SOPRA IL MOVIMENTO DI UN PUNTO MATERIALE ATTRATTO DA DUE CENTRI FISSI, L'UNO DI QUESTI ESSENDO SUPPOSTO INFINITAMENTE LONTANO

MEMORIA

DEL SIGNOR

GIOVANNI PLANA ASTRONOMO

Ricevuta adì 21. *Novembre* 1820.

I. Questo caso particolare del problema generale risguardante il movimento di un punto attratto da due centri fissi, li quali agiscano in ragione inversa del quadrato della distanza, fu già da Lagrange trattato nel Tomo IV. delle antiche memorie dell'Accademia di Torino (vedi p. 210). Ma alcune leggieri imperfezioni che trovansi nella soluzione che ne venne data da Lagrange, e le quali si renderanno palesi per l'analisi che segue, fanno vedere come fosse cosa importante di intraprendere una nuova soluzione di tal quistione.

Noi quì supponghiamo che abbiasi sotto gli occhj il secondo volume della Meccanica analitica, nel quale raccolte trovansi le formole generali, che a risolvere questo problema richieggonsi.

Prima d'ogni altra cosa troppo importa di far avvertire un errore di calcolo, che all'Autore è sfuggito nelle formole della pagina 113, il quale, siccome egli è evidente, nel formare l'equazione designata per (d), ha dimenticato il termine $-Ch^2$, che dee far parte del secondo membro di quella; il qual termine convien perciò aggiungere ne' secondi membri delle equazioni (e), non meno che sotto i radicali delle equazioni (f), (g), (h). È palese inoltre, essere stato omesso il fattore h^2 nel secondo membro dell' ultima equazione della pagina 111, per rendere esatta la qual legger dovrassi:

$$\frac{r^2 \cos.^2 \psi \, d\varphi^2}{dt^2} = \frac{4B^2 h^2}{4h^2 r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2} .$$

dal che ne segue che in tutte le formole delle pagine 112, e 113 sarà d' uopo cangiare B^2 in $B^2 h^2$.

Possiamo far osservare che questi medesimi errori trovansi ancora nella prima edizione della Meccanica analitica, quantunque essi non siano nella memoria originale di Lagrange pubblicata nel Tomo IV disopra citato, in cui l'Autore ha designato per una sola costante quello che viene espresso da una funzione di tre costanti arbitrarie nella Meccanica analitica.

Nè ometter deesi, che queste correzioni fanno sì, che si debbano eziandio rettificare due altre formole riferite alle pagine 117. e 118. Difatti, facendo $s = u = h$, le equazioni (e) dell'articolo 81. danno $-B^2 h^2 = 0$, e non già $B^2 = Ch^2$; quindi in luogo del polinomio in s della pag. 118. avremo il seguente:

$$Hs^4 + as^3 + Cs^2 - ash^2 - Hh^4 - Ch^2.$$

Ora si ha $C = -ah - 2Hh^2$; dunque per la sostituzione del valore di C, avremo:

$$H(s^4 - 2s^2 h^2 + h^4) + a(s^3 - s^2 h - h^2 s + h^3) = H(s^2 - h^2)^2 + a(s - h)(s^2 - h^2)$$

il quale risultato si accorda con quello dell' Autore: accordo che nasce, siccome è evidente, dall' aver Lagrange distrutto l' errore dell' equazione $B^2 = Ch^2$ collo scrivere $-Ch^2$ in luogo di $-B^2$ nel polinomio in s; con che viene a restituirsi il termine $-Ch^2$, che era stato da lui tralasciato nelle formole della pagina 113.

II. Ciò posto, facciasi per più semplicità:

$$E = -Hh^4 - Ch^2 - B^2 h^2;$$

$$Q = \quad Hs^4 + (a + p)s^3 + Cs^2 - h^2(a + p)s + E;$$

$$Q' = \quad Hu^4 + (a - p)u^3 + Cu^2 - h^2(a - p)u + E;$$

e sarà

$$\frac{ds}{\sqrt{Q}} = \frac{du}{\sqrt{Q'}}$$

l' equazione differenziale dell' orbita.

Suppongasi primieramente grandissima la distanza h de' due centri di azione, e cerchiamo in tale ipotesi il primo termine della soluzione. Ella è cosa evidente, che in questo primo termine consisterà la soluzione esatta del caso, in cui suppongasi $h = s$.

