SOPRA LA INTEGRAZIONE DELLA FORMULA

$$\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

TRA I LIMITI $x=0, x=\frac{1}{0}$, E TRA I LIMITI $x=0$, $x=1$.

MEMORIA

DI GIULIANO FRULLANI

P. PROF. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI NELL' UNIVERSITÀ DI PISA

Ricevuta il giorno 4. *Febbrajo* 1818.

PRESENTATA

DAL SOCIO SIG. PIETRO PAOLI

ED APPROVATA

DAL SIGNOR PRESIDENTE RUFFINI

Tra le numerose ricerche da Euler intraprese sopra gli integrali definiti, non mi è avvenuto di trovar completamente trattata la formula

$$\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

integrando tra i limiti $x=0, x=\frac{1}{0}$. Nel caso di n numero intero questa formula può integrarsi anche indefinitamente con un processo di calcolo che la riduce a dipendere dall' integrale

$$\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-2}}$$

il quale pure dipenderà da una simil formula dell' ordine $n-3$, e così gradatamente discendendo giungeremo alla formula la più semplice di questa specie

$$\int \frac{dx}{1+2qx\cos.\phi+q^2x^2}$$

la quale può completamente integrarsi. Ma quelle riduzioni che Giovanni Bernoulli, ed Euler posero in uso, non renderanno in generale più semplice la formula proposta se n è frazionario, o comunque. Con tutto ciò da quelle riduzioni si può trarre un partito, ed è di formare con il lor mezzo una equazione differenziale da cui la proposta formula dipenda, e questa Equazione ridotta molto semplice per l' evanescenza di alcuni termini ai limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$, rappresenterà la formula stessa presa tra quei limiti. Per tanto la integrazione darà il valore cercato, o espresso in un numero finito di termini conosciuti, come quando sarà n intero, o lo farà dipendere da una trascendente irreducibile, o *primitiva* come per esempio quando n sarà frazionario. Ed in questo caso ancora l' indole della proposta funzione sarà determinata. In questa breve Memoria mi propongo di dare un' analisi completa di questa funzione, di cui anche esporrò qualche uso nella dottrina delle serie per alcuni casi particolari dell' esponente n.

1.

Sia data pertanto la funzione

$$y=\int \frac{dx}{(1+2qx\cos\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

che debba integrarsi tra i limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$. Differenziando rapporto a ϕ, avremo

$$\frac{1}{2(n-1)q\,\mathrm{sen}.\phi}\frac{dy}{d\phi}=\int \frac{xdx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}.$$

Dalle riduzioni che fanno dipendere l' ordine n dall' ordine $n-1$ nella formula

$$\int \frac{x dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}$$

abbiamo (*) come è facile il verificare.

$$\int \frac{x dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = -\frac{(1+xq\cos.\phi)}{2(n-1)q^2\operatorname{sen.}^2\phi(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

(M) $$-\frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q\operatorname{sen.}^2\phi}\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Il termine libero dal segno d' integrazione può mettersi sotto la forma

$$\frac{-(q\cos.\phi+\frac{1}{x})}{2(n-1)q^2\overline{\operatorname{sen}}^2\phi\left[x^{\frac{1}{1-n}}+2q\cos.\phi x^{\frac{n-2}{n-1}}+q^2x^{\frac{2n-3}{n-1}}\right]^{n-1}}.$$

È manifesto ora che acciò questo termine non divenga infinito quando $x=\frac{1}{0}$, conviene che sia $n>2$ (**); ed ammessa questa supposizione, esso svanirà al limite $x=\frac{1}{0}$. Al limite poi $x=0$, diverrà

$$-\frac{1}{2(n-1)q^2\overline{\operatorname{sen.}}^2\phi}.$$

Prendendo dunque nella Equazione (M) tutti i termini tra i limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$, otterremo

$$\int \frac{x dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)q^2\overline{\operatorname{sen.}}^2\phi} - \frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q.\overline{\operatorname{sen.}}^2\phi}\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

Ma abbiamo supposto tra quei limiti stessi

$$y=\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

e ne abbiamo dedotto

(*) Euler Instit. Calc. Integ. T. 1. §. 39.

