SUL MOTO DISCRETO DI UN CORPO, OSSIA SOPRA I MOVIMENTI NEI QUALI SUCCEDONO DI TEMPO IN TEMPO DELLE VARIAZIONI FINITE

MEMORIA

Del Signor Antonio Bordoni.

Presentata li 15 *Settembre* 1814 *dal Sig. Brunacci ed approvata dal Sig. Ruffini.*

Nelle questioni di moto trattate sino ad ora, la velocità, ed altre quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto ad un istante qualunque del suo movimento, o non variano, cioè sono le medesime per tutto il tempo che dura il moto, ovvero variando, le variazioni loro sono infinitesime, ed accadono continuamente, ossia senza intermissione, in tutti gl'istanti del movimento. Ma vi sono molte altre quistioni di moto, nelle quali le medesime quantità, oltre di essere sottoposte a quelle stesse affezioni, come nelle suddette, sono di più soggette ad altre variazioni, le quali per essere finite, e succedendo solamente di quando in quando, cambiano successivamente il moto, e qualche volta anche la sua natura, rendendolo una serie di moti ordinarj di una, o più specie.

Il moto continuato di un obus. è un esempio naturale di questa specie di moto, imperciocchè tutte le volte che esso percuote il suolo, quasi tutte le quantità, dalle quali dipende la cognizione del suo stato, variano di quantità finite.

La dichiarazione della teorica di questi movimenti, che denomineremo *discreti*, per distinguerli dagli ordinarj o comuni, unitamente ad alcune nuove considerazioni analitiche, è lo scopo di questa Memoria.

Il modo più naturale di trattare qualunque questione di moto discreto, sarebbe quello d'incominciare a trovare le quantità dalle quali dipende la conoscenza del moto prima di succedere il primo cambiamento finito in alcuni elementi del medesimo, e poi determinare cosa diventano queste quantità stesse per forza di questo cambiamento: fatto ciò, discoprire quelle dalle quali dipende la cognizione del moto nel tempo che trascorre dopo il primo cambiamento finito sino al secondo, e di nuovo determinare le medesime quantità, computando questo secondo cambiamento finito: e così continuare.

Ma siccome con questo metodo difficilmente si potrebbero determinare le quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto ad un istante qualunque del suo movimento, stante la eccessivamente grande prolissità; perciò ne preferiremo un altro, col quale potremo trattare completamente molte questioni di questa specie di moto; vale a dire il seguente „ Incomincieremo a trovare le sole quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto negl'istanti prossimi a quelli nei quali succedono le variazioni finite in alcune di esse; e poscia passeremo a trovare quelle altre dalle quali dipende la cognizione del moto dello stesso corpo ad un istante qualunque di un qualsivoglia di quei tempi, che passano tra gl'istanti in cui accadono i cambiamenti finiti anzidetti „.

E siccome si possono determinare le prime di queste quantità col metodo che diede *Lagrange* per trovare i termini generali delle serie, allorchè si conoscono le loro equazioni di relazione, ed in conseguenza approfittare di alcuni vantaggi che somministra attualmente il calcolo delle differenze finite la cui fecondità si è moltissimo accresciuta nelle mani del cel. Geometra *Brunacci*; così usando questo metodo, procureremo alle soluzioni delle questioni di moto discreto, che tratteremo, la semplicità, la uniformità, e qualche volta anche la eleganza. Anzi risultando la determinazione delle altre quantità una questione di moto puramente ordinario, avre-

mo particolarmente di mira in questa Memoria, la determinazione delle sole prime; e solamente qualche volta determineremo anco le seconde.

Avendo riguardo ai rapporti che hanno le proposizioni di moto discreto che esporremo, tanto fra loro, quanto colle proposizioni conosciute di moto ordinario, parleremo di esso seguendo quest'ordine, cioè; 1.° Del moto discreto rettilineo; 2.° Del moto su di un poligono dato; 3.° Di quello sopra di un dato poliedro; 4.° Di una specie di moto discreto che chiameremo *semilibero*; 5.° finalmente, del moto libero.

Del moto rettilineo.

Stante che, tutte le difficoltà rimarcabili, che s'incontrano nella teoria generale della prima specie di questi movimenti, cioè di quella nella quale il corpo descrive una sola retta, sono o soluzioni di equazioni, od integrazioni finite di date espressioni, o di equazioni delle differenze finite, vale a dire sono esse puramente analitiche, e non si possono superare, senza individuare le leggi del moto stesso; incominceremo immediatamente la teorica di questo moto colla proposizione che qui segue, e procureremo di trattarla completamente, ossia di non lasciare nulla a desiderare rispetto alla medesima, nella ipotesi che la resistenza del mezzo segua la ragione del quadrato della velocità del mobile; cioè nella ipotesi comunemente accettata.

Proposizione I.

„ Un grave di elasticità imperfetta cadendo verticalmen-
„ te urti un piano orizzontale, con una data velocità, e sa-
„ rà dal piano medesimo, obbligato a salire ad una certa al-
„ tezza, dalla quale scendendo, ed urtando di nuovo nello
„ stesso piano, sarà obbligato a risalire; e così continuerà il
„ suo movimento: alla fine della discesa xesima, quale sarà

„ la velocità, lo spazio percorso, ed il tempo corso, moven-
„ dosi il grave in un mezzo resistente „.

Soluzione. Sia t_x il tempo corso dal principio della prima salita alla fine della x esima discesa; $2s_x$ lo spazio percorso in questo tempo; v_x la velocità alla fine della discesa x esima, ossia quella colla quale il corpo urta la $(x+1)$ esima volta il piano orizzontale; t_{x+1}, $2s_{x+1}$, e v_{x+1} siano per la discesa $(x+1)$ esima ciò che sono t_x, $2s_x$, e v_x per l'x esima; e sia tanto in questa, quanto in tutte le proposizioni seguenti, r il rapporto della elasticità del corpo alla percossa, g la forza costante di gravità, gk^2 il coefficiente pel quale moltiplicando il quadrato della velocità del mobile, si ottiene la forza ritardatrice della resistenza del mezzo, nel quale si move il corpo.

Egli è evidente, che sono eguali tra loro la salita e la discesa $(x+1)$ esima, e che la salita continua fino a tanto che la resistenza del mezzo insieme alla gravità abbiano distrutto la velocità colla quale è stata incominciata; e la discesa finchè il corpo urti di nuovo nel piano orizzontale. Queste tre verità per sè stesse evidenti saranno il fondamento della soluzione presente.

Per quello che si è premesso, il corpo comincia la salita $(x+1)$ esima colla velocità rv_x, e sale all'altezza Δs_x; e però, colla teorica del moto verticale ascendente ne' mezzi resistenti, si avrà

$$2gk^2\Delta s_x = \log.(1 + k^2r^2v^2_x);$$

e finisce la discesa corrispondente coll'acquistare la velocità v_{x+1}, scendendo dalla medesima altezza Δs_x, adunque colla stessa teorica, rispetto ai gravi che scendono, avrassi pure

$$2gk^2\Delta s_x = -\log.(1 - k^2v^2_{x+1}).$$

Essendo uguali i primi membri di queste due equazioni, sarà anche

$\log.(1+k^2r^2v^2_x) = -\log.(1-k^2v^2_{x+1})$, ossia $(1+k^2r^2v^2_x)(1-k^2v^2_{x+1}) = 1$;

cioè si avrà tra le velocità v_x, v_{x+1} l'equazione delle differenze finite seguente

$$k^2r^2v^2_xv^2_{x+1} + v^2_{x+1} - r^2v^2_x = 0,$$

la quale integrata, ci darà la velocità del corpo alla fine della discesa x esima, espressa per k, r, e pel numero x delle salite o discese.

Per integrare quest'ultima equazione da cui dipende attualmente la velocità cercata, supponghiamo $v^2_x = \frac{1}{y_x}$, y_x essendo una nuova funzione incognita, ed avremo

$$y_{x+1} - \frac{1}{r^2}\, y_x - k^2 = 0,$$

la quale è, come si vede, un'equazione anch'essa del primo ordine, ma lineare, in conseguenza integrabile colle regole generali a tutti note.

Con queste regole, integrando quest'ultima equazione, si ha (§. 40) (*)

$$y_x = \frac{c + k^2r^2r^{2x}}{(r^2-1)r^{2x}},$$

c rappresentando la costante arbitraria. Ma abbiamo supposto $v^2_x = \frac{1}{y_x}$, adunque il quadrato della velocità del corpo alla fine della discesa x esima sarà

$$\frac{(r^2-1)r^{2x}}{c + k^2r^2r^{2x}};$$

ossia tra la velocità stessa ed il numero x, vi sarà la relazione espressa dalla equazione

$$v^2_x = \frac{(r^2-1)r^{2x}}{c + k^2r^2r^{2x}}.$$

Per trovare la costante arbitraria c, osservisi, che per ipotesi si conosce la velocità colla quale il corpo ha urtato la prima volta il piano orizzontale, urtamento dal quale è nata la prima salita, che ha fatto il corpo, come nasce la

(*) In questa Mem. i §§. citati si riferiscono all'esimio Compendio del Calcolo Sublime del Prof. *Brunacci*.

$(x+1)$ esima dall'urtamento $(x+1)$ esimo; cioè pei dati della proposizione conosciamo la velocità v_0. Ma supponendo $x=0$ nell'equazione di relazione anzi trovata, tra x e v_x, hassi

$$v^2_0 = \frac{r^2-1}{c+k^2r^2}, \text{ ossia } c = \frac{r^2-1-k^2r^2v^2_0}{v^2_0}; \text{ adunque}$$

$$v_x = v_0 r^x \sqrt{\frac{r^2-1}{r^2-1+(r^{2x}-1)r^2k^2v^2_0}}:$$

espressione nella quale tutte le quantità sono immediatamente conosciute.

Sostituendo nella equazione

$$2gk^2\Delta s_x = \log.(1+k^2r^2v_x),$$

esposta superiormente, in vece di v^2_x il suo valore $\frac{(r^2-1)r^{2x}}{c+k^2r^2r^{2x}}$, si ha

$$2gk^2\Delta s_x = \log.\frac{c+r^2k^2r^{2(x+1)}}{c+r^2k^2r^{2x}},$$

dalla quale desumesi

$$\Delta s_x = \frac{1}{2gk^2}\log.\frac{c+r^2k^2r^{2(x+1)}}{c+r^2k^2r^{2x}};$$

cioè l'altezza a cui sale, e da cui poscia discende la $(x+1)$ esima volta il corpo.

Per essere

$$\log.\frac{c+r^2k^2r^{2(x+1)}}{c+r^2k^2r^{2x}} = \Delta\log.(c+r^2k^2r^{2x})$$

l'ultima equazione equivale a quest'altra

$$2gk^2\Delta s_x = \Delta\log.(c+k^2r^2r^{2x})$$

che è per sè stessa integrabile, ed integrata dà

$$2gk^2s_x = \log.(c+k^2r^2r^{2x}) + \text{cost.}$$

Ma ad $x=0$ corrisponde $2s_0=0$, perchè comincia lo spazio $2s_x$ coll'incominciare della prima salita; adunque sarà

$0=\log.(c+k^2r^2)+\text{cost.}$, ossia $\text{cost.}=-\log.(c+k^2r^2)$.

Quindi $2gk^2s_x = \log.(c+k^2r^2r^{2x}) - \log.(c+k^2r^2)$; e perciò lo spazio cercato

$$2s_x = \frac{1}{gk^2}\log.\frac{c+k^2r^2r^{2x}}{c+k^2r^2}.$$

Passiamo ora a trovare il tempo decorso dal principio della prima salita alla fine della x esima discesa, cioè la espressione del tempo t_x. Chiamando θ_x la somma dei tempi delle x prime salite, e δ_x quello delle corrispondenti discese, saranno $\Delta\theta_x$, $\Delta\delta_x$ i tempi della salita e discesa $(x+1)$ esima; e perciò, colla teorica del moto verticale dei gravi che si movano in mezzi resistenti, si avrà

$$2gk\Delta\delta_x = \log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}, \text{ e } gk\Delta\theta_x = \text{Arc. tang. } rkv_x,$$

ossia $\Delta\delta_x = \frac{1}{2gk}\log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}$, e $\Delta\theta_x = \frac{1}{gk}$ Arc. tang. rkv_x;

cioè il tempo δ_x delle discese sarà eguale all'integrale finito

$$\Sigma\frac{1}{2gk}\log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}$$

preso tra i limiti di 1 ad x; e quello delle salite, cioè θ_x sarà eguale all'altro

$$\Sigma\frac{1}{gk}\text{ Arc. tang. } rkv_x$$

preso fra i limiti 0, ed $x-1$; vale a dire, sarà

$$\delta_x = \frac{1}{2gk}\left(\log.\frac{1+kv_x}{1-kv_x} + \log.\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}} + \ldots\ldots + \log.\frac{1+kv_1}{1-kv_1}\right),$$

$$\text{e } \theta_x = \frac{1}{gk}\left(\text{A. tang. } rkv_{x-1} + \text{A. tang. } rkv_{x-2} + \ldots + \text{A. tang. } rkv_0\right).$$

Ma la somma dei logaritmi di un numero qualunque di quantità è eguale al solo logaritmo del loro prodotto, adunque sarà il tempo delle discese

$$\delta_x = \frac{1}{2gk}\log.\left(\frac{1+kv_x}{1-kv_x}\right)\left(\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1+kv_2}{1-kv_2}\right)\left(\frac{1+kv_1}{1-kv_1}\right).$$

Se è vantaggiosa la sostituzione fatta del solo logaritmo del prodotto delle quantità $\frac{1+kv_x}{1-kv_x}$, $\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}}$, ... $\frac{1+kv_2}{1-kv_2}$, $\frac{1+kv_1}{1-kv_1}$ in luogo della somma dei logaritmi delle medesime, molto più lo sarà la sostituzione di un solo arco in vece degli x archi

A. tang. rkv_{x-1}, A. tang. rkv_{x-2}, ... A. tang. rkv_1, A. tang. rkv_0,

la quale divisa per gk dà il tempo θ_x. Vediamo pertanto, come si possa trovare un solo arco eguale alla somma di quelli, che hanno per tangenti le quantità attualmente conosciute rkv_{x-1}, rkv_{x-2}, ... rkv_1, rkv_0.

Supponendo

$$\text{A.tang.}rkv_{x-1}+\text{A.tang.}rkv_{x-2}+....+\text{A.tang.}rkv_1+\text{A.tang.}rkv_0=\xi_x$$

si ha $\text{tang.}\,\xi_{x+1} = \text{tang.}\,(\xi_x + rkv_x) = (rkv_x + \text{tang.}\,\xi_x) : (1 - krv_x \text{tang.}\,\xi_x)$, ossia l'equazione delle differenze finite

$$(A)\ldots. rkv_x \text{tang.}\,\xi_x \text{tang.}_{x+1} - \text{tang.}\,\xi_{x+1} + \text{tang.}\,\xi_x + rkv_x = 0$$

dalla cui integrazione dipende il valore cercato dell'arco ξ_x.

Ad ottenere l'integrale dell'equazione qui trovata, suppongasi in essa $\text{tang.}\,\xi_x = \frac{rkv_x}{\pi_x - 1}$, π_x esprimendo una nuova funzione incognita, e si cambierà in quest'altra

$$\pi_x\pi_{x+1} - b_x\pi_x - a_x = 0,$$

$$\text{posto} - \frac{1+r^2k^2v^2_x}{v_x} v_{x+1} = a_x, \text{ e } \frac{v_x+v_{x+1}}{v_x} = b_x,$$

la quale dà evidentemente $\pi_x = b_{x-1} + \cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2} + \cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3} + \cfrac{a_{x-3}}{\ddots + \cfrac{a_2}{b_1 + \cfrac{a_1}{\pi_1}}}}}$.

Ma pel significato della funzione ξ_x si ha $\text{tang.}\,\xi_1 = rkv_0$, e per forza della fatta supposizione, cioè di $\text{tang.}\,\xi_x = \frac{rkv_x}{\pi_x - 1}$, hassi anche $\text{tang.}\,\xi_1 = \frac{rkv_1}{\pi_1 - 1}$; adunque $rkv_0 = \frac{rkv_1}{\pi_1 - 1}$, ossia $\pi_1 = 1 + \frac{v_1}{v_0}$; e però

$$\pi_x = b_{x-1} + \cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2} + \cfrac{a_{x-2}}{\ddots + \cfrac{a_1}{1 + \frac{v_1}{v_0}}}}:$$

valore che messo in quello supposto di $\text{tang.}\,\xi_x$, ci dà la nuova e singolare formola trigonometrica

$$\text{tang.}\,\xi_x = \cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3}+\cfrac{a_{x-3}}{\ddots\;b_2+\cfrac{a_2}{b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{v_1}{v_0}}}}}}}\,;$$

cioè l'arco cercato $\xi_x = \text{Arc. tang.}\cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+}}$ ec. Quindi il tempo delle salite, sarà anche eguale ad

$$\frac{1}{gk}\,\text{Arc. tang.}\cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3}+}}}\,\text{ec.}$$

Ora, essendo il tempo cercato, cioè il decorso dal principio della prima salita alla fine della x esima discesa, eguale alla somma dei tempi corsi nelle x prime salite e nelle corrispondenti discese, vale a dire $t_x = \theta_x + \delta_x$, sarà esso eguale ad

$$\frac{1}{2gk}\log.\left(\frac{1+kv_x}{1-kv_x}\right)\left(\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}}\right)\ldots\left(\frac{1+kv_1}{1-kv_1}\right)+\frac{1}{gk}\,\text{A. tang.}\cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{\ddots\;b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{v_1}{v_0}}}}}.$$

Corollario I. Essendo $\Delta\theta_x$ il tempo della $(x+1)$ esima salita, e $\Delta\delta_x$ quello della corrispondente discesa, sarà $\Delta t_x = \Delta\theta_x + \Delta\delta_x$, ossia

$$\frac{1}{gk}\left(\text{Arc. tang.}\,rkv_x+\tfrac{1}{2}\log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}\right)$$

il tempo corso tra gli urtamenti x, $(x+1)$ esimi. Similmente, per essere v_x la velocità del corpo alla fine della discesa x esima, sarà rv_x, ovvero

$$r^{x+1}v_0\sqrt{\frac{r^2-1}{r^2-1+(r^{2x}-1)r^2k^2v_0^2}}$$

la velocità colla quale il corpo comincierà la salita $(x+1)$ esima. In ultimo

$$\frac{1}{2gk^2}\log.\frac{c+k^2r^{2(x+2)}}{c+k^2r^{2(x+1)}}$$

sarà l'altezza, sopra il piano orizzontale, a cui salirà il corpo nella $(x+1)$ esima salita.

Corollario II. Facilmente colla teorica del moto verticale ascendente dei gravi ne' mezzi resistenti (*) e colle esposte nell'antecedente Corollario, si trovano le due equazioni seguenti

$$gkt'_x = \text{Arc. tang. } k\frac{rv_x - u_x}{1+rk^2v_xu_x},\quad 2gk^2s'_x = \log.\frac{1+r^2k^2v^2_x}{1+k^2u^2_x},$$

nelle quali u_x, s'_x, e t'_x esprimono la velocità, lo spazio, e il tempo corrispondente, per la salita $(x+1)$ esima. Similmente, colla medesima teoria rispetto al moto discendente, trovansi le altre due equazioni

$$2gkt''_x = \log.\frac{1+ku'_x}{1-ku'_x},\quad 2gk^2(\Delta s_x - s''_x) = \log.\frac{1-k^2u'^2_x}{1-k^2v^2_{x+1}},$$

nelle quali u'_x, s''_x, t''_x esprimono la velocità, lo spazio, e il tempo corrispondente per la $(x+1)$ esima discesa.

Con queste quattro equazioni, insieme ai valori delle quantità v_x, s_x, e t_x trovate sopra, si conoscerà il moto del corpo in un istante qualunque del tempo Δt_x, che passa dall'urtamento x esimo all'$(x+1)$ esimo.

PROPOSIZIONE II.

„ Supposte le leggi del moto, come nella proposizione „ antecedente, e dato di più una delle tre quantità, spazio, „ velocità, e tempo, trovare le altre due corrispondenti, e „ la distanza che avrà il corpo dal piano orizzontale.

Soluzione. Primieramente sia dato lo spazio S.

Ponendo nella equazione $2gk^2s_x = \log.\frac{c+k^2r^2r^{2x}}{c+k^2r^2}$ in luogo di $2s_x$ lo spazio dato S, ed x' invece di x; e poscia cavando l'x' dalla risultante, si ha

---

(*) Questa teorica si può vedere al §. 204 del primo volume della Meccanica del Sig. Professore *Venturoli*.

$$x' = \frac{\log.[(c + r^2k^2)e^{gkS} - c] - 2\log. kr}{2\log. r}.$$

Se il numero x', così determinato, sarà intero, nell'istante che il corpo avrà terminato di percorrere lo spazio dato S, si troverà nel piano orizzontale, sarà trascorso il tempo $t_{x'}$, ed avrà la velocità $v_{x'}$, o zero, ovvero $rv_{x'}$, secondo che si considererà prima o dopo la compressione, oppure dopo la stessa dilatazione.

Se poi x' sarà frazionario, per avere le stesse quantità, si osserverà primieramente, se S eguaglierà, o sarà minore, ovvero maggiore di $2s_m + \Delta s_m$, m esprimendo il maggior numero intero contenuto nell'x'; e nel primo di questi tre casi, il corpo troverassi distante dal piano orizzontale di Δs_m, non avrà velocità, e sarà corso il tempo $t_m + \Delta\theta_m$; nel secondo sarà distante dal piano di $S - 2s_m$, avrà la velocità u_m data dalla equazione

$$2gk^2 s'_m = \log. \frac{1 + r^2k^2v^2_m}{1 + k^2u^2_m},$$

ed il tempo decorso sarà $t_m + t'_m$, t'_m essendo determinato mediante la equazione

$$gkt'_m = \text{Arc. tang. } k\,\frac{rv_m - u_m}{1 + rk^2v^2_m u^2_m}.$$

Finalmente nel terzo caso il corpo sarà distante dal piano orizzontale di $2s_{m+1} - S$, si moverà colla velocità u'_m cavata dalla equazione

$$2gk^2(2s_{m+1} - S) = \log. \frac{1 - k^2u'^2_m}{1 - k^2v^2_{m+1}},$$

e $t_m + \Delta\theta_m + t''_m$ sarà il tempo decorso, purchè t''_m venga desunto dalla equazione

$$2gkt''_m = \log. \frac{1 + ku'_m}{1 - ku'_m}.$$

Sia ora conosciuta la velocità V.

Sostituendo nella equazione, esposta anch'essa superiormente,

$$v_x = v_0 r^x \sqrt{\frac{r^2 - 1}{r^2 - 1 + (r^{2x} - 1) r^2k^2v^2_0}},$$

invece di x l'y, e di v_x la velocità data V; poi liberando lo stesso y, hassi

$$y = \frac{\log.V^2(r^2-1-r^2k^2v^2_0)-\log.v^2_0(r^2-1-r^2k^2V^2)}{2\log.r},$$

espressione la quale potrà essere anch'essa intera o frazionaria.

Qualunque sia il numero y, il corpo si potrà trovare in una qualunque delle m prime salite, come in una qualsivoglia delle corrispondenti discese, m rappresentando il maggiore numero intero contenuto nell'y; e però sarà

$$s'_n = \frac{1}{2gk^2}\log.\frac{1+r^2k^2v^2_n}{1+k^2V^2}, \text{ o } \Delta s_n - s''_n = \frac{1}{2gk^2}\log.\frac{1-k^2V^2}{1-k^2v^2_{n+1}}$$

la distanza che esso avrà dal piano orizzontale, $2s_n + s'_n$, ovvero $2s_n + \Delta s_n + s''_n$ lo spazio che avrà percorso, e

$$t_n + \frac{1}{gk}\text{Arc.tang.}\,k\frac{rv_n - V}{1+rk^2v_nV}, \text{ oppure } t_n + \Delta\theta_n + \frac{1}{2gk}\log.\frac{1+kV}{1-kV},$$

il tempo corso, qualunque numero rappresenti l'n, tra i positivi, interi, e non maggiori del maggior numero intero contenuto in y, cioè di m.

Di più, se sarà $v_m > V > rv_m$ il corpo potrà trovarsi nel piano orizzontale, aver percorso lo spazio $2s_m$, ed essere corso il tempo t_m, precisamente come nel caso di $V = v_m$; e se sarà $V = rv_m$, ovvero $rv_m > V > v_{m+1}$, il numero n contenuto nelle prime formole sopra esposte potrà essere eguale anche ad m maggior numero intero contenuto nell'y. Vale a dire, nel caso di $V = v_m$ il problema o la proposizione avrà $2m$ soluzioni, e negli altri $(2m+1)$; cioè tante soluzioni quanti sono gl'istanti del tempo corso nella durata del moto continuato nei quali la velocità del corpo eguaglia la data V.

In ultimo sia dato il tempo T.