Secondo una formola della pagina 111. noi abbiamo:

$$q = h\left(1 - \frac{2r\,\text{sen.}\psi}{h} + \frac{r^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}} = h\left(1 - \frac{r\,\text{sen.}\psi}{h} + \text{ec.}\right);$$

ma $z = r\,\text{sen.}\,\psi$: dunque trascurando i termini divisi per h, avremo semplicemente $q = h - z$. Sostituendo questo valore nelle equazioni $s = r + q$, $u = r - q$, e facendo per brevità $x' = r + z$; $y' = r - z$, avremo:

$$s = y' + h; \qquad u = x' - h.$$

$$\frac{dy'}{\sqrt{Q}} = \frac{dx'}{\sqrt{Q'}} \text{ dove si ha:}$$

$$Q = H(y'+h)^4 + (a+p)(y'+h)^3 + C(y'+h)^2 - h^2(a+p)(y'+h) + E;$$
$$Q' = H(x'-h)^4 + (a-p)(x'-h)^3 + C(x'-h)^2 - h^2(a-p)(x'-h) + E.$$

III. Per determinare le costanti arbitrarie, supponghiamo che siano

$$x = a', \ y = a'', \ z = a'''$$

le coordinate del punto all'origine del movimento, e sia v la velocità d'impulsione a questo istante, secondo una direzione, la quale faccia cogli assi delle coordinate gli angoli ε', ε'', ε''', cosicchè sia

$$\frac{dx}{dt} = v\cos.\varepsilon', \ \frac{dy}{dt} = v\cos.\varepsilon'', \ \frac{dz}{dt} = v\cos.\varepsilon'''.$$

Siccome poi si ha $rdr = xdx + ydy + zdz$; se faremo $g = \sqrt{a'^2 + a''^2 + a'''^2}$, avremo, quando $t = 0$,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v}{g}\left(a'\cos.\varepsilon' + a''\cos.\varepsilon'' + a'''\cos.\varepsilon'''\right) = m,$$

chiamando, per maggior semplicità m il valore iniziale di $\frac{dr}{dt}$. Se si denota per f il valor iniziale di q, l'equazione $q = h - z$, dà $f = h - a'''$. La medesima equazione $q = h - z$ dà $\frac{dq}{dt} = -\frac{dz}{dt}$; chiamando adunque n il valore iniziale di $\frac{dq}{dt}$

avremo per l' istante, in cui $t=0$, $\frac{dq}{dt}=n=-v\cos.\varepsilon'''$; ed è manifesto, che al medesimo istante sarà: $s=h+k$, $u=-h+k'$, facendo $k=g-a'''$; $k'=g+a'''$.

Ora se si faccia $m+n=m'$, $m-n=m''$, è chiaro, che le equazioni (e) della pagina 113. danno il seguente doppio valore per la costante arbitraria E:

$$E=\frac{m'^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2-H(k+h)^4-(a+p)(k+h)^3-C(k+h)^2$$
$$+h^2(a+p)(k+h);$$
$$E=\frac{m''^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2-H(k'-h)^4-(a-p)(k'-h)^3-C(k'-h)^2$$
$$+h^2(a-p)(k'-h).$$

Facendo $t=0$ nell' equazione (b) della pagina 112. si trova:

$$C=-2H(g^2+f^2)-\frac{a}{2g}(3g^2+f^2-h^2)-\frac{p}{2f}(3f^2+g^2-h^2)+gfmn.$$

L' equazione della forza viva posta alla pagina 109. dà

$$H=\frac{v^2}{4}-\frac{a}{2g}-\frac{p}{2f}.$$

IV. Sostituendo la prima espressione di E nel polinomio Q e la seconda in Q', avremo:

$$Q=H\left[(y'+h)^4-(k+h)^4\right]+(a+p)\left[(y'+h)^3-(k+h)^3\right]$$
$$+C\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right]-h^2(a+p)(y'-k)$$
$$+\frac{m'^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2;$$
$$Q'=H\left[(x'-h)^4-(k'-h)^4\right]+(a-p)\left[(x'-h)^3-(k'-h)^3\right]$$
$$+C\left[(x'-h)^2-(k'-h)^2\right]-h^2(a-p)(x'-k')$$
$$+\frac{m''^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2.$$

Quindi sostituendo per C il suo valore e facendo per brevità:

$$M=\frac{m'^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2+gmn(h-a''')\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right],$$

si otterrà:

$$Q=M+H\Big[(y'+h)^4-(k+h)^4-2(g^2+f^2)\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right]\Big]$$
$$+a\Big[(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)-\frac{1}{2g}(3g^2+f^2-h^2)\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right]\Big]+$$

$$+p\left[(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)-\frac{1}{2f}(3f^2+g^2-h^2)[(y'+h)^2-(k+h)^2]\right].$$

Se da questa espressione si elimini H, e si faccia $p'=\frac{p}{f^2}$, otterrassi un risultato di questa forma:

$$Q=M+\frac{v^2}{4}N+aR+p'R',$$

nel quale si è fatto:

$$N=(y'+h)^4-(k+h)^4-2[g^2+(h-a''')^2][(y'+h)^2-(k+h)^2]$$

$$R=-\frac{1}{2g}N+(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)-\frac{(3g^2-h^2)}{2g}[(y'+h)^2-(k+h)^2]$$
$$-\frac{(h-a''')^2}{2g}[(y'+h)^2-(k+h)^2],$$

$$R'=-\frac{fN}{2}-\frac{f}{2}(3f^2+g^2-h^2)[(y'+h)^2-(k+h)^2]$$
$$+f^2[(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)].$$

Prima d' andar più oltre noi osserveremo doversi riguardare come finita la quantità $p'=\frac{p}{f^2}$, quantunque f sia infinita; imperciocchè l' attrazione p, la quale supponesi aver luogo all'unità di distanza vuolsi riguardare come infinita, se si voglia che questo centro d' azione esercitar possa una forza finita e costante alla distanza infinita, che per f viene designata.