(**) È chiaro che il nostro termine non diverrebbe infinito ancor che fosse $n>\frac{3}{2}$ solamente. Con tutto ciò ho preso $n>2$ perchè, come vedremo, la determinazione dell'arbitraria esige questa condizione, acciò la proposta formula non divenga $=\infty$ tra i prescritti limiti

$$\frac{1}{2(n-1)q\,\text{sen}.\phi}\,\frac{dy}{d\phi}=\int\frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}.$$

Quindi sostituendo, otterremo anche

$$\frac{1}{2(n-1)q\,\text{sen}.\phi}\,\frac{dy}{d\phi}=\frac{1}{2(n-1)q^2\,\overline{\text{sen}.}^2\phi}-\frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q.\overline{\text{sen}.}^2\phi}\,y$$

cio è, moltiplicando per $2(n-1)\,q\,\text{sen}.\,\phi$

$$\frac{dy}{d\phi}=\frac{1}{q\,\text{sen}.\phi}-(2n-3)\,\frac{\cos.\phi}{\text{sen}.\phi}\,y\,.$$

Equazione lineare del primo ordine.

Integrandola, avremo

$$y=\frac{1}{\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-3}}\left(C+\frac{1}{q}\int d\phi.\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-4}\right).$$

E quindi ancora

$$y\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-3}=C+\frac{1}{q}\int d\phi\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-4}\,.$$

Se in questa Equazione faremo $\phi=0$, si troverà che l' arbitraria C deve esser nulla; infatti la formula $\int d\phi\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-4}$ svanisce se $\phi=0$; come è facile il convincersene, rammentandosi che $n>2$ (*), e che si ha

$$\text{sen}.\phi=\phi-\frac{\phi^3}{2.3}+\frac{\phi^5}{2.3.4.5}-\text{ec}.$$

D' altronde, quando $\phi=0$, si ha

$$y=\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}=\int\frac{dx}{(1+qx)^{2n-2}}$$

che tra i limiti prescritti è $=\frac{1}{q(2n-3)}$. Sostituendo questi valori nella nostra equazione ne dedurremo $C=0$. Sarà dunque finalmente

$$y=\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}=\frac{1}{q\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-3}}\int d\phi\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-4}$$

(*) Ecco perchè ho precedentemente supposta $n>2$. Se fosse <2 sarebbe $\int d\phi.\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-4}=\infty$; Sarebbe quindi ancora infinita la costante C, e la formula proposta avrebbe essa pure un valore infinito.

Onde apparisce che la formula proposta dipende dall' integrale indefinito $\int d\phi.\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-4}$.

2.

Si può esprimere quest' integrale con una serie ordinata per i seni multipli di ϕ, e far dipendere in conseguenza da questa il valore della proposta formula.

Riduciamo a tale oggetto in una serie ordinata per i coseni dei multipli di ϕ la funzione $\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}$, essendo m un esponente qualunque. Facciamo perciò

$$\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}=\text{A}+\text{A}_1\cos.\phi+\text{A}_2\cos.2\phi+\text{A}_3\cos.3\phi+\text{ec}...+\text{A}_a\cos.a\phi+\text{ec}.$$

Sappiamo che il primo termine A sarà determinato dalla Equazione

$$\text{A}=\frac{1}{\pi}\int\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}d\phi$$

ed il termine qualunque A_a dalla Equazione

$$\text{A}_a=\frac{2}{\pi}\int\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\cos.a\phi.d\phi$$

purchè in ambi i casi si estendano gli integrali tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Tutto dunque consisterà nel determinare tra questi limiti stessi l' integrale $\int\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\cos.a\phi.d\phi$.

3.

