# DIMOSTRAZIONE

## DI ALCUNE FORMOLE GENERALI DELLA LETTERA DOMENICALE PER QUALUNQUE ANNO INNANZI, O DOPO LA RIFORMA DEL CALENDARIO GREGORIANO

# MEMORIA

DEL SIGNOR

GIUSEPPE CALANDRELLI ASTRONOMO

*Ricevuta adì 25. Agosto 1820.*

1. Nel primo anno dell'Era cristiana fu la lettera domenicale B. Nel 1582 anno della riforma del Calendario era la lettera domenicale G, e siccome il dì 5. Ottobre per la correzione medesima si disse 15, ed al medesimo giorno 5. nella distribuzione delle lettere fatta per tutti i giorni dell' anno gli corrisponde la lettera E, quindi il giorno 5. era venerdì, ed il giorno 7 domenica. Essendosi dunque detto il giorno 5. giorno 15, il giorno 15. a cui compete A divenne venerdì ed il giorno 17. a cui compete C divenne domenica.

2. Si distribuiscano le lettere domenicali secondo il loro ordine, e queste indicate siano dalli numeri superiori, ch' esprimono il loro luogo diretto.

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, \\ 2', & 1', & 7', & 6', & 5', & 4', & 3' \end{array}$$

Essendo le lettere ordinate col loro ordine diritto dal primo di Gennajo colla lettera A, e così ripetute di sette in sette in tutti i consecutivi giorni dell' anno comune, composto di giorni 365, è quindi evidente, che l' ultimo dì del primo anno, ossia il 31. Dicembre ha la medesima lettera A. Qualunque anno dunque comune se incomincia in qualunque feria delle sette, termina nella medesima feria, ed il veniente anno incomincia colla feria susseguente. Da ciò deriva, che le lettere domenicali, le quali sono notate col ordine naturale, e diretto in tutti li giorni, prendono un ordine retrogrado di anno in anno. Se dunque, non considerando che gli anni comuni nel primo anno fu la lettera domenicale B, nel secondo fu A, nel terzo G, nel quarto F, nel quinto E, nel sesto D, e nel settimo C. Ricominciò quindi il periodo secondo settenario retrogrado, ed a questo fine si sono notati i numeri puntati 1·, 2·, 3·, 4·, 5·, 6·, 7·; sarebbero perciò le retrogradazioni che nell' Era cristiana incominciano da B tante, quanti sono gli anni comuni che si numerarono nell' Era medesima. Ma ogni quarto anno essendo bisesto, l' aggiunta di un giorno, che si fa nel mese di Febbrajo dà una retrogradazione nella lettera domenicale, poichè al giorno che si aggiunge, non corrisponde alcuna lettera. Così nel quarto anno per la retrogradazione successiva la lettera domenicale F, dopo l'aggiunto giorno 29. Febbrajo retrogradò e divenne E.

3. È evidente dunque, che le retrogradazioni nelle lettere domenicali sono tante quanti sono gli anni, e quanti sono i bisesti decorsi i quali sono tanti quanto è il quoto che nasce dividendo il numero degli anni per 4. Così per esempio nell' anno 1818. il numero de' bisestili sarà il quoto che risulta dividendo $\frac{1818}{4}$, e che può rappresentarsi, come usa il Sig. Cav. Delambre per $\left(\frac{1818}{4}\right)_i$; intendendo con questa espressione il numero intero o quoto, non avendo riguardo al residuo.

4. Dalla proposta serie di lettere si rileva che allorchè

le semplici retrogradazioni dopo un numero qualunque di settenarj completi sono zero, questo necessariamente cade nel numero settenario completo $7^{\cdot}$. Similmente si conosce, che il numero retrogrado $1^{\cdot}$ viene dopo il settenario completo $7^{\cdot}$, ed il $2^{\cdot}$ similmente viene dopo lo stesso numero retrogrado settenario $7^{\cdot}$. Quando dunque le residuali retrogradazioni siano $0^{\cdot}, 1^{\cdot}, 2^{\cdot}$; possono considerarsi come $7^{\cdot}+0^{\cdot}$, $7^{\cdot}+1$, $7^{\cdot}+2^{\cdot}$. Al contrario i numeri retrogradi $3^{\cdot}$, $4^{\cdot}$, $5^{\cdot}$, $6^{\cdot}$ precedendo il prossimo settenario $7^{\cdot}$ dovranno considerarsi come sono. Posto ciò se a qualunque numero retrogrado si aggiunga il numero corrispondente nella serie diretta delle lettere domenicali s' otterrà sempre un numero costante 10, essendo evidentemente nella proposta serie $3^{\cdot}+7$, $4^{\cdot}+6$, $5^{\cdot}+5$, $6^{\cdot}+4$, $7^{\cdot}+0+3$, $7^{\cdot}+1^{\cdot}+2$, $7^{\cdot}+2^{\cdot}+1=10$. Questo numero costante varia, variando la disposizione delli numeri retrogradi, ed essendo sette le lettere domenicali, sette diversi numeri costanti possono ottenersi e questi sono 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8. Così se i numeri retrogradi fossero disposti nel modo seguente

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7. |
| A, | B, | C, | D, | E, | F, | G. |
| $7^{\cdot}$, | $6^{\cdot}$, | $5^{\cdot}$, | $4^{\cdot}$, | $3^{\cdot}$, | $2^{\cdot}$, | $1^{\cdot}$ |

il numero costante diviene 8.