Del rimanente chiara cosa è doversi avere questo caso come identico con quello di una forza costante p', la quale agirebbe sempre secondo una medesima direzione parallela all'asse delle coordinate z.

V. Sviluppando il valore di N, ed ordinando il risultato per rapporto alle potenze di h, si troverà:

$$N=0h^4+0h^3+A'h^2+A''h+A''',$$

ove si è fatto per brevità:

$$A'=4(y'^2-k^2)+8a'''(y'-k);$$
$$A''=4(y'^3-k^3)+4a'''(y'^2-k^2)-4(g^2+a'''^2)(y'-k);$$
$$A'''=(y'^4-k^4)-2(g^2+a'''^2)(y'^2-k^2)$$

Ordinando parimente per rapporto alle potenze di h la parte della espressione di R, la quale vien dopo il termine

$-\frac{N}{2g}$, si troverà essere eguale a

$$0h^3 + B'h^2 + B''h + B''':$$

facendo:

$$B' = 2\left(1 + \frac{a'''}{g}\right)(y' - k);$$

$$B'' = \left(3 + \frac{a'''}{g}\right)(y'^2 - k^2) - \left(3g + \frac{a'''^2}{g}\right)(y' - k);$$

$$B''' = (y'^3 - k^3) - \frac{1}{2}\left(3g + \frac{a'''^2}{g}\right)(y'^2 - k^2).$$

Quindi ne segue, che avremo:

$$R = -\frac{N}{2g} + B'h^2 + B''h + B'''.$$

Se adesso facciamo:

$$C' = B' - \frac{A'}{2g};\ C'' = B'' - \frac{A''}{2g};\ C''' = B''' - \frac{A'''}{2g},$$

avremo: $R = C'h^2 + C''h + C'''$, e

$$C' = -\frac{2}{g}(y'^2 - k^2) + 2\left(1 - \frac{a'''}{g}\right)(y' - k);$$

$$C'' = -\frac{2}{g}(y'^3 - k^3) + \left(3 - \frac{a'''}{g}\right)(y'^2 - k^2) - \left(g - \frac{a'''^2}{g}\right)(y' - k);$$

$$C''' = -\frac{1}{2g}(y'^4 - k^4) + (y'^3 - k^3) - \frac{1}{2}\left(g - \frac{a'''^2}{g}\right)(y'^2 - k^2).$$

VI. Sviluppiamo di presente l' espressione di R'. Siccome si ha:

$$3f^2 + g^2 - h^2 = 2h^2 - 6h.a''' + g^2 + 3a'''^2$$

si troverà in primo luogo:

$$R' = -\frac{fN}{2}$$
$$-\frac{f}{2}\left[\begin{array}{l} 4h^3(y'-k) + h^2[2(y'^2-k^2) - 12.a'''(y'-k)] \\ + h[-6a'''(y'^2-k^2) + 2(g^2+3a'''^2)(y'-k)] + (g^2+3a'''^2)(y'^2-k^2) \end{array}\right]$$
$$+\frac{f}{2}\left[\begin{array}{l} 4h^3(y'-k) + h^2[6(y'^2-k^2) - ha'''(y'-k)] \\ + h[2(y'^3-k^3) - 6a'''(y'^2-k^2)] - 2a'''(y'^3-k^3) \end{array}\right]$$

ovvero, riducendo:

$$\mathrm{R}'=-\frac{f\mathrm{N}}{2}$$

$$+\frac{fn}{2}\left[\begin{array}{l} O.h^3+\mathrm{A}'h^2+h[2(y'^3-k^3)-2(g^2+3a'''^2)(y'-k)] \\ -2a'''(y'^3-k^3)-(g^2+3a'''^2)(y'^2-k^2) \end{array}\right]$$

e sostituendo per N il suo valore, si avrà:

$$\mathrm{R}'=\frac{f}{2}\left[\begin{array}{l} h[-2(y'^3-k^3)-4a'''(y'^2-k^2)+2(g^2-a'''^2)(y'-k)] \\ -(y'^4-k^4)-2a'''(y'^3-k^3)+(g^2-a'''^2)(y'^2-k^2) \end{array}\right]$$

e restituendo $h-a'''$ in luogo di f, si otterrà:

$$\mathrm{R}'=\mathrm{D}'h^2+\mathrm{D}''h+\mathrm{D}''',$$

facendo per maggior semplicità:

$$\mathrm{D}'=-(y'^3-k^3)-2a'''(y'^2-k^2)+(g^2-a'''^2)(y'-k);$$

$$\mathrm{D}''=-\frac{1}{2}(y'^4-k^4)+\frac{1}{2}(g^2+3a'''^2)(y'^2-k^2)-a'''(g^2-a'''^2)(y'-k);$$

$$\mathrm{D}'''=\frac{a'''}{2}(y'^4-k^4)+a'''^2(y'^3-k^3)-\frac{a'''}{2}(g^2-a'''^2)(y'^2-k^2).$$