Onde pervenire al nostro intento, prendiamo a considerare la formola

$$\int\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\text{sen}.a\phi.d\phi$$

prendendo l' integrale tra i limiti stessi $\phi=0$, $\phi=\pi$.

Si avrà, integrando per parti

$$\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\text{sen}.a\phi.d\phi = -\tfrac{1}{a}\cos.a\phi.\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m} + \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m-1}\cos.\phi.\cos.a\phi.d\phi.$$

Supponendo m positivo, avremo anche tra i dati limiti, per l' evanescenza della quantità $\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}$ ai due limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$.

$$\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\text{sen}.a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m-1}.\cos.\phi.\cos.a\phi.d\phi\,.$$

Si aggiunga adesso da ambe le parti la stessa quantità $\tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\text{sen}.a\phi.d\phi$; quindi invece di aggiungerla si sottragga; otterremo così i due resultati

$$\tfrac{a+m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}\,\text{sen}.a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen}\ \phi}^{\,m-1}\,d\phi\left\{\cos.a\phi.\cos.\phi + \text{sen}.a\phi.\text{sen}.\phi\right\},$$

$$\tfrac{a-m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\text{sen}.a\phi\ d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m-1}\ d\phi\left\{\cos.a\phi.\cos.\phi - \text{sen}.a\phi.\text{sen}.\phi\right\}.$$

Queste Equazioni equivalgono manifestamente alle seguenti:

$$\tfrac{a+m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\text{sen}.a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m-1}\,d\phi.\cos.(a-1)\phi,$$

$$\tfrac{a-m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}\,\text{sen}.a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m-1}\,d\phi.\cos.(a+1)\phi\,.$$

E tra queste eliminando $\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.\text{sen}.a\phi.d\phi$, avremo

$$\tfrac{1}{a-m}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m-1}\,d\phi\,\cos.(a+1)\phi = \tfrac{1}{a+m}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m-1}\,d\phi\,\cos.(a-1)\phi\,.$$

Ciò è cambiando m in $m+1$, ed a in $a+1$

$$\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}\,d\phi.\cos.(a+2)\phi = \tfrac{a-m}{a+m+2}\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}\,d\phi.\cos.a\phi.$$

Da questa Equazione pertanto dipenderà il valore dell' integrale $\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}\,d\phi.\cos.a\phi$ tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$.

Facciamo per semplicità

$$\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}.d\phi.\cos.a\phi = y_a.$$

Ed avremo per determinarlo la Equazione

$$y_{a+2} = \frac{a-m}{a+m+2}\, y_a .$$

Con le sostituzioni successive avremo facilmente da questa, se a è pari

$$y_a = -\frac{m(2-m)(4-m)\ \ldots\ (a-m-2)}{(m+2)(m+4)\ \ldots\ (m+a)}\, y_0 ,$$

e se a è dispari

$$y_a = \frac{(1-m)(3-m)(5-m)\ \ldots\ (a-m-2)}{(m+3)(m+5)\ \ldots\ (m+a)}\, y_1$$

Ma essendo ora $y_a = \int \overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m}.\ \cos.a\varphi.d\varphi$, sarà $y_0 = \int \overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m}\, d\varphi$,

$y_1 = \int \overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m}.\ \cos.\varphi.d\varphi$, sempre integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; quindi avremo

$$y_1 = \frac{1}{m+1}\, \overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m+1}$$

che si annulla tra quei limiti. Delle due formule ottenute per y_a quella sola dunque sussiste ove a è pari; sarà dunque in questa supposizione, ponendo per y_a, ed y_0 i loro valori,

$$\int \overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m}.\cos.a\varphi.d\varphi = -\frac{m(2-m)(4-m)\ \ldots\ (a-m-2)}{(m+2)(m+4)\ \ldots\ (m+a)} \int \overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m}\, d\varphi$$

integrando sempre tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

4.

