CC′ sarebbe $2a \,.\, 2b$; cioè eguale al peso di una colonna di fluido avente per base l' area $2b$ della sezione della vena urtante, e per altezza il doppio di quella dovuta alla velocità dell'acqua urtante.

§. 8. Per ciò che spetta all'impulsione del fluido sulle linee componenti gli angoli C, C'. Se questi angoli sono tra loro eguali ed eguali ciascuno a $180 - \omega$, e se di più si suppone che le linee CD, C'D' siano di tale lunghezza che il fluido nell'abbandonarli corra con direzioni loro parallele, sarà $2 \,.\, 2ab$ sen. ω la somma delle impulsioni del fluido fatte sulle linee D'C', C'N', DC, CN in una direzione parallela ad OB; e questa quantità esprimerà l'aumento dell'urto, che si è ottenuto aggiungendo alla linea CC' le due linee CD, C'D', sulle quali, il fluido che scappava dopo avere urtato la semplice linea CC', è obbligato a battere. Questo aumento poi dell'urto sarà massimo, quando $\omega = 90°$, ed allora avrà per misura $2a \,.\, 2b$, cioè la stessa misura che ha l'urto sopra CC'. Dunque coll'aggiunta delle due linee CD, C'D' poste ad angolo retto nei punti C, C' abbiamo potuto rendere doppio l'effetto dell'urto della nostra vena fluida.

§. 9. Se le due linee aggiunte CD, C'D' non avessero tale estensione che il fluido, dopo averle abbandonate, potesse correre con direzioni parallele alle medesime, ma corresse con tali direzioni, che facessero con quelle linee un angolo ϕ, allora da ciò che si è dimostrato al §. 6 si ricava che l'aumento dell'urto originato da queste linee CD, C'D', sarebbe $2 \,.\, 2ab \,.\, \text{sen.}(\omega - \phi)$, e questo sarebbe massimo quando $\omega - \phi = 90°$, e diverrebbe, come al §. ant., $2a \,.\, 2b$; così se le linee CD, C'D' fossero mobili attorno degli angoli C, C', per avere il massimo aumento d'impulsione converrebbe portarle ad angolo retto colla retta CC', quando in questa situazione il fluido dopo averle abbandonate, tornasse indietro con direzione parallela ad OB; e ciò non succedendo converrebbe rendere gli angoli in C, C' acuti, cioè ω ottuso, ed in modo che diminuito di ϕ, vale a dire, dell'angolo che fa il fluido con queste rette, si abbia $\omega - \phi = 90°$; la quale cosa in ambidue i casi si riduce a fare in guisa, che *i due rami* *della vena fluida si ripieghino indietro con direzioni normali a* CC'.

§. 10. Il caso contemplato di una vena fluida piana, la quale, cioè, non abbia altro che due dimensioni (§. 1), è puramente immaginario; ma supponiamo che la colonna fluida abbia la figura di un parallelepipedo rettangolo, e che scorrendo essa tra due piani, di cui fan parte le facce opposte del parallelepipedo, sia obbligata a conservare sempre la stessa grossezza, che è la distanza di quei due piani; allora se questi fanno angolo retto con i due piani AB, BC *fig.* 1, formanti il fondo del canale, o con i tre piani CC', CD, C'D' *fig.* 4, allora dico, tutto ciò che abbiamo detto nei §§. precedenti, è egualmente vero per questo caso concreto, e legittime sono le tirate conseguenze, purchè alle parole *linee* CD, C'D', CC' si sostituiscano le parole *piani* CD, C'D', CC'; dunque l'effetto di una cotal vena urtante ad angolo retto sur un piano tanto esteso, che essa dopo l'urto scappi con direzioni parallele al piano stesso, si può accrescere fino a rendere doppio, coll'alzare alle estremità del piano urtato un orlo, il quale obblighi il fluido a ripiegarsi indietro con direzioni normali al medesimo piano urtato.

§. 11. Veniamo a parlare dell'urto di una vena cilindrica, la quale batta un piano CC' con direzione ad esso normale. Il fenomeno seguirà come ci mostra la figura 5. La colonna EO nell'avvicinarsi al piano anderà allargandosi da ogni banda, ed essendo da ogni banda eguali le circostanze, essa formerà un solido di rivoluzione ACC'D, il cui asse BO sarà lo stesso asse EO della colonna fluida cilindrica. L'acqua poi che forma la superficie della conoide, all'incontro del piano anderà ripiegandosi, e se il piano è abbastanza esteso, correrà su di esso con direzioni a lui parallele, se no lo abbandonerà partendo con direzioni ad esso inclinate. Nell' interno del solido di rivoluzione acqueo, vi si troverà un imbuto conoideo NON', e l'acqua che lo compone giusta l'ipotesi assunta (§. 1) si potrà risguardare come stagnante.