Per dare alla funzione M la medesima forma, noi faremo:

$$\mathrm{E}'=2gmn(y'-k);$$

$$\mathrm{E}''=gmn[(y'^2-k^2)-2a'''(y'-k)]+\frac{m'^2}{8}(k+k');$$

$$\mathrm{E}'''=-gmna'''(y'^2-k^2)+\frac{m'^2}{16}(k^2-k'^2);$$

ed avremo:

$$\mathrm{M}=\mathrm{E}'h^2+\mathrm{E}''h+\mathrm{E}'''.$$

VII. Raccogliendo ora le varie parti, avremo

$$\mathrm{Q}=\mathrm{G}'h^2+\mathrm{G}''h+\mathrm{G}''';$$

essendo:

$$\mathrm{G}'=\mathrm{E}'+\frac{1}{4}v^2\mathrm{A}'+a\mathrm{C}'+p'\mathrm{D}';$$

$$\mathrm{G}''=\mathrm{E}''+\frac{1}{4}v^2\mathrm{A}''+a\mathrm{C}''+p'\mathrm{D}'';$$

$$\mathrm{G}'''=\mathrm{E}'''+\frac{1}{4}v^2\mathrm{A}'''+a\mathrm{C}'''+p'\mathrm{D}'''.$$

Sostituendo nell' espressione di G' i valori precedenti di E', A', C', D', si troverà, che ponendo per semplificare:

$$p''=v^2-\frac{2a}{g}-2p'a''',$$

$$p'''=2gmn+2v^2a'''+\frac{2a}{g}(g-a''')+p'(g^2-a'''^2),$$

si ha:

$$G' = -p'(y'^3 - k^3) + p''(y'^2 - k^2) + p'''(y' - k).$$

Questa espressione è visibilmente divisibile per $y' - k$; se dunque faremo:

$$\beta' = p'' - p'k\,;\ \beta'' = p''' + p''k - p'k^2,$$

avremo:

$$G' = (y' - k)(-p'y'^2 + \beta'y' + \beta'').$$

VIII. Passiamo ora ad occuparci della espressione di Q'. Ponendo:

$$M' = \frac{m''^2}{16}\,[(k+h)^2 - (k'-h)^2] + gmn(h - a''')[(x'-h)^2 - (k'-h)^2],$$

e facendo

$$Q' = M' + \frac{1}{4}\,v^2N' + aR_1 - p'R'_1$$

è facile il vedere, che è:

$$R'_1 = \frac{fN'}{2} + \frac{f}{2}(3f^2 + g^2 - h^2)[(x' - h)^2 - (k' - h)^2]$$
$$+ f^2[(x' - h)^3 - (k' - h)^3 - h^2(x' - k')]\,;$$

e che per avere i valori di N' e R_1, basta cangiare nelle espressioni corrispondenti di N, R y' in x', h in $-h$, k in k', e a''' in $-a'''$, cosicchè facendo:

$$N' = A'_1 h^2 - A''_1 h + A'''_1\,,$$
$$R_1 = C'_1 h^2 - C''_1 h + C'''_1\,;$$

si avrà:

$$A'_1 = 4(x'^2 - k'^2) - 8a'''(x' - k'),$$
$$A''_1 = 4(x'^3 - k'^3) - 4a'''(x'^2 - k'^2) - 4(g^2 + a'''^2)(x' - k'),$$
$$A'''_1 = (x'^4 - k'^4) - 2(g^2 + a'''^2)(x'^2 - k'^2),$$
$$C'_1 = -\frac{2}{g}(x'^2 - k'^2) + 2\left(1 + \frac{a'''}{g}\right)(x' - k'),$$
$$C''_1 = -\frac{2}{g}(x'^3 - k'^3) + \left(3 + \frac{a'''}{g}\right)(x'^2 - k'^2) - \left(g - \frac{a'''^2}{g}\right)(x' - k');$$
$$C'''_1 = -\frac{1}{2g}(x'^4 - k'^4) + (x'^3 - k'^3) - \frac{1}{2}\left(g - \frac{a'''^2}{g}\right)(x'^2 - k'^2).$$

Inutile forse non sarà l'avvertire, essersi cangiato a''' in $-a'''$

per distrarre il cangiamento di segno, che avrebbe subito il secondo termine del valore di $f^2 = h^2 - 2ha''' + a'''^2$, scrivendo $-h$ per h il quale secondo termine non dee congiar di segno nel passare da Q a Q'.