Abbiamo veduto nell' articolo 2. che per ridurre in serie la funzione $\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m}$ per i coseni dei multipli di φ in modo che abbiasi

$$\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,-m} = \text{A} + \text{A}_1 \cos.\varphi + \text{A}_2 \cos.2\varphi + \text{A}_3 \cos.3\varphi + \text{ec.} \ldots + \text{A}_a \cos.a\varphi + \text{ec.}$$

il primo termine A_1 ed il coefficiente generale A_a saranno determinati dalle Equazioni

$$A = \frac{1}{\pi} \int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}\, d\phi$$

$$A_a = \frac{2}{\pi} \int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m} \,.\, \cos.a\phi . d\phi$$

integrando tra i soliti limiti. Sostituendo dunque il valore ottenuto nel precedente articolo per $\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m} \cos.a\phi.d\phi$, avremo con la condizione che a sia sempre pari

$$A = \frac{1}{\pi} \int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}\, d\phi$$

$$A_a = -\frac{2m(2-m)(4-m)\ldots.(a-m-2)}{(m+2)(m+4)\ldots.(m+a)} \int \frac{\overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}\, d\phi}{\pi} .$$

Facendo ora la sostituzione di questi valori nella serie assegnata per $\overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}$, otterremo immediatamente

$$\overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m} = \left[1 - \frac{2m}{m+2} \cos.2\phi - \frac{2m(2-m)}{(m+2)(m+4)} \cos.4\phi - \right.$$
$$\left. \frac{2m(2-m)(4-m)}{(m+2)(m+4)(m+6)} \cos.6\phi - \text{ec.} \right] \int \frac{\overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}\, d\phi}{\pi}$$

allorchè m è un numero intero positivo, è sempre assegnabile il valore di $\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}\, d\phi$ tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$; ed apparisce inoltre dalla serie ottenuta che $\overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}$ si esprimerà per un numero finito di termini se m è numero pari, ma che anderà sempre all' infinito se è dispari.

Sia per esempio $m = 1$. Sarà

$$\int \text{sen}.\phi \,.\, d\phi = -\cos.\phi \,.$$

Ciò è tra i limiti prescritti

$$\int \text{sen}.\phi.\, d\phi = 2$$

Sostituendo questi valori nella serie quì sopra riportata

$$\overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m} = \left[1 - \frac{2m}{m+2} \cos.2\phi - \frac{2m(2-m)}{(m+2)(m+4)} \cos.4\phi - \right.$$
$$\left. \frac{2m(2-m)(4-m)}{(m+2)(m+4)(m+6)} \cos.6\phi - \text{ec.} \right] \int \frac{\overline{\text{sen}\,\phi}^{\,-m}\, d\phi}{\pi}$$

si avrà

$$\text{sen}.\phi = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos.2\phi}{2^2-1} + \frac{\cos.4\phi}{4^2-1} + \frac{\cos.6\phi}{6^2-1} + \frac{\cos.8\phi}{8^2-1} + \text{ec.}\right].$$

Come altrove ho dimostrato.

E se vorremo poi il valore di $\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}\, d\phi$ preso in modo che svanisca quando $\phi = 0$, lo avremo integrando la ottenuta espressione di $\overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}$, e si avrà

$$\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,-m}\, d\phi = \left[\phi - \frac{m}{m+2}\,\text{sen}.2\phi - \frac{m(2-m)}{2(m+2)(m+4)}\,\text{sen}.4\phi - \frac{m(2-m)(4-m)}{3(m+2)(m+4)(m+6)}\,\text{sen}.6\phi - \text{ec.}\right] \int \frac{\overline{\text{sen}\,\phi}^{\,-m} d\phi}{\pi}$$

5.

Nell'articolo 1. abbiamo trovato tra i limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos\phi+q^2x^2)^{n-1}} = \frac{1}{q\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-3}} \int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,2n-4}\, d\phi$$

facciamovi per semplicità maggiore

$$2n - 4 = m;$$

e quella Equazione si trasformerà nella seguente

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{\frac{m+2}{2}}} = \frac{1}{q\,\overline{\text{sen}.\phi}^{\,m+1}} \int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}\, d\phi\,.$$

Ed in questa potremo in luogo di $\int \overline{\text{sen}.\phi}^{\,m}\, d\phi$ sostituire il valore in serie che gli abbiamo assegnato.