Troveremo la velocità, lo spazio, e la distanza dal piano orizzontale che corrispondono al tempo dato T, senza determinare il valore della quantità posta invece di x nella espressione di t_x espresso pel tempo dato T stesso; e si vedrà con ciò, come si possa scoprire il numero intero rappresentante

tante la stessa quantità, se essa è intera, o il maggior numero intero contenuto in essa, se sarà frazionaria, senza la suddetta determinazione.

S'incominci a supporre x, cioè il numero delle salite o discese uguale successivamente a 0, 1, 2, 3, ec. nella espressione generale del tempo t_x trovata nella precedente proposizione, e si continui questa operazione, finchè siasi trovato un numero intero m, che renda la stessa espressione uguale al tempo dato, cioè che dia $t_m = \mathrm{T}$; e se ciò non sarà possibile, come succederà quasi sempre, si continuerà la stessa operazione, finchè se ne saranno trovati due contigui m, $m+1$, che sostituiti invece di x nella medesima espressione, diano due risultamenti, tra i quali sia compreso lo stesso tempo dato, cioè che diano $t_m < \mathrm{T} < t_{m+1}$.

Quando succederà il primo di questi casi, cioè che un numero intero m, renderà $t_m = \mathrm{T}$, il corpo alla fine del tempo dato T si troverà nello stesso piano orizzontale; e però la velocità si avrà immediatamente, col sostituire il numero stesso m invece di x, o nella espressione di v_x trovata sciogliendo la proposizione antecedente, o in quella esposta nel suo Corollario 2.°, secondo che si vorrà il valore della velocità, prima, ovvero dopo la compressione istantanea del corpo; e lo spazio sarà $2s_m$, cioè si otterrà sostituendo in luogo di x il numero m nella espressione di $2s_x$ trovata anch'essa sciogliendo la proposizione precedente.

Negli altri casi, dopo avere trovato i numeri m, $m+1$, si osserverà, se T sarà eguale, o minore, ovvero maggiore di $t_m + \Delta\theta_m$; e nel primo di questi casi, il corpo sarà distante dal piano orizzontale di

$$\Delta s_m = \frac{1}{2gk^2} \log. \frac{c + k^2 r^2 r^{2(m+1)}}{c + k^2 r^2 r^{2m}},$$

non avrà nessuna velocità, ed avrà percorso lo spazio $2s_m + \Delta s_m$; nel secondo avrà velocità u_m data dalla equazione

$$k \frac{rv_m - u_m}{1 + rkv_m u_m} = \text{tang.} gk(\mathrm{T} - t_m),$$

che desumesi dalla prima delle esposte nel Corollario 2.° della precedente proposizione, e sarà distante dal piano orizzontale di

$$s'_m = \frac{1}{2gk^2} \log. \frac{1 + r^2k^2v^2_m}{1 + k^2u^2_m},$$

ed avrà trascorso uno spazio eguale a $2s_m + s'_m$. Finalmente nel terzo ed ultimo caso, avrà, alla fine del tempo T, la velocità u'_m che dà la equazione seguente

$$e^{2gkT} = \left(\frac{1 + ku'_m}{1 - ku'_m}\right) e^{2gk(t_m + \Delta\theta_m)},$$

dedotta anch'essa dalla terza dell'accennato Corollario, sarà distante dal piano di

$$\Delta s_m - s''_m = \frac{1}{2gk^2} \log. \frac{1 - k^2u'^2_m}{1 - k^2v^2_{m+1}},$$

ed avrà percorso lo spazio $2s_m + \Delta s_m + s''_m$.

Non aggiungo altre proposizioni di moto discreto rettilineo, persuaso che bastano le due trattate per indicare, come si debbono trattare le altre: anzi fo qui osservare, che la seconda delle medesime proposizioni, generalmente parlando, senza alcun cambiamento notabile, si estenderà anche alle proposizioni delle altre specie di movimento di cui si parlerà in questa Memoria.

Del moto sopra di un poligono dato.

PROPOSIZIONE III.

„ Data la velocità colla quale un corpo comincia a per-
„ correre, scendendo, il primo lato di un dato poligono qua-
„ lunque, tra quelli che hanno tutti gli angoli ottusi, co-
„ munque disposto nello spazio, trovare la velocità, ed il
„ tempo corso, quando sarà giunto alla fine di un lato qua-
„ lunque del medesimo poligono.

SOLUZIONE. Sia OH (*Fig.* 1) una retta verticale; ... ABC ... il poligono a semplice o a doppia inflessione lungo al quale

scende il corpo; $BC = l_x$ il suo lato $(x+1)$ esimo; t_x il tempo decorso nell'arrivare in B, e Δt_x nel percorrere BC; v_x la velocità del corpo alla fine del lato AB, e v_{x+1} alla fine di BC; in ultimo, sia β_x l'angolo che fa il lato $(x+1)$ esimo colla verticale, ed α_x quello che fa il medesimo lato col prolungamento del suo antecedente, cioè $\alpha_x = CBM$.

Rappresentando v_x la velocità del corpo alla fine del lato AB, $v_x \cos. \alpha_x$ esprimerà quella colla quale il corpo comincierà a percorrere BC; ma il moto secondo BC, essendo il corpo grave, è uniformemente accelerato, adunque, colla teorica conosciuta di questo moto si avrà

$$v^2_{x+1} = 2gl_x \cos. \beta_x + v^2_x \cos.^2 \alpha_x, \text{ ossia}$$

$$v^2_{x+1} - \cos.^2 \alpha_x v^2_x = 2gl_x \cos. \beta_x :$$

equazione la quale integrata colla regola colla quale s'integra qualsivoglia equazione delle differenze finite del primo ordine e lineare, somministra (§. 40)

$$v^2_x = e^{\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x} \left(C^2 + 2g\Sigma \frac{l_x \cos. \beta_x}{\cos.^2 \alpha_x} e^{-\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x} \right)$$

nella quale C^2 esprime la costante arbitraria, ed e la solita base; e perciò la velocità del corpo alla fine del lato x esimo, cioè

$$v_x = e^{\Sigma \log. \cos. \alpha_x} \sqrt{C^2 + 2g\Sigma \frac{l_x \cos. \beta_x}{\cos.^2 \alpha_x} e^{-\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x}}.$$

Percorrendosi il lato BC con moto uniformemente accelerato, si avrà, per ciò che si dimostra nella teorica ordinaria di questo movimento

$$v_{x+1} = v_x \cos. \alpha_x + g \cos. \beta_x \Delta t_x ;$$

cioè la velocità alla fine del lato $(x+1)$ esimo eguale a quella colla quale ha cominciato a percorrerlo, più il prodotto della forza acceleratrice, costante per tutto questo lato, moltiplicata pel tempo corso nel percorrerlo; e però

$$\Delta t_x = \frac{v_{x+1} - v_x \cos. \alpha_x}{g \cos. \beta_x}, \text{ ossia}$$

$$\Delta t_x = \frac{e^{\Sigma \log. \cos. \alpha_{x+1}}}{g \cos. \beta_x} \Delta \sqrt{C^2 + 2g\Sigma \frac{l_x \cos. \beta_x}{\cos.^2 \alpha_x} e^{-\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x}},$$

ponendo in luogo di v_x, e di v_{x+1} i loro valori. Quindi integrando quest'ultima espressione di Δt_x relativamente alla x, e trovando opportunamente l'arbitraria, avrassi il tempo corso nell'arrivare in B, cioè il dimandato.

Nella soluzione presente abbiamo supposto tacitamente che il poligono fosse nel voto, passiamo adesso a sciogliere la stessa proposizione, nella ipotesi che esso sia in un mezzo resistente.

È dimostrato nella teorica del moto scendente dei gravi ne' mezzi resistenti, che $-2ms = \log. \frac{\phi - mu^2}{\phi - ma^2}$, esprimendo m il nostro prodotto gk^2, ed s, $\vec{\varphi}$, a, ed u, al solito, lo spazio, la forza acceleratrice costante, la velocità iniziale, e la finale; adunque, supponendo $s = l_x$, $\vec{\varphi} = g \cos. \beta_x$, $a = v_x \cos. \alpha_x$, ed $u = v_{x+1}$,

$$\text{si avrà } 2ml_x = \log. \frac{\cos. \beta_x - k^2 v^2_x \cos.^2 \alpha_x}{\cos. \beta_x - k^2 v^2_{x+1}};$$

cioè ordinando rispetto alla velocità v_x, sarà

$$v^2_{x+1} - e^{-2ml_x} \cos.^2 \alpha_x v^2_x = \frac{\cos. \beta_x}{k^2} \left(1 - e^{-2ml_x}\right):$$

equazione la quale integrata colla regola anzi accennata, dà immediatamente

$$v_x = e^{\Sigma \log. e^{-ml_x} \cos. \alpha_x} \sqrt{\left(A^2 + \frac{1}{k^2} \Sigma \frac{(e^{2ml_x} - 1) \cos. \beta_x}{\cos.^2 \alpha_x} e^{-\Sigma \log. e^{-2ml_x} \cos.^2 \alpha_x}\right)}$$

A^2 esprimendo la costante arbitraria, la quale si determinerà secondo le circostanze.

Nella teorica medesima del moto dei gravi, si dimostra anche, che

$$2\theta \sqrt{m\vec{\varphi}} = \log. \frac{(\sqrt{\phi} + u\sqrt{m})(\sqrt{\phi} - a\sqrt{m})}{(\sqrt{\phi} - u\sqrt{m})(\sqrt{\phi} + a\sqrt{m})},$$

θ rappresentando il tempo; e perciò, supponendo in questa equazione $\theta = \Delta t_x$, si avrà

$$2gk\Delta t_x \sqrt{\cos. \beta_x} = \log. \frac{(\sqrt{\cos. \beta_x} + kv_{x+1})(\sqrt{\cos. \beta_x} - kv_x \cos. \alpha_x)}{(\sqrt{\cos. \beta_x} - kv_{x+1})(\sqrt{\cos. \beta_x} + kv_x \cos. \alpha_x)}.$$

Quindi integrando il valore di Δt_x cavato da quest'ultima

equazione, ed estendendo l'integrale fra i limiti prescritti, si otterrà il tempo dimandato t_x.

Corollario 1. Supponendo nell'ultima espressione della velocità $k=0$, cioè supponendo trascurabile la resistenza del mezzo nel quale è posto il poligono, si ha

$$v_x = e^{\Sigma \log.\cos.\alpha_x}\sqrt{A^2+\Sigma\tfrac{0}{0}},$$

cioè un apparentemente indeterminato e di secondo ordine; e però il valore dell'integrale, che diventa indeterminato in questo caso, sarà eguale all'integrale finito del differenziale secondo del numeratore

$$(e^{2ml_x}-1)\cos.\beta_x\, e^{-\Sigma\log. e^{-2ml_x}\cos.^2\alpha_x},$$

diviso per quello del denominatore $k^2\cos.^2\alpha_x$, presi ambedue questi differenziali rispetto alla k, e fatto poscia in essi $k=0$ (§. 50): operazioni le quali eseguite danno

$$\Sigma\tfrac{0}{0} = 2g\Sigma\frac{l_x\cos.\beta_x}{\cos.^2\alpha_x}\, e^{-\Sigma\log.\cos.^2\alpha_x};\ \text{e perciò}$$

$$v_x = e^{\Sigma\log.\cos.\alpha_x}\sqrt{A^2+2g\Sigma\frac{l_x\cos.\beta_x}{\cos.^2\alpha_x}\, e^{-\Sigma\log.\cos.^2\alpha_x}},$$

come abbiamo superiormente trovato.

Corollario 2. Se il poligono fosse piano, e i lati e gli angoli fossero fra loro eguali, e che il primo lato cadesse secondo la verticale OH, si avrebbe, mediante la equazione $\beta_x = x\alpha$

$$v_x = \cos.^x\alpha\, e^{-mlx}\sqrt{A^2+\frac{e^{2ml}-1}{k^2\cos.^2\alpha}\Sigma\frac{\cos.x\alpha}{\cos.^{2x}\alpha}\, e^{2mlx}},$$

ossia facendo l'integrazione ancora semplicemente indicata

$$v_x = \cos.^x\alpha\, e^{-mlx}\sqrt{\left(A^2+\frac{e^{2ml}-1}{k^2\cos.^2\alpha}\cdot\frac{M\cos.x\alpha+N\,\text{sen.}\,x\alpha}{M^2+N^2}\cdot\frac{e^{2mlx}}{\cos.^{2x}\alpha}\right)},$$

supposto $\frac{e^{2ml}-\cos.\alpha}{\cos.\alpha}=M$, e $\frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.^2\alpha}\, e^{2ml}=N$.

Corollario 3. Ammesso che abbiano luogo simultaneamente le cose espresse nei due Corollari antecedenti, avrassi

$$v_x = \cos.^x\alpha\sqrt{\left(A^2+\frac{2gl}{\cos.^2\alpha}\cdot\frac{M\cos.x\alpha+N\,\text{sen.}\,x\alpha}{M^2+N^2}\cdot\cos.^{-2x}\alpha\right)},$$

essendo qui $M=\frac{1-\cos.\alpha}{\cos.\alpha}$, ed $N=\frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.^2\alpha}$.

Corollario 4. Nel caso che il poligono fosse tutto in un piano orizzontale, sarebbe β_x un angolo retto; e perciò

$$v_x = Ae^{\Sigma \log. e^{-m}} \cos. a_x .$$

E se il poligono fosse, di più, nel vòto, o fosse trascurabile la resistenza del mezzo, si avrebbe $v_x = Ae^{\Sigma \log. \cos. a_x}$, ovvero (§. 28)

$v_x = A \cos. a_{x-1} \cos. a_{x-2} \cos. a_{x-3} \ldots\ldots \cos. a_2 \cos. a_1 \cos. a_0$; di più se gli angoli fossero tra di loro uguali, quest'ultima espressione darebbe $v_x = A \cos.^x a$, cioè le successive velocità $v_0, v_1, v_2, \ldots\ldots v_{x-2}, v_{x-1}, v_x, \ldots$ formerebbero una progressione geometrica decrescente.

Osservazione 1. Ommetto qui un Corollario simile al secondo della prima proposizione, ed altri quattro rispetto al tempo analoghi agli anzi esposti per la velocità, perchè sarebbero quasi una ripetizione di quelli, e passo invece a generalizzare la proposizione esposta, cioè ad indicare come si possono trovare la velocità, e il tempo, nella ipotesi di qualunque poligono e di qualsivoglia moto ordinario, lungo a ciascun lato; tali però, come qui sotto suppongansi.

Qualunque sia il poligono dato, cioè sia a semplice, o a doppia inflessione, rettilineo, o curvilineo, ovvero mistilineo, rappresentando colla l_x la lunghezza del suo lato $(x+1)$ esimo, e colla $f(\theta)$ una funzione del tempo θ, la quale sia eguale allo zero con esso nel principio dell'$(x+1)$ esimo lato, e dia lo spazio percorso nel moto col quale il corpo percorre lo stesso lato, si avranno le due equazioni

$$l_x = f(\Delta t_x), \text{ e } v_{x+1} = \left(\frac{df(\Delta t_x)}{d\Delta t_x}\right),$$

colle quali si otterranno, siccome superiormente, i valori della velocità v_x, e del tempo t_x.

Osservazione 2. Conoscendo il poligono e la sua posizione, e però le espressioni del lato l_x, e degli angoli a_x, β_x, abbiamo veduto, come si possono trovare i valori e della velocità v_x e del tempo t_x; reciprocamente, conoscendo le espressioni del tempo t_x e della velocità v_x, e di un'altra del-

le cinque quantità l_x, a_x, β_x contenute anch' esse nelle due equazioni, che hanno servito per risolvere la proposizione diretta, troveransi facilmente le altre due. In generale, date tre delle stesse cinque quantità, si potranno rinvenire, colle medesime equazioni, le altre due corrispondenti: anzi le stesse tre quantità che le medesime equazioni lasciano indeterminate in modo tale, che il poligono abbia qualche singolare proprietà.

Osservazione 3. Volendo paragonare fra loro gli elementi dei moti di due o più corpi, che percorrono un medesimo poligono, ovvero poligoni diversi, che hanno tra loro dei rapporti dati, coll'ajuto delle formole esposte nella proposizione anzi trattata, si potranno seguire le stesse regole, che seguonsi in casi simili, quando i moti sono ordinarj; ossia quella che si seguirà nell'esempio seguente, esposto per tale soggetto, la quale è particolare alla natura del moto di cui si parla in questa Memoria.

Esempio. „ Quale distanza avranno due corpi, che per„ corrono lo stesso poligono rettilineo . . . ABC . . . (*Fig.* 1) „ interamente posto in un piano orizzontale, quando il più „ avanzato di essi sarà arrivato all'angolo x esimo B, essen„ do v_1, v'_1 le velocità colle quali hanno percorso il primo „ lato del medesimo poligono, ed m la distanza che aveva„ no quando il più avanzato trovavasi alla fine dello stesso „ lato; e tale essendo il poligono, che il primo corpo non „ arriva giammai alla fine di un lato qualunque, prima che „ non sia arrivato al medesimo il secondo corpo.

Soluzione. Supponendo il primo corpo giunto all'angolo x esimo B, e il secondo in n, δ_x la distanza nB cercata, v_x la velocità colla quale il primo corpo percorre l'x esimo lato AB, e v'_x quella del secondo, sarà $\delta_x : v'_x$ il tempo corso nel passare il secondo corpo dal punto n all'angolo x esimo B; e perciò $\delta_x : v'_x$ moltiplicato per la velocità v_{x+1}, ossia il prodotto $\delta_x v_{x+1} : v'_x$ sarà lo spazio o porzione del lato $(x+1)$ esimo BC, che avrà percorso nel medesimo tempo

$\delta_x : v'_x$ il primo corpo; quindi alla fine di questo medesimo tempo sarà esso distante dall'angolo $(x+1)$ esimo C, di

$$l_{x+1} - \frac{\delta_x}{v'_x} v_{x+1} :$$

distanza o spazio, che percorrerà evidentemente nel tempo espresso da

$$\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x}.$$

Ma in questo stesso tempo il secondo corpo percorre lo spazio o porzione

$$\left(\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x}\right) v'_{x+1}$$

del medesimo $(x+1)$ esimo lato BC; adunque arrivato che sia il primo corpo, ossia il più avanzato all'angolo $(x+1)$ esimo, la distanza di essi sarà eguale ad

$$l_{x+1} - \left(\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x}\right) v'_{x+1};$$

e per tanto si avrà, fra le funzioni incognite δ_x, δ_{x+1} dimandate, la equazione

$$\delta_{x+1} = l_{x+1} - \left(\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x}\right) v'_{x+1},$$

la quale si riduce evidentemente, col Corollario ultimo della proposizione anzi esposta alla seguente

$$\delta_{x+1} - \cos. \alpha_x \delta_x = \frac{v_1 - v'_1}{v_1} l_{x+1},$$

che integrata dà (§. 40)

$$\delta_x = e^{\Sigma \log. \cos. \alpha_x} \left(B + \frac{v_1 - v'_1}{v_1} \Sigma \frac{l_{x+1}}{\cos. \alpha_x} e^{-\Sigma \log. \cos. \alpha_x}\right),$$

B rappresentando la costante arbitraria introdotta dalla integrazione, la quale si determinerà col soddisfare, con essa, alla equazione data $\delta_1 = m$.

Del

Del moto sulla superficie di un poliedro dato.

Proposizione IV.

„ Determinare le quantità dalle quali dipende la cono-
„ scenza sì geometrica che meccanica dello stato di un corpo
„ obbligato a scorrere sopra la superficie di un dato poliedro
„ di faccie piane, conoscendo le equazioni delle successive
„ faccie del medesimo poliedro nelle quali trovansi i lati del
„ poligono che descrive il corpo, e la grandezza e direzione
„ della velocità colla quale comincia a moversi sulla medesi-
„ ma superficie, supposto che non sia stimolato da veruna
„ forza acceleratrice.

Soluzione. Siano $u^{(x)}$, $y^{(x)}$, e $z^{(x)}$ le coordinate di un punto qualunque di quel piano di cui è porzione la faccia del poliedro nella quale vi è il lato x esimo del poligono descritto dal corpo; $u^{(x+1)}$, $y^{(x+1)}$, e $z^{(x+1)}$ di quel nel quale vi è la faccia in cui trovasi il lato $(x+1)$ esimo; e

$$z^{(x)} + A_x u^{(x)} + B_x y^{(x)} + C_x = 0,$$
$$z^{(x+1)} + A_{x+1} u^{(x+1)} + B_{x+1} y^{(x+1)} + C_{x+1} = 0$$

le equazioni dei piani medesimi, A_x, B_x, e C_x rappresentando i tre soliti parametri, in questo caso funzioni conosciute della x, dai quali si fa dipendere ordinariamente la posizione del piano rispetto a tre assi ortogonali.

Similmente, siano $u_i^{(x)}$, $y_i^{(x)}$ le coordinate di un punto qualunque della projezione, sul piano delle coordinate u, y della retta nella quale si trova il lato x esimo del poligono che descrive il corpo; $u_i^{(x+1)}$, $y_i^{(x+1)}$ quelle della projezione di quella retta nella quale vi è il lato seguente; ed

$$y_i^{(x)} + a_x u_i^{(x)} + \beta_x = 0, \; y_i^{(x+1)} + a_{x+1} u_i^{(x+1)} + \beta_{x+1} = 0$$

le loro equazioni, a_x, e β_x esprimendo due funzioni incognite del numero x, dalle quali dipende, evidentemente, la conoscenza dello stato geometrico del corpo.

In ultimo,

$$z + M_x u + N_x y + P_x = 0$$

sia la equazione del piano che passa pel lato x esimo del poligono suddetto, perpendicolarmente alla faccia del poliedro nella quale vi è il lato $(x+1)$ esimo dello stesso poligono; cioè li suoi parametri M_x, N_x, e P_x abbiano le relazioni espresse dalle seguenti equazioni

$$M_x - N_x\alpha_x + B_x\alpha_x - A_x = 0,$$
$$P_x - N_x\beta_x + B_x\beta_x - C_x = 0,$$
$$1 + M_xA_{x+1} + N_xB_{x+1} = 0.$$

Se la velocità che ha il corpo alla fine del lato x esimo del poligono che esso descrive, cioè nell'istante che urta nel piano della faccia del poliedro nella quale vi è il lato $(x+1)$ esimo del poligono stesso, si scompone in due, una perpendicolare e l'altra secondo il piano medesimo, la prima di queste componenti sarà interamente distrutta dal piano stesso, e la seconda sarà quella colla quale continuerà il movimento, descrivendo il lato $(x+1)$ esimo: e siccome la direzione di questa componente cade nella intersezione dei due piani espressi dalle equazioni

$$z^{(x+1)} + A_{x+1}u^{(x+1)} + B_{x+1}y^{(x+1)} + C_{x+1} = 0,$$
$$z + M_xu + N_xy + P_x = 0,$$

per cui ha per projezione sul piano delle coordinate u, y una retta avente per equazione

$$y^{(x+1)} + \frac{A_{x+1} - M_x}{B_{x+1} - N_x}u^{(x+1)} + \frac{C_{x+1} - P_x}{B_{x+1} - N_x} = 0,$$

la quale risulta eliminando l'ordinata z dalle due antecedenti: così, quest'ultima equazione, che rappresenta la projezione della direzione della velocità, sul piano delle coordinate u, y, colla quale il corpo percorre il lato $(x+1)$ esimo del poligono che esso descrive, dovrà coincidere colla equazione supposta del medesimo lato, cioè colla seguente

$y_1^{(x+1)} + \alpha_{x+1}u_1^{(x+1)} + \beta_{x+1} = 0$; e perciò sarà

$$\alpha_{x+1} = \frac{A_{x+1} - M_x}{B_{x+1} - N_x}, \text{ e } \beta_{x+1} = \frac{C_{x+1} - P_x}{B_{x+1} - N_x}.$$

Vale a dire fra le cinque funzioni ancora incognite M_x, N_x, P_x, α_x, e β_x si avranno le cinque equazioni seguenti

$$M_x - N_x a_x + B_x a_x - A_x = 0,$$
$$P_x - N_x \beta_x + B_x \beta_x - C_x = 0,$$
$$1 + M_x A_{x+1} + N_x B_{x+1} = 0,$$
$$M_x - A_{x+1} + (B_{x+1} - N_x)\, a_{x+1} = 0,$$
$$N_x - C_{x+1} + (B_{x+1} - N_x)\, \beta_{x+1} = 0,$$

colle quali si potranno esse determinare.

Ponendo nella terza e quarta di queste equazioni in luogo della M_x il suo valore desunto dalla prima di esse, si ottengono le due nuove equazioni

$$\Delta(B_x a_x - A_x) - N_x \Delta a_x = 0,$$
$$1 + A_x A_{x+1} - B_x B_{x+1} a_x + (B_x + A_{x+1} a_x) N_x = 0;$$

e da queste eliminando la N_x, ed ordinando rispetto alla a_x la equazione risultante, hassi la sola equazione delle differenze finite seguente

$$(B)\ldots A_{x+1}\Delta B_x a_x a_{x+1} + (A_x A_{x+1} + B^2_{x+1} + 1) a_{x+1} - (A^2_{x+1} + B_x B_{x+1} + 1) a_x - B_{x+1}\Delta A_x = 0$$

dalla cui integrazione dipende attualmente il valore della funzione a_x.