Se per l'asse EOB si conduce un piano, la sezione di questo con la vena fluida, porrà sotto gli occhi la figura piana, dalla rivoluzione della quale nascerà quel solido di rivoluzione del quale si parla; così il triangolo mistilineo OBN produrrà l'imbuto conoideo; la figura AOC produrrà il canale conoideo nel quale corre il fluido; la linea CB il piano circolare su cui si fa l'urto, ec.

Ora preso un punto qualunque G nell'asse OB si conduca MM' parallela a CC', e che incontri le curve ON, ON' in M, M'. Nei medesimi punti si conducano le rette MP, M'P', le quali siano perpendicolari alle curve OMN, OM'N' ed incontrino in P, P' le curve esterne APS, DP'S'. Nella rotazione attorno dell'asse OB, queste descriveranno un tronco di cono, la cui superficie sarà la sezione del canale conoideo pel quale scorre il fluido.

§. 12. Queste cose premesse facciamo $BG = x$, $GM = y$; π la semicirconferenza di un cerchio che ha per raggio l'unità; sarà allora $2\pi y$ la circonferenza del cerchio descritta col raggio MG. Ora indichiamo per z quella funzione dell'y per la quale moltiplicando $2\pi y$, si ha la superficie del tronco di cono descritto da PM. Il valore della z è facile a trovarsi, ma non ci fa di bisogno: sarà dunque $2\pi yz$ l'area della sezione del canale conoideo per cui corre l'acqua.

Questo $2\pi yz$ esprimerà anco il velo fluido che passa per la sezione del canale conoideo. Non gli considero alcuna grossezza, perchè questa dimensione sparirebbe dal computo. Rappresentando poi con r il raggio di curvatura della curva OMN corrispondente al punto M, e con a l'altezza dovuta alla velocità dell'acqua scorrente nel canal conoideo, sarà $\frac{2a}{r} \cdot \frac{2\pi yz}{2\pi y} = \frac{2a}{r} z$ l'espressione della forza centrifuga su ciascun punto M della circonferenza del cerchio da MG descritto; ma la celerità del fluido dovendo essere la stessa in qualunque luogo del canale, ed in qualunque sezione, giacchè non vi è alcuna causa, la quale inclini a far crescere o scemare questa velocità, sarà dunque l'area $2\pi yz$ una quantità costante qualunque sia y, ed eguale alla sezione della vena cilindrica. Sia dunque B l'area di questa sezione, e sarà $2\pi yz = B$, e quindi $z = \frac{B}{2\pi y}$.

L'espressione allora della forza centrifuga su ciascun punto M della superficie dell'imbuto conoideo sarà $\frac{2aB}{2\pi} \cdot \frac{1}{yr}$, essendo r, come si è detto, il raggio osculatore corrispondente all'ordinata y.

§. 13. Siccome l'acqua la quale forma l'imbuto conoideo NON' si suppone stagnante, perciò la pressione qui sopra determinata dovrà essere dappertutto la stessa. Rappresentiamo ora per p questa pressione costante, ed in ciascun punto della superficie dell'imbuto conoideo, dovrà essere $\frac{2aB}{2\pi} \cdot \frac{1}{ry} = p$. Questa equazione ci dichiara che la curva OMN debbe avere in qualunque punto M il raggio osculatore in ragione inversa dell'ordinata MG; ed ecco in questa guisa ridotta l'indagine alla soluzione di un problema Geometrico.

§. 14. Essendo $r = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$ cercasi la curva che avrà per equazione

$$(1) \ldots \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = my$$ essendo m una costante data.

Moltiplicata l'equazione (1) per $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, ovvero per dy, ed integrata si ha

$$(2) \ldots \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = C - m\frac{y^2}{2},$$

essendo C la costante arbitraria aggiunta integrando.

Per determinare questa costante, osservo che quando $y = 0$, cioè quando il punto considerato è in O, la curva tocca l'asse OB, ed allora $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$; con questa condizione

trovo

trovo $C = 1$. Si avrà dunque

$$(3) \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = 1 - \frac{m}{2} y^2 .$$

§. 15. Da questa equazione (3) si può intanto trovare il valore dell'impulsione della vena sul piano CC'. Infatti, posto che il piano circolare su cui si fa l'urto, sia così esteso che l'acqua lo abbandoni, dopo avere urtato, con direzioni parallele ad esso, se facciamo $BN = y$, si ha allora nel punto N

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = 0, \text{ e perciò } 1 - \frac{m}{2} y^2 = 0;$$

e di qui si ricava, facendo $m = \frac{2\pi p}{2aB}$, $\frac{2\pi y^2}{2} p = 2aB$; ma $\frac{2\pi y^2}{2}$ esprime l'area del cerchio che ha per raggio BN, e p esprime la pressione che soffre ciascun dei suoi punti, dunque $\frac{2\pi y^2}{2} p$ esprimerà la pressione totale, che sopporta il piano CC' per causa dell'urto della colonna fluida; dunque questa pressione o quest'urto sarà eguale *al peso di un cilindro fluido, il quale abbia per base la base* B *della colonna urtante, e per altezza il doppio di quella dovuta alla velocità dell'acqua, colla quale si fa l'urto* (a).