6.

Abbiamo così completamente sviluppata la funzione

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

estesa da $x=0$ sino ad $x=\frac{1}{0}$. Con facilità si può anche trovarne il valore quando i limiti saranno $x=0$, $x=1$. Per convincersene riprendiamo la riduzione riportata nell'articolo 1.

$$\int \frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = -\frac{(1+xq\cos.\phi)}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

$$-\frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q\,\text{sen.}^2\phi}\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Prendendo ora tutti i termini tra i limiti $x=0$, $x=1$, avremo facilmente la nuova Equazione

$$\int \frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi} - \frac{(1+q\cos.\phi)}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}$$

$$\frac{-(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q\overline{\text{sen.}}^2\phi}\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Suppongasi ora

$$y=\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Quindi dedurremo

$$\frac{1}{2(n-1)q\,\text{sen.}\phi}\,\frac{dy}{d\phi}=\int\frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}.$$

Sostituendo ora questi valori nell'Equazione ottenuta, si avrà moltiplicando tutto per $2(n-1)q\,\text{sen.}\phi$

$$\frac{dy}{d\phi}=\frac{1}{q\,\text{sen.}\phi}\,\frac{(1+q\cos.\phi)}{q\,\text{sen.}\phi(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}-(2n-3)\frac{\cos.\phi}{\text{sen.}\phi}.y\,.$$

Equazione lineare del primo ordine.

Integrandola, si avrà

$$y=\frac{1}{\overline{\text{sen.}\phi}^{2n-3}}\left[C+\frac{1}{q}\int\left[\overline{\text{sen.}\,\phi}^{2n-4}-\frac{(1+q\cos.\phi).\text{sen.}\,\phi^{2n-4}}{(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}\right]d\phi\right].$$

Questo sarà dunque il valore della funzione $\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$ presa tra i limiti $x=0$, $x=1$. Determineremo facilmente la indeterminata C osservando che supposto $n>2$, nel caso di $\phi=0$ svanisce la quantità

$$\int\left[\overline{\text{sen.}\,\phi}^{2n-4}-\frac{(1+q\cos.\phi)\,\text{en.}^2\phi^{2n-4}}{(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}\right]d\phi$$

onde nella Equazione ottenuta moltiplicando tutto per

$\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-3}$, ed osservando che nel caso di $\phi = 0$ si ha tra i dati limiti

$$y = \int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi + q^2x^2)^{n-1}} = \int \frac{dx}{(1+qx)^{2n-2}} = \frac{1}{q(2n-3)}\left[1 - \frac{1}{(1+q)^{2n-3}}\right]$$

troveremo, sostituendo, $C = 0$. Sarà dunque finalmente

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}} = \frac{1}{q\,\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-3}} \int \left[\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-4} - \frac{(1+q\cos.\phi)\,\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-4}}{(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}\right] d\phi.$$

7.

Se in questa Equazione faremo $q = 1$, si avrà più semplicemente

$$\int \frac{dx}{(1+2x\cos.\phi+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-3}} \int \left[\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-4} - \frac{(1+\cos.\phi)\,\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-4}}{2^{n-1}(1+\cos.\phi)^{n-1}}\right] d\phi.$$

Abbiamo ora

$$\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-4} = (1-\cos.\phi)^{n-2} \,.\, (1+\cos.\phi)^{n-2}.$$

L'equazione ottenuta si ridurrà così facilmente alla forma

$$\int \frac{dx}{(1+2x\cos.\phi+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-3}} \int \left[\overline{\text{sen.}\,\phi}^{\,2n-4} - \frac{1}{2^{n-1}}(1-\cos.\phi)^{n-2}\right] d\phi.$$

Se faremo inoltre $n=2$, agevolmente troveremo

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\,\phi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}.$$