Per integrare quest'ultima equazione, suppongasi

$$a_x = \xi_x - \frac{A_x A_{x+1} + B^2_{x+1} + 1}{A_{x+1}\Delta B_x},$$

ξ_x esprimendo una nuova funzione incognita, e si avrà

$$\xi_x \xi_{x+1} - d_x \xi_x - e_x = 0$$

supposto $\dfrac{1 + A_x A_{x+1} + B^2_{x+1}}{A_{x+2}\Delta B_{x+1}} + \dfrac{1 + A^2_{x+1} + B_x B_{x+1}}{A_{x+1}\Delta B_x} = d_x$, e

$$\frac{B_{x+1}\Delta A_x}{A_{x+1}\Delta B_x} - \frac{(A_x A_{x+1} + B^2_{x+1} + 1)(A^2_{x+1} + B_x B_{x+1} + 1)}{(A_{x+1}\Delta B_x)^2} = e_x,$$

la quale dà immediatamente

$$\xi_x = d_{x+1} + \frac{e_{x-1}}{d_{x-2} +} \frac{e_{x-2}}{d_{x-3} +} \frac{e_{x-3}}{\ddots} \; \frac{e_2}{d_1 +} \frac{e_1}{\xi_1}.$$

Quindi l'integrale completo della equazione (B) sarà

$$a_x = -\frac{1 + A_x A_{x+1} + B^2_{x+1}}{A_{x+1}\Delta B_x} + d_{x-1} + \frac{e_{x-1}}{d_{x-2} +} \frac{e_{x-2}}{d_{x-3} +} \frac{e_{x-3}}{\ddots} \; \frac{e_2}{d_1 +} \frac{e_1}{\xi_1},$$

ξ_1 esprimendo la costante arbitraria.

Dalle medesime cinque equazioni desumonsi anche i valori delle altre quattro funzioni M_x, N_x, β_x, P_x; cioè

$$M_x = A_x - B_x a_x + \frac{a_x}{\Delta a_x}\Delta(B_x a_x - A_x),$$

$$N_x = \frac{\Delta(B_x a_x - A_x)}{\Delta a_x},$$

$$\beta_x = \left(F + \Sigma \frac{\Delta C_x}{B_x - N_x} e^{\Sigma \log. \frac{B_{x+1} - N_x}{B_x - N_x}}\right) e^{\Sigma \log. \frac{B_x - N_x}{B_{x+1} - N_x}}, \text{ e}$$

$$P_x = C_x + (N_x - B_x)\beta_x,$$

F esprimendo una nuova costante arbitraria introdotta da una integrazione eseguita di una equazione lineare di primo ordine.

Le costanti ξ_1, ed F introdotte dalle integrazioni, determineransi col soddisfare, con esse, alle due condizioni espresse nel dato della proposizione; cioè che il corpo parte da un punto dato di una faccia del poliedro, vale a dire di quella nella quale trovasi il primo lato del poligono che esso descrive; e che dirigesi secondo una retta di direzione, pure data.

Ponendo nella equazione

$$y_i^{(x)} + a_x u_i^{(x)} + \beta_x = 0$$

invece delle funzioni a_x, β_x i loro valori trovati sopra, otterrassi la equazione della projezione sul piano delle coordinate u, y, del lato x esimo del poligono che descrive il corpo, la quale combinata coll'altra della faccia x esima del poliedro, cioè colla

$$z^{(x)} + A_x u^{(x)} + B_x y^{(x)} + C_x = 0;$$

ovvero combinata colla seguente

$$z^{(x)} + (A_x - B_x a_x) u^{(x)} - B_x \beta_x + C_x = 0,$$

che risulta eliminando la $y^{(x)}$ dalle due antecedenti, darà la posizione del medesimo lato x esimo del poligono descritto dal corpo.

Chiamate u_x, y_x, e z_x le tre coordinate del vertice dell'angolo formato dai lati x, $(x+1)$ esimi del poligono suddetto, avransi, fra esse, evidentemente le tre equazioni

$$y_x + a_x u_x + \beta_x = 0,$$
$$y_x + a_{x+1} u_x + \beta_{x+1} = 0,$$
$$z_x + (A_x - B_x a_x) - B_x \beta_x + C_x = 0,$$

le quali danno $u_x = -\frac{\Delta \beta_x}{\Delta a_x}$,

$$y_x = \frac{a_x \Delta \beta_x - \beta_x \Delta a_x}{\Delta a_x},$$

$$z_x = \frac{A_x \Delta \beta_x - C_x \Delta a_x + B_x (\beta_x \Delta a_x - a_x \Delta \beta_x)}{\Delta a_x},$$

per le coordinate del vertice dell'angolo sopradetto.

Ora, conoscendosi le equazioni dei vertici degli angoli del poligono che descrive il corpo, cioè le così dette equazioni del medesimo poligono, e perciò il poligono stesso; e pel dato della proposizione, conoscendosi la velocità colla quale il corpo descrive il primo lato del medesimo poligono, facilissimamente colla proposizione antecedente si determineranno tutte le altre quantità dalle quali dipende la conoscenza completa dello stato del corpo ad un istante qualunque del suo movimento.

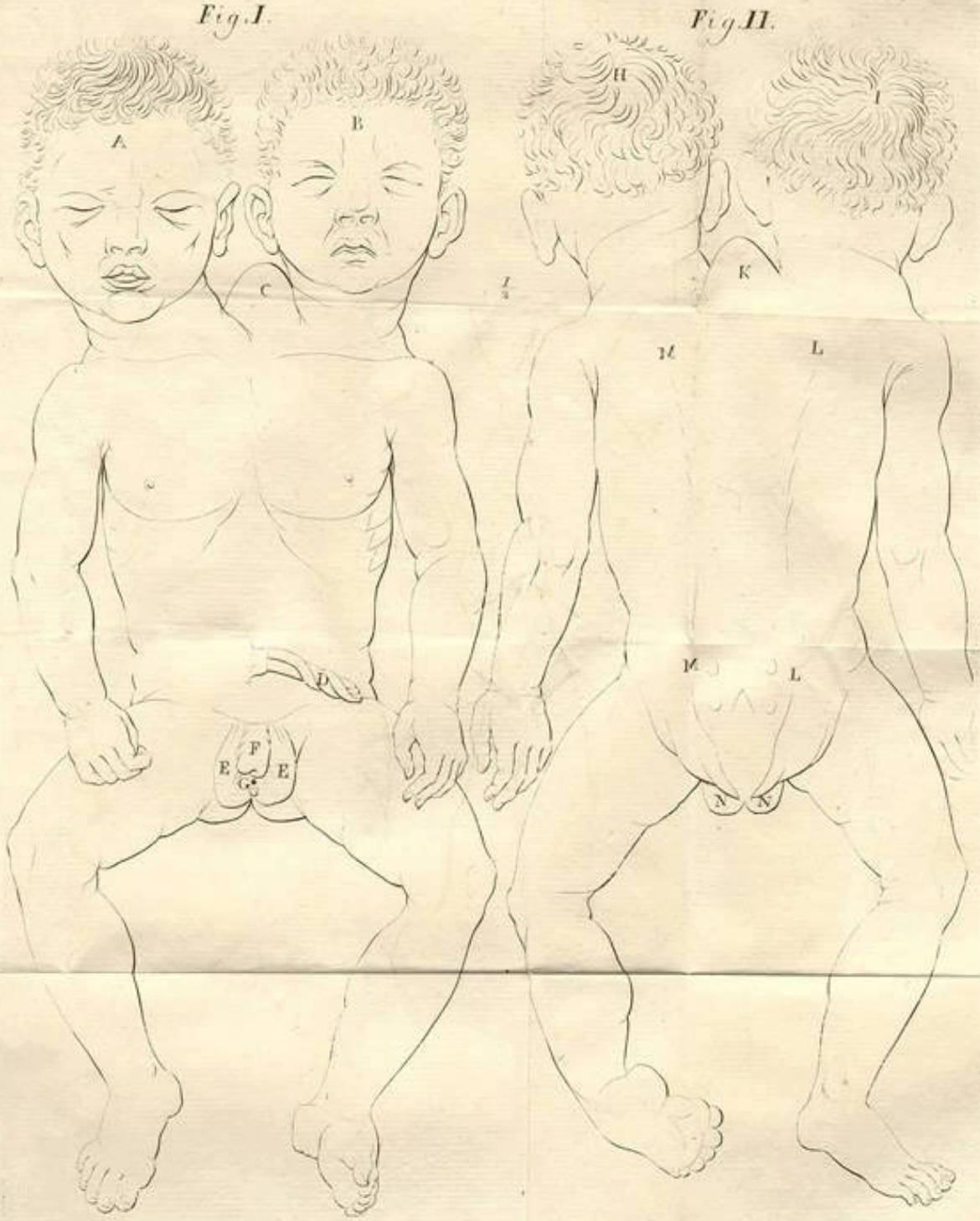
Osservazione. Se i piani delle faccie del poliedro nelle quali vi sono i lati del poligono descritto dal corpo, fossero perpendicolari al piano delle coordinate z, y, od a quello delle u, z, si avrebbe nel primo caso $A_x = 0$, e nel secondo $B_x = 0$; e però la equazione (B) delle differenze finite, trovata superiormente, diventerebbe

$$(1 + B^2_{x+1}) a_{x+1} - (B_x B_{x+1} + 1) a_x = 0, \text{ od}$$
$$(1 + A_x A_{x+1}) a_{x+1} - (1 + A^2_{x+1}) a_x = 0,$$

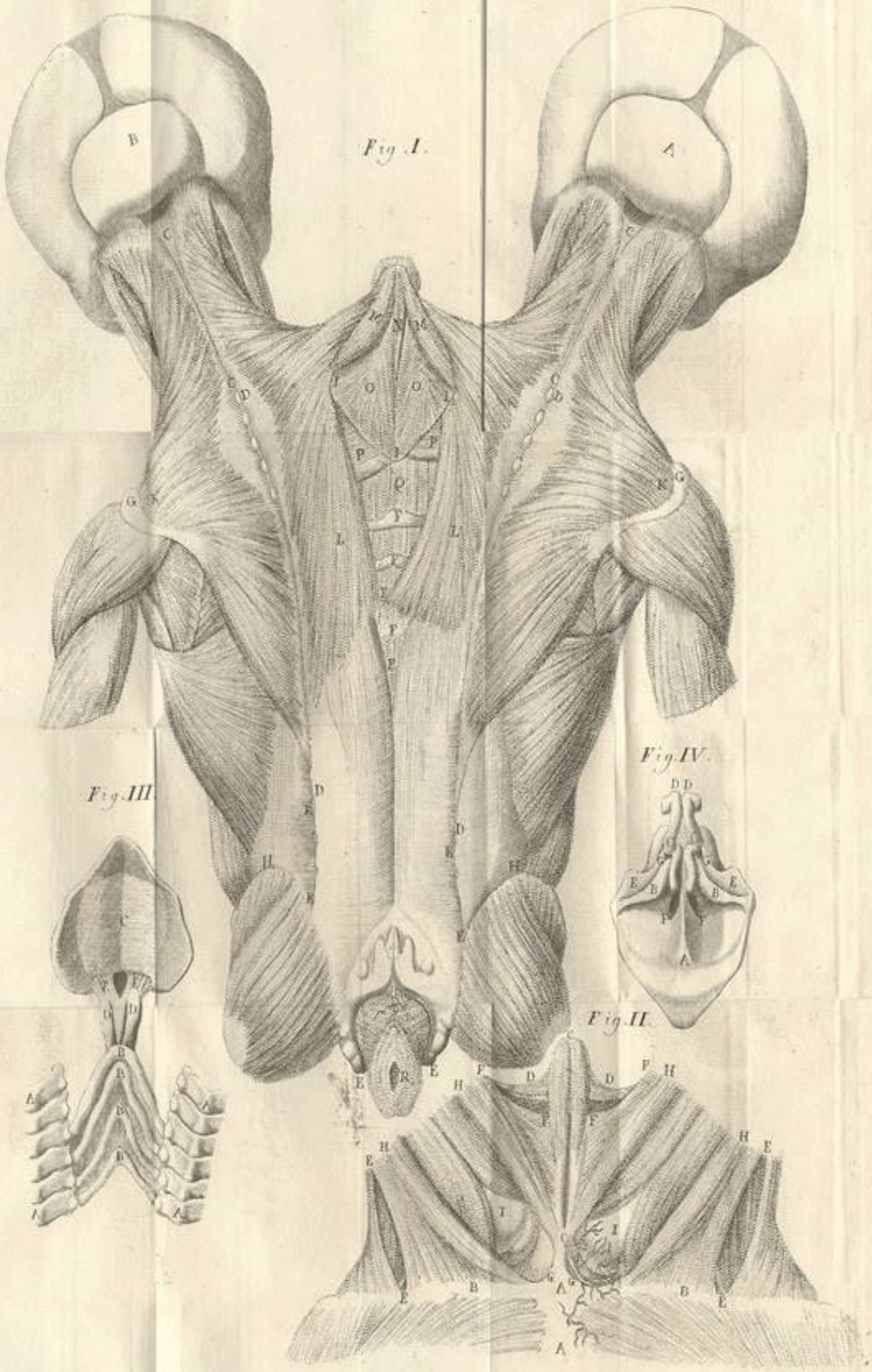
le quali sono integrabili colla stessa regola colla quale s'integrano tutte le equazioni del primo ordine lineari (§. 40).

Esempio. Le faccie del poliedro nelle quali vi sono i lati del poligono descritto dal corpo siano perpendicolari tutte al piano delle coordinate u, z sopra i lati del poligono equilatero inscritto in un cerchio avente il centro nella origine delle coordinate, e per raggio r, e di cui cadaun lato sottenda un arco, della circonferenza del medesimo circolo, di

T. IV. Parte Fisica Soc. Ital. Tom. XVII. Pag. 182.



Antonio Serantoni disegn. e incise



Natalis Sermatica disegn. e incise

T. VI.

Fig. IV.

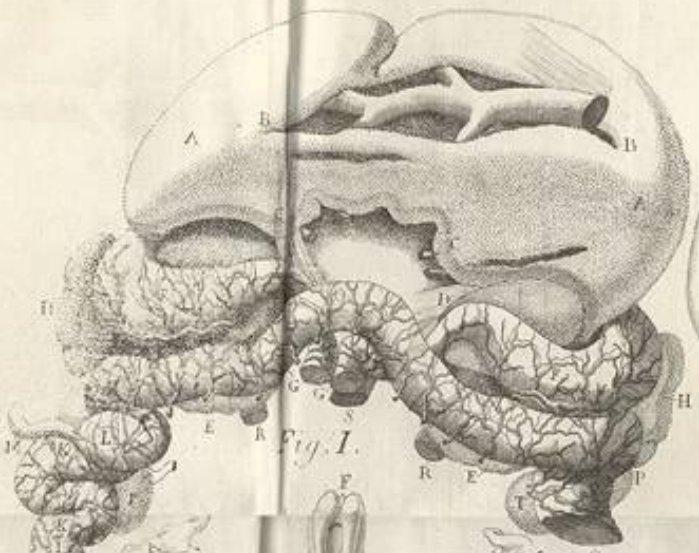


Fig. III.

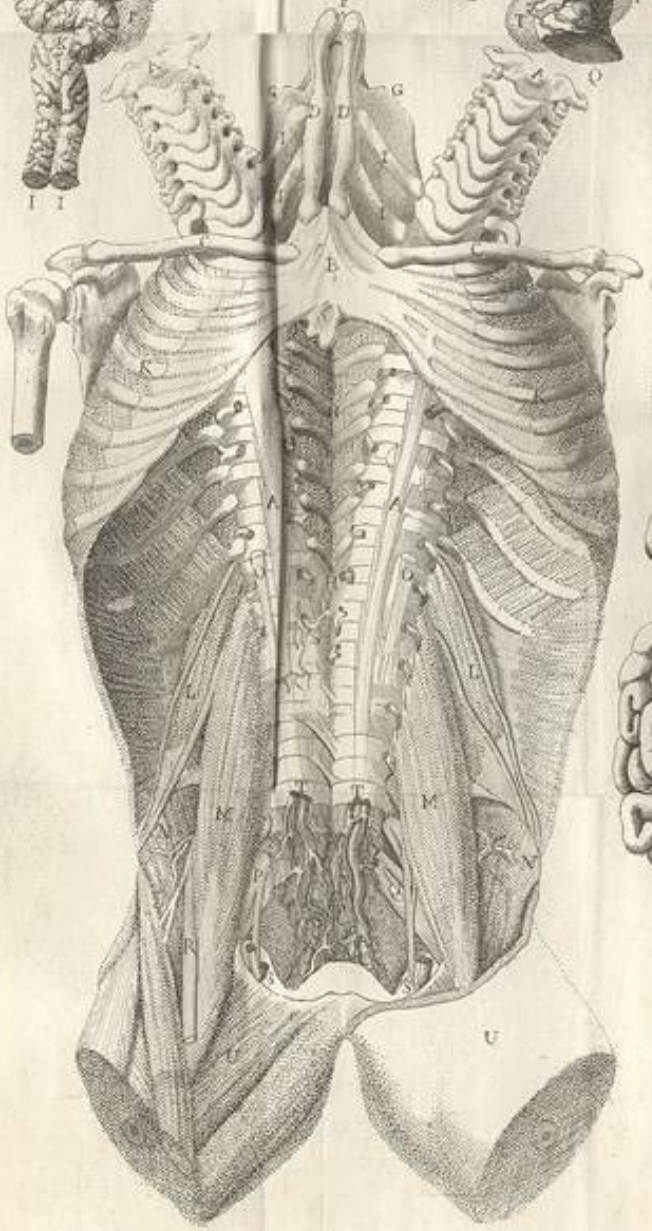


Fig. II.

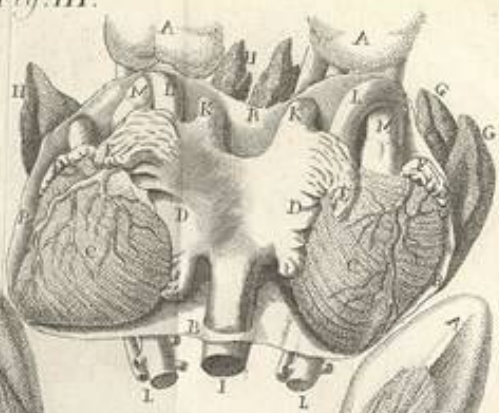
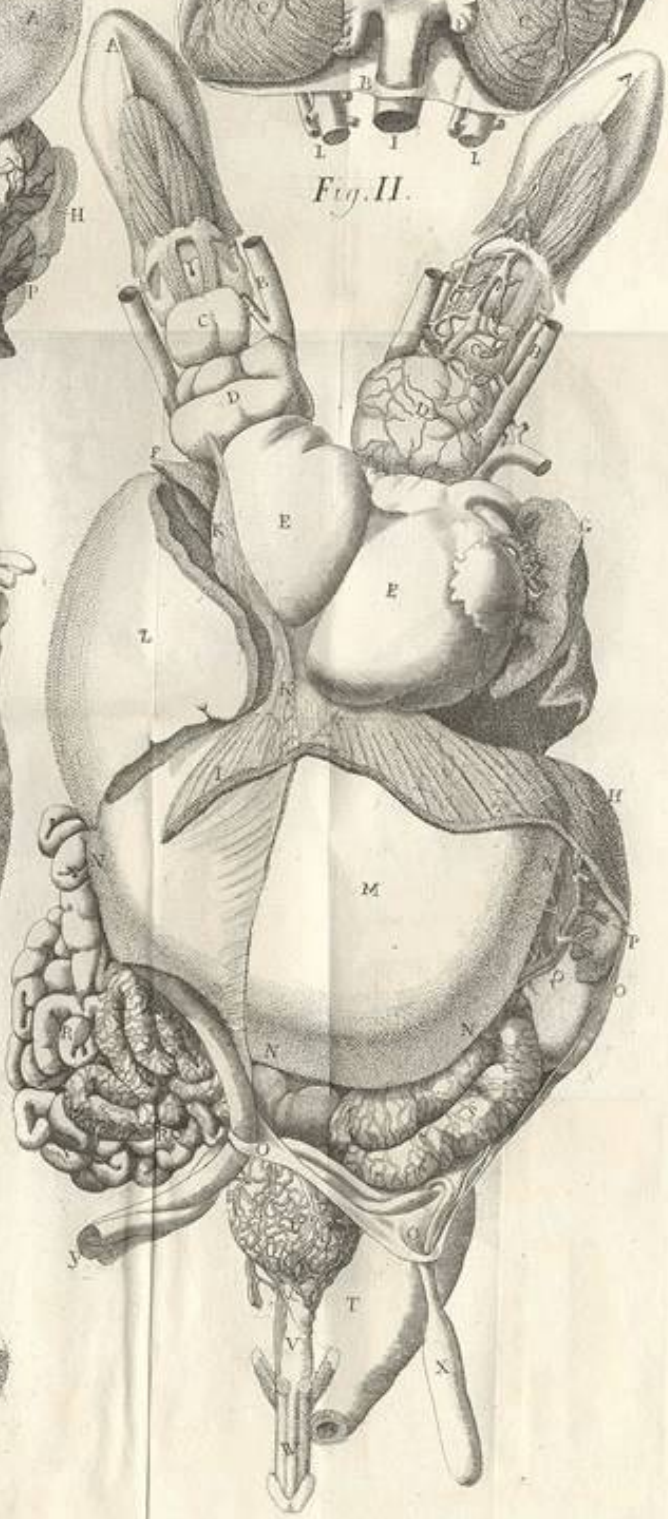


Fig. I.



Antonio Serantoni direx.e incis.

Parte Fisica

Soc. Ital. Tom. XVII. Pag. 180.

gradi a; cioè sia

$$z^{(x)} - \frac{\Delta \cos. xa}{\Delta \text{ sen. } xa} u^{(x)} - r \frac{\text{sen. } a}{\Delta \text{ sen. } xa} = 0$$

la equazione del piano della faccia del poliedro nella quale trovasi il lato x esimo del poligono che descrive il corpo, e si avrà

$A_x = -\frac{\Delta \cos. xa}{\Delta \text{ sen. } xa}$, $B_x = 0$, e $C_x = -r \frac{\text{sen. } a}{\Delta \text{ sen. } xa}$; e perciò

$1 + A_x A_{x+1} = 2(1 - \cos. a) \cos. a : \Delta \text{sen. } ax \Delta \text{sen. } (x+1)a$, ed

$1 + A^2_{x+1} = 2(1 - \cos. a) : (\Delta \text{sen. } (x+1)^2$.

Quindi la seconda delle ultime equazioni qui sopra esposte, diventerà, in questo caso,

$$a_{x+1} - \frac{\Delta \text{sen. } (x+1)a}{\cos. a \Delta \text{ sen. } xa} a_x = 0,$$

la quale integrata, colla regola sopra accennata, dà

$$a_x = T : \cos.^x a \Delta \text{ sen. } xa,$$

T esprimendo la costante arbitraria.

Ommetto alcune altre osservazioni rispetto alla equazione (B), perchè sarebbero relative a dei casi particolarissimi della proposta proposizione: come pure, tralascio di trattare la proposizione medesima nella ipotesi che le faccie del poliedro sieno superficie qualsivogliano, ed il moto in ciascuna di esse qualunque, ordinario, o discreto esso medesimo; giacchè pochissimo potrei sviluppare la sua dichiarazione, nello stato attuale della analisi, abbracciando questa generalità.

Del moto semilibero.

Un corpo che si move liberamente urti in una linea o in una superficie data per cui sia esso obbligato, continuando il movimento, a moversi ancora liberamente, ma con un altro moto della medesima o di diversa specie dell'antecedente; di nuovo, dopo un certo tempo, urti altrove nella linea o superficie già urtata, o in un'altra differente, e ven-

ga obbligato nuovamente a moversi con un altro moto della stessa natura, o di natura diversa dalle due precedenti: e così continui indefinitamente il suo moto.

Il moto di questo corpo, il quale dipende evidentemente dalle linee o superficie urtate di mano in mano, senza percorrerle, lo chiameremo *semilibero*. Ed incomincieremo a parlare di esso colla proposizione che qui segue, la quale fu trattata già da altri, e particolarmente da *Francesco M. Zanotti* per via sintetica, e dal Sig. *Luigi Forni* per via analitica, ma sempre però nella ipotesi che il corpo fosse perfettamente elastico, e che il moto si facesse nel vòto, circostanze le quali rendono sì facile la soluzione di essa, che sembra allora di tutt'altra natura.

Proposizione V.

„ Trovare la velocità colla quale un corpo di elasticità „ imperfetta percuote un lato qualunque di un poligono da„ to posto in un piano orizzontale, l'angolo d'incidenza, la „ posizione del punto della percossa, ed il tempo corso, co„ noscendo queste quattro quantità pel primo lato; e sa„ pendo che il corpo è stato riflesso dal primo lato contro „ il secondo, dal secondo contro il terzo, da questo contro „ il quarto, e così di mano in mano da un lato contro il „ suo seguente; e che tutto è succeduto in un mezzo resi„ stente.