§. 16. Se il piano circolare su del quale si fa l'urto non è tanto esteso, che il fluido possa scappare con direzioni ad esso parallele, allora chiamando ϕ l'angolo che fanno queste direzioni col piano urtato, sarà BN l'ordinata della curva OMN a quel punto N, ove la tangente fa con l'asse un angolo $= 90° - \phi$; avremo dunque

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = \cos.(90° - \phi) = \text{sen.}\,\phi, \text{ e di qui}$$

(a) Nel Tomo VIII dei Commentari dell'Accademia di Pietroburgo dell'anno 1736, il celebre *Daniele Bernulli* aveva per questo caso trovato la stessa misura dell'urto, deducendola però da una dottrina differente da quella del Signor *La-Grange*.

$$\text{sen.}\,\phi = 1 - \frac{m}{2}y^2,$$

$$\frac{2\pi y^2}{2}p = 2a\text{B}(1 - \text{sen.}\,\phi);$$

allora, cioè, la misura dell'urto sarà *il peso di quel doppio cilindro*, come alla fine del §. precedente, *moltiplicato però per la differenza tra il seno tutto, ed il seno dell'angolo che le direzioni del fluido fanno nello scappare col piano urtato*.

§. 17. Col ritrovamento della formola qui sopra riferita, il Sig. *La-Grange* messe in qualche modo d'accordo le sperienze dei fisici sull'urto di una vena fluida; alcuni, in fatti, come il *Mariotte*, il *Gravesand*, l'*Eulero*, ec. aveano stabilito colla teorica, e confermato coll'esperienze, che una tale impulsione aver dovea per misura il peso di una colonna di fluido, che avesse per base l'area della sezione della vena fluida urtante, e per altezza quella dovuta alla velocità, con cui il fluido fa l'urto; altri come il *Bernulli Daniele*, il *Krafft*, il *Michelotti*, il *Bossut*, ec. volevano una misura doppia di questa; il *D' Alambert* infine ne voleva una poco minore di quest' ultima. Il Sig. *Zuliani nella prima parte del Tomo III degli atti dell' Accademia di Padova del* 1794, dà contezza di tutto ciò che a questo proposito, per ciò che spetta alle sperienze, si era ritrovato, onde io a quella memoria rimando i miei lettori. Qui soltanto mi basta di osservare che nella formola del Sig. *La-Grange* sono comprese tutte quelle misure date per l'impulsione di una vena fluida. La circostanza che questo Geometra ha messo in computo, è la direzione colla quale i filetti fluidi abbandonano il piano dopo d'averlo urtato; e siccome questa circostanza nasce dall'altra dell'estensione del piano su del quale si fa l'urto, perciò possiamo dire che nella formola Grangiana è in certo modo contenuto l'elemento dell'estensione del piano; dico in certo modo, perchè sebbene s'intenda come dalla estensione del piano su cui si fa l'urto, dipenda la direzione colla quale i filetti fluidi abbandonano il piano, pure ci è ignota la legge di questa dipendenza, e non si saprebbe fare uso della formola di *La-Grange*, se invece di esser data quella direzione, data fosse la grandezza del piano mentovato (*a*).

Questo sullodato Sig. *Zuliani* riferisce nella memoria sopracitata una serie di sperienze, da lui fatte colla mira di stabilire, quanto ha che fare l'estensione del piano urtato nella misura dell'urto, e così esse e la formola del Sig. *La-Grange* vengono a confermarsi reciprocamente. Perspicacia nell'instituire l'esperienze, diligenza nell'eseguirle, tutto si trova in queste, ma si resta col desiderio di vederle ripetute più in grande, onde poterne ricavare più sicure conseguenze; non ostante finchè non se ne abbiano delle migliori, giova valersi di quelle.

§. 18. Nella terza parte adunque della qui riferita memoria sono registrate queste sperienze.

Conservata l'acqua in un vaso ad una altezza maggiore di due piedi, in un adattato pertugio circolare il cui centro era per l'appunto due piedi sotto la superficie dell'acqua, furono posti successivamente l'uno dopo dell'altro tre cannelli orizzontali, i quali tutti dotati dello stesso diametro di mezzo pollice, aveano però lunghezze diverse, uno essendo di due, uno di quattro, uno di dodici pollici. L'acqua sgorgando per questi a piena gola andava ad urtare un piano circolare di metallo dello stesso diametro di mezzo pollice, e collocato ad un pollice di distanza dalla bocca dei cannelli. Con adattato ordigno il Sig. *Zuliani* misurò le forze di questi urti, e nel tempo stesso fece in ciascuna sperienza il calcolo del peso di un cilindro di acqua avente per base l'area della sezione della vena urtante e per altezza quella dovuta alla velocità con cui si faceva l'urto. Di qui si può ricavare a qual porzione di questo cilindro equivaleva la misura dell'urto.

(*a*) *Alberto Eulero* figlio del gran *Leonardo*, in una dissertazione sul modo d'applicar l'acqua a muovere col massimo vantaggio gli edifizi, premiata nel 1754 dalla Reale Società di Gottinga, fe un cenno dell'aumento dell'impeto di una vena fluida coll'aumentare il piano su del quale va a battere.