A questa stessa relazione sono giunto anche nell' articolo 17. delle *ricerche sulle serie*, seguendo un' analisi diversissima dalla precedente. Trattandosi di una semplicissima formula razionale, con somma facilità si può verificare quella relazione; ed infatti chi avesse la più elementare idea del Calcolo Integrale troverebbe, operando convenientemente

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,.\,\text{sen.}\,\phi}\left[\int \frac{dx}{x+e^{-\phi\sqrt{-1}}} - \int \frac{dx}{x+e^{\phi\sqrt{-1}}}\right].$$

Ed effettuata la integrazione prescritta tra i limiti $x=0$, $x=1$, convincerebbesi subito della identità delle due espressioni $\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}$, $2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$. Un' analoga verificazione deve sempre aver luogo, quando una funzione qualunque è rappresentata per mezzo di un integrale definito; per modo che eseguendo la integrazione nel modo ordinario deve sempre giungersi ad un resultato identico. Con tutto ciò queste riduzioni sono molto apprezzate dai Geometri, perchè una funzione data per mezzo di un integrale definito, o anche indefinito, può subire tutte le trasformazioni di cui quell' integrale è suscettibile; anzi l' applicazione del calcolo integrale alla somma, o alla trasformazione delle serie si appoggia sopra questo solo principio, che tutti i geometri hanno posto in uso.

8.

Dietro le riflessioni precedenti, la formula

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}=2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

può servire ad assegnare il rapporto tra l' arco ϕ, ed il suo seno, esprimendolo in tante forme diverse in quante può rappresentarsi l' integrale

$$2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

preso tra i limiti $x=0$, $x=1$.

Riprendendo per esempio la espressione

$$\int\frac{dc}{1+2x\cos.\phi+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{-1}.\text{sen.}\phi}\left[\int\frac{dx}{x+e^{-\phi\sqrt{-1}}}-\int\frac{dx}{x+e^{\phi\sqrt{-1}}}\right]$$

e sostituendo in luogo di $\frac{1}{x+e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{1}{x+e^{\phi\sqrt{-1}}}$ le serie geometriche che rappresentano queste frazioni, si avrà immediatamente, (osservando che $\frac{1}{e^{-n\phi\sqrt{-1}}}-\frac{1}{e^{n\phi\sqrt{-1}}}=2\sqrt{-1}.\text{sen}.\,n\phi$)

$$\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}=\frac{1}{\text{sen}.\phi}\int\Big[\text{sen}.\phi-x\text{sen}.2\phi+x^2\text{sen}.3\phi$$
$$-x^3\text{sen}.4\phi+\text{ec.}\Big]dx\,.$$

Ed integrando tra i limiti convenuti

$$\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}=\frac{1}{\text{sen}.\phi}\Big[\text{sen}.\phi-\frac{\text{sen}.2\phi}{2}+\frac{\text{sen}.3\phi}{3}-\frac{\text{sen}.4\phi}{4}+\text{ec.}\Big]$$

Ma essendo tra i limiti stessi

$$\frac{\phi}{\text{sen}.\phi}=2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

si avrà ancora

$$\frac{\phi}{2}=\text{sen}.\phi-\frac{\text{sen}.2\phi}{2}+\frac{\text{sen}.3\phi}{3}-\frac{\text{sen}.4\phi}{4}+\text{ec.}$$

Per tanto la Equazione da me stabilita non è che una trasformata di questa espressione, la quale è dovuta ad Euler, e rappresenta l'arco ϕ sotto una forma molto significante, quantunque realmente quella serie non sia che una trasformazione analitica, come lo è qualunque serie che rappresenti una funzione circolare, e come lo sono infatti tutte quelle nuove forme che altrove ho assegnate per $\cos.n\phi$, $\text{sen}.n\phi$ ec. Per certo se le identità di questo genere fossero viziose, o inutili, converrebbe pur dire che lo sarebbero tutte le trasformazioni, le quali formano la parte più interessante dell'analisi, come la sola serie di Taylor basta a convincerne.