Soluzione. Sia . . . ABC . . . il poligono dato (*Fig.* 2); $AB = l_x$, $BC = l_{x+1}$, . . . i suoi lati x, $x+1$, . . . esimi; B l'x esimo angolo; E il punto della percossa x esima, e D della $(x+1)$ esima; t_x il tempo corso nell'arrivare in E, e Δt_x quello decorso nel percorrere ED; s_x lo spazio trascorso dal principio del moto, ossia dalla prima percossa, sino in E, e però $\Delta s_x = ED$; v_x la velocità alla fine del lato x esimo EF del poligono che descrive il corpo, ossia la cercata, e v_{x+1} quella alla fine dell'$(x+1)$ esimo lato dello stesso poligono;

$AE = \beta_x$, $BD = \beta_{x+1} \ldots$; il poligono EAF ... sino a tutto il primo lato del medesimo poligono dato uguale a c_x; a_x, $a_{x+1}, \ldots$ finalmente, siano le tangenti degli angoli B, C, ... del poligono dato, ed ω_x, $\omega_{x+1} \ldots$ quelle degli angoli d'incidenza dimandati.

Benchè in questa proposizione siano molte le quantità incognite, nulla di meno, la sola tangente dell'angolo d'incidenza è quella tra esse, che abbia colle quantità cognite, un immediato rapporto, il quale sia indipendente dalle altre quantità incognite; e per questo, comincieremo la soluzione colla ricerca della espressione generale dell'angolo d'incidenza dimandato, cioè della sua tangente.

Essendo la somma degli angoli BED, EDB, DBE eguale a due retti, sarà la tangente di uno di essi, per esempio di EDB eguale a meno quella della somma degli altri due; cioè

tang.EDB=(tang.BED+tang.DBE):(tang.BED tang.DBE−1);

e sostituendo a_x, $r\omega_x$, ed ω_{x+1} invece di tang.DBE, tang.BED, tang. EDB, ed ordinando la equazione risultante rispetto alla ω_x, si avrà

$$(C) \ldots . ra_x\omega_x\omega_{x+1} - \omega_{x+1} - r\omega_x - a_x = 0 :$$

equazione la quale integrata, darà la espressione della tangente di un angolo qualunque d'incidenza, esprimendo essa, come si vede, la relazione fra le tangenti di due di questi angoli tra di loro contigui.

Per avere l'integrale della equazione (C), supponghiamo

$$\omega_x = \frac{a_x}{a_x - r},$$

esprimendo la a_x una nuova funzione incognita, ed avremo

$$a_x a_{x+1} - A_x a_x - B_x = 0,$$

supposto $r\frac{1+a^2_x}{a_x} a_{x+1} = B_x$, ed $\frac{ra_x - a_{x+1}}{a_x} = A_x$, la quale equazione dà

$$a_x = A_{x-1} + \frac{B_{x-1}}{a_{x-1}}, \text{ ovvero}$$

$$a_x =$$

$$a_x = A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots \; A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{a_0}}}}},$$

a_0 rappresentando una costante arbitraria. Quindi sostituendo questo valore della a_x nella espressione $\frac{a_x}{a_x - r}$, si avrà

$$\omega_x = \cfrac{a_x}{-r + A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots \; A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{a_0}}}}}}$$

integrale completo della equazione (C); ossia espressione generale della tangente dell'angolo d'incidenza.

Onde determinare la costante arbitraria a_0, nella ipotesi ammessa, che si conosca cioè il valore di ω_0, facciasi $x = 0$ in quest'ultima equazione, e si avrà $\omega_0 = \frac{a_0}{-r + a_0}$; e perciò

$$a_0 = r + \frac{a_0}{\omega_0}.$$

Corollario 1. Se tutti gli angoli del poligono dato fossero eguali fra di loro, sarebbero eguali ancora le loro tangenti, per cui tanto a_x, quanto A_x e B_x sarebbero costanti; e però

$$\omega_x = \cfrac{a}{-r + A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{\ddots \; A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{r + \frac{a}{a_0}}}}}}}$$

continuando la frazione continua sino alla x esima divisione.

Quantunque si possa avere l'integrale della equazione (C) nella ipotesi attuale, collo stesso metodo col quale si ha in generale, come vediamo, nulladimeno espongo il seguente, per averlo senza il soccorso delle frazioni continue, e con una espressione composta di pochi termini finiti.

Supposto $\omega_x = y_x + \beta$, rappresentando y_x una funzione, e β una costante ambedue incognite, si avrà

$ray_x y_{x+1} + (ra\beta - 1)y_{x+1} + (ra\beta - r)y_x + ra\beta^2 - (r+1)\beta - a = 0$, ossia

$ray_x y_{x+1} + (ra\beta - 1)y_{x+1} + (ra\beta - r)y_x = 0$;

purchè si determini il valore di β colla equazione di secondo grado seguente

$$\beta^2 - \frac{r+1}{ar}\beta - \frac{1}{r} = 0 .$$

Ma la equazione in y_x ha la forma di quella, che ci diede la velocità nella prima proposizione, e che integrammo colla supposizione di $y_x = \frac{1}{z_x}$; adunque anch'essa sarà integrabile colla medesima supposizione. E di fatto, supponendo $y_x = \frac{1}{z_x}$, essa si cambia in un' altra equazione lineare, la quale integrata colle regole note (§. 40), dà immediatamente $z_x = C\left(\frac{ar\beta - 1}{r - ar\beta}\right)^x + \frac{ar}{r - 2ar\beta + 1}$. Quindi

$$\omega_x = \beta + 1 : \left\{ C\left(\frac{ar\beta - 1}{r - ar\beta}\right)^x + \frac{ar}{r - 2ar\beta + 1} \right\},$$

C esprimendo la costante arbitraria introdotta dalla integrazione della equazione in z_x, la quale facilmente si determina, nella ipotesi, che si conosca ω_0, come sopra.

Corollario 2. Considerando successivamente gli angoli di alcuni poligoni, e collo stesso ordine come si succedono nella figura, accade, che dopo un determinato numero, ne seguono altrettanti, eguali ciascuno agli antecedenti, cioè il primo di questi eguaglia il primo di quelli, il secondo eguaglia il secondo, il terzo il terzo, ec.; a questi ne seguono di nuovo altrettanti che hanno tanto coi primi, quanto coi loro antecedenti la stessa proprietà, e così di mano in mano: dimodochè la serie degli angoli, in questi poligoni, non è che una ordinata ripetizione dei primi.

In tutti i poligoni nei quali ha luogo questa proprietà, tra i quali evidentemente avvi il ramo estesissimo dei chiusi

o rientranti, si può avere la espressione generale della tangente dell'angolo d'incidenza col metodo che segue, il quale è assai più breve del generale, esposto superiormente.

Sia il periodo degli angoli del poligono dato composto di n di loro, cioè sia

$a_0=a_n=a_{2n}=$ec., $a_1=a_{n+1}=a_{2n+1}=$ec., ... $a_{n-1}=a_{2n-1}=a_{3n-1}=$ec., e sarà

$A_0=A_n=A_{2n}=$ec., $A_1=A_{n+1}=A_{2n+1}=$ec., ... $A_{n-1}=A_{2n-1}=A_{3n-1}=$ec., e

$B_0=B_n=B_{2n}=$ec., $B_1=B_{n+1}=B_{2n+1}=$ec., ... $B_{n-1}=B_{2n-1}=B_{3n-1}=$ec.;

e perciò, supponendo $x=in$ nella espressione di a_x trovata sopra, i esprimendo un numero intero qualunque, avrassi

$$a_{in}=A_{n-1}+\cfrac{B_{n-1}}{A_{n-2}+\cfrac{B_{n-2}}{\ddots\,A_0+\cfrac{B_0}{A_{n-1}+\cfrac{B_{n-1}}{A_{n-2}+\cfrac{B_{n-2}}{\ddots\,A_0+\cfrac{B_0}{a_0}}}}}}.$$

E considerando a funzione del numero dei periodi indicato colla i, i quali precedono l'angolo che ha per tangente a_{in}, si avrà

$$a_i=A_{n-1}+\cfrac{B_{n-1}}{A_{n-2}+\cfrac{B_{n-2}}{\ddots\,A_0+\cfrac{B_0}{a_{i-1}}}}.$$

Quindi facendo sparire la frazione continua, otterrassi, tra a_i, ed a_{i-1} una equazione della forma

$$Ma_ia_{i-1}+Na_i+Pa_{i-1}+Q=0,$$

la quale è integrabile colla supposizione, già usata, di $a_i=\beta+\frac{1}{z_i}$, essendo qui pure tutti i coefficienti M, N, P, Q quantità costanti.

L'integrale della ultima equazione ci darà i valori di a_i, ossia di a_{in}; e perciò della tangente ω_x corrispondenti ai valori 0, n, $2n$, $3n$, ... della x, cioè con essa conosceransi le espressioni delle tangenti degli angoli d'incidenza corrispondenti ai primi dei successivi periodi degli angoli del poligono dato.

Ora per avere le espressioni di tutte le tangenti degli altri angoli d'incidenza, cioè di quelli che corrispondono agli altri angoli dei periodi anzidetti, supponghiamo nella espressione generale della a_x, trovata nel principio di questa soluzione, l'indice x eguale ad $in+m$, m esprimendo un numero intero qualunque fra quelli minori di n; ed avremo a_{in+m} eguale alla quantità

$$A_{m-1}+\cfrac{B_{m-1}}{A_{m-2}+\cfrac{B_{m-2}}{\ddots\cfrac{}{A_0+\cfrac{B_0}{a_i}}}},$$

la quale è affatto conosciuta. Adunque, intendendo colla i il numero dei periodi suddetti, e colla ω_{in+m} la tangente dell'angolo d'incidenza corrispondente all'm esimo del periodo $(i+1)$ esimo, avremo $\omega_{in+m}=\cfrac{a_n}{-r+A_{m-1}+\cfrac{B_{m-1}}{A_{m-2}+\cfrac{B_{m-2}}{\ddots\cfrac{}{A_0+\cfrac{B_0}{a_i}}}}}$,

purchè la funzione a_i sia desunta dalla equazione trovata qui sopra.

Corollario 3. Se tra le successive tangenti a_x, a_{x+1} regnasse la equazione $ra_x=a_{x+1}$, ovvero fosse (§. 39) $a_x=cr^x$; cioè le tangenti dei successivi angoli del poligono dato formassero una progressione geometrica avente per primo termine $c=a_0$, e per ragione la r, sarebbe $A_x=0$, e $B_x=r^2(1+c^2r^{2x})$; e perciò $a_x=\cfrac{B_{x-1}}{\cfrac{B_{x-2}}{\cfrac{B_{x-3}}{\ddots\cfrac{}{\cfrac{B_0}{a_0}}}}}$;

vale a dire, nel caso di x pari $a_x=\cfrac{B_{x-1}B_{x-3}\ldots\ldots B_3B_1}{B_{x-2}B_{x-4}\ldots\ldots B_2B_0}a_0$,

nel caso di x dispari $a_x=\cfrac{B_{x-1}B_{x-3}\ldots\ldots B_2B_0}{B_{x-2}B_{x-4}\ldots\ldots B_3B_1}\cdot\cfrac{1}{a_0}$;

e perciò i valori corrispondenti della tangente ω_r cercata saranno i seguenti, cioè

pel caso di x pari $\omega_x = cr^x : \left\{ -r + \frac{(1+c^2r^{2x-2})(1+c^2r^{2x-6})\ldots(1+c^2r^6)(1+c^2r^2)}{(1+c^2r^{2x-4})(1+c^2r^{2x-8})\ldots(1+c^2r^4)(1+c^2)} a_0 \right\}$,

e pel caso di x dispari $\omega_x = cr^x : \left\{ -r + \frac{(1+c^2r^{2x-2})(1+c^2r^{2x-6})\ldots(1+c^2r^4)(1+c^2)}{(1+c^2r^{2x-4})(1+c^2r^{2x-8})\ldots(1+c^2r^6)(1+c^2r^2)} \cdot \frac{1}{a_0} \right\}$.

Osservazione. Se tutti gli angoli del poligono dato fossero retti, sarebbe l'a_x infinita, ossia $\frac{1}{a_x} = 0$; e però la equazione (C), ovvero

$$r\omega_x\omega_{x+1} - (\omega_x + r\omega_x)\frac{1}{a_x} - 1 = 0$$

si ridurrebbe alla seguente $r\omega_x\omega_{x+1} - 1 = 0$, la quale dà $r\omega_{x+1}\omega_{x+2} - 1 = 0$; cioè $\omega_x = \omega_{x+2}$; vale a dire tutti i valori della tangente ω_x corrispondenti alla x pari eguali fra loro, come pure tra loro eguali quelli che corrispondono ad x dispari; ciò che è singolare, avuto riguardo alla elasticità imperfetta del mobile.

Trovata la espressione generale della tangente dell'angolo d'incidenza, passiamo a cercare quelle delle altre quantità incognite contenute nella proposizione.

Qualunque sia il poligono dato, e qualunque sia il rapporto della elasticità del corpo alla percossa, si ha sempre

BE : BD :: sen. BDE : sen. BED, ossia

$l_x - \beta_x : \beta_{x+1} :: \phi\omega_{x+1} : \phi r\omega_x$, supposto $\omega_x : \sqrt{(1+\omega^2_x)} = \phi\omega_x$; e perciò

$$\beta_{x+1} + \frac{\phi r\omega_x}{\phi\omega_{x+1}}\beta_x - \frac{\phi r\omega_x}{\phi\omega_{x+1}} l_x = 0 :$$

equazione la quale integrata colla solita regola generale dà il valore di β_x.

La costante arbitraria che conterrà questo valore di β_x, si determinerà, soddisfacendo la condizione, che è data la posizione del punto, ove è accaduta la prima percossa.

Essendo $\Delta c_x = l_x - \beta_x + \beta_{x+1}$, sarà $c_x = A + \beta_x + \Sigma l_x$, A esprimendo la costante arbitraria, la quale determinerassi, conoscendosi, per ipotesi, la posizione ove è stato percosso il primo lato; cioè come si è determinata quella contenuta nella β_x. Adunque conosciamo c_x, e però la posizione della percossa x esima.

Il triangolo BDE dà $DE = \sqrt{(\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 - 2BD.BE\cos.B)}$, ossia $\Delta s_x = \sqrt{\{(l_x - \beta_x)^2 + \beta^2_{x+1} - 2\beta_{x+1}(l_x - \beta_x) : \sqrt{(1 + a^2_x)}\}}$; e perciò lo spazio percorso dal corpo, cioè

$$s_x = \Sigma\sqrt{\{(l_x - \beta_x)^2 + \beta^2_{x+1} - 2\beta_{x+1}(l_x - \beta_x) : \sqrt{(1 + a^2_x)}\}} + B.$$

Colla teorica del moto ordinario dei corpi che si movano nei mezzi resistenti sopra di un piano orizzontale, si trovano le equazioni

$$u = ae^{-gk^2 s}, \quad gk^2 s = \log.(1 + gk^2\theta),$$

nelle quali, a esprime la velocità iniziale, ed s ed u lo spazio e la velocità alla fine del tempo θ; e perciò, se in esse supporremo $s = \Delta s_x$, $\theta = \Delta t_x$, $u = v_{x+1}$, ed

$a = v_x\sqrt{(\cos.^2 AEF + r^2 \operatorname{sen.}^2 AEF)}$, ossia $= v_x\sqrt{\left(\frac{1 + r^2\omega^2_x}{1 + \omega^2_x}\right)}$,

avremo le equazioni $v_{x+1} - e^{-gk^2\Delta s_x}\sqrt{\left(\frac{1 + r^2\omega^2_x}{1 + \omega^2_x}\right)} v_x = 0$,

$$gk^2\Delta s_x = \log.\left[1 + gk^2 v_x\sqrt{\left(\frac{1 + r^2\omega^2_x}{1 + \omega^2_x}\right)}\Delta t_x\right]$$

colle quali si determinerà la velocità, ed il tempo, che sono le sole quantità ancora incognite.

Integrando la prima di queste due ultime equazioni, e determinando la costante arbitraria introdotta dalla stessa integrazione, soddisfacendo la condizione $s_0 = 0$, si ha

$$v_x = v_0 e^{-gk^2 s_x}\sqrt{\left(\frac{1 + r^2\omega^2_{x-1}}{1 + \omega^2_{x-1}}\right)\left(\frac{1 + r^2\omega^2_{x-2}}{1 + \omega^2_{x-2}}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1 + r^2\omega^2_2}{1 + \omega^2_2}\right)\left(\frac{1 + r^2\omega^2_1}{1 + \omega^2_1}\right)}.$$

E la seconda delle medesime dà

$$t_x = \Sigma\left(\frac{e^{gk^2\Delta s_x} - 1}{gk^2 v_0}\right)e^{gk^2 s_x}\sqrt{\left(\frac{1 + \omega^2_{x-1}}{1 + r^2\omega^2_{x-1}}\right)\left(\frac{1 + \omega^2_{x-2}}{1 + r^2\omega^2_{x-2}}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1 + \omega^2_2}{1 + r^2\omega^2_2}\right)\left(\frac{1 + \omega^2_1}{1 + r^2\omega^2_1}\right)} + D:$$

la costante arbitraria D si determinerà secondo le circostanze.

PROPOSIZIONE VI.

„ Un grave di elasticità imperfetta scagliato secondo la „ retta OE, che non è verticale, descriverà un arco para- „ bolico OSF (*Fig.* 3), e giunto nel punto F, percuotendo „ il piano immobile Oz, ed essendo riflesso, descriverà un

„ secondo arco parabolico FTG, arrivato alla fine del quale
„ di nuovo percuotendo, ed essendo riflesso dallo stesso pia-
„ no, ne descriverà un terzo; e così continuando il suo mo-
„ vimento, per la velocità di riflessione, alla fine dell'arco
„ parabolico x esimo, che tempo sarà corso, con che velo-
„ cità ed angolo d'incidenza percuoterà il piano immobile,
„ ed in qual punto, essendo n l'angolo che fa lo stesso pia-
„ no colla verticale, v_0 la velocità di projezione, ed a_0 l'an-
„ golo che fa la direzione di questa velocità col piano me-
„ desimo.

Soluzione. ImH sia l'$(x+1)$ esimo arco parabolico descritto dal corpo; t_x il tempo cercato, cioè il decorso nell'arrivare in H; s_x la distanza OH; β_x l'angolo d'incidenza cercato, kHO, ed a_x quello di riflessione corrispondente; u_x la velocità d'incidenza, e v_x la corrispondente di riflessione; t_{x+1}, s_{x+1}, ec. siano per la percossa $(x+1)$ esima, ciò che sono t_x, s_x, ec. per la x esima.

Potendo incominciare la soluzione di questa proposizione colla ricerca di una qualunque delle quattro quantità t_x, u_x, β_x, s_x dimandate, comincieremo con quella dell'angolo β_x, per risparmiare di preparare alcune formole, approfittando di altre, che si conoscono nella teorica ordinaria de' projettili.

Facilmente colla teorica de' projettili si trova

$$\text{tang.}\,\beta_{x+1} = \frac{\text{tang.}\,a_x}{1+2\,\text{cotang.}\,n\,\text{tang.}\,a_x},$$

e con quella della percossa obbliqua dei corpi, che non sono dotati di una elasticità perfetta, che $\text{tang.}\,a_{x+1} = r\,\text{tang.}\,\beta_{x+1}$: e però sarà

$$\text{tang.}\,a_{x+1} = \frac{r\,\text{tang.}\,a_x}{1+2\,\text{cotang.}\,n\,\text{tang.}\,a_x};$$

e facendo sparire la frazione, e supponendo $\text{cotang.}\,n = a$, $\text{tang.}\,a_x = \omega_x$, ed ordinando, si avrà, tra le tangenti degli angoli di riflessione, contigui, a_x, a_{x+1}, la equazione

$$2a\omega_x\omega_{x+1} + \omega_{x+1} - r\omega_x = 0,$$

la quale integrata, ci darà il valore della tangente ω_x del-

l'angolo di riflessione x esimo, ossia corrispondente a quello d'incidenza dimandato.

Per integrare questa equazione, la quale di poco differisce da quella della prima proposizione, che ha servito per avere la velocità, supponghiamo, qui pure, $\omega_x = \frac{1}{y_x}$, ed avremo la equazione

$$y_{x+1} - \frac{1}{r} y_x - \frac{2a}{r} = 0,$$

che integrata, colla solita regola generale a tutti nota (§. 40), dà $y_x = \frac{c + 2ar^x}{(r-1)r^x}$, c rappresentando la costante arbitraria; e perciò ω_x, ossia

$$\text{tang. } \alpha_x = \frac{(r-1)r^x}{c + 2ar^x}.$$

Egli è facile la determinazione dell'arbitraria c, poichè pel dato della proposizione conosciamo l'angolo EOz, e perciò ancora la sua tangente ω_0; e colla equazione anzi trovata, fatto in essa $x = 0$, hassi $\omega_0 = \frac{r-1}{c+2a}$; quindi $c = \frac{r-1-2a\omega_0}{\omega_0}$.

Ponendo questo valore dell'arbitraria c nella espressione trovata di ω_x, si ottiene ω_x, ovvero tang. $\alpha_x = \frac{\omega_0(r-1)r^x}{r-1+2a\omega_0(r^x-1)}$; ma la tangente dell'angolo d'incidenza β_x è eguale a quella dell'angolo di riflessione α_x, divisa pel rapporto r della elasticità alla percossa, cioè tang. $\beta_x = \frac{1}{r}$ tang. α_x; adunque

$$\text{tang. } \beta_x = \frac{\omega_0(r-1)r^{x-1}}{r-1+2a\omega_0(r^x-1)}:$$

espressione che fa conoscere l'angolo cercato β_x, mediante la sua tangente.

Abbiamo trovato il valore della tangente di β_x, qualunque sia la inclinazione del piano immobile all'orizzonte, e qualunque sia il rapporto della elasticità del corpo alla percossa: così si potrebbero trovare anche i valori delle altre

tre

tre quantità s_x , t_x , u_x conservando nei due suddetti elementi la medesima generalità; ma siccome alla fine di questa Memoria si tratterà una proposizione di moto semilibero, di cui la presente, come vedrassi, non è che un caso particolare; per ciò ci limiteremo per ora a trattare estesamente i due casi seguenti, cioè; primo, che il piano immobile sia orizzontale, ed il rapporto della elasticità del corpo alla percossa qualunque; secondo, che il piano sia comunque inclinato all'orizzonte, ma il corpo dotato di elasticità perfetta.

Primo Caso.

L'ipotesi che sia il piano Oz (*Fig.* 3) orizzontale, dà cotang. n, ossia eguale a zero; e però le espressioni generali delle tangenti degli angoli α_x , β_x trovate, diventeranno, in questo caso, $\omega_0 r^x$, $\omega_0 r^{x-1}$; cioè tanto le tangenti degli angoli d'incidenza, quanto quelle degli angoli delle riflessioni, formano una progressione geometrica, la quale ha per ragione il rapporto della elasticità del corpo alla percossa.

Essendo per la medesima ipotesi $v_x = u_{x+1}$, e per quello che accade nella percossa obbliqua dei corpi di elasticità imperfetta $v_x = u_x \sqrt{(\cos.^2\beta_x + r^2 \operatorname{sen}.^2\beta_x)}$, sarà

$$u_{x+1} - u_x \sqrt{(\cos.^2\beta_x + r^2 \operatorname{sen}.^2\beta_x)} = 0;$$

ossia sostituendo in luogo di $\cos.\beta_x$, e di $\operatorname{sen}.\beta_x$ i loro valori, desunti da quello della tangente del medesimo angolo, si avrà

$$u_{x+1} - u_x \sqrt{\left(\frac{1+\omega_0^2 r^{2x}}{1+\omega_0^2 r^{2x-2}}\right)} = 0, \text{ ovvero } \Delta\log.u_x = \Delta\log.\sqrt{(1+\omega_0^2 r^{2x-2})};$$

e però integrando

$$u_x = B\sqrt{(1+\omega_0^2 r^{2x-2})},$$

B esprimendo l'arbitraria introdotta dalla integrazione: così sarà

$$v_x = B\sqrt{(1+\omega_0^2 r^{2x})}.$$

Onde trovare l'arbitraria B, facciasi $x = 0$ nella equazione $v_x = B\sqrt{(1+\omega_0^2 r^{2x})}$ e si otterrà $v_0 = B\sqrt{(1+\omega_0^2)}$;

cioè $B = v_0 \cos. \alpha_0$. Quindi la velocità d'incidenza cercata sarà

$v_0 \cos. \alpha_0 \sqrt{(1 + \omega^2_0 r^{2x-2})}$; e $v_0 \cos. \alpha_0 \sqrt{(1 + \omega^2_0 r^{2x})}$ quella di riflessione corrispondente.