Collo stesso vaso, ed alla stessa profondità adattando in un pertugio che aveva per diametro un pollice, altri tre tubi di quel diametro, e di lunghezza di 4, 8, 12 pollici, ricevè l'urto della vena fluida, che sboccava a piena gola da essi, su di un piano circolare metallico di un pollice, e ne assegnò le misure come nell'altro caso.

Ecco la Tabella di questi sperimenti.

Le dimensioni sono in pollici del piede di Parigi; i pesi sono in once di Padova, di cui dodici fanno una libbra piccola, ed un'oncia è grani 546.

	1.° 2.° 3.° Cannelli del diametro di mezzo pollice 4.° 5.° 6.° detti del diametro di un pollice.			
	Lunghezza in pollici	Misure dell' urto in grani	Peso del cilindro d' acqua	Misura dell' urto in parti del cilindro
1.°	2	810	1043	0, 776
2.°	4	770	990	0, 777
3.°	12	702	909	0, 772
4.°	4	3316	4119	0, 805
5.°	8	3015	4016	0, 750
6.°	12	2782	3652	0, 762

E prendendo un medio tra questi sei sperimenti, stabiliremo che quando il piano circolare su di cui si fa l'urto ha per area quella della sezione della vena cilindrica urtante, l'urto è eguale al peso di $\frac{773}{1000}$ del cilindro che ha per base l'area della detta sezione, e per altezza quella dovuta alla celerità dell'acqua. Anco le altre sperienze riportate dal Sig. *Zuliani* nella seconda parte della mentovata memoria, nelle quali l'altezza dell'acqua nel vaso al di sopra dei cannelli è talvolta sei piedi, conducono prossimamente alla stessa conseguenza.

Avremo adunque $2(1 - \text{sen.}\phi) = 0,773$, dalla quale equazione ricaveremo il valore di ϕ, cioè dell'angolo, che fanno i filetti fluidi col piano urtato nell'abbandonarlo, quando questo piano è della stessa grandezza della sezione della vena fluida. Sarà pertanto sen. $\phi = 1 - 0,386 = 0,614$, e quindi $\phi = 37^\circ.53'$.

Al §. 16 abbiamo trovato $\frac{2\pi y^2}{2} p = 2aB(1 - \text{sen.}\phi)$; ora posto b il raggio della vena cilindrica abbiamo

$$\frac{2\pi b^2}{2} p = 2aB(1 - \text{sen.}\phi) = aB.0,773;$$

ma $B = \frac{2\pi}{2} b^2$, dunque $p = 0,773.a$. Ottenuto il valore del p, si potrà trovare il valore del raggio del piano circolare, che dà la massima misura dell'urto, cioè, di quel piano, che dall'acqua dopo l'urto è abbandonato con direzioni ad esso parallele; infatti dal §. 15 si avrà

$$\frac{2\pi y^2}{2} = \frac{2aB}{p}; \text{ e quindi } y^2 = b^2.\frac{2a}{0,773.a};$$

$$y = b\sqrt{\frac{2}{0,773}} = 1,6.b;$$

dunque il raggio di siffatto piano circolare sarebbe eguale al raggio della vena cilindrica più $\frac{6}{10}$ di questo raggio, e l'area sarebbe due volte e mezzo circa l'area della vena cilindrica; ma questo non corrisponde bene alle sperienze del Sig. *Zuliani*, le quali danno per questo piano un raggio assai maggiore.

Il valore del p trovato nel supposto che il piano urtato sia eguale alla sezione della vena, l'ho ritenuto lo stesso per un piano anco di maggiore estensione. Ciò nasce dalla supposizione da noi fatta, che il fluido contenuto nello spazio NON' si ha da risguardare come stagnante, pel che le curve MO, M'O, pelle quali si è trovato il valore di p, non cangiano, se l'urto invece di farsi sopra MM' si farà sul piano NN'.

§. 19. Nelle sperienze del Sig. *Zuliani* si trova che fatto il piano circolare su cui caderà la vena fluida quattro ed anco sei volte più grande in diametro del diametro della vena medesima, non arrivava mai l'urto a contrabbilanciare il peso di un cilindro d'acqua d'altezza doppia di quella dovuta alla velocità dell'acqua, per quanto poco se ne allontanasse; anzi vi si accostava a segno di non differire che di un settimo circa del detto peso, quando il piano aveva un diametro semplicemente doppio di quello della vena.