È ora palese, che si ha:

$$R'_1 = \frac{fN'}{2} + \frac{f}{2}\left[\begin{array}{l} -4h^3(x'-k') + h^2[2(x'^2-k'^2) + 12.a'''(x'-k')] \\ -h[6a'''(x'^2-k'^2) + 2(g^2+3a'''^2)(x'-k')] + (g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) \end{array}\right]$$

$$+ \frac{f}{2}\left[\begin{array}{l} 4h^3(x'-k') + h^2[-6(x'^2-k'^2) - 4a'''(x'-k')] \\ +h[2(x'^3-k'^3) + 6a'''(x'^2-k'^2)] - 2a'''(x'^3-k'^3) \end{array}\right].$$

Avremo adunque dopo le riduzioni:

$$R'_1 = \frac{f}{2}\left[\begin{array}{l} oh^3 + oh^2 + h[-A''_1 + 2(x'^3-k'^3) - 2(g^2+3a'''^2)(x'-k')] \\ +A'''_1 - 2a'''(x'^3-k'^3) + (g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) \end{array}\right]$$

e sostituendo $h - a'''$ in luogo di f troveremo:

$$R'_1 = D'_1 h^2 - D''_1 h + D'''_1$$

dove

$$D'_1 = -\frac{1}{2} A''_1 + (x'^3-k'^3) - (g^2+3a'''^2)(x'-k');$$

$$D''_1 = -\frac{1}{2}A'''_1 - \frac{a'''A''_1}{2} + 2a'''(x'^3-k'^3) - \frac{1}{2}(g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) - a'''(g^2+3a'''^2)(x'-k');$$

$$D'''_1 = -\frac{a'''A'''_1}{2} + a'''^2(x'^3-k'^3) - \frac{a'''}{2}(g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2)$$

ovvero:

$$D'_1 = -(x'^3-k'^3) + 2a'''(x'^2-k'^2) + (g^2-a'''^2)(x'-k'),$$

$$D''_1 = -\frac{1}{2}(x'^4-k'^4) + \frac{1}{2}(g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) + a'''(g^2-a'''^2)(x'-k');$$

$$D'''_1 = -\frac{a'''}{2}(x'^4-k'^4) + a'''^2(x'^3-k'^3) + \frac{a'''}{2}(g^2-a'''^2)(x'^2-k'^2).$$

Ben si può vedere, che questi valori nascono dai loro corrispondenti D', D'', D''' per mezzo di que'cangiamenti stessi, che sonosi fatti per ottenere A_1', A_1'', ec. Ma siccome ciò non è del tutto evidente, abbiamo perciò scelto di farne il calcolo diretto. Ponendo.

$$E'_{1} = -2gmn\,(x' - k'),$$

$$E''_{1} = gmn.[(x'^2 - k'^2) + 2a'''(x' - k')] + \frac{m''^2}{8}(k + k');$$

$$E'''_{1} = -gmna'''(x'^2 - k'^2) + \frac{m''^2}{16}(k^2 - k'^2);$$

si avrà:

$$M' = E'_{1}h^2 + E''_{1}h + E'''_{1}.$$

IX. Riunendo insieme le varie parti, avremo.

$$Q' = F'h^2 + F''h + F''',$$

dove si fa:

$$F' = E'_{1} + \frac{1}{4}v^2 A'_{1} + \alpha C'_{1} - p'D'_{1};$$

$$F'' = E''_{1} - \frac{1}{4}v^2 A''_{1} - \alpha C''_{1} + p'D''_{1};$$

$$F''' = E'''_{1} + \frac{1}{4}v^2 A'''_{1} + \alpha C'''_{1} - p'D'''_{1}.$$

Sostituendo in F' in luogo di E'_{1}, A', ec. i loro valori, si troverà:

$$F' = p'(x'^3 - k'^3) + p''(x'^2 - k'^2) - p^{\prime v}(x' - k');$$

facendo

$$p^{\prime v} = 2gmn + 2v^2 a''' - \frac{2\alpha}{g}(g + a''') + p'(g^2 - a'''^2).$$

Essendo questa epressione di F' divisibile per $x' - k'$, abbiamo:

$$F' = (x' - k')\,(p'x'^2 + \beta'_{1}x' + \beta''_{1})$$

essendo

$$\beta'_{1} = p'k' + p'';\ \beta''_{1} = p'k'^2 + p''k' - p^{\prime v}.$$

X. Dietro ai risultati precedenti, l'equazione differenziale dell'orbita diviene:

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'h^2 + G''h + G'''}} = \frac{dx'}{\sqrt{F'h^2 + F''h + F'''}}.$$