È dimostrato nella teorica del moto de' projettili, che l'ampiezza HI eguaglia $\frac{2B}{g} v_x \text{ sen. } \alpha_x$, e che il tempo corso nel descrivere l'arco ImH è eguale a $\frac{2}{g} v_x \text{ sen. } \alpha_x$; sarà adunque

$$\Delta s_x = \frac{2B}{g} v_x \text{ sen. } \alpha_x, \text{ e } \Delta t_x = \frac{2}{g} v_x \text{ sen. } \alpha_x;$$

cioè ponendo in luogo di v_x, sen. α_x i loro valori $B\sqrt{(1+\omega^2_0 r^{2x})}$, $\omega_0 r^x : \sqrt{(1 + \omega^2_0 r^{2x})}$, si avrà

$$\Delta s_x = \frac{2B^2 \omega_0}{g} r_x, \text{ e } \Delta t_x = \frac{2B\omega_0}{g} r^x; \text{ e perciò } (\S. 27)$$

$$s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1}, \text{ e } t_x = \frac{2B\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1},$$

essendo, per ipotesi, s_0 e t_0 ambedue eguali a zero.

Corollario 1. Per essere $\sqrt{(1 + \omega^2_0 r^{2x})} = 1 : \cos. \alpha_x$, si avrà $v_x = B : \cos. \alpha_x$, ossia $v_x \cos. \alpha_x = B$; e però $v_x \cos. \alpha_x = v_0 \cos. \alpha_0$; cioè la velocità orizzontale del corpo nel principio della parabola $(x + 1)$ esima eguaglia quella che aveva nel principio del moto. Ma nel descrivere le parabole non si altera la velocità orizzontale; adunque gli spazj s_x, Δs_x percorsi orizzontalmente, sono percorsi con moto uniforme e colla velocità B.

Corollario 2. Essendo $\Delta t_x = \frac{2B\omega_0}{g} r^x$, e $\Delta s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} r^x$; e queste espressioni esprimendo i termini $(x + 1)$ esimi di due progressioni geometriche, ne risulta, che tanto i tempi corsi nel percorrere le successive parabole, quanto le ampiezze delle medesime, costituiscono una progressione geometrica.

Corollario 3. Se d indicasse la distanza di un punto H dal punto O da cui si getta il corpo, e che si volesse colpirlo col corpo stesso nella $(x + 1)$ esima sua caduta, baste-

rebbe soddisfare, colla opportuna determinazione dell'angolo a_0, della velocità v_0, la equazione

$\frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x-1}{r-1} = d$, o la equivalente $v^2_0 \text{ sen. } 2a_0 = \frac{r-1}{r^x-1} dg$; ciò che potrebbesi fare, evidentemente, in infiniti modi. Se poi fosse dato l'angolo che dovesse fare la direzione della velocità col piano orizzontale nel colpire l'oggetto fisso, supposto la sua tangente eguale alla b, avrebbesi anche la equazione $b = \omega_0 r^x$, la quale, combinata coll'antecedente, darebbe i valori della tangente ω_0 e della velocità per soddisfare le due condizioni. In generale colle quattro equazioni

$$\omega_x = \omega_0 r^x \,,\; v_x = B\sqrt{(1+\omega^2_0 r^{2x})},$$

$$t_x = \frac{2B\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x-1}{r-1},\; s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x-1}{r-1}$$

potremo sempre trovare quattro delle quantità in esse contenute, quando conosceremo le altre, o i loro rapporti colle prime.

Corollario 4. Essendo $s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x-1}{r-1}$, ossia $a \frac{v^2_0}{g} \cdot \frac{r^x-1}{r-1} \text{ sen. } 2a_0$, il medesimo corpo scagliato colla stessa velocità, cioè a pari circostanze, la distanza della x esima caduta dal punto da cui gettasi, sarà massima, quando sarà sen. $2a_0 = 1$, ossia l'angolo di projezione primitiva a_0 eguale alla metà di un retto: ciò che è singolare.

Corollario 5. Supposto $Op = z_x$, $pm = y_x$, e θ_x il tempo impiegato nel descrivere l'arco Hm, si ha $z_x = B\theta_x + s_x$, ed $y_x = \theta_x u_x \text{ sen. } a_x - \frac{1}{2} g\theta^2_x$; cioè eliminando θ_x, e ponendo invece di v_x, sen. a_x i loro valori espressi per x, si avrà

$$y_x = \omega_0 r^x (z_x - s_x) - \frac{g}{2B^2}(z_x - s_x)^2$$

per equazione della parabola descritta nel rimbalzo x esimo, supposto l'origine delle coordinate nello stesso punto O da cui si getta il corpo.

Perchè la equazione anzi trovata competa alla sola porzione della $(x+1)$ esima parabola effettivamente descritta dal

corpo, cioè alla sola porzione HmI superiore alla orizzontale Oz, converrà circoscrivere l'ascissa z_x tra s_x ed s_{x+1}.

Corollario 6. I valori delle coordinate z_x, y_x trovati nel Corollario precedente, danno $\left(\frac{dz}{d\theta}\right)=B$, e $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)=u_x \text{ sen.} a_x - g\theta_x$; cioè le velocità del corpo alla fine del tempo $t_x+\theta_x$ secondo gli assi delle coordinate; e perciò, alla fine del medesimo tempo, la sua velocità assoluta sarà

$$\sqrt{\{B^2+(u_x \text{ sen.} a_x - g\theta_x)^2\}}, \text{ ed } \frac{u_x \text{ sen.} a_x - g\theta_x}{B}$$

sarà la tangente dell'angolo che essa fa col prolungamento dell'asse delle ascisse.

Secondo Caso.

Essendo il corpo perfettamente elastico, sarà la sua elasticità eguale alla percossa, cioè $r=1$; e perciò il valore della tangente dell'angolo d'incidenza β_x, si otterrà, in questo caso, facendo r eguale alla unità nella espressione

$$\frac{a_0(r-1)r^{x-1}}{r-1+2aa_0(r^x-1)}$$

trovata sopra. Ma appunto in questo caso, questa espressione diventa $\frac{0}{0}$; adunque il valore cercato della tangente β_x, si avrà, facendo $r=1$ nella frazione

$$\frac{a_0 r^{x-1}+a_0(r-1)xr^{x-2}}{1+2aa_0xr^{x-1}}$$

la quale ha visibilmente per termini le derivate dei termini cognomini della antecedente; vale a dire sarà $\text{tang.}\beta_x=\frac{a_0}{1+2aa_0x}$: così

$$\text{tang.} a_x = \frac{a_0}{1+2aa_0x},$$

come è naturale, per essere l'angolo di riflessione eguale a quello d'incidenza, nel caso del mobile perfettamente elastico.

Facilmente dimostrasi, coi principj della balistica, che,

la velocità del corpo alla fine dell'arco parabolico H*m*I è eguale a quella colla quale ha incominciato a descriverlo, moltiplicata per la espressione seguente

$$\sqrt{(4a^2 \text{ sen.}^2 a_x + 4a \text{ sen. } a_x \cos. a_x + 1)};$$ adunque

$$v_{x+1} = v_x \sqrt{(4a^2 \text{ sen.}^2 a_x + 4a \text{ sen. } a_x \cos. a_x + 1)};$$

ossia sostituendo invece di sen. a_x, e di cos. a_x i loro valori desunti da quello della tangente del medesimo angolo, trovata qui sopra, avrassi tra le velocità v_x, v_{x+1} la equazione delle differenze finite

$$v^2_{x+1} - \frac{\omega^2_0 + \{1 + 2a\omega_0(x+1)\}^2}{\omega^2_0 + (1 + 2a\omega_0 x)^2} v^2_x = 0,$$

la quale integrata dà (§. 39)

$$v^2_x = A^2 \{\omega^2_0 + (1 + 2a\omega_0 x)^2\},$$

A^2 rappresentando la costante arbitraria portata dalla integrazione. Ma si conosce la velocità v_0, e perciò ancora A^2, essendo essa eguale a $\frac{v^2_0}{1+\omega^2_0}$; quindi

$$v_x = v_0 \sqrt{\left(\frac{\omega^2_0 + (1 + 2a\omega_0 x)^2}{1 + \omega^2_0}\right)}.$$

Vale a dire è completamente determinata la velocità, sì d'incidenza, che di riflessione, per la caduta x esima.

Trovasi pure coi principj stessi della balistica, che il tempo corso nel descrivere l'$(x+1)$ esima parabola è eguale a $\frac{2}{g \text{ sen.} n} v_x \text{ sen. } a_x$, e che l'ampiezza della stessa eguaglia $\frac{2}{g} v^2_x$ sen. $(a_x + n)$ sen. a_x : sen.$^2 n$; e perciò, sostituendo in queste espressioni in luogo di v_x, e di sen. a_x, cos. a_x i loro valori conosciuti, si avrà

$$\Delta t_x = \frac{2A\omega_0}{g \text{ sen.} n}, \text{ e } \Delta s_x = \frac{2A^2\omega_0}{g \text{ sen.} n}\left(1 + 2a\omega_0(x+1)\right);$$

equazioni le quali integrate, e trovate le arbitrarie colle condizioni di $s_0 = 0$, e di $t_0 = 0$,

danno $t_x = \frac{2A\omega_0}{g \text{ sen.} n} x$, ed $s_x = \frac{2A^2\omega_0}{g \text{ sen.} n}(1 + 2a\omega_0 x)\, x$.

Corollario. Essendo $\Delta t_x = 2A\omega_0 : g \text{ sen.} n$, e questa quan-

tità indipendente dalla x, ne risulta, che tutti gli archi parabolici sono descritti in tempi tra loro eguali.

Del moto libero.

Se ad un corpo, nel mentre che descrive con moto libero una linea, verrà comunicata una qualunque velocità finita secondo qualsivoglia direzione, esso continuando il movimento, devierà dalla linea medesima, ed incomincierà a descriverne un'altra; e se, dopo che avrà descritto una porzione di quest'altra, verrà, di nuovo, ad esso comunicata una seconda velocità finita, devierà pure da questa seconda, cominciando a descriverne una terza; e così continuando, descriverà un poligono rettilineo, o curvilineo, ovvero mistilineo. Questa è la specie di moto discreto che denomineremo *libero*, analogamente a quello che così nominasi nella teorica del moto continuo ordinario.

Se si trattasse una proposizione di moto discreto libero, abbracciando tutta quella generalità concepita nella esposta sua definizione, cioè nella ipotesi che la forza acceleratrice stimolante continuamente il corpo fosse qualunque, pochissimo si potrebbe sviluppare la teorica di questa specie di moto, e per ciò nessun vantaggio trarrebbesi da essa; per questo motivo, e per l'altro, cioè che trattata una proposizione di questa specie di moto, nella quale nessuna delle quantità, che dir si possono gli elementi del moto, sia eccettuato o supposto zero, facilmente si può trattarne un'altra qualunque, ci limiteremo al caso che la forza acceleratrice stimolante continuamente il corpo sia la sola gravità, per cui i lati del poligono descritto dal corpo risultano, in generale, tanti archi parabolici; vale a dire scioglieremo la seguente

Proposizione VII.

„ Conoscendo la legge delle grandezze e delle direzioni „ delle velocità finite, che successivamente si comunicano „ al corpo, e quella dei tempi, che passano tra gl'istanti ne' „ quali sono comunicate, di più conoscendo la posizione del „ punto da cui si è scagliato il corpo, la grandezza e dire- „ zione della velocità di projezione per la quale ha descrit- „ to il primo arco parabolico, ed il tempo corso nel descri- „ verlo, trovare i valori di tutte le quantità dalle quali di- „ pende la conoscenza dello stato sì geometrico che mecca- „ nico del corpo in un istante qualunque del suo movimento.

Soluzione. Siano OE, ..., AB, BC, ... il primo, ..., gl'x, $(n+1)$ esimi archi parabolici descritti dal corpo (*Fig.* 4); ϕx la espressione della x esima velocità finita comunicata ad esso, trovandosi in B; v' la velocità di projezione per cui descriveva la prima parabola, essendo stato scagliato dal punto O, che noi fisseremo per origine delle coordinate, e v_x quella che esso ha alla fine dell'arco x esimo; θ il tempo corso nel descrivere il primo arco parabolico OE, t_x quello decorso dopo θ per arrivare in B, t'_x quello impiegato nel descrivere l'arco Bm, porzione indeterminata di BC; z_x, u_x, ed y_x le coordinate del punto B, e z'_x, u'_x, y'_x quelle dell'm, tutte rispetto agli assi orizzontali Oz, Ou, ed al verticale Oy; in ultimo, sieno α_x, α'_x, α''_x gli angoli che fa la tangente condotta alla fine dell'arco x esimo coi prolungamenti degli assi delle coordinate z_x, u_x, y_x; ed ω_x, ω'_x, ω''_x, m, m', m'' quelli che fanno le direzioni delle velocità ϕx, v' cogli assi stessi prolungati.

Essendo v' la grandezza della velocità di projezione per l'arco parabolico OE, ed m, m', m'' gli angoli, che fa la sua direzione OF cogli assi delle coordinate, e θ il tempo decorso nel descriverlo, saranno v' cos. m, v' cos. m', v' cos. $m'' - g\theta$ le componenti della velocità del corpo alla fine dell'arco stes-

so, dirette, al solito, secondo i prolungamenti degli assi delle coordinate; e $\theta v' \cos.m$, $\theta v' \cos.m'$, $\theta v' \cos.m'' - \frac{1}{2}g\theta^2$ saranno le coordinate dell'ultimo punto E del medesimo arco, ossia di quel punto nel quale trovasi il corpo, quando succede il primo cambiamento finito negli elementi del suo moto, cioè sarà

$OG = \theta v' \cos.m$, $GH = \theta v' \cos.m'$, ed $HE = \theta v' \cos.m'' - \frac{1}{2}g\theta^2$; stante sempre la ipotesi, che il corpo sia scagliato dalla stessa origine delle coordinate. Premesso questo, passiamo alla soluzione della proposizione.

Il metodo più semplice per trovare le espressioni di tutte le quantità dalle quali dipende la conoscenza completa dello stato del corpo in un istante qualunque del suo movimento, è quello di cominciare a trovare la grandezza e la direzione della velocità che ha il corpo nell'istante che trovasi alla fine dell'arco x esimo che esso descrive; e per trovare questi valori il modo più facile è quello di paragonare tra loro separatamente le componenti, secondo i tre assi delle coordinate, della velocità che esso ha alla fine degli archi x, $(x+1)$ esimi, ossia negli istanti appena antecedenti a quelli, nei quali succedono gl'x, $(x+1)$ esimi cambiamenti finiti negli elementi del suo movimento.

Scompongasi pertanto le velocità v_x, ϕx, v_{x+1} ciascuna in tre parallele agli assi delle coordinate, ed avransi, secondo l'asse delle z_x le componenti

$v_x \cos.\alpha_x$, $\phi x \cos.\omega_x$, $v_{x+1} \cos.\alpha_{x+1}$; secondo quello delle u_x

$v_x \cos.\alpha'_x$, $\phi x \cos.\omega'_x$, $v_{x+1} \cos.\alpha'_{x+1}$; e secondo quello delle y_x

$v_x \cos.\alpha''_x$, $\phi x \cos.\omega''_x$, $v_{x+1} \cos.\alpha''_{x+1}$;

cioè nell'istante in cui il corpo incomincierà a descrivere l'arco parabolico $(x+1)$ esimo, avrà, secondo i tre assi delle coordinate le tre velocità seguenti

$$v_x \cos.\alpha_x + \phi x \cos.\omega_x,$$
$$v_x \cos.\alpha'_x + \phi x \cos.\omega'_x,$$
$$v_x \cos.\alpha''_x + \phi x \cos.\omega''_x;$$

e nell'istante che avrà terminato di descriverlo, si troverà invece

invece colle altre tre

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1},\ v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1},\ v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}.$$

Essendo gli assi Oz, Ou orizzontali, le velocità del corpo secondo i medesimi assi non saranno alterate negli intervalli di tempo, che passano tra gli istanti nei quali vengono ad esso comunicate le velocità finite; e però le velocità che avrà il corpo, secondo gli assi stessi, alla fine dell'arco parabolico $(x+1)$ esimo, saranno le stesse di quelle che aveva nel principio del medesimo arco, cioè

$$v_x\cos.\alpha_x+\varphi x\cos.\omega_x,\ v_x\cos.\alpha'_x+\varphi x\cos.\omega'_x;$$

ma abbiamo veduto che, stante le stabilite supposizioni, debbono essere ancora eguali a $v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}$, $v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}$; adunque sarà

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}=v_x\cos.\alpha_x+\varphi x\cos.\omega_x, \text{ e}$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}=v_x\cos.\alpha'_x+\varphi x\cos.\omega'_x.$$

Similmente, essendo la forza acceleratrice, per ipotesi costante, nel tempo Δt_x corso nel descrivere l'arco $(x+1)$ esimo, esso avrà diminuito la velocità verticale

$$v_x\cos.\alpha''_x+\varphi x\cos.\omega''_x \text{ di } g\Delta t_x;$$

cioè nell'istante che il corpo sarà giunto alla fine dell'$(x+1)$ esimo arco, avrà, secondo l'asse verticale, la velocità

$$v_x\cos.\alpha''_x+\varphi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x;$$

ma questa velocità deve essere anche eguale a $v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}$; per quello che superiormente abbiamo osservato, così sarà

$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}=v_x\cos.\alpha''_x+\varphi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x.$$

Vale a dire, si avranno, tra le velocità v_x, v_{x+1}, e gli angoli α_x, α'_x, α''_x, α_{x+1}, α'_{x+1}, α''_{x+1} che esse fanno coi prolungamenti degli assi delle coordinate, le tre equazioni seguenti

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}-v_x\cos.\alpha_x-\varphi x\cos.\omega_x=0,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}-v_x\cos.\alpha'_x-\varphi x\cos.\omega'_x=0,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}-v_x\cos.\alpha''_x-\varphi x\cos.\omega''_x+g\Delta t_x=0$$

delle differenze finite del primo ordine, le quali integrate, daranno la grandezza e la direzione della velocità alla fine dell'arco x esimo, ossia nell'istante antecedente a quello nel quale succede l'x esimo cambiamento finito suddetto.

Integrando le tre equazioni trovate, ossia le loro equivalenti

$$\Delta v_x \cos. a_x - \phi x \cos. \omega_x = 0, \quad \Delta v_x \cos. a'_x - \phi x \cos. \omega'_x = 0,$$
$$\Delta v_x \cos. a''_x - \phi x \cos. \omega''_x + g\Delta t_x = 0,$$

ed indicando colle a, b, c le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni, si ottengono le tre seguenti

$$v_x \cos. a_x = \Sigma \phi x \cos. \omega_x + a,$$
$$v_x \cos. a'_x = \Sigma \phi x \cos. \omega'_x + b,$$
$$v_x \cos. a''_x = \Sigma \phi x \cos. \omega''_x - gt_x + c,$$

le quali, combinate colla notissima $\cos.^2 a_x + \cos.^2 a'_x + \cos.^2 a''_x = 1$, danno

$$v_x = \sqrt{\{(\Sigma \phi x \cos. \omega_x + a)^2 + (\Sigma \phi x \cos. \omega'_x + b)^2 + (\Sigma \phi x \cos. \omega''_x - gt_x + c)^2\}}$$
$$\cos. a_x = (\Sigma \phi x \cos. \omega_x + a) : v_x,$$
$$\cos. a'_x = (\Sigma \phi x \cos. \omega'_x + b) : v_x,$$
$$\cos. a''_x = (\Sigma \phi x \cos. \omega''_x - gt_x + c) : v_x;$$

cioè la grandezza e la direzione della velocità del corpo alla fine dell'arco x esimo, che esso descrive.

Supponendo che gli integrali $\Sigma \phi x \cos. \omega_x$, $\Sigma \phi x \cos. \omega'_x$, $\Sigma \phi x \cos. \omega''_x$ incomincino col valore di x eguale ad uno, ciò che è permesso, evidentemente le costanti arbitrarie a, b, c contenute nelle formole esposte, rappresenteranno le componenti, secondo gli assi delle coordinate, della velocità del corpo alla fine del primo arco parabolico; ma perciò che abbiamo premesso, le medesime velocità sono anche espresse da $v' \cos. m$, $v' \cos. m'$, $v' \cos. m'' - g\theta$; adunque sarà

$$a = v' \cos. m, \quad b = v' \cos. m', \quad c = v' \cos. m'' - g\theta.$$

Vale a dire, le tre costanti a, b, c espresse colla velocità ed angoli della projezione primitiva, e col tempo corso nel descrivere il primo arco parabolico, quantità tutte conosciute, pei dati della proposizione.

L'$(x+1)$ esimo arco parabolico, BC, essendo descritto nel tempo Δt_x, e mediante una velocità di projezione le cui componenti, secondo i tre assi delle coordinate, sono

$$v_x \cos. a_x + \phi x \cos. \omega_x,$$
$$v_x \cos. a'_x + \phi x \cos. \omega'_x,$$
$$v_x \cos. a''_x + \phi x \cos. \omega''_x,$$

sarà, per la teorica ordinaria de' projettili

$$\Delta z_x = (v_x \cos. a_x + \varphi x \cos. \omega_x)\Delta t_x,$$
$$\Delta u_x = (v_x \cos. a'_x + \varphi x \cos. \omega'_x)\Delta t_x, \text{ e}$$
$$\Delta y_x = (v_x \cos. a''_x + \varphi x \cos. \omega''_x)\Delta t_x - \tfrac{1}{2} g \Delta t_x;$$

ossia ponendo in luogo di v_x, cos. a_x, cos. a''_x i loro valori, ed integrando, otterrassi

$$(a) \ldots\ldots z_x = \Sigma\Delta t_x \Sigma\varphi(x+1)\cos. a_{x+1} + at_x + A',$$
$$(b) \ldots\ldots u_x = \Sigma\Delta t_x \Sigma\varphi(x+1)\cos. a'_{x+1} + bt_x + B', \text{ ed}$$
$$(c) \ldots\ldots y_x = \Sigma\Delta t_x \Sigma\varphi(x+1)\cos. a''_{x+1} - \tfrac{1}{2} g t^2_x + ct_x + C',$$

A', B', e C' rappresentando le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni, le quali si determineranno, soddisfacendo, con esse, alle tre equazioni

$$z_1 = \theta v' \cos. m, \; u_1 = \theta v' \cos. m', \; y_1 = \theta v' \cos. m'' - \tfrac{1}{2} g \theta^2,$$

desunte anch'esse dalle cose premesse a questa soluzione.

Se si eliminasse dalle tre equazioni (a), (b), (c) la x contenuta nei secondi membri, si avrebbero due sole equazioni tra le coordinate z_x, u_x, y_x, o semplicemente z, u, y ed altre quantità date, le quali rappresenterebbero le equazioni delle projezioni di quella linea, nella quale vi sono tutti quei punti in cui trovasi il corpo negl'istanti, che succedono i cambiamenti finiti negli elementi del suo moto.

Considerando il moto continuo, che ha luogo per tutto l'arco $(x+1)$ esimo BmC, hansi le tre equazioni differenziali di secondo ordine

$$\left(\frac{d^2 z'}{dt'^2}\right) = 0, \; \left(\frac{d^2 u'}{dt'^2}\right) = 0, \; \left(\frac{d^2 y'}{dt'^2}\right) = -g,$$

le quali integrate, e determinate le costanti arbitrarie colle condizioni, che z_x, u_x, y_x sono le coordinate del suo primo punto B, e

$$v_x \cos. a_x + \varphi x \cos. \omega_x,$$
$$v_x \cos. a'_x + \varphi x \cos. \omega'_x,$$
$$v_x \cos. a''_x + \varphi x \cos. \omega''_x$$

le componenti, secondo gli assi delle coordinate, della velocità del corpo, quando comincia a descrivere il medesimo arco, danno le tre equazioni

$$z'_x = (v_x \cos. \alpha_x + \phi x \cos. \omega_x)\, t'_x + z_x ,$$
$$u'_x = (v_x \cos. \alpha'_x + \phi x \cos. \omega'_x)\, t'_x + u_x ,$$
$$y'_x = (v_x \cos. \alpha''_x + \phi x \cos. \omega''_x)\, t'_x + y_x - \tfrac{1}{2} g t'^2_x ,$$

le quali fanno conoscere evidentemente la posizione del corpo alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x$, ossia dopo il tempo t'_x da che è partito dal punto nel quale succede l'x esimo cambiamento finito negli elementi suddetti.