Ciò al parer mio nasce da questo che lo spandimento dell'acqua in giro, obbligando il suolo di acqua, che scorre sul piano ad assottigliarsi continuamente, è necessario onde avvenga questo assottigliamento (il quale continua anco dopo che l'acqua ha abbandonato il piano), che le particelle acquee, le quali non radono il piano immediatamente, abbiano direzioni tendenti ad avvicinarle al piano stesso, siano, cioè, a questo piano inclinate, e quindi non avviene mai che tutte abbandonino il piano con direzioni ad esso parallele. Il sullodato Fisico dichiara nel §. 43 della detta Memoria, d'avere osservato appunto questo accidente. Ora di una tale circostanza non avendone tenuto conto nella Teorica, la formola non risponde bene alle sperienze; così la formola dichiara che quando il diametro del piano è eguale ad un diametro e sei decimi di quello della vena, aver si debbe il massimo urto, poichè i filetti acquei dovrebbero allora abbandonare il piano con direzioni parallele; ma la sperienza non dà questo massimo urto, perchè i mentovati filetti, mercè quella circostanza non computata nel calcolo, scappano via con direzioni a quel piano inclinate.

§. 20. Riprendiamo l'equazione del §. 14

$$(3) \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=1-\frac{m}{2}y^2,$$

da questa si ricava

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{\left(1-\frac{m}{2}y^2\right)^2}-1=\frac{my^2-\frac{m^2}{4}y^4}{\left(1-\frac{m}{2}y^2\right)^2};$$

$$(4)\ldots\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}{1-\frac{m}{2}y^2};$$

$$\frac{\left(1-\frac{m}{2}y^2\right)dy}{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=dx;$$

ed integrando

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}-\frac{m}{2}\int\frac{ydy}{\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=x+6;$$

ma

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=\frac{2}{m}\int\frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}=\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}},$$

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=\frac{2}{m}\int\frac{ydy}{\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}=-\frac{2}{m}\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)};$$

dunque

$$(5)\ldots\ldots\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}+\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\sqrt{\frac{4}{m}}-\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}=x+C.$$

E quest' è l'equazione della curva cercata.

Per determinare C osservo che quando $x=0$ dobbiamo avere $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\infty$, e perciò l'equazione (4) ci darà $1-\frac{m}{2}y^2=0$, da cui $y^2=\frac{2}{m}$; sarà dunque

$$C=\sqrt{\frac{2}{m}}+\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\frac{2}{m}}}{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{2}{m}}};$$

e l'equazione della curva NMO sarà

$$(6)\ldots\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}-\sqrt{\frac{2}{m}}+\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}\right\}\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{2}{m}}\right\}}{\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}\right\}\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\frac{2}{m}}\right\}}=x.$$

§. 21. Supponiamo che alla periferia del piano circolare CC', su del quale si fa l'urto, sia adattata una fascia o contorno CD; ma per formarsi una chiara idea di questo congegno, su del quale fingo, che si faccia l'urto, poniamo che all'asse OB *fig.* 6, unita ad angolo retto la linea BC, ed a questa nel punto C con un angolo qualunque, la retta DC, poniamo dico che le rette DC, CB si ravvolgano attorno l'asse OB. Allora CB descriverà il circolo su di cui si ha da far l'urto, e CD descriverà un tronco di cono, la superficie del quale sarà quella fascia posta alla periferia del cerchio.

Ora la vena cilindrica scappando da ogni banda, dopo avere urtato il piano circolare descritto da CB, incontrerà quella fascia dalla quale sarà obbligata a ripiegarsi; e se la figura 6 rappresenta la sezione, che un piano passando per l'asse OB fa della vena cilindrica, e delle superficj sulle quali essa vena urta, è facile a comprendere, che la curva DQ potrà rappresentare la piegatura del fluido all'incontro della fascia, e dalla forza centrifuga che esercitava il fluido in questa ripiegatura, ne nascerà una nuova spinta o pressione nella direzione stessa dell'asse OB, e questa sarà l'aumento dell'effetto dell'urto della vena cilindrica, procurato dall'aggiunta di quella fascia CD. L'acqua poi contenuta nello spazio QCDM la continueremo a risguardare come sensibilmente stagnante.

Supponiamo che la fascia sia tanto grande che l'acqua scappi secondando la direzione di essa; supponiamo anco che il piano circolare sia così esteso, che tra il punto N, ove terminando la piegatura della vena fluida essa tocca il piano, ed il punto Q, ove la medesima vena mercè l'avvicinamento della fascia CD, torna a piegarsi, ci sia un qualche intervallo.

Sia $BG = x$, $y = GM$ parallela a BC; l'angolo fatto dal prolungamento di BC e da DC chiamisi ω; sarà $DCB = 180^\circ - \omega$. Siano in D e Q i punti ove la curva QMD tocca le rette BC, CD. Sia $BQ = \beta$.

Seguendo parola a parola il discorso dei §§. 12, 13, 14, si arriva alla medesima equazione (2), cioè

$$(2) \ldots \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = C - m\frac{y^2}{2},$$

essen-

essendo C la costante arbitraria portata dall' integrazione.