È quindi chiaro, che se si suppone $h = \infty$, questa equazione si riduce a

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{dx'}{\sqrt{F'}}.$$

Secondo l'equazione (g) della pag. 113. si ha:

$$dt = \frac{\left(h+2y'+\frac{y'^2}{h}\right)dy'}{4\sqrt{G'+\frac{G''}{h}+\frac{G'''}{h^2}}} - \frac{\left(h-2x'+\frac{x'^2}{h}\right)dx'}{4\sqrt{F'+\frac{F''}{h}+\frac{F'''}{h^2}}}.$$

La quale espressione, supposta $h=\infty$, si riduce primieramente a:

$$dt = \frac{(h+2y')dy'}{4\sqrt{G'}} - \frac{(h-2x')dx'}{4\sqrt{F'}}$$

dove $x'=r+z$, $y'=r-z$. Ma essendo sempre il raggio vettore r maggiore dell' ordinata z; dy', dx' sono quantità del medesimo segno, e debbesi perciò considerare come nulla la differenza $\frac{hdy'}{4\sqrt{G'}} - \frac{hdx'}{4\sqrt{F'}}$ di due quantità infinite; e questa considerazione riduce l' espressione di dt alla seguente:

$$dt = \frac{y'dy'}{2\sqrt{G'}} + \frac{x'dx'}{2\sqrt{F'}}.$$

Rimane or dunque soltanto che si formi l' equazione, per cui si determini l' angolo ϕ. Per ottenerla, osservisi, che facendo $y'=0$ nella espressione di Q riferita alla fi e del N.° II., si ottiene $Q=-B^2h^2$. Chiamando adunque G'_0, G''_0, G'''_0 ciò che divengono G', G'', G''', facendo in esse $y'=0$, avremo:

$$-B^2h^2 = G'_0h^2 + G''_0h + G'''_0$$

e per la sostituzione di questo valore nell' equazione (h) della pagina 113. si avrà:

$$d\phi = \frac{h\sqrt{-G'_0h^2-G''_0h-G'''_0}\,dy'}{(2hy'+y'^2)\sqrt{G'h^2+G''h+G'''}} + \frac{h\sqrt{-G'_0h^2-G''_0h-G'''_0}\,dx'}{(2x'h-x'^2)\sqrt{F'h^2+F''h+F'''}}.$$

Se suppongasi adesso $h=\infty$, questa equazione si riduce manifestamente a:

$$d\phi = \frac{\sqrt{-G'_0}\,dy'}{2y'\sqrt{G'}} + \frac{\sqrt{-G'_0}\,dx'}{2x'\sqrt{F'}},$$

dove si ha per le formole precedenti:

$$G'_0 = p'k^3 - p''k^2 - p'''k.$$

Degno è di osservazione, che se si faccia $x'=0$ nell' espressione di Q' posta al N.° II. si ha $Q'=-B^2h^2$. Designando adunque per F'_0, F''_0, F'''_0 i valori che prendono le quantità F', F'', F''' quando vi si fa $x' = 0$, avremo,

$$-B^2h^2 = F'_0 h^2 + F''_0 h + F'''_0,$$

onde ne segue, che

$$G'_0 h^2 + G''_0 h + G'''_0 = F'_0 h^2 + F''_0 h + F'''_0,$$

ovvero

$$G'_0 + \frac{G''_0}{h} + \frac{G'''_0}{h^2} = F'_0 + \frac{F''_0}{h} + \frac{F'''_0}{h^2}.$$

Dunque facendo $h = \infty$, si ha $G'_0 = F'_0$.

Conchiudiamo adunque, che se per maggior semplicità si ponga:

$$\Sigma = p'k^3 - p''k^2 - p'''k,$$

si potrà dare alle espressioni di G', F' la forma seguente:

$$G' = -p'y'^3 + p''y'^2 + p'''y' + \Sigma;$$

$$F' = \quad p'x'^3 + p''x'^2 - p'''x' + \Sigma.$$

Raccogliendo le equazioni, le quali contengono la soluzione del caso, che noi abbiam preso a considerare, si avrà:

$$(1) \qquad \frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{dx'}{\sqrt{F'}}:$$

$$(2) \qquad dt = \frac{y'dy'}{2\sqrt{G'}} + \frac{x'dx'}{2\sqrt{F'}};$$

$$(3) \qquad d\varphi = \frac{dy'\sqrt{-\Sigma}}{2y'\sqrt{G'}} + \frac{dx'\sqrt{-\Sigma}}{2x'\sqrt{F'}}.$$

XI. Chi leggerà l' articolo XIV. della Memoria di Lagrange inserita nel Tomo IV. delle antiche memorie dell'Accademia di Torino, vedrà, come egli abbia tenuto un'altra via per ridurre le formole generali in modo conveniente da esser addattate a questo caso particolare. Nel paragonare gli ultimi suoi risultati con quelli, che noi abbiamo or or trovato, noi ci maravigliammo di vedere, che quelli erano da' nostri essenzialmente diversi. E dopo un attento esame ci accorgemmo, esserne cagione una innavvertenza commessa da questo grande Geometra. Ecco in che essa consista.