Essendo $\left(\frac{dz'}{dt'}\right) = v_x \cos. \alpha_x + \phi x \cos. \omega_x$,

$$\left(\frac{du'}{dt'}\right) = v_x \cos. \alpha'_x + \phi x \cos. \omega'_x ,$$

$$\left(\frac{dy'}{dt'}\right) = v_x \cos. \alpha''_x + \phi x \cos. \omega''_x - g t'_x ,$$

saranno $v_x \cos. \alpha_x + \phi x \cos. \omega_x$, $v_x \cos. \alpha'_x + \phi x \cos. \omega'_x$, $v_x \cos. \alpha''_x + \phi x \cos. \omega''_x - g t'_x$ le velocità del corpo alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x$, secondo gli assi delle coordinate; e però supposto $\cos. \alpha_x \cos. \omega_x + \cos. \alpha'_x \cos. \omega'_x + \cos. \alpha''_x \cos. \omega''_x = \cos. \mu_x$, cioè μ_x l'angolo che fa la tangente BD colla direzione della velocità ϕ_x, sarà

$$\sqrt{[v^2_x + \phi^2_x + 2 v_x \phi x \cos. \mu_x - 2 g t'_x (v_x \cos. \alpha''_x + \phi x \cos. \omega''_x) + g^2 t'^2_x]}$$

la velocità assoluta del medesimo, e

$$(v_x \cos. \alpha''_x + \phi x \cos. \omega''_x - g t'_x) : (v_x \cos. \alpha_x + \phi x \cos. \omega_x) ,$$
$$(v_x \cos. \alpha''_x + \phi x \cos. \omega''_x - g t'_x) : (v_x \cos. \alpha'_x + \phi x \cos. \omega'_x)$$

le tangenti degli angoli che fanno le projezioni, sui piani $y_x z_x$, $y_x u_x$, della direzione della stessa velocità coi prolungamenti degli assi delle coordinate z_x, u_x.

Eliminando dalle tre equazioni, che danno i valori delle coordinate z'_x, u'_x, y'_x il tempo t'_x, si hanno le sole due seguenti

$$(d) \ldots\ldots u'_x = \frac{v_x \cos. \alpha'_x + \phi x \cos. \omega'_x}{v_x \cos. \alpha_x + \phi x \cos. \omega_x} (z'_x - z_x) + u_x ,$$

$$y'_x = \frac{v_x \cos. \alpha''_x + \phi x \cos. \omega''_x}{v_x \cos. \alpha_x + \phi x \cos. \omega_x} (z'_x - z_x) - \tfrac{1}{2} g \frac{(z'_x - z_x)^2}{(v_x \cos. \alpha_x + \phi x \cos. \omega_x)^2} + y_x ,$$

le quali rappresentano la parabola $(x + 1)$ esima; anzi, la sola sua porzione BmC che descrive effettivamente il corpo,

purchè si limitino i valori delle coordinate z'_x, u'_x tra quelli delle z_x, z_{x+1}, ed u_x, u_{x+1} dei punti B, e C.

Esempio. Sia $\Delta t_x = c'$, $\omega_x = e$, $\varphi x = f$, $\theta = 0$; cioè sia costante il tempo che passa da un'impulsione all'altra, la forza d'impulsione, l'angolo che essa fa coll'asse delle z_x, il tempo θ eguale a zero, ossia la origine delle coordinate cada in E, e di più tutto sia in un piano; e si avrà

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ t'_x = (x-1)c'$$

$$\Sigma\varphi x \cos.\omega_x = f(x-1)\cos.e,\ \Sigma\varphi x \cos.\omega''_x = f(x-1)\,\text{sen}.e,$$

$$\Sigma\Delta t_x \Sigma\varphi(x+1)\cos.\omega_{x+1} = if\frac{x(x-1)}{2}\cot.e, \Sigma\Delta t_x\Sigma\varphi(x+1)\cos.\omega''_{x+1} = c'f\frac{x(x-1)}{2}\,\text{sen}.e;$$

e perciò $\text{tang}.\,a_x = \text{tang}.\,e - c'g : f\cos.e$,

$$v_x = (x-1)\sqrt{(f'^2 + c'^2g^2 - 2c'fg\cos.e)}$$

$$z_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\cos.e, y_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\,\text{sen}.e - \tfrac{1}{2}gc'^2(x-1)^2;$$

e quindi facilissimamente si deduce la velocità del corpo alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x = (x-1)c' + t'_x$, la tangente dell'angolo che fa la sua direzione col prolungamento dell'asse delle ascisse z_x, e la equazione di quella parabola alla quale appartiene l'$(x+1)$esimo arco parabolico descritto dal corpo.

Eliminando dalle equazioni $z_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\cos.e$,

$$y_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\,\text{sen}.e - \tfrac{1}{2}gc'^2(x-1)^2$$

l'indice x, si ha una sola equazione della forma $(my-nz)^2 + py + qz + r = 0$, la quale c'insegna, che i punti nei quali succedono i cambiamenti finiti negli elementi del moto, ossia i punti ove si tagliano le successive parabole a cui appartengono gli archi, che descrive il corpo, sono tutti in una sola e medesima parabola.

Egli è evidente che, conoscendo le coordinate di quel punto nel quale succede l'$x$esimo cambiamento finito negli elementi del movimento, la grandezza e direzione della velocità, che ha il corpo alla fine dell'arco $x$esimo, le equa-

zioni dell'$(x+1)$esimo arco, la direzione e grandezza della velocità del corpo in un punto qualunque di questo arco, si conosce lo stato del corpo in un istante qualsivoglia del suo moto: è adunque completamente soddisfatta la proposta proposizione.

Corollario 1. Se si trascurasse l'azione della gravità, avrebbesi

$$v_x = \sqrt{\{(\Sigma\phi x \cos.\omega_x + a)^2 + (\Sigma\phi x \cos.\omega'_x + b)^2 + (\Sigma\phi_x \cos.\omega''_x + c)^2\}},$$

$$\cos.\alpha_x = (\Sigma\phi x \cos.\omega_x + a) : v_x,$$

$$\cos.\alpha'_x = (\Sigma\phi x \cos.\omega'_x + b) : v_x,$$

$$\cos.\alpha''_x = (\Sigma\phi x \cos.\omega''_x + c) : v_x;$$

quindi facilissimamente le altre quantità ed equazioni necessarie a determinarsi per conoscere lo stato del corpo, le ultime delle quali sono le due seguenti

$$u'_x = \frac{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega'_{x+1} + b}{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega_{x+1} + a}(z'_x - z_x) + u_x,$$

$$y'_x = \frac{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega''_{x+1} + c}{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega_{x+1} + a}(z'_x - z_x) + y_x,$$

le quali rappresenteranno la retta di cui è parte il lato $(x+1)$esimo del poligono rettilineo che descriverà il corpo (*).

Corollario 2. Se di più la forza d'impulsione fosse continuamente diretta alla origine delle coordinate, avrebbesi

$$\cos.\omega_x = z_x : \sqrt{(z^2_x + u^2_x + y^2_x)},$$

$$\cos.\omega'_x = u_x : \sqrt{(z^2_x + u^2_x + y^2_x)},$$

$$\cos.\omega''_x = y_x : \sqrt{(z^2_x + u^2_x + y^2_x)};$$ e perciò

$$\Delta\frac{\Delta z_x}{\Delta t_x} - \frac{z_x\phi x}{\sqrt{(u^2_x + z^2_x + y^2_x)}} = 0, \quad \Delta\frac{\Delta u_x}{\Delta t_x} - \frac{u_x\phi x}{\sqrt{(z^2_x + u^2_x + y^2_x)}} = 0$$

$$\Delta\frac{\Delta y_x}{\Delta t_x} - \frac{y_x\phi x}{\sqrt{(u^2_x + z^2_x + y^2_x)}} = 0:$$

equazioni colle quali si troveranno le coordinate dei vertici del poligono che descrive il corpo, quando si conoscerà il

---

(*) Questo caso di moto discreto fu trattato altrimenti anche dal Sig. *Magistrini* nella sua elegante Poligonometria Analitica.

tempo t_x e la velocità ϕx; e reciprocamente avrassi, con esse, la forza ϕx, quando conosceransi oltre del tempo t_x le equazioni del poligono.

Osservazione. In questa ultima proposizione, abbiamo trovato tutte le quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto, nella ipotesi, che, tra le cognite vi fossero così le direzioni che le grandezze delle velocità finite che di tempo in tempo vengono comunicate al corpo, non che i successivi tempi che passano tra gl'istanti nei quali sono comunicate queste medesime velocità; passiamo adesso a vedere, come si possono trovare i valori delle stesse quantità ϕx, ω_x, ω'_x, ω''_x, Δt_x, od almeno a discoprire la difficoltà analitica, che s'incontra nella loro ricerca, quando siano solamente dati i rapporti, che esse hanno colle altre quantità: e per trattare questioni naturali, esponghiamo le due seguenti.

Prima Questione.

„ Siano conosciuti i tempi che passano tra gli istanti „ nei quali sono comunicate al corpo le velocità finite, e sia „ data pure la grandezza ϕx della stessa velocità finita, co- „ me nella proposizione trattata, ma la sua direzione sia ora „ quella della tangente condotta alla fine dell'arco x esimo, „ che descrive il corpo; cioè sia $\omega_x = \alpha_x$, $\omega'_x = \alpha'_x$, $\omega''_x = \alpha''_x$, „ essendo α_x, α'_x, α''_x funzioni qui pure incognite, come „ succede nel tiro di alcuni razzi.

Siccome tutte le equazioni trovate nella proposizione trattata, sono indipendenti da tutte le ipotesi, che si possono fare rispetto alle quantità che esse contengono, così supponendo $\omega_x = \alpha_x$, $\omega'_x = \alpha'_x$, e però $\omega''_x = \alpha''_x$ nelle tre equazioni

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1} - v_x\cos.\alpha_x - \phi x\cos.\omega_x = 0,$$
$$\omega_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1} - v_x\cos.\alpha'_x - \phi x\cos.\omega'_x = 0$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1} - v_x\cos.\alpha''_x - \phi x\cos.\omega''_x + g\Delta t_x = 0,$$

si avranno per questa questione le seguenti

$$v_{x+1}\cos.a_{x+1}-(v_x+\varphi x)\cos.a_x=0,$$
$$v_{x+1}\cos.a'_{x+1}-(v_x+\varphi x)\cos.a'_x=0,$$
$$v_{x+1}\cos.a''_{x+1}-(v_x+\varphi x)\cos.a''_x+g\Delta t_x=0,$$

che converrà integrare per avere i valori delle funzioni v_x, a_x, a'_x, a''_x dalle quali dipendono tutte le altre quantità ed equazioni, che abbiamo bisogno di determinare, per conoscere completamente lo stato del corpo in un istante qualunque del suo moto.

Le prime due di queste tre ultime equazioni somministrano

$$\frac{\cos.a_{x+1}}{\cos.a_x}=\frac{\cos.a'_{x+1}}{\cos.a'_x}$$

da cui si cava, integrando, $\cos.a'_x=n\cos.a_x$, n esprimendo una costante arbitraria. E sostituendo questo valore di $\cos.a'_x$ nelle equazioni (a), (b), (d) esse diventano

$$z_x=\Sigma\Delta t_x\Sigma\varphi(x+1)\cos.a_{x+1}+at_x+A,$$
$$u_x=n\Sigma\Delta t_x\Sigma\varphi(x+1)\cos.a_{x+1}+bt_x+B,$$
$$u'_x=n(z'_x-z_x)+u_x, \text{ le quali danno}$$
$$u_x=nz_x+(b-an)t_x+B-An, \text{ ed}$$
$$u'_x=nz'_x+(b-an)t_x+B-An.$$

Ma n è eguale a $\cos.a'_1:\cos.a_1$, ossia a $\cos.m':\cos.m$, per essere evidentemente

$$\sqrt{(v'^2-2gv'\theta\cos.m''+g^2\theta^2)}$$

la velocità del corpo alla fine del primo arco, per cui

$$\cos.a_1=v'\cos.m:\sqrt{(v'^2-2gv'\theta\cos.m''+g^2\theta^2)}, \text{ e}$$
$$\cos.a'_1=v'\cos.m':\sqrt{(v'^2-2gv'\theta\cos.m''+g^2\theta^2)};$$

adunque $b-an=v'\cos.m'-nv'\cos.m=v'\cos.m'-v'\cos.m'=0$; e perciò

$$u_x=\frac{\cos.m'}{\cos.m}z_x+\frac{B\cos.m-A\cos.m'}{\cos.m}, \text{ ed}$$
$$u'_x=\frac{\cos.m'}{\cos.m}z'_x+\frac{B\cos.m-A\cos.m'}{\cos.m}:$$

equazioni le quali rappresentando sempre una sola e medesima retta, qualunque sia la x, c'insegnano, che il poligono descritto dal grave, trovasi in un piano verticale, che ha

per

per equazione

$$u = \frac{\cos. m'}{\cos. m} z + \frac{B \cos. m - A \cos. m'}{\cos. m} :$$

così prendendo questo piano per quello delle coordinate y_x, z_x, i valori della velocità e della sua direzione, dipenderanno dalle sole due equazioni

$$v_{x+1} \cos. a_{x+1} - (v_x + \varphi x) \cos. a_x = 0,$$
$$v_{x+1} \cos. a''_{x+1} - (v_x + \varphi x) \cos. a''_x + g\Delta t_x = 0,$$

ossia dalle loro equivalenti

$$\Delta v_x \cos. a_x - \varphi x \cos. a_x = 0, \quad \Delta v_x \operatorname{sen}. a_x - \varphi x \operatorname{sen}. a_x + g\Delta t_x = 0,$$

per essere in questo caso gli angoli a_x, a''_x complemento uno dell'altro.

Per avere i valori delle funzioni a_x, v_x colle due equazioni qui esposte, seguendo la regola generale, elimineremo una di esse, ed avremo una equazione, la quale integrata, ci darà il valore della funzione rimasta, indi quello dell'altra; e siccome si può eliminare indifferentemente o una o l'altra delle due funzioni a_x, v_x, così preferiremo la eliminazione della v_x, perchè la equazione che ne risulta, è molto più semplice di quella, che si otterrebbe, eliminando la a_x.

Cavando il valore della funzione v_x da ambedue le equazioni anzi esposte, si ha $v_x = (A + \Sigma\varphi x \cos. a_x) : \cos. a_x$, e

$$v_x = (B - gt_x + \Sigma\varphi x \operatorname{sen}. a_x) : \operatorname{sen}. a_x,$$

A, e B esprimendo le costanti arbitrarie; ed eguagliando fra loro questi due valori di v_x, hassi la sola equazione

$$(A + \Sigma\varphi x \cos. a_x) \operatorname{tang}. a_x = B - gt_x + \Sigma\varphi x \operatorname{sen}. a_x,$$

senza la funzione v_x, la quale differenziata due volte, per eliminare i segni d'integrazione che essa contiene, si riduce alla seguente

$$\varphi(x+1) \cos. a_{x+1} + g\Delta \frac{\Delta t_x}{\Delta \operatorname{tang}. a_x} = 0;$$

si avrà il valore della funzione a_x, e quindi il corrispondente della v_x che bisognerà conoscere, per continuare la presente soluzione.

SECONDA QUESTIONE.

Da un punto dato superiormente ad un piano immobile comunque posto nello spazio sia scagliato un grave di elasticità imperfetta, secondo qualsivoglia direzione, ed esso descriverà naturalmente un arco parabolico; arrivato ad un certo punto del quale, incontrandosi, scendendo, nel piano immobile, verrà compresso, e però stante la sua elasticità sarà obbligato a descrivere un secondo arco parabolico; così un terzo, un quarto, ec.; cioè succederà di questo corpo, ciò che succede ordinariamente nel tiro degli obis.

„ Data la equazione del piano immobile, la grandezza „ e direzione della velocità colla quale è stato scagliato il „ corpo, trovare tutte le quantità necessarie a sapersi, per „ conoscere lo stato del corpo ad un istante qualunque del „ suo movimento.

Supponendo l'asse orizzontale delle z_x parallelo al piano immobile, e chiamando n l'angolo che fa il medesimo piano coll'orizzonte, e b l'ordinata verticale dello stesso piano corrispondente alla origine delle coordinate, che suporremo il punto da cui si è scagliato il corpo, sarà

$$y' = \text{tang.}\, n \,.\, u' - b$$

la equazione data del medesimo piano immobile, y', ed u' esprimendo le sue coordinate.

Il corpo percuotendo la x esima volta il piano dato colla velocità v_x diretta secondo la tangente condotta alla fine dell'arco parabolico x esimo, sarà

$$(\text{sen.}\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x)\, v_x$$

la componente della medesima velocità, effettivamente distrutta nell'urto x esimo, essendo $\text{sen.}\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x$ il seno dell'angolo che fa la stessa tangente col medesimo piano immobile; e perciò, sarà

$$r(\text{sen.}\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x)\, v_x$$

la porzione della medesima componente, che il corpo acqui-

sterà mediante la elasticità, in verso contrario a quella che aveva prima di urtare. Vale a dire, il piano immobile produrrà alla fine del tempo t_x un tale cambiamento nel moto del corpo, che esso invece di avere la velocità

$$(\text{sen.}\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x)\, v_x$$

diretta perpendicolarmente contro il piano medesimo, avrà la velocità

$$r(\text{sen.}\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x)\, v_x$$

diretta in verso affatto contrario. Quindi si potrà prescindere dal piano stesso, e considerare il moto semilibero, come libero, supponendo, che alla fine del tempo t_x venga comunicata al corpo la velocità

$$(r+1)(\text{sen.}\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x)\, v_x$$

con una direzione perpendicolare al piano, e tendente ad allontanarlo dal medesimo.

Sostituendo nella equazione $\Delta y_x = \text{tang.}\, n \Delta u_x$, dedotta dalla equazione delle differenze finite di quella del piano immobile, in luogo delle differenze Δy_x, Δu_x i valori esposti superiormente, si otterrà

$(v_x \cos.\alpha''_x + \phi_x \cos.\omega''_x)\Delta t_x - \frac{1}{2} g \Delta t^2{}_x = \text{tang.}\, n.(v_x \cos.\alpha'_x + \phi x \cos.\omega_x)\Delta t_x$,

ossia, ponendo invece delle quantità $\cos.\omega'_x$, $\cos.\omega''_x$, ϕx i loro valori

$$-\text{sen.}\, n, \cos.\, n, (r+1)(\text{sen.}\, n \,.\, v_x \cos.\alpha'_x - \cos.\, n \,.\, v_x \cos.\alpha''_x),$$

si avrà $r(\text{sen.}\, n \,.\, v_x \cos.\alpha'_x - \cos.\, n \,.\, v_x \cos.\alpha''_x) = \frac{1}{2} g \cos.\, n \Delta t_x$; e perciò il tempo corso nel descrivere l'$(x+1)$ esimo arco parabolico, cioè Δt_x sarà eguale a

$$\frac{2r}{g \cos.\, n}\left(\text{sen.}\, n \,.\, v_x \cos.\alpha'_x - \cos.\, n \,.\, v_x \cos.\alpha''_x\right).$$

Dalle cose qui esposte, si comprende, che per iscioglie-re la presente questione di moto semilibero colle stesse formole ed equazioni trovate superiormente, parlando del moto libero, basterà supporre nelle formole stesse

$\phi x \cos.\omega_x = 0$, $\phi x \cos.\omega'_x = (r+1)(\text{sen.}\, n \cos.\, n \cos.\alpha''_x - \text{sen.}^2 n \cos.\alpha'_x) v_x$,

$\phi x \cos.\omega''_x = (r+1)(\text{sen.}\, n \cos.\, n \cos.\alpha'_x - \cos.^2 n \cos.\alpha''_x) v_x$, e

$$\Delta t_x = \frac{2r}{g \cos.\, n}\left(\text{sen.}\, n \cos.\alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, n \cos.\alpha''_x\right) v_x :$$

supposizioni che riducono le equazioni

$$v_{x+1}\cos.a_{x+1}=v_x\cos.a_x+\varphi x\cos.\omega_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.a'_{x+1}=v_x\cos.a'_x+\varphi x\cos.\omega'_x,$$
$$v_{x+1}\cos.a''_{x+1}=v_x\cos.a''_x+\varphi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x$$

alle tre seguenti

$$v_{x+1}\cos.a_{x+1}=v_x\cos.a_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.a'_{x+1}=\left[(\cos.^2n-r\,\mathrm{sen}.^2n)\cos.a'_x+(r+1)\mathrm{sen}.n\cos.n\cos.a''_x\right]v_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.a''_{x+1}=\left[(\mathrm{sen}.^2n-r\cos.^2n+2r)\cos.a''_x+\left((r+1)\cos.n-\frac{2r}{\cos.n}\right)\cos.a'_x\right]v_x\,,$$

che converrebbe, al solito, integrare, volendo continuare direttamente la presente soluzione.

Se la superficie che obbliga il corpo a descrivere i successivi archi parabolici invece di essere piana, fosse una superficie curva qualunque, ma di cui si conoscesse la equazione, coi medesimi ragionamenti fatti superiormente si arriverebbe a trovare opportunamente le quantità φx, ω_x, ω'_x, ω''_x, Δt_x espresse colle altre v_x, a_x, a'_x, a''_x, onde potere considerare il moto siccome libero.

Trovate le quantità φx, ω_x, ω'_x, ω''_x espresse colle altre v_x, a_x, a'_x, a''_x, od almeno le equazioni tra tutte queste quantità, dalle quali converrebbe cavare le espressioni delle prime da sostituirsi nelle tre equazioni

$$v_{x+1}\cos.a_{x+1}=v_x\cos.a_x+\varphi x\cos.\omega_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.a'_{x+1}=v_x\cos.a'_x+\varphi x\cos.\omega'_x,$$
$$v_{x+1}\cos.a''_{x+1}=v_x\cos.a''_x+\varphi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x\,,$$

onde determinare, mediante le integrazioni delle tre equazioni risultanti, i valori delle quantità v_x, a_x, a'_x, a''_x, come abbiamo fatto superiormente, sarà utile qualche volta, l'osservare, se si potranno avere i valori delle quantità ω_x, ω'_x, ω''_x, φx, e Δt_x, senza conoscere le altre, le quali dipendendo dalle integrazioni delle tre equazioni risultanti molte volte non si possono determinare.

Per chiarire questa osservazione, e nello stesso tempo mostrare con un esempio, quanto sia utile in alcuni casi, ne usaremo per continuare la soluzione di questa questione di moto semilibero già cominciata.

Eliminando la espressione

$$\text{sen.}n \,.\, v_x \cos.\alpha'_x - \cos.n \,.\, v_x \cos.\alpha''_x$$

dalle due equazioni $\varphi x = (r+1)(\text{sen.}n.v_x\cos.\alpha'_x - \cos.n.v_x\cos.\alpha''_x)$,

$\Delta t_x = 2r(\text{sen.}n.v_x\cos.\alpha'_x - \cos.n.v_x\cos.\alpha''_x) : g\cos.n$,

si ottiene la sola semplicissima equazione seguente

$$\Delta t_x = \frac{2r}{g(r+1)\cos.n} \,.\, \varphi x ,$$

colla quale si avrà il valore di una delle due quantità φx, Δt_x, quando si conoscerà quello dell'altra.

Ponendo $x+1$ in luogo della x nella equazione

$\varphi x = (r+1)(\text{sen.}n \,.\, v_x \cos.\alpha'_x - \cos.n \,.\, v_x \cos.\alpha''_x)$,

hassi $\varphi(x+1) = (r+1)(\text{sen.}n.v_{x+1} - \cos.n.v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1})$; ma

$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1} = v_x \cos.\alpha'_x - \varphi x \,\text{sen.}n$, e

$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1} = v_x \cos.\alpha''_x + \varphi x \cos.n - g\Delta t_x$, ossia

$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x-1} = v_x\cos.\alpha''_x + \varphi x\cos.n - \frac{2r}{(r+1)\cos.n}.\varphi x$, per essere

$\Delta t_x = 2r\varphi x : g(r+1)\cos.n$, come abbiamo dianzi veduto; adunque sarà

$$\varphi(x+1) = (r+1)(\text{sen.}n.v_x\cos.\alpha'_x - \cos.n.v_x\cos.\alpha''_x - \varphi x + \frac{2r}{r+1}\varphi x);$$

ovvero $\varphi(x+1) = r\varphi x$;

e perciò $\varphi x = Ar_x$, (§. 39),

A esprimendo la costante arbitraria introdotta dalla integrazione. Così sarà

$$\Delta t_x = \frac{2rA}{g(r+1)\cos.n} \,.\, r^x ;$$

ed integrando, e soddisfacendo colla nuova costante arbitraria alla condizione $t_0 = 0$, si avrà

$$t_x = \frac{2rA(r^x - 1)}{g(r^2-1)\cos.n}, \ (\S.\ 27).$$

Per trovare il valore della arbitraria A da cui dipendono attualmente i valori delle quantità φx, Δt_x, t_x, facciasi $x = 1$ nella equazione

$Ar^x = (r+1)(\text{sen.}n \,.\, v_x \cos.\alpha'_x - \cos.n \,.\, v_x \cos.\alpha''_x)$,

risultante dall'eguagliare fra loro le due espressioni trovate

di φx, e si avrà

$$Ar=(r+1)(\text{sen.}\,n\,.\,v_x\cos.\,a'_1-\cos.\,n\,.\,v_1\cos.\,a''_1);$$

cioè $A=\frac{r+1}{r}\left(\text{sen.}\,n\,.\,v'\cos.\,m'-\cos.\,n\,.\,v'\cos.\,m''+g\theta\cos.\,n\right)$,

ponendo in luogo di $v_1\cos.\,a'_1$, $v_1\cos.\,a''_1$ i loro valori esposti nel principio della Proposizione VII.