Per determinarla io osservo che quando $y=\beta$ debbe essere $\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=0$; sarà dunque $C-m\frac{\beta^2}{2}=0$, $C=m\frac{\beta^2}{2}$, e perciò

$$(7)\ldots\ldots\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=\frac{m}{2}(\beta^2-y^2).$$

Conduciamo l'ordinata FD al punto D, prolunghiamo BC finchè incontri la DX abbassata dal punto D su di lei perpendicolare; ed essendo in questo punto D, $\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=\text{sen.}\,\omega$, si avrà $\frac{m}{2}\left(\overline{BX}^2-\overline{BQ}^2\right)=-\text{sen.}\,\omega$; sostituendo in questa equazione il valore di m, il quale è $\frac{2\pi p}{2aB}$, si troverà

$\frac{2\pi(\overline{BX}^2-\overline{BQ}^2)}{2}p=-2aB\,\text{sen.}\,\omega$.

Ora se si ha una forza normale a DC, ed alla stessa DC proporzionale, si potrà questa decomporre in due altre normali e proporzionali una ad XD, l'altra ad XC; e di qui ne deriva che le pressioni del fluido sopra le due linee DC, CQ considerate queste pressioni nella direzione parallela all' asse OB, sono le stesse che sopporterebbe tutta la linea QX; frattanto è facile vedere che $2\pi.\frac{\overline{BX}^2-\overline{BQ}^2}{2}p$ rappresenta la pressione o la spinta del fluido sulla zona circolare descritta da QC, e sulla fascia descritta DC; sarà dunque questa pressione $2aB\,\text{sen.}\,\omega$; così l'aggiunta di quella fascia, o contorno inclinato dell'angolo ω al piano circolare, aumenterà l'effetto dell' urto di una vena fluida, e mentre prima la sua misura era $2aB$, essa è ora

$$2aB+2aB\,\text{sen.}\,\omega.$$

§. 22. Se poi si cercasse quale esser debbe l'angolo ω onde quell' aumento $2aB$ sen. ω sia massimo, si troverebbe

$\varpi = 90°$, ed allora l'effetto dell'urto sarebbe doppio di prima, e l'urto eguaglierebbe un peso eguale a $4aB$.

§. 23. Se la fascia CD non fosse tanto estesa, che l'acqua scappar potesse con direzioni ad essa parallele, allora chiamato ϕ l'angolo fatto dai filetti dell'acqua con la direzione CD, si avrà $\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = \cos.(\phi + 90 - \varpi) = \text{sen}.(\varpi - \phi)$; e quindi ragionando come al §. 21, si avrà

$$\frac{2\pi(\overline{BX}^2 - \overline{BQ}^2)}{2} p = -2aB.\,\text{sen}.(\varpi - \phi).$$

Sarà pertanto $2aB\,\text{sen}.(\varpi - \phi)$ l'aumento dell'urto che porta l'aggiunta di quella fascia, il quale aumento sarà massimo quando $\varpi - \phi = 90$, il quale risultamento è compagno a quello ottenuto al §. 9; e quando gli angoli ϖ e ϕ avranno questa relazione tra di loro, l'urto totale su quel piano contornato dalla fascia sarà come qui sopra (§. 22), $4aB$.

§. 24. Al §. 21 noi abbiamo supposto che i due punti N e Q *fig.* 6 avessero qualche distanza tra loro, ora riflettendo a quanto si è detto di poi si vedrà, che di questa condizione non abbiamo tenuto alcun conto, e che essa nulla ha che fare nel risultamento, così l'intervallo QN può anco ridursi a nulla, e tutto ciò che abbiamo dimostrato è parimente vero; anzi se noi ci figuriamo il piano circolare ed il contorno di tali dimensioni che le curve fluide, OND, O'N'D' *fig.* 7 non vadano a toccare il piano circolare, ma si ripieghino prima di giungersi, e facciano come ci mostra la figura, la misura dell'urto sarà anco quella che abbiamo assegnata qui sopra; giacchè l'acqua contenuta nello spazio ONDCBC'D'N'O risguardandosi come stagnante, possiamo fingere un piano EF, il quale tocchi quelle curve nei punti N, N', e che sia il piano, su del quale si fa l'urto.

In generale qualunque superficie concava di rivoluzione descritta dalla curva DBD' *fig.* 8, la quale sia urtata da una vena fluida, il cui asse sia l'asse stesso della superficie urtata, la misura dell'urto non potrà essere mai maggiore di $4aB$, cioè del quadruplo del peso del cilindro che ha per base l'area della sezione della vena fluida, e per altezza quella dovuta alla velocità.

Infatti se noi poniamo che OND, ON'D' siano le piegature del fluido all'incontro della concava superficie, siccome l'acqua che è contenuta entro lo spazio ONDBD'N'O si risguarda come stagnante, così se noi conduciamo un piano EGF, che tocchi quelle curve nei punti N, N', e se noi supponiamo che questo piano circolare sia contornato da una fascia conica, la quale tocchi la superficie di rivoluzione nel cerchio descritto dal punto D, nulla con queste supposizioni si cangerà nelle ripiegature del fluido, e quindi la misura dell'urto esercitato contro quella superficie di rivoluzione, sarà la stessa che quella dell'urto sull'immaginato piano circolare circondato da quella fascia. Sarà dunque una tal misura quella da noi determinata al §. 23, il cui massimo valore è $4aB$.