Secondo le denominazioni dell' Autore (vedi p. 212. 213.), si ha;

$$C\,p^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E =$$
$$(P+f)^4(\gamma+\gamma' f)+(P+f)^3(\mu+\mu' f+\mu'' f^2)+(P+f)^2(\delta+\delta' f+\delta'' f^2)$$
$$-f^2(P+f)(\mu+\mu' f+\mu'' f^2)+\varepsilon+\varepsilon' f+\varepsilon'' f^2+\varepsilon''' f^3+\varepsilon^{iv} f^4+\varepsilon^{v} f^5;$$
$$C\,q^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E =$$
$$(Q-f)^4(\gamma+\gamma' f)+(Q-f)^3(v+v' f+v'' f^2)+(Q-f)^2(\delta+\delta' f+\delta'' f^2),$$
$$-f^2(Q-f)(v+v' f+v'' f^2)+\varepsilon+\varepsilon' f+\varepsilon'' f^2+\varepsilon''' f^3+\varepsilon^{iv} f^4+\varepsilon^{v} f^5.$$

Lagrange, dopo d' avere sviluppato la prima di queste due equazioni, dice, che basta per avere il corrispondente risultato dato dalla seconda, scrivere $-f$ in luogo di f, e Q in vece di P, v per μ, v' per μ', v'' per μ''. Ora non è chi non vegga che non è permesso il solo cangiamento di f in $-f$, poichè i termini $\gamma' f$, $v' f$, $\delta' f$, $\varepsilon' f$, $\varepsilon''' f^3$, $\varepsilon^{v} f^5$ conservano il medesimo segno in ambedue le equazioni. Converrà adunque per non commetter l'errore in cui si cadrebbe coll' operare in siffatta maniera, dopo avere scritto $-f$ in luogo di f, cangiar inoltre il segno delle lettere γ', v', δ', ε', ε''', ε^{v}. Così operando si troverà, che li coefficienti di f^5, f^4, f^3 sono ancora identicamente nulli nel polinomio in q, cosa che non avverrebbe, se i soli cangiamenti da Lagrange indicati si facessero. Fatta questa correzione, si troverà, che i polinomj di terzo grado in Q e P si accordano con quelli, che furono da noi designati per F' e G'.

La via che noi seguita abbiamo per giungere alle espressioni di G', F', ha questo vantaggio, ch' essa ci dà questi polinomj decomposti in due fattori; e ciò molto più facile rende la riduzione di queste formole differenziali alle trascendenti ellittiche.

XII. Facciasi per brevità:

$$p=\beta'+\sqrt{\beta'^2+4p'\beta''};\quad p'=-\beta'_1+\sqrt{\beta'^2_1-4p'\beta''_1}$$
$$q=\beta'-\sqrt{\beta'^2+4p'\beta''};\quad q'=-\beta'_1-\sqrt{\beta'^2_1-4p'\beta''_1}$$

e si avrà:

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dy'}{\sqrt{y'-k}\sqrt{(p-2p'y')(2p'y'-q)}}:$$

$$\frac{dx'}{\sqrt{F'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dx'}{\sqrt{x'-k'}\sqrt{(2p'x'-p')(2p'x'-q')}}.$$

Se ora faremo:

$$\sqrt{y'-k} = \tfrac{1}{2}\, y''; \qquad \sqrt{x'-k'} = \tfrac{1}{2}\, x''.$$

onde

$$y' = k + \frac{1}{4}\, y''^2; \qquad x' = k' + \frac{1}{4}\, x''^2:$$

troveremo:

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dy''}{\sqrt{\left(\theta - \frac{p'}{2}\, y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\, y''^2 + \theta'\right)}}$$

$$\frac{dx'}{\sqrt{F'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dx''}{\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i\right)\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i'\right)}}$$

ponendo; per semplificare:

$$\theta = p - 2p'k; \qquad i = 2p'k' - p';$$
$$\theta' = 2p'k - q; \qquad i' = 2p'k' - q'.$$

Ciò posto, le equazioni riferite alla fine del N.° X. si cangieranno nelle seguenti:

$$(1)' \quad \frac{dy''}{\sqrt{\left(\theta - \frac{p'}{2}\, y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\, y''^2 + \theta'\right)}} = \frac{dx''}{\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i\right)\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i'\right)}}$$

$$(2)' \quad dt = \frac{\sqrt{p'}\left(k + \frac{1}{4}\, y''^2\right) dy''}{\sqrt{\left(\theta - \frac{p'}{2}\, y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\, y'' + \theta'\right)}} + \frac{\sqrt{p'}\left(k' + \frac{1}{4}\, x''\right) dx''}{\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i\right)\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i'\right)}}$$

$$(3)' \quad d\phi = \frac{\sqrt{-p'\Sigma}\, dy''}{\left(k + \frac{1}{4}\, y''^2\right)\sqrt{\left(\theta - \frac{p'}{2}\, y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\, y''^2 + \theta'\right)}}$$
$$+ \frac{\sqrt{-p'\Sigma}.dx''}{\left(k' + \frac{1}{4}\, x''^2\right)\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i\right)\left(\frac{p'}{2}\, x''^2 + i'\right)}}$$

Agevol cosa è ora il ridurre queste formole alla forma delle trascendenti ellittiche comuni. Trovansi nel primo volume degli esercizj di Calcolo integrale del Sig. Legendre (vedi p. 10, 11, 12) le trasformazioni che per questa riduzione si richieggono.