Ora essendo $y_1=\theta v'\cos.\,m''-\frac{1}{2}g\theta^2$, $u_1=\theta v'\cos.\,m'$, e per la equazione del piano $y_1=hu_1-b$, supposto tang. $n=h$, si avrà

$$\theta^2-\frac{2v'}{g}(\cos.\,m''-h\cos.\,m')\theta=\frac{2b}{g},$$

$$\text{ossia}\quad \theta^2-\frac{2v'\,\text{sen.}\,\pi}{g\cos.\,n}\theta-\frac{2b}{g}=0,$$

supponendo π l'angolo che fa la direzione della velocità v' di projezione primitiva col piano dato; e perciò, posto $\sqrt{(v'^2\,\text{sen.}^2\pi+2bg\cos.^2 n)}=R$, sarà $\theta=\frac{v'\,\text{sen.}\,\pi+R}{g\cos.\,n}$: e con ciò

$$v_1\cos.\,\alpha_1=v'\cos.\,m',\qquad z_1=\frac{v'\cos.\,m}{g\cos.\,n}(v'\,\text{sen.}\,\pi+R),$$

$$(i)\,..\,v_1\cos.\,a'_1=v'\cos.\,m',\ \text{e}\ (j)\,..\,u_1=\frac{v'\cos.\,m'}{g\cos.\,n}(v'\,\text{sen.}\,\pi+R),$$

$$v_1\cos.\alpha''_1=hv'\cos.m'-\frac{R}{\cos.\,m},\qquad y_1=\frac{hv'\cos.m''}{g\cos.\,n}(v'\,\text{sen.}\,\pi+R)-b.$$

Sostituendo il valore del tempo θ nella espressione della arbitraria A, e facendo le riduzioni, si avrà $A=\frac{r+1}{r}R$. Quindi

$$\varphi x=\frac{r+1}{r}Rr^x,\ \Delta t_x=\frac{2R}{g\cos.n}\,.\,r^x,\ \text{e}\ t_x=\frac{2R}{g\cos.n}\,.\,\frac{r^x-r}{r-1}.$$

Essendo adesso conosciute le quantità θ, ω_x, ω'_x, ω''_x, φx, t_x; cioè il tempo corso tra l'istante nel quale si è scagliato il corpo, e quello nel quale esso ha percosso la prima volta il piano dato, la grandezza e direzione delle velocità finite che vengono comunicate al corpo di quando in quando, e la legge dei tempi che passano tra gl'istanti nei

quali vengono comunicate le stesse velocità finite, la presente questione di moto semilibero è ridotta a potersi trattare precisamente, siccome un caso particolare della proposizione VII, che è di moto libero.

Pongasi nelle espressioni delle quantità $v_x \cos.\alpha_x$, $v_x \cos.\alpha'_x$, $v'_x \cos.\alpha''_x$ esposte nella proposizione accennata i valori di ω_x, ω'_x, ω''_x, φx, Δt_x, e si avrà

$$v_x \cos.\alpha_x = \mathrm{B},$$

$$(k) \ldots\ldots v_x \cos.\alpha'_x = \mathrm{C} - \frac{r+1}{r-1} \mathrm{R} \operatorname{sen}.n \,.\, r^{x-1},$$

$$v_x \cos.\alpha''_x = \mathrm{D} + \frac{\mathrm{R}}{r-1}\left(\frac{r+1}{r}\cos.n - \frac{2}{\cos.n}\right) r^x,$$

B, C, e D esprimendo le costanti arbitrarie, colle quali soddisfacendo alle tre equazioni (i), si ha $\mathrm{B} = v' \cos.m$, $\mathrm{C} = v' \cos.m' + \frac{r+1}{r-1} \mathrm{R} \operatorname{sen}.n$, e $\mathrm{D} = h\mathrm{C}$; cioè restano esse determinate.

Le tre equazioni (k) danno immediatamente

$$v_x = \sqrt{\left\{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2 - \frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n} r^x + \mathrm{R}^2\left(r^{-2} + 4h^2(r-1)^{-2}\right) r^{2x}\right\}},$$

$$\cos.\alpha_x = \mathrm{B} : \sqrt{\left\{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2 - \frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n} r^x + \mathrm{R}^2\left(r^{-2} + 4h^2(r-1)^{-2}\right) r^{2x}\right\}},$$

$$\cos.\alpha'_x = \left(\mathrm{C} - \frac{r+1}{r-1}\mathrm{R} \operatorname{sen}.n \,.\, r^{x-1}\right) : \sqrt{\left\{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2 - \frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n} r^x + \mathrm{R}^2\left(r^{-2} + 4h^2(r-1)^{-2}\right) r^{2x}\right\}},$$

$$\cos.\alpha''_x = \left[\mathrm{D} + \frac{\mathrm{R}}{r-1}\left(\frac{r+1}{r}\cos.n - \frac{2}{\cos.n}\right) r^x\right] : \sqrt{\left\{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2 - \frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n} r^x + \mathrm{R}^2\left(r^{-2} + 4h^2(r-1)^{-2}\right) r^{2x}\right\}},$$

vale a dire, la grandezza e la direzione della velocità del corpo alla fine del tempo t_x, ossia dell'arco x esimo che esso descrive.

Sostituendo nelle equazioni $\Delta z_x = v_{x+1} \cos.\alpha_{x+1} \Delta t_x$,

$$\Delta u_x = v_{x+1} \cos.\alpha'_{x+1} \Delta t_x,$$

$$\Delta y_x = v_{x+1} \cos.\alpha''_{x+1} \Delta t_x - \tfrac{1}{2} g \Delta t^2{}_x$$

in luogo delle quantità $v_{x+1} \cos.\alpha_{x+1}$, $v_{x+1} \cos.\alpha'_{x+1}$, $v_{x+1} \cos.\alpha''_{x+1}$, Δt^x i loro valori sopra trovati, e poi facendo tutte le integrazioni, si avrà

$$z_x = \frac{2\mathrm{BR}}{g(r-1)\cos.n} \,.\, r_x + \mathrm{E},$$

$$u_x = \frac{2CR}{g(r-1)\cos.n} r_x - \frac{2hR^2}{g(r-1)^2} \cdot r^2{}_x + F,$$

$$y_x = \frac{2DR}{g(r-1)\cos.n} \cdot r_x - \frac{2h^2R^2}{g(r-1)^2} \cdot r^2{}_x + G;$$

cioè le coordinate di quel punto del piano immobile, nel quale esso è percosso dal grave la x esima volta. Le costanti arbitrarie E, F, G introdotte dalle tre integrazioni, determineransi facilmente soddisfacendo alle tre equazioni (j).

Colla stessa facilità colla quale si sono trovate le quantità v_x, cos. a_x, ec. si troverebbero le coordinate z'_x, u'_x, y'_x di un punto qualunque dell'arco x esimo che descrive il corpo, la grandezza e direzione della velocità che esso avrà alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x$, e le equazioni della x esima parabola che descrive.

Corollario 1. Indicando colla s_x la perpendicolare tirata dal punto corrispondente alle coordinate z_x, u_x, y_x sulla intersezione del piano immobile col piano delle coordinate z_x, y_x, sarà evidentemente $s_x \cos. n = u_x$; e però, prendendo per origine delle coordinate il punto a cui corrispondono le coordinate $z_x = 0$, $u_x = 0$, ed $y_x = b$, il poligono rappresentato dalle ultime tre equazioni esposte, si potrà rappresentare ancora colle sole due equazioni seguenti

$$z_x = \frac{2BR}{g(r-1)\cos.n} \cdot r^x + E,$$

$$s_x = \frac{2CR}{g(r-1)\cos.^2 n} \cdot r^x - \frac{2hR^2}{g(r-1)^2\cos.n} \cdot r^{2x} + \frac{F}{\cos.n},$$

le coordinate essendo ora z_x, ed s_x.

Eliminando da queste ultime equazioni l'indice x degli angoli del poligono, si ottiene la sola equazione

$$s_x = \frac{C}{B\cos.n}(z_x - E) - \frac{g\,\mathrm{sen}.n}{B^2}(z_x - E)^2 + \frac{F}{\cos.n},$$

la quale esprime che il poligono suddetto è parabolico.

Corollario 2. Se il corpo fosse perfettamente elastico, ossia fosse $r = 1$, si avrebbe

$$\phi x = 2\sqrt{(v'^2 \,\mathrm{sen}.^2\pi + 2bg\cos.^2 n)}, \text{ e } \Delta t_x = 2\sqrt{\left(\frac{v^2\,\mathrm{sen}.^2\pi}{g^2\cos.^2 n} + \frac{2b}{g}\right)};$$

cioè

cioè tanto le successive velocità $\varphi 1$, $\varphi 2$, ec., quanto i tempi impiegati nel descrivere i successivi archi parabolici, sarebbero quantità costanti; ossia così le percosse successive $\varphi 1$, $\varphi 2$, ec., che i tempi Δt_1, Δt_2, ec. eguali separatamente fra loro. Ciò che è veramente singolare.

Nella medesima ipotesi avrebbesi

$v_x \cos. a_x = v' \cos. m$,

$v_x \cos. a'_x = v' \cos. m' + 2R \operatorname{sen}. n - 2 \operatorname{sen}. n . Rx$,

$v_x \cos. a''_x = hv' \cos. m' + hR \operatorname{sen}. n - R \cos. n - 2h \operatorname{sen}. n . Rx$,

ec., ec., ec.

Osservazione. Se il rapporto r della elasticità alla percossa, invece di essere costante, come abbiamo supposto tacitamente sino ad ora, fosse una funzione variabile r_x dell'indice x, con ragionamenti in tutto simili a quelli fatti superiormente per avere la equazione

$\varphi(x+1) - r\varphi x = 0$, avrebbesi in suo luogo quest'altra

$$\varphi(x+1) - \frac{r_x}{r_{x+1}}(r_x+1)\varphi x = 0,$$

la quale integrata dà (§. 39)

$$\varphi x = A(r_x+1)\, e^{\Sigma \log. r_x};$$

e perciò $\Delta t_x = \frac{2A}{g \cos. n} e^{\Sigma \log. r_{x+1}}$, e $t_x = \frac{2A}{g \cos. n} \Sigma e^{\Sigma \log. r_{x+1}}$

vale a dire, anche nel caso, che, il rapporto della elasticità alla percossa, sia una funzione conosciuta dell'indice x, si potrà trattare la presente questione di moto semilibero, come si è trattata nella ipotesi del medesimo rapporto costante.

Paragonando fra loro tutti i metodi particolari coi quali si sono sciolte le proposizioni esposte in questa Memoria, facilmente scopresi una parte di essi esclusivamente comune a tutti, la quale da sè sola dà una idea generale non solo degli stessi metodi particolari esposti, ma ancora di quelli che si dovranno seguire per isciogliere una proposizione qualunque di moto discreto, anche nel caso che i successivi moti ordinarj siano di più specie differenti; anzi la medesima dà una idea della maniera di ridurle ad essere di semplice moto libero.

NOTA PRIMA.

In tutti i trattati di trigonometria vi sono esposte e dimostrate le equazioni colle quali hassi la tangente, il seno, ed il coseno della somma di due archi, quando queste linee si conoscano per gli archi stessi; ed in alcuni vi sono anche dedotte da quelle delle altre equazioni, le quali danno similmente la tangente, il seno, ed il coseno della somma di tre, di quattro, ec. archi. E quantunque coll'osservare quelle equazioni, non sia difficile, siccome io medesimo mi sono persuaso, lo scoprire la legge onde avere immediatamente, per induzione, una simile equazione rispetto alla somma di un numero qualunque di archi, ciò non ostante, siccome la induzione immediata, che in queste e simili ricerche, sembra indispensabilissima, non è mai una dimostrazione diretta, così in questa nota, approfittando della opportunità che mi si presenta, esporrò un metodo con cui avere immediatamente la tangente, il seno, ed il coseno della somma di un numero qualsivoglia di archi, quando tali rette conoscansi per gli archi semplici, e ciò senza il minimo soccorso della immediata induzione.

Qualunque siano le quantità A, B, C, ... M, purchè il loro numero non sia infinito, possono sempre rappresentare, per quello che si dimostra nella teorica delle interpolazioni, i primi termini di una medesima serie, ossia i risultamenti che si hanno, supponendo, nel suo termine generale, successivamente l'indice del numero dei termini eguale a 0, 1, 2, 3, ec.; anzi, variando la disposizione delle medesime quantità, esse potranno rappresentare i primi termini di tante diverse serie, quante sono le combinazioni, che si possono fare con esse; e però altrettanti saranno i termini generali, o le funzioni del numero dei termini delle stesse serie, che avranno l'anzidetta proprietà.

La prima di queste due verità sarà il fondamento delle

ricerche, che daranno le equazioni dimandate; e la seconda, ci previene, che potremo variare le equazioni stesse, permutando fra loro le funzioni trigonometriche degli archi semplici, che le equazioni medesime conteranno.

Proposizione.

„ Date le tangenti, i seni, ed i coseni di un numero „ qualunque di archi, trovare la tangente, il seno, ed il „ coseno della somma di essi.

Della tangente.

Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n+1)$ archi, e $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ le loro tangenti, le quali sono per ipotesi conosciute.

Supponendo $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{x-1} = \xi_x$, sarà $\xi_{x+1} = \xi_x + a_x$; e però $\text{tang.}\xi_{x+1} = \text{tang.}(\xi_x + a_x) = (\text{tang.}\xi_x + t_x) : (1 - t_x \text{ tang.}\xi_x)$, ossia si avrà la equazione delle differenze finite

(D) .... $t_x \text{ tang.}\xi_x \text{ tang.}\xi_{x+1} - \text{tang.}\xi_{x+1} + \text{tang.}\xi_x + t_x = 0$,

la quale integrata con una regola simile a quella usata nelle proposizioni I. IV. e V. di questa Memoria per integrarne altre affatto simili ad essa, e trovato il valore della costante arbitraria introdotta dalla integrazione, come si trovò nella proposizione prima, cioè per la equazione (A), somministra

$$\text{tang.}\xi_x = \cfrac{t_x}{-1 + b_{x-1} + \cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2} + \cfrac{a_{x-2}}{\ddots \; b_1 + \cfrac{a_1}{1 + \cfrac{t_2}{t_0}}}}},$$

essendo $b_x = \frac{t_x + t_{x+1}}{t_x}$, ed $a_x = -\frac{1 + t^2_x}{t_x} t_{x+1}$. Quindi, ponendo invece delle due quantità b_{x-1}, a_{x-1} i loro valori, e supponendo nella formola risultante $x = n + 1$, si avrà $\text{tang.}\xi_{n+1}$, ossia la tangente dimandata

$$\text{tang.}(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n)=\cfrac{t_n}{1-\cfrac{1+t^2_n}{b_{n-1}+\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-2}+\cfrac{a_{n-2}}{\ddots\;b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{t_1}{t_0}}}}}}.$$

Corollario 1. Siano gli archi a_0, a_1, a_2, ... a_n eguali fra loro, e sarà t_x costante; e perciò $\text{tang.}(a_0+a_1+a_2+\ldots a_n)$ $=\text{tang.}(n+1)\,a=$

$$\cfrac{\text{tang. } a}{1-\cfrac{\text{sec.}^2 a}{2-\cfrac{\text{sec.}^2 a}{2-\cfrac{\text{sec.}^2 a}{\ddots\;2-\cfrac{\text{sec.}^2 a}{2-\cfrac{\text{sec.}^2 a}{2}}}}}}$$

continuando la divisione $(n+1)$ volte.

Corollario 2. Essendo l'integrale finito dell'arco, che ha per tangente la funzione t_x qualunque, eguale alla somma degli archi, i quali hanno per tangenti $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{x-1}$; cioè eguale ad $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{x-1}$, sarà, per le cose esposte

$$\Sigma\,\text{Arc. tang.}\,t_x=\text{Arc. tang.}\,\cfrac{-t_{x-1}}{1+\cfrac{1+t^2_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3}+\cfrac{a_{x-3}}{\ddots\;b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{t_1}{t_0}}}}}}.$$

Del seno e del coseno.

Indicando colle s_0, s_1, s_2, ... s_n i seni, e colle c_0, c_1, c_2, ..., c_n i coseni degli angoli a_0, a_1, a_2, ..., a_n; e colla ξ_x la somma $a_0+a_1+a_2+\ldots a_{x-1}$, come sopra, si ha $\text{sen.}\,\xi_{x+1}=\text{sen.}(\xi_x+a_x)$, ossia $\text{sen.}\,\xi_{x+1}=c_x\,\text{sen.}\,\xi_x+s_x\,\text{cos.}\,\xi_x$: così $\text{cos.}\,\xi_{x+1}=c_x\,\text{cos.}\,\xi_x-s_x\,\text{sen.}\,\xi_x$; cioè hansi le due equazioni

$$\text{sen.}\,\xi_{x+1}-c_x\,\text{sen.}\,\xi_x-s_x\,\text{cos.}\,\xi_x=0,$$
$$\text{cos.}\,\xi_{x+1}-c_x\,\text{cos.}\,\xi_x+s_x\,\text{sen.}\,\xi_x=0,$$

le quali integrate daranno le espressioni, o formole dimandate.

Eliminando sen. ξ_x da queste due equazioni, si ha

$$\cos.\xi_{x+2} - \frac{s_x c_{x+1} + s_{x+1} c_x}{s_x} \cos.\xi_{x+1} + \frac{s_{x+1}}{s_x} \cos.\xi_x = 0;$$

ed eliminando cos. ξ_x, si ottiene

$$\text{sen.}\,\xi_{x+2} - \frac{s_x c_{x+1} + s_{x+1} c_x}{s_x} \text{sen.}\,\xi_{x+1} + \frac{s_{x+1}}{s_x} \text{sen.}\,\xi_x = 0,$$

equazione la quale contenendo la funzione sen. ξ_x, come l'antecedente contiene cos. ξ_x, c'insegna, che i valori cercati delle due funzioni sen. ξ_x, cos. ξ_x sono due integrali particolari di una medesima equazione del secondo ordine delle differenze finite, cioè della equazione lineare seguente

$$y_{x+2} - \frac{\text{sen.}(a_x + a_{x+1})}{\text{sen.}\,a_x} y_{x+1} + \frac{\text{sen.}\,a_{x+1}}{\text{sen.}\,a_x} y_x = 0.$$

Ad ottenere l'integrale di questa equazione di secondo ordine, e da cui dipendono attualmente le espressioni o formole dimandate delle due funzioni sen. ξ_x, cos. ξ_x, si userà la regola generale, ormai notissima, colla quale s'integrano le equazioni lineari del secondo ordine delle differenze finite, vale a dire la regola, che dal suo autore, io dirò Brunacciana.

Corollario 1. Se tutti gli archi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero tra loro eguali, la equazione superiormente esposta diventerebbe

$$y_{x+2} - 2cy_{x+1} + y_x = 0,$$

la quale, avendo i coefficienti costanti, è anche integrabile colla supposizione di $y_x = A\mu^x$, colla quale s'integrano tutte le equazioni di questa natura (§. 45), ed integrata, dà

$$y_x = A(\cos.a + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x + A'(\cos.a - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x;$$

cioè determinando opportunamente le due costanti arbitrarie A, A', hassi

$$\text{sen.}\,xa = \frac{(\cos.a + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x - (\cos.a - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x}{2\sqrt{-1}}, \text{ e}$$

$$\cos.xa = \frac{(\cos.a + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x + (\cos.a - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x}{2},$$

che sono le notissime formole Bernulliane.

Corollario 2. Per essere

$\Sigma \text{Arc.sen.}\, s_x = \text{A.sen.}\, s_{x-1} + \text{A.sen.}\, s_{x-2} + \ldots + \text{A.sen.}\, s_0$,

e $\Sigma \text{Arc.cos.}\, c_x = \text{A.cos.}\, c_{x-1} + \text{A.cos.}\, c_{x-2} + \ldots + \text{A.cos.}\, c_0$,

potremo dare a questi integrali finiti le forme seguenti

$\Sigma \text{A.sen.}\, s_x = \text{A.sen.}\, \xi_x$, e $\Sigma \text{A.cos.}\, c_x = \text{A.cos.}\, \xi_x$,

rappresentando $\text{sen.}\, \xi_x$, $\cos. \xi_x$ i due integrali particolari suddetti della medesima equazione generale in y_x.

Nota seconda.

In questa nota si espone un metodo per integrare l'equazione

$$(E) \ldots . a_x y_x y_{x+1} + b_x y_{x+1} + c_x y_x + d_x = 0,$$

nella ipotesi di a_x, b_x, c_x, e d_x funzioni qualsivogliono cognite della x, per riunire in un solo quelli coi quali si sono integrate le quattro equazioni (A), (B), (C), (D), trovate nelle proposizioni I., IV., V., e nella nota antecedente, le quali sono visibilmente casi particolari di questa.

Onde integrare l'equazione (E), supponghiamo $y_x = \frac{t_x}{z_x}$, t_x, e z_x rappresentando due nuove funzioni incognite, ed avremo, colla stessa equazione

$$y_{x+1} = -(c_x t_x + d_x z_x) : (a_x t_x + b_x z_x);$$

ma per supposizione dev'essere $y_{x+1} = \frac{t_{x+1}}{z_{x+1}}$; adunque, tra le funzioni incognite t_x, z_x, si avrà l'equazione

$$\frac{t_{x+1}}{z_{x+1}} = -\frac{c_x t_x + d_x z_x}{a_x t_x + b_x z_x}.$$

Per soddisfare quest'equazione e determinare nel medesimo tempo i valori delle due funzioni t_x, z_x, si supponga $t_{x+1} = -c_x t_x - d_x z_x$, e si avrà $z_{x+1} = a_x t_x + b_x z_x$; cioè si avranno le due equazioni

$$t_{x+1} + c_x t_x + d_x z_x = 0, \quad z_{x+1} - a_x t_x - b_x z_x = 0$$

anch'esse delle differenze finite di prim'ordine, come la proposta, ma lineari.

Eliminando la funzione t_x da queste due equazioni, e supponendo $\frac{a_x b_{x+1} - c_x a_{x+1}}{a_x} = A_x$, e $(b_x c_x - a_x d_x)\frac{a_{x+1}}{a_x} = B_x$, hassi la sola equazione seguente

$$z_{x+2} - A_x z_{x+1} - B_x z_x = 0,$$

la quale, benchè sia del second'ordine, ed abbia i coefficienti variabili, nulladimeno, si sa integrare colla regola Brunacciana.

Diffatto, supponghiamo $z_x = Ce^{\Sigma l \cdot a_x}$, C esprimendo una costante arbitraria, $l \cdot a_x$ il logaritmo Neperiano della funzione incognita a_x, ed e, al solito, la base dei medesimi logaritmi, ed avremo

$$a_x a_{x+1} - A_x a_x - B_x = 0;$$

e perciò $a_x = A_{x-1} + \frac{B_{x-1}}{a_{x-1}}$, ovvero

$$a_x = A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots\, A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{a_0}}}}},$$

a_0 esprimendo una costante arbitraria.

Per trovare il valore dell'altra funzione t_x, si sostituisca nel suo valore $(z_{x+1} - b_x z_x) : a_x$, desunto dalla prima delle due equazioni esposte, qui sopra, in luogo della z_x il suo valore $Ce^{\Sigma l \cdot a_x}$, ed avrassi

$$t_x = \frac{a_x - b_x}{a_x} Ce^{\Sigma l \cdot a_x}.$$

Ora sostituendo nella frazione $t_x : z_x$, invece delle funzioni t_x, z_x i loro valori

$$Ce^{\Sigma l \cdot a_x}, \quad \frac{a_x - b_x}{a_x} Ce^{\Sigma l \cdot a_x},$$

si ha

$$y_x = \frac{a_x - b_x}{a_x}; \text{ quindi } y_x = \frac{1}{a_x}\left(-b_x + A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots\, A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{a_0}}}}}\right)$$

integrale completo dell'equazione (E), per essere a_0 una quantità tutt'ora arbitraria.

OSSERVAZIONE 1. Potrei qui esporre molte eleganti questioni di geometria, le soluzioni delle quali dipendono dalle integrazioni di equazioni, che sono anch' esse casi particolari della (E) integrata qui sopra, e ciò servirebbe per mostrare l'uso dovizioso di essa anche nella pura geometria; ma siccome con questa esposizione mi allontanerei troppo dallo scopo che mi sono prefisso, così mi limiterò alle due seguenti.

PROPOSIZIONE PRIMA.

„ In un dato poligono rettilineo inscriverne un altro ri-
„ entrante, i lati del quale prolungati, se occorre, passino
„ per altrettanti punti dati (*).

Siano numerizzati i lati del poligono dato, quelli del dimandato, ed i punti dati di posizione; e sia $y = a_x z + b_x$ l'equazione della retta nella quale trovasi il lato x esimo del dato, cioè y e z le coordinate di un punto qualunque, ed a_x, e b_x i soliti parametri, qui funzioni cognite del numero x, dai quali dipende la posizione della medesima retta, relativamente a due assi ortogonali a cui essa si riferisce.