§. 25. Il sullodato Sig. *Morosi*, nella sommaria relazione che ci fe all'Istituto di Milano delle sperienze sull'urto dei fluidi ci assicurò di avere potuto per mezzo di contorni posti al piano urtato dall'acqua rendere l'effetto dell'urto due, tre, quattro, ed anco sei volte maggiore. Ora non sapendosi come erano disposti i contorni posti dal Sig. *Morosi*, non sapendosi da qual misura egli partiva, nè conoscendosi altri dettagli delle sperienze, nulla si può dire su di esse; certo si è, che se la prima misura dell'urto da cui partiva questo Meccanico, era la misura dell'urto di una vena fluida su di un piano avente un'area eguale a quella della sezione della vena urtante, allora essendo una tal misura circa $\frac{3}{4}$ del peso del cilindro (§. 18) che ha per base l'area della sezione della vena, e per altezza quella alla velocità dovuta, certo si è, io dico, che col crescere l'area del piano urtato, e coll' aggiungerci anco un contorno, si può ridurre quell'urto ad aver per misura il quadruplo di quel cilindro (§. 23), ed in conseguenza ad essere cinque volte ed $\frac{1}{4}$ maggiore di quella prima misura dell'urto; e se quella prima misura fosse stata quella dell'urto su di un piano anco più piccolo, allora il peso del quadruplo cilindro a cui si può portare l'urto, poteva essere anco sei, otto, e più volte maggiore di quel primo urto.

§. 26. Comunque però sia la faccenda, è indubitato che obbligando l'acqua che scappa dopo avere urtato, a ripiegarsi, in tali ripiegature che si fanno sempre per mezzo di curve, ella eserciterà una forza centrifuga, la quale potrà operare in guisa da aggiungere spinta al piano urtato. Io sono persuaso che se in qualunque delle sperienze del Sig. *Morosi*, descritto fosse con esattezza il congegno, e fosse anco fatto in modo da poterne valutare le dimensioni, allora colle Teoriche dimostrare si potrebbe l'effetto, in quelle sperienze annunziato.

Queste stesse Teoriche rendono anco ragione dell'aumento dell'urto, che si ottiene facendo che la vena fluida, non sur una superficie piana, ma sur una concava faccia l'impulsione, e mostrano l'avvedutezza di quei, che hanno fatto le ali o palette delle rote concave verso la venuta dell'acqua.

§. 27. Ma nel fare le sperienze sull'urto dei fluidi conviene avere avvertenza di non attribuire all'urto, ciò che da altre circostanze può dipendere; così se la colonna fluida è verticale, ed il piano è orizzontale conviene (*fig.* 4) valutare il peso di quei ridossi di acqua, che si trovano tanto negli angoli C, C', quanto attorno del centro B, come pure il peso di quell'acqua, che è in moto, entro quella specie di cassetta, che formano i piani HC, H'C', giacchè per essere essa in moto non cessa già di essere pesante, ed aggravare la bilancia, colla quale si misura l'urto. La somma poi di questi pesi si ha da sottrarre dal peso totale, che la detta bilancia avrà dato per misura dell'urto. La stessa avvertenza si ha da avere quando sia orizzontale la direzione dell'urto, e verticale il piano CC', almeno per quella porzione di acqua, la quale può esser trattenuta dai contorni nella parte inferiore. Ma è facile prescrivere così in generale queste avvertenze, difficilissimo nell'atto pratico ad eseguire quanto esse richiedono.

AGGIUNTA.

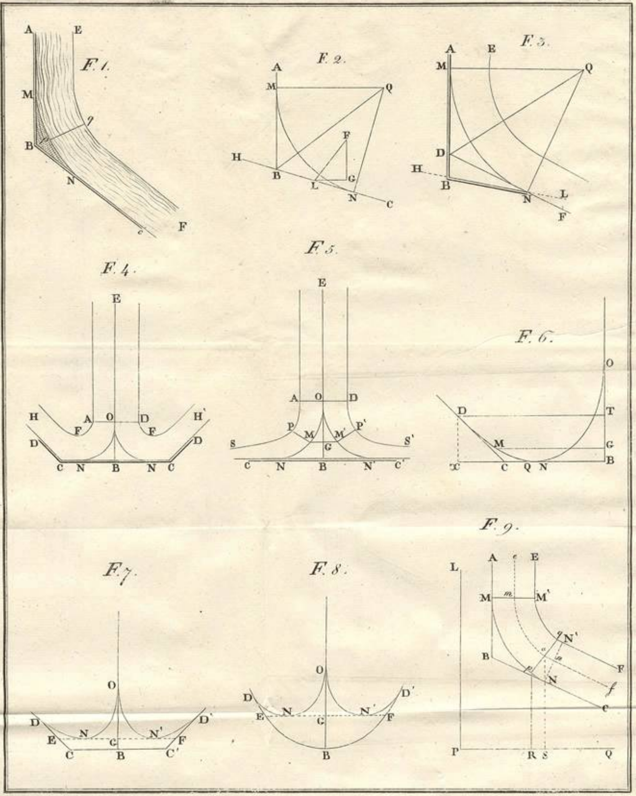
Al §. 2 abbiamo ritrovato che la pressione, la quale per cagione della forza centrifuga si fa su ciascun punto p (*fig.* 1) della curva MN, è $\frac{2a}{r}b$: Ora potendosi fare alcune difficoltà alla dottrina, che ha condotto a quella misura, ho cercato di ottenerla per un'altra via.