XIII. Se si suppone, che all' origine del movimento il punto sia posto sull' asse delle z, avremo $g = a'''$, e quindi $k = g - a''' = 0$: Ma noi abbiamo:

$$\Sigma = p'k^3 - p''k^2 - p'''k;$$

avremo dunque anche $\Sigma = 0$, onde l' equazione (3) dà $d\phi = 0$. Sarà dunque l' angolo ϕ costante per tutta la durata del movimento, e perciò piana sarà la curva del punto descritto. Trovasi in questo caso una soluzione particolare dell' equazione $\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{dz'}{\sqrt{F'}}$, col prendere $y' = \varepsilon$, cosicchè sia ε una radice semplice dell' equazione $G' = 0$. Ognun vede, che l'equazione $y' = r - z = \varepsilon$ appartiene ad una parabola, giacchè prendendo il piano delle (x, z) per quello della curva si può fare $r = \sqrt{x^2 + z^2}$.

XIV. Non crediamo non dover terminare questa Memoria senza osservare, che rimane ancora a desiderarsi una soluzione diretta di questo problema, la quale venga dedotta dalle equazioni differenziali del secondo ordine, che a quello appartengono. Queste equazioni, se si consideri per maggior semplicità il caso dell' orbita piana, sono della forma seguente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Ax}{r^3} + B = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ay}{r^3} = 0.$$

nelle quali $r^2 = x^2 + y^2$. Quantunque molto semplici esse pajano, gravi difficoltà s' incontrano tuttavia, quando altri intraprenda di dedurre da quelle immediatamente li risultati, che col metodo precedente noi abbiamo ottenuti.

Se fingasi che la forza costante B venga decomposta in due forze uguali, l' una diretta verso il centro della forza A, l' altra diretta verso un altro centro fisso, che sia dal primo lontana di una distanza arbitraria h presa sopra l'asse delle x, egli è facile di ridurre la quistione al caso di due forze dirette verso due centri fissi, col fare nelle formole generali della Meccanica analitica

$$R = -2\gamma . r + \frac{\alpha}{r^2}\,; \quad Q = 2\gamma . q.$$

Ma ben presto altri s'accorgerà, che questi valori di R e Q non sono tali, che si possa ottenere l' integrale corrispondente a quello, che viene designato per (b) alla pagina 112. Imperciocchè, eseguendo il calcolo, si troverà:

$$\frac{d.q^2 \times d.r^2}{2dt^2} - \frac{\alpha(3r^2+q^2-h^2)}{r} + \gamma h^2(r^2-q^2)$$
$$+ 3\gamma\int(q^2-r^2)(d.q^2+d.r^2) = 4H(q^2+r^2) + 2C$$

dove, la funzione di q, r posta sotto il segno integrale, siccome è evidente, non è un differenziale esatto. Non pare adunque, che si possa con questo mezzo pervenire a separar le variabili.

Debbo poi ancora confessare, che troppo chiaro non veggo, come facendo $h = \infty$ (seguendo le traccie di Lagrange) si risolva difatti il caso identico con quello, che l'una delle forze sia costante, ed agisca in una direzione sempre parallela a se stessa. Perchè avendo (N.° II.):

$$q = h\left(1 - \frac{2r\text{sen}.\psi}{h} + \frac{r^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}} = h - r\text{sen}.\psi + \frac{1}{2}\frac{r^2}{h} - \frac{1}{2}\frac{r^2\text{sen}.^2\psi}{h} + \text{ec.}$$

ossia

$$q = h - r\text{sen}.\psi + \frac{r^2\cos.^2\psi}{2h} + \text{ec.}$$

non si può supporre $q = h - r\text{sen}.\psi$, quando $h = \infty$, se non col supporre tacitamente, che il raggio vettore conservi sempre una grandezza incomparabilmente minore. Ora questa seconda ipotesi non parmi aver luogo nelle equazioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Ax}{r^3} + B = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ay}{r^3} = 0.$$

Onde questo riflesso fammi credere, passare gran differenza nel senso analitico tra il problema espresso da queste due equazioni e quello, che si è risolto addottando la supposizione fatta da Lagrange.

Queste difficoltà sono cagione, che altri debba dolersi, perchè il Signor Legendre trattato non abbia questo caso particolare nel suo bel lavoro, che sopra questo problema ha pubblicato nel secondo volume de' suoi esercizj di calcolo integrale.