Similmente, siano A_x e B_x i due analoghi parametri, in questo caso funzioni incognite di x, dai quali dipende la posizione di quella retta di cui è parte l'x esimo lato del poligono dimandato; cioè, sia $u = A_x t + B_x$ l'equazione della stessa retta, rappresentando u, e t le coordinate di un punto qualunque di essa.

Supponendo, che il vertice dell' angolo formato dai lati x, $(x + 1)$ esimi del poligono dimandato, od inscritto, sia quello che cade nel lato x esimo del poligono dimandato,

avran-

(*) Quando i vertici degli angoli di un poligono sono nelle rette in cui trovansi i lati di un altro poligono, quello si dice qui *Inscritto* in questo; e reciprocamente questo *Circoscritto* a quello.

avranno luogo insieme le tre equazioni

$$y = a_x z + b_x \,,\quad y = A_x z + B_x \,,\quad y = A_{x+1} z + B_{x+1} \,,$$

passando le rette espresse da esse pel medesimo punto, cioè pel vertice anzidetto.

Eliminando da queste tre equazioni trovate le quantità y, z, che rappresentano qui le coordinate del punto comune alla retta nella quale vi è il lato x esimo del poligono circoscritto, e delle due nelle quali vi sono i due x, $(x+1)$ esimi dell'inscritto, si avrà la sola equazione

$$(a) \ldots\ldots B_x \Delta A_x - A_x \Delta B_x = b_x \Delta A_x - a_x \Delta B_x \,.$$

E questa è l'equazione esprimente la relazione, che debbono avere in generale i parametri A_x, B_x, a_x, b_x; perchè il poligono di cui il lato x esimo trovasi nella retta, che ha per equazione $u = A_x t + B_x$, sia inscritto in quello avente il lato x esimo nell'espressa dall'altra $y = a_x z + b_x$, o questo circoscritto a quello.

Rappresentata colla m_x l'ordinata, e colla n_x l'ascissa dell'x esimo punto dato di posizione, e supposto che passi per esso la retta nella quale vi è il lato x esimo del poligono dimandato, si avrà, fra le funzioni A_x, B_x incognite, e le cognite m_x, n_x, l'equazione $m_x = A_x n_x + B_x$. Adunque, affinchè la retta in cui trovasi il lato x esimo del poligono dimandato sia espresso dall'equazione supposta $u = A_x t + B_x$, le due funzioni A_x, B_x debbono avere le relazioni che esprimono le due equazioni

$$B_x \Delta A_x - A_x \Delta B_x = b_x \Delta A_x - a_x \Delta B_x$$
$$m_x = A_x n_x + B_x \,.$$

Eliminando da queste ultime equazioni la funzione B_x, si ha la sola equazione delle differenze finite, fra le sole funzioni A_x, A_{x+1},

$$A_x A_{x+1} \Delta n_x - (b_x + a_x n_{x+1} - m_x) A_{x+1} - (m_x - a_x n_x - b_x) A_x + a_x \Delta m_x = 0 \,,$$

la quale, siccome si vede, è un caso particolare dell'equazione (E); e perciò anch'essa integrabile col metodo superiormente esposto.

La costante arbitraria, che conterrà l'integrale di quest'

equazione, ossia il valore della A_x, si determinerà, soddisfacendo la condizione che il poligono dimandato dev'essere rientrante, vale a dire, che, sì il suo primo, che il suo ultimo lato, debbono avere uno stesso punto comune colla retta della quale è porzione l'ultimo lato del dato.

L'equazione $m_x = A_x n_x + B_x$, esposta sopra, dà

$$B_x = m_x - A_x n_x ,$$

cioè il valore richiesto dell'altra funzione B_x.

Conoscendo attualmente i valori delle funzioni A_x, B_x, e perciò l'equazione $u = A_x t + B_x$ della retta di cui è parte il lato x esimo del poligono dimandato, avransi facilissimamente tutte le altre equazioni e quantità dalle quali dipende la conoscenza completa di esso.

Se le successive rette nelle quali sono situati i lati del poligono inscritto, invece di passare per altrettanti punti dati di posizione, come si è supposto nella proposizione trattata, dovessero formare angoli che avessero alcune proprietà, o fra loro, o con quelli di un secondo poligono dato, ossia con quelli del dato stesso, si conoscerebbe la funzione A_x, immediatamente, o previa l'integrazione dell'equazione esprimente la stessa passione, come appunto accade rinvenendo con questi principj, il poligono che descrive il corpo nella Proposizione V.; ed avrebbesi sempre la B_x integrando l'equazione generale (a) dei poligoni inscritti, o la sua equivalente

$$B_{x+1}\Delta\frac{a_x - A_{x+1}}{a_x - A_x} B_x - \frac{b_x \Delta A_x}{a_x - A_x} = 0 .$$

Ancora la soluzione del famosissimo problema, d'inscrivere in un dato cerchio un poligono rientrante, che i suoi lati passino, distesi, abbisognando, per altrettanti punti dati di posizione, trattato come lo fu dal Signore *Magistrini* nella sua ingegnosa poligonometria analitica, dipende dall'integrazione di un'equazione della forma della (E), e però esso si potrà sciogliere e generalmente, anche seguendo questo metodo, integrando l'equazione risultante, come un caso particolare della stessa (E).

Non essendomi noto che siasi pubblicata la soluzione della proposizione „ Inscrivere in una linea qualunque di second' ordine un poligono rettilineo rientrante di un numero qualsivoglia di lati, i quali prolungati se fa bisogno passino per altrettanti punti dati di posizione nel piano di essa „ la quale è evidentemente rispetto all'Ellisse, alla Parabola, ed alla Iperbola, cioè in generale alle linee di second'ordine, ciò che è il Problema anzi accennato relativamente al solo circolo, ed il superiormente trattato pe' poligoni rettilinei, approfitto della presente occasione onde esporre di essa la soluzione seguente, benchè appoggiata puramente alla geometria descrittiva, e però a principj, che non hanno nessun rapporto cogli esposti in questa Memoria.

Eretto un Cono ordinario sul piano della linea di second'ordine, e fatto al medesimo, con un piano, una sezione circolare, si unisca il suo vertice coi punti dati nel piano della linea stessa, e si prolunghino queste rette, se fa bisogno, sino all'incontro di quel piano nel quale vi è la sezione circolare, ed avransi così in questo piano, tanti punti e dati di posizione, quanti sono quelli nel piano della stessa linea data: fatto questo, s'inscriva nella sezione circolare un poligono rientrante cui i lati passino pei punti anzi determinati nel piano della medesima, e poscia si prolunghino, abbisognando, i lati del cono che passano per i vertici di questo poligono, sino all'incontro della linea data di second'ordine, e questi punti d'incontro saranno manifestamente i vertici del poligono inscritto nella data linea di second'ordine, i cui lati passeranno prolungati, se fa bisogno, pei punti dati di posizione, vale a dire i vertici del poligono dimandato.

Esempio. Inscrivere nella parabola ABC un triangolo A'B'C' tale, che i suoi lati, prodotti se sia d'uopo, passino per tre punti Q, R, ed S dati?

Fissiamo per primo piano dei coordinati quello della parabola medesima, e per secondo quello che passa per DBE suo asse, perpendicolarmente allo stesso suo piano.

Da un punto F della parabola si tiri la FG perpendicolare al suo asse, si prenda sul medesimo GH = GF, si unisca il punto H coll'I del prolungamento della FG; conducasi la HJ perpendicolare all'HI, e si estenda sino in J punto dell'altro prolungamento della FG; si tirino le JL, IL, la prima parallela all'asse della parabola, e la seconda pel suo vertice, cioè per B; e saranno queste le intersezioni del primo piano coordinato, e di una superficie conica ordinaria avente il vertice in L, e di cui la stessa parabola data ne è una sezione fatta parallelamente al lato JL.

Trovati in questo modo i lati JL, BL, si conduca la MN perpendicolare a DBE, e sarà MO il diametro di una sezione circolare del medesimo, disegnata nel piano le cui tracce sono PN, PM.

Condotte le rette QT, RU, SV, LX perpendicolari all'asse, ed uniti i punti T, U, e V col vertice L del cono, e gli altri Q, R, ed S col punto X, le rette TL, QX; UL, RX; VL, SX saranno le projezioni di quelle altre che uniscono il vertice del cono coi punti dati Q, R, ed S.

I punti Y, Y'; Z, Z'; W, W' così determinati, esprimono le projezioni dei tre, ove le rette, le quali passano pel vertice L, e pei dati Q, R, ed S incontrano il piano rappresentato dalle tracce PN, PM.

Per inscrivere ora nel cerchio, che ha per diametro OM, il triangolo, i cui lati prodotti, se abbisogna, passino pei punti le cui projezioni sono le anzi determinate, cioè per trovare le projezioni dei vertici degli angoli di questo triangolo, si prenda $Pw = PW$, $Pm = PM$, e si descriva sulla wm come diametro il cerchio *obmc*, e tirisi perpendicolarmente alla traccia PN la $Y'y = PY$, $Z'z = PZ$, e la $W'w = PW$; indi s'inscriva nel cerchio anzi descritto il triangolo *abc*, che il suo lato *ac* passi per z, e i prolungamenti degli altri due *ab*, *bc* per gli altri due punti w, y, con una delle regole insegnateci da *Giordano*, *Malfatti*, *Lexel*, *Carnot*, *Lagrange*, ec.

Fatto ciò, dal punto *a* vertice di un angolo del triango-

lo *abc* si tiri la *am* perpendicolare alla PN, e il punto *m* trovato in questo modo sarà la projezione nel primo piano coordinato del vertice di un angolo del triangolo suddetto inscritto nel cerchio avente per diametro MO.

L'altra projezione del medesimo vertice sarà il punto della PM la cui distanza dal P eguaglia *ma*. In un modo affatto simile si determineranno le projezioni dei vertici degli altri due angoli del medesimo triangolo.

Conoscendosi attualmente le projezioni dei vertici degli angoli del triangolo inscritto nel cerchio che ha per diametro MO, i cui lati distesi, se fa bisogno, passano pei punti, che hanno per projezioni Y, Y'; Z, Z'; W, W', facilmente si determineranno le projezioni dei lati del cono, i quali passano per vertici del triangolo medesimo, ed in conseguenza i vertici A', B', C' del triangolo dimandato.

Determinato, come sopra, il punto *m*, si potrà continuare la soluzione nel modo seguente: uniscasi immediatamente il punto X coll'*m*, prolungasi questa retta sino in A' ad incontrare la parabola; indi si conduca la SA'B', poscia la B'C'Q, in ultimo la C'RA', e sarà A'B'C' il triangolo dimandato.

Osservazione 2. Se in un poligono se ne iscriva un altro, in questo un terzo, in quest'altro un quarto; e così si continui. Indicando colla $u = ta_{x,y} + \beta_{x,y}$ l'equazione fra le coordinate rettangolari u, t della retta nella quale trovasi il lato x esimo del poligono y esimo degli inscritti, l'equazione (a) dà

$$(1) \ldots\ldots \Delta \frac{a_{x,y}}{y} \Delta \frac{b_{x,y+1}}{x} = \Delta \frac{b_{x,y}}{y} \Delta \frac{a_{x,y+1}}{x};$$

ed esprimendo colla $r = s\delta_{x,y} + \xi_{x,y}$ quella nella quale vi è il lato x esimo del primo dei medesimi poligoni, il quale è anche l'y esimo ciscoscritto all'y esimo suddetto, la stessa equazione (a) somministra

$$(2) \ldots\ldots \Delta \frac{\delta_{x,y}}{x} \Delta \frac{\xi_{x,y}}{y} = \Delta \frac{\delta_{x,y}}{y} \Delta \frac{\xi_{x,y}}{x}.$$

Similmente, chiamando $u_{x,y}$, $t_{x,y}$ le coordinate rettango-

le del vertice dell'angolo x esimo dell'y esimo poligono degli inscritti, trovasi, colla medesima equazione (a), ma molto più speditamente colla ispezione della figura, l'equazione

$$(3)\ldots\ldots \Delta\frac{u_{x,y}}{y}\Delta\frac{t_{x,y}}{x}=\Delta\frac{u_{x,y}}{x}\Delta\frac{t_{x,y}}{y}:$$

così si dimostra facilissimamente, che ha luogo l'equazione seguente

$$(4)\ldots\ldots \Delta\frac{r_{x,y}}{y}\Delta\frac{s_{x,y+1}}{x}=\Delta\frac{s_{x,y}}{y}\Delta\frac{r_{x,y+1}}{x}$$

tra le coordinate ortogonali $r_{x,y}$, $s_{x,y}$ dei vertici degli angoli del poligono y.

È singolare, che la seconda equazione (4), dei poligoni circoscritti è affatto simile alla (1), prima degli inscritti, e la seconda (3) di questi alla (2), prima di quelli.

Esempio. Sia $\Delta\frac{t_{x,y}}{y}=n\Delta\frac{t_{x,y}}{x}$, cioè la distanza fra i vertici degli angoli x esimi dei poligoni y, $(y+1)$ esimi inscritti sia l'n esima parte del lato x esimo del poligono y esimo dei medesimi, e si avrà, mercè l'equazione (3), dianzi esposta, $\Delta\frac{u_{x,y}}{y}=n\Delta\frac{u_{x,y}}{x}$; ossia avransi le due equazioni delle differenze finite, lineari, e del primo ordine, seguenti

$$nt_{x+1,y}-t_{x,y+1}-(n-1)t_{x,y}=0,$$
$$nu_{x+1,y}-u_{x,y+1}-(n-1)u_{x,y}=0,$$

fra loro simili, le quali integrate colla regola notissima di *Lagrange* (§. 86), o con quella che insegnammo in altra occasione, e determinate opportunamente le funzioni arbitrarie introdotte dalle integrazioni, somministrano

$$t_{x,y}=(1-n)^y\left\{t_{x,0}+y\left(\frac{n}{1-n}\right)t_{x+1,0}+\frac{y(y-1)}{2}\left(\frac{n}{1-n}\right)^2 t_{x+2,0}+\ldots+\left(\frac{n}{1-n}\right)^y t_{x+y,0}\right\},\ \text{ed}$$

$$u_{x,y}=(1-n)^y\left\{u_{x,0}+y\left(\frac{n}{1-n}\right)u_{x+1,0}+\frac{y(y-1)}{2}\left(\frac{n}{1-n}\right)^2 u_{x+2,0}+\ldots+\left(\frac{n}{1-n}\right)^y u_{x+y,0}\right\};$$

vale a dire le coordinate del vertice x esimo dell'y esimo poligono degli inscritti espresse per quelle dei vertici degli angoli del primo poligono.

Se fosse $n=\frac{1}{2}$, ossia se i vertici degli angoli del primo poligono y esimo inscritto cadessero nelle metà dei lati dell'$(y-1)$ esimo, le formole integrali, anzi esposte, diventerebbero

$$t_{x,y}=\frac{1}{2^y}\left\{t_{x,0}+yt_{x+1,0}+\frac{y(y-1)}{2}t_{x+2,0}+\ldots\ldots+t_{x+y,0}\right\}, \text{ ed}$$

$$u_{x,y}=\frac{1}{2^y}\left\{u_{x,0}=yu_{x+1,0}+\frac{y(y-1)}{2}u_{x+2,0}+\ldots\ldots+u_{x+y,0}\right\}:$$

come fu trovato altrimenti dal Sig. *Magistrini* nella sua Poligonometria sopra citata.

Proposizione seconda.

„ Trovare le equazioni di un poligono circoscritto alla „ curva, che ha per equazione $f(y,z)=0$ fra le coordina- „ te ortogonali z, y, conoscendosi le tangenti de' suoi angoli „ esteriori.

Siano z_x, y_x le coordinate del punto di contatto della curva data col lato x esimo del poligono, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_x$, o semplicemente $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ la tangente che fa il lato stesso col prolungamento dell'asse delle ascisse z_x: così $z_{x+1}, y_{x+1}, \left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}$, o $\left(\frac{dy}{dz}\right)'$ le analoghe quantità pel punto di contatto $(x+1)$ esimo; e t_x la tangente dell'angolo esteriore x esimo del poligono, cioè quello compreso dal lato x esimo e dal prolungamento dell'$(x+1)$ esimo.

Essendo l'angolo, che ha per tangente t_x, eguale all'angolo avente per tangente $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x$, meno quello che ha $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}$, si avrà

$$t_x=\left\{\left(\frac{dy}{dz}\right)-\left(\frac{dy}{dz}\right)'\right\}:\left\{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)'\right\}; \text{ ossia}$$

$$t_x\left(\frac{dy}{dz}\right)_x\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}+\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}-\left(\frac{dy}{dz}\right)_x+t_x=0; \text{ ovvero}$$

$$t_x\left(\frac{dz}{dy}\right)_x\left(\frac{dz}{dy}\right)_{x+1}-\left(\frac{dz}{dy}\right)_{x+1}+\left(\frac{dz}{dy}\right)_x+t_x=0:$$

equazione, la quale è anch'essa visibilmente un caso particolare della (E), anzi è la stessa (D); e però sarà

$\left(\frac{dz}{dy}\right)_x=\frac{t_x}{\xi_x-1}$, oppure $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x=\frac{\xi_x-1}{t_x}$, ξ_x essendo eguale ad

$$A_{x-1}+\frac{B_{x-1}}{A_{x-2}+\frac{B_{x-2}}{\ddots\;A_2+\frac{B_2}{A_1+\frac{B_1}{C}}}},$$

ove A_x, e B_x esprimono le funzioni conosciute $1+\frac{t_{x+1}}{t_x}$, $-(1+t_x^2)\frac{t_{x+1}}{t_x}$, e la C una costante arbitraria.

Ora dall'equazione data della curva cavasi $\left(\frac{dy}{dz}\right)=-\left(\frac{df}{dz}\right):\left(\frac{df}{dy}\right)$; e perciò eguagliando questi due valori della tangente $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x$, si avrà l'equazione

$$\left(\frac{df}{dz}\right):\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1-\xi_x}{t_x},$$

la quale esprime una relazione delle coordinate z_x, y_x. Ma queste medesime coordinate hanno anco la relazione espressa dall'equazione data $f(z,y)=0$; adunque fra le coordinate dei singoli punti di contatto della data curva e dei lati del poligono avranno simultaneamente luogo le due seguenti equazioni

$$\left(\frac{df}{dz}\right):\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{1-\xi_x}{t_x},$$
$$f(z_x,y_x)=0,$$

le quali potranno servire, conseguentemente, per determinare le medesime coordinate.

Espresse colle t, u le coordinate rettangole di un punto qualunque della retta nella quale cade il lato x esimo del poligono, e colle A, B i parametri da cui si fa dipendere solita-

litamente la posizione della medesima rispetto agli assi delle stesse coordinate, cioè espressa coll'equazione $u = At + B$ la medesima retta si avrà $A = \left(\frac{dy}{dz}\right)_x$,

$$\text{e } B = y_x - z_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_x, \quad (\S. 78)$$

dovendo essa passare pel punto a cui corrispondono le coordinate y_x, z_x ed essere tangente la curva nel medesimo punto. Vale a dire, sarà

$$u = t\left(\frac{dy}{dz}\right)_x + y_x - z_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_x$$

l'equazione del lato x esimo del poligono: così sarà quest'altra

$$u' = t'\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1} + y_{x+1} - z_{x+1}\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}$$

quella del seguente, u', e t' esprimendo le sue coordinate ortogonali.

Il vertice dell'angolo x esimo del poligono, ossia dell'angolo formato dai lati x, $(x+1)$ esimi, egli è evidentemente un punto comune alle due rette espresse dalle equazioni anzi esposte; e però avransi, fra le coordinate di questo punto, che denomineremo t_x, u_x, simultaneamente le due equazioni seguenti

$$u_x = t_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_x + y_x - z_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_x,$$

$$u_x = t_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1} + y_{x+1} - z_{x+1}\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1},$$

le quali somministrano immediatamente

$$t_x = \Delta\left\{z\left(\frac{dy}{dz}\right) - y\right\} : \Delta\left(\frac{dy}{dz}\right),$$

$$u_x = \left\{y\left(\frac{dy}{dz}\right)' - y_{x+1}\left(\frac{dy}{dz}\right) + \left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)'\Delta z_x\right\} : \Delta\left(\frac{dy}{dz}\right);$$

cioè le coordinate del vertice dell'angolo x esimo del poligono circoscritto alla curva espressa dall'equazione data $f(z,y)=0$, ossia le equazioni dimandate.

Esempio. Sia il poligono equiangolo, l'asse delle ordina-

te y parallelo al suo primo lato, e si avrà $A_x = 1 + \frac{t}{t} = 2$, $-B_x = 1 + t^2 = \sec.^2 e$; e perciò

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{t}\left(1 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{\ddots\ 2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{C}}}}}\right),$$

e esprimendo qui l'angolo, che ha per tangente t.

Essendo $\left(\frac{dy}{dz}\right)_1$ infinita, stante la disposizione particolare degli assi, ed eguale ad $\frac{1}{t}C$ per la formola qui esposta, sarà $\frac{\sec.^2 e}{C} = 0$; quindi

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{\text{tang.}\, e}\left(1 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{\ddots\ 2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2}}}}\right),$$

supposto la divisione continuata $(x-1)$ volte. Ma, da ciò che abbiamo dimostrato nel primo Corollario della prima Nota, risulta il secondo fattore del secondo membro di quest' ultima equazione, cioè la frazione continua

$$1 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{\ddots\ 2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2}}}}$$

eguale all'ordinaria $\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\,(x-1)e}$; adunque sarà

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{\text{tang.}\, e}\left(\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\,(x-1)e}\right); \text{ cioè}$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{\text{tang.}\,(x-1)e} = \text{cotang.}\,(x-1)e:$$

siccome era facile a prevedersi.

Individuiamo ora la curva a cui dev'essere cirscoscritto il poligono, e sia dessa l'Ellisse, che ha per equazione

$$y - \frac{b}{a}\sqrt{(2az - z^2)} = 0,$$

a, e b indicando i suoi semiassi, ed avrassi

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = 1, \left(\frac{df}{dz}\right) = -b(a-z) : a\sqrt{(2az - z^2)};$$

e perciò le equazioni, trovate superiormente, dei punti di contatto diventeranno in questo caso particolare

$$b(a - z_x) : a\sqrt{(2az_x - z^2_x)} = \text{cotang.}(x-1)e,$$
$$ay_x - b\sqrt{(2az_x - z^2_x)} = 0,$$

le quali danno

$$z_x = a - a^2 : \sqrt{[a^2 + b^2 \text{ tang.}(x-1)e]}, \text{ ed}$$
$$y_x = b : \sqrt{[b^2 + a^2 \text{ cotang.}^2(x-1)e]};$$

cioè le coordinate od equazioni dei punti di contatto dell'Ellisse coi lati del poligono equiangolo ad esso circoscritto.

Sostituendo nelle espressioni delle coordinate t_x, u_x, esposte sopra, invece delle quantità z_x, y_x, $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x$ i loro valori anzi trovati, avransi le stesse coordinate, ossia le equazioni del poligono equiangolo circoscritto all'Ellisse espressa dall'equazione

$$ay - b\sqrt{(2az - z^2)} = 0.$$

Se fosse $b = a$, ovvero la curva data una circonferenza, avrebbesi $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \text{cotang.}(x-1)e$, $z_x = a[1 - \cos.(x-1)e]$, ed $y_x = a \text{ sen.}(x-1)e$; e perciò

$$t_x = a\left\{1 - \frac{\Delta \text{ sen.}(x-1)e}{\text{sen.}\, e}\right\},$$

$$u_x = -\frac{a}{\text{sen.}\, e}\Delta \cos.(x-1)e$$

per equazioni del poligono circoscritto alla periferia, che ha per equazione al vertice $y^2 - 2az + z^2 = 0$, a esprimendo il suo raggio, e z, y le coordinate rettangole di un suo punto qualunque.

Osservazione 3. Nel cercare l'integrale dell'equazione (E), dopo ch'ebbi trovato

$$y_x = \frac{a_x - b_x}{a_x}$$

avrei potuto ommettere il metodo esposto col quale ottenni questo singolare risultamento, e supporre immediatamente $y_x = (a_x - b_x) : a_x$, come si è fatto integrando le equazioni (A), (B), (C), e (D), ed indi determinare la funzione a_x opportunamente, perchè fosse soddisfatta l'equazione che trattavasi d'integrare, ed avrei avuto, come sopra, l'equazione

$$a_x a_{x+1} - A_x a_x - B_x = 0,$$

per trovare la funzione a_x. Ma siccome collo stesso metodo si possono integrare, o rendere integrabili molte altre equazioni delle differenze finite, non lineari, per questo ho divisato di esporlo.

Finalmente avverto che si ottengono bensì immediatamente gl'integrali delle equazioni (A), (B), ec. sostituendo nell'integrale trovata della (E) in luogo delle funzioni a_x, b_x, c_x, d_x i loro valori che hansi paragonando le medesime equazioni a questa, ma con formole su cui fa d'uopo fare alcune considerazioni onde comprendere che sono dessi equivalenti agli esposti.