Non accelerandosi nè ritardandosi la vena fluida nella piegatura, cui l'obbliga l'angolo ABC (*fig.* 9), il primo filetto acqueo descriverà la curva MN, e gli altri filetti descriveranno delle curve a lui parallele, di modo che l'ultimo descriverà una curva EqF parallela ad MN, e distante da essa della quantità b, se b indica, come si disse, la larghezza della vena piana. Ogni filetto acqueo conserverà nella piegatura la velocità che aveva prima, dal che ne conseguita, che per tutto lo spazio della piegatura, le particelle come p, a, q che si ritrovano insieme in una sezione pq, non si trovano più unite tra loro in una qualunque sezione successiva, giacchè a misura che esse sono vicine a q hanno una maggior velocità rotatoria.

Ora tutte le particelle, che si trovano nella sezione pq, avendo diversa celerità di rotazione, aver debbono diversa forza centrifuga, e la pressione che si esercita sul punto p, si ha da ricavare dalle diverse forze centrifughe di cui sono dotate le particelle acquee componenti la linea pq.

Siano ora LP, PQ i due assi ortogonali ai quali si riferiscono le curve. Siano le coordinate PR $= x$; R$p = y$. Sia ef la curva descritta da un filetto acqueo qualunque. Sia PS$=t$, S$a = u$; essendo ef una curva parallela ad MN, se facciamo la distanza $ap = z$ sarà

$$t = x + z\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}};\quad u = y + z\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}};$$


F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.

avremo poi essendo z costante rispetto ad a,

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)=1+z\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}};$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=-\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{z\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right):$$

al differenziale dell'y ho dato il segno negativo, perchè y scema quando x cresce.

Ora il raggio di curvatura della curva ef nel punto a, se lo rappresentiamo con R, è

$R=\frac{\left\{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)}$; se dunque in questa formola facciamo $\left(\frac{du}{dx}\right)=-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$, e

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right),$$

si avrà

$$R=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}\left(\frac{dt}{dx}\right)=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dx}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}-z;$$

ma $-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$ è l'espressione del raggio di curvatura nel punto p, dunque, se questo raggio è indicato con r, sarà $R=r-z$.

Condotte nei punti M, N le perpendicolari MM', NN' l'arco mn della curva ef compreso tra quelle perpendicolari, sarà (*) $mn=MN-zA$ essendo A l'arco, che misura l'angolo fatto dalle normali MM', NN' e descritto col raggio 1.

Sia dz la grossezza della molecola acquea la quale si tro-

(*) Si veda una Memoria del Signor *Bordoni* inserita nel Tomo XVI degli atti della Società Italiana, nella quale la dottrina delle curve delle superficj parallele è compiutamente trattata.

va in α, e sarà $\frac{2a}{r-z}dz$ la pressione che questa molecola esercitar debbe a causa della forza centrifuga: ora la pressione su tutti i punti dell'arco MN dovendo essere la stessa, ed in ciascun punto p questa pressione non potendo essere che una funzione dei raggi osculatori delle molecole che si trovano tra p e q, cioè una funzione di r, dovrà questa funzione essere una quantità costante per tutti i punti tra M ed N; sarà dunque r costante, ed MN in conseguenza un arco di cerchio. La somma allora di tutte le pressioni nate dalle forze centrifughe delle molecole contenute nel filetto fluido mn sarà $(MN-zA)\frac{2a}{r-z}dz$, cioè $MN.\frac{2adz}{r-z}+2aA\left\{1-\frac{r}{r-z}\right\}dz$, ed integrando rispetto a z, avremo la somma di tutte le pressioni, che nascono da tutte le forze centrifughe delle particelle acquee comprese nello spazio MNN'M', e perpendicolari queste pressioni all'arco MN, e questa somma indicata per S sarà

$$S=-MN.2a\log.(r-z)+2aAz+2aAr\log.(r-z)+C.$$

Determiniamo la costante per modo che $z=0$ dia $S=0$, e poscia estendendo l'integrale sino a $z=b$, sarà

$$S=-MN.2a\log.(r-b)+2a.Ab+2aAr\log.(r-b):$$

Ora essendo $Ar=MN$, si avrà

$$S=MN\left\{-2a\log.(r-b)+\frac{2a}{r}b+2a\log.(r-b)\right\}$$

$S=MN.\frac{2a}{r}b$. La pressione infine su di un qualunque punto p dell'arco MN, sarà $\frac{S}{MN}=\frac{2a}{r}b$ come trovammo al §. 2.