9.

Ma per vedere anche con chiarezza maggiore che la Equazione

$$\frac{\phi}{\text{sen}.\phi}=2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

ben lungi dall'essere insignificante, può anzi condurre a qualche utile, e non ovvio resultato, riprendiamo la frazione, $\frac{1}{1+2x\cos.\phi+x^2}$, e riduciamola in serie per le potenze di $\cos.\phi$; avremo

$$\frac{1}{1+2x\cos.\varphi+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cos.\varphi+\frac{2^2x^2}{(1+x^2)^3}\overline{\cos.\varphi}^{\,2}$$

$$-\frac{2^3x^3}{(1+x^2)^4}\overline{\cos.\varphi}^{\,3}+\frac{2^4x^4}{(1+x^2)^5}\overline{\cos.\varphi}^{\,4}-\text{ec.}\ldots\pm\frac{2^nx^n}{(1+x^2)^{n+1}}\overline{\cos.\varphi}^{\,n}\mp\text{ec.}$$

Moltiplicando adesso per dx, ed integrando tra i limiti $x=0$, $x=1$, otterremo la formula $\int\frac{dx}{1+2x\cos.\varphi+x^2}$ svolta come sopra, ed il coefficiente di $\overline{\cos.\varphi}^{\,n}$ sarà dato dalla espressione

$$\pm 2^n\int\frac{x^ndx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

integrando tra i limiti stessi, e scegliendo il segno superiore se n è pari, e l' inferiore se n è dispari. Per integrare la formula $\frac{x^ndx}{(1+x^2)^{n+1}}$, facciamovi $\frac{x}{1+x^2}=\frac{u}{2}$, ed avremo la trasformata $\frac{1}{2^{n+1}}\frac{u^ndu}{\sqrt{1-u^2}}$, e siccome la formula proposta deve integrarsi tra i limiti $x=0$, $x=1$, parimente la trasformata $\frac{1}{2^{n+1}}\frac{u^ndu}{\sqrt{1-u^2}}$ dovrà integrarsi tra i limiti $u=0$, $u=1$, poichè $\frac{u}{2}=\frac{x}{1+x^2}$. Quindi in questa particolar supposizione sarà

$$2^n\int\frac{x^ndx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{u^ndu}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Abbiamo adesso, come è noto, se n è pari, tra i limiti $u=0$, $u=1$,

$$\frac{1}{2}\int\frac{u^ndu}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1.3.5.7.9\ldots(n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots n}\,\pi$$

essendo π la mezza periferia, e se n è dispari

$$\frac{1}{2}\int\frac{u^ndu}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{2.4.6.8\ldots n}{3.5.7.9\ldots(n+1)}.$$

Questa è dunque la espressione di $2^n\int\frac{x^ndx}{(1+x^2)^{n+1}}$, integrando tra i soliti limiti. Abbiamo così ottenuto il coefficiente di

$\overline{\cos.\phi}^{\,n}$ nello sviluppo di $\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$ svolta per le potenze di $\cos.\phi$; sostituendo dunque, ed osservando che al caso di n pari conviene il segno positivo, ed il negativo ad n dispari, otterremo

$$\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}=\frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}-\cos.\phi+\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,\overline{\cos.\phi}^{\,2}-\frac{2}{3}\,\overline{\cos.\phi}^{\,3}$$

$$+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2}\,\overline{\cos.\phi}^{\,4}-\frac{2.4}{3.5}.\,\overline{\cos.\phi}^{\,5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\,\frac{\pi}{2}.\,\overline{\cos.\phi}^{\,6}-\frac{2.4.6}{3.5.7}.\,\overline{\cos.\phi}^{\,7}$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\,\frac{\pi}{2}\,\overline{\cos.\phi}^{\,8}-\text{ec.}\Big].$$

Ma essendo

$$\frac{\phi}{\operatorname{sen}.\phi}=2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

sarà anche

$$\frac{\phi}{\operatorname{sen}.\phi}=\frac{\pi}{2}-\cos.\phi+\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}.\,\overline{\cos.\phi}^{\,2}-\frac{2}{3}\,\overline{\cos.\phi}^{\,3}+\frac{1.3}{2.4}\,.\,\frac{\pi}{2}\,\overline{\cos.\phi}^{\,4}$$

$$-\frac{2.4}{3.5}\,\overline{\cos.\phi}^{\,5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\pi}{2}\,\overline{\cos.\phi}^{\,6}-\frac{2.4.6}{3.5.7}\,\overline{\cos.\phi}^{\,7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{\pi}{2}\,\overline{\cos.\phi}^{\,8}-\text{ec.}$$

Serie assai elegante, e che può essere utilissima, perchè sempre convergente, specialmente poi se l' arco ϕ poco differisce dal quadrante.

Se faremo $\phi=0$, sarà $\frac{\phi}{\operatorname{sen}.\phi}=1$, e quindi avremo

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2+\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}+\text{ec.}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\text{ec.}}$$

10.

Potrei aggiungere alle già fatte molte altre riflessioni sopra gli usi della Equazione

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}=2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}.$$

Ma mi limiterò solamente a fare osservare che da essa discende la relazione assai singolare

$$\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}=\frac{1}{1-n^2}-\frac{2^2}{2^2-n^2}+\frac{3^2}{3^2-n^2}-\frac{4^2}{4^2-n^2}+\text{ec.}$$

Ove $n=\frac{\phi}{\pi}$, π denotando la mezza periferia circolare, e la integrazione essendo eseguita tra i limiti $x=0$, $x=1$. Può vedersene la dimostrazione nel numero 44. delle *Ricerche sulle Serie*.

Questa relazione può dedursi ancora da una considerazione differente da quella che nella opera citata è posta in uso. Ho infatti dimostrato nel numero 32. della precedente Memoria, che l' esponenziale $e^{a\phi}$ può svolgersi in una serie ordinata per i coseni degli archi multipli di ϕ come segue:

$$e^{a\phi}=\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}-\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi+\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi-\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{3^2+a^2}\cos.3\phi$$
$$+\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{4^2+a^2}\cos.4\phi-\text{ec.}$$

Differenziando rapporto $a\phi$ due volte, e facendo quindi $\phi=0$, si avrà, riducendo,

$$\frac{\pi a}{2}=e^{a\pi}\left[\frac{1}{1+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3^2}{3^2+a^2}-\frac{4^2}{4^2+a^2}+\text{ec.}\right]$$
$$+\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{2^2}{2^2+a^2}+\frac{3^2}{3^2+a^2}+\frac{4^2}{4^2+a^2}+\text{ec.}\right).$$

Se in quella Equazione faremo $a=n\sqrt{-1}$, quindi $a=-n\sqrt{-1}$, e sottrarremo i resultati, troveremo

$$\frac{n\pi\sqrt{-1}}{e^{n\pi\sqrt{-1}}-e^{-n\pi\sqrt{-1}}}=\frac{1}{1-n^2}-\frac{2^2}{2^2-n^2}+\frac{3^2}{3^2-n^2}-\frac{4^2}{4^2-n^2}+\text{ec.}$$

Ciò è facendo $n\pi=\phi$

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}=2\left[\frac{1}{1-n^2}-\frac{2^2}{2^2-n^2}+\frac{3^2}{3^2-n^2}-\frac{4^2}{4^2-n^2}+\text{ec.}\right]^{(*)}.$$

(*) Questa relazione potrebbe ottenersi ancora per induzione decomponendo nei suoi infiniti fattor. la formula $\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}$. Si vedano gli opuscoli analitici di Euler.

La quale Equazione, combinata con l' altra

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos\phi+x^2}$$

ci darà quel resultato al quale ci eravamo proposti di giungere.

Fine del I.° Fascicolo di Matematica del T.° XIX.