5. Premesse queste cose, si proponga la primiera disposizione delli numeri retrogradi, come fu nel primo anno dell' Era cristiana. Si chiami H il numero degli anni trascorsi, i quali si considerino primieramente tutti comuni, e sarà $\left(\frac{H}{7}\right)_i$ il numero intero delli settenarj retrogradi. Sarà similmente $\left(\frac{H}{7}\right)_r$, ossia il residuo della divisione, che rappresenterà le retrogradazioni trascorse dall'ultimo settenario compito. Quando dunque la lettera domenicale corrispondente si chiami L, sarà (4) $\left(\frac{H}{7}\right)_r+L=10$, ed $L=10-\left(\frac{H}{7}\right)_r$. Si con-

siderino ora i bisesti trascorsi, e sarà $\left(\frac{H}{4}\right)_i$ il numero esprimente i già passati bisesti, alli quali, come si è rilevato (2), altrettante retrogadazioni corrispondono nelle lettere domenicali. Il numero dunque intero delle retrogradazioni sarà $H + \left(\frac{H}{4}\right)_i$; ed $\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ il numero delle retrogradazioni residuali dopo l'ultimo settenario completo, e quindi

$$L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r .$$

6. Come si è osservato, nel 1582 la lettera domenicale fu $G = 7$. Essendo $H = 1582$, sarà $\left(\frac{H}{4}\right)_i = 395$, ed $\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r = \left(\frac{1977}{7}\right)_r = 3$. Quindi $L = 10 - 3 = 7 = G$. Questa formola può servire dal principio dell'Era cristiana al dì 4 Ottobre 1582; sottraendo però 7 ogni qual volta $\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ sia o, 1', 2';(4).

Allorchè nel 1582. il dì 5. Ottobre fu detto 15, furono nel tempo stesso soppressi 10 giorni. Ciò fu fatto perchè i bisesti fin' a quell' epoca aveano formato dieci giorni di più del dovere per ritenere l'equinozio nel dì 21 Marzo. Accaduta dunque la riforma vennero espresse le retrogradazioni per $H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10$; onde $L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10}{7}\right)_r = 10 - 0 - 7 = 3 = C$ (4), come realmente fu la lettera domenicale nel 1582. 17. Ottobre. La medesima formola ha servito fino al 1699. Il 1700, essendo ogni secolo divisibile per 4, dovea essere bisestile, ma per la riforma i tre secoli dopo il 1600 sono comuni, ed il quarto secolo, cioè il 2000 sarà bisestile; quindi i tre secoli susseguenti al 2000 comuni, ed il quarto bisestile e così in seguito. Nell' anno dunque 1700 le retrogradazioni diminuirono di tanto quanto erano i secoli trascorsi meno 16 secoli. Così nel 1700 le retrogradazioni diminuirono di $17-16=1$, nel 1800 di $18-16=2$, nel 1900 di $19-16=3$, nel 2000 di $20-16=4$. Ma ogni quarto secolo è bisesto; dunque le retrogradazioni diminuite per esempio di $20-16=4$ debbono aumentarsi di uno, ossia di $\left(\frac{20-16}{4}\right)_i=1$. Stando a queste regole si dica K un numero qualunque di secoli, che per altro minori non siano del decimo sesto secolo e sarà $L=10-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i}{7}\right)_r$.

Dovendo essere L positivo, e non potendo superare il 6 dovrebbe esprimersi $L=\left(\frac{\left(\frac{10-H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i}{7}\right)_r}{7}\right)_r$.

Diviene così la formola molto complicata, ma è facile ridurla a maggior semplicità. In questa frazione il valore di L deve essere positivo e minore di 7. Si prenda dunque a considerare la frazione simile $\left(\frac{C-\left(\frac{D}{7}\right)_r}{7}\right)_r$ nella quale sia l' indicato residuo positivo. Il 7. potrà contenersi in D un dato qualunque numero $n$ di volte, rimanendo il residuo $\left(\frac{D}{7}\right)_r$. Essendo dunque $n$ zero, o qualunque intero numero, sarà $D=n7+\left(\frac{D}{7}\right)_r$, e $-\left(\frac{D}{7}\right)_r=-D+n7$. Dunque $\left(\frac{C-\left(\frac{D}{7}\right)_r}{7}\right)_r$ $=\left(\frac{C-D+n7}{7}\right)r$, residuo positivo. Sarà dunque similmente il valore positivo di $L=\left(\frac{10-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+10-16+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+4+n7}{7}\right)_r$

$$=\left(\frac{8-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+n\,7}{7}\right)_r=\left(\frac{1-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+n\,7}{7}\right)_r.$$

Rappresentando L positivo il residuo della divisione, sarà quindi la quantità $1-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+7n-L$ esattamente divisibile per 7. Se dunque alla quantità medesima si aggiunga un multiplo qualunque di 7. sarà sempre la quantità divisibile esattamente per 7. Si rifletta ora, che $\left(\frac{H}{4}\right)_i$ è uguale all' intero H meno il residuo, ossia $-\left(\frac{H}{4}\right)_r$ diviso tutto per 4. Sarà dunque $\left(\frac{H}{4}\right)_i=\frac{H-\left(\frac{H}{4}\right)_r}{4}$, e similmente sarà $\left(\frac{H}{7}\right)_i=\frac{H-\left(\frac{H}{7}\right)_r}{7}$ e quindi $H-\left(\frac{H}{7}\right)_r$ sempre esattamente divisibile per 7, come suo multiplo. Sarà dunque $1-H-\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_r}{4}+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+n\,7-L$ esattamente divisibile per 7. Si aggiunga ora primieramente $\frac{-7H+7\left(\frac{H}{4}\right)_r}{4}$ multiplo di 7, e quindi anche $3H-3\left(\frac{H}{7}\right)_r$ similmente multiplo di 7, e ne risulterà $1-3H+2\left(\frac{H}{4}\right)_r+3H-3\left(\frac{H}{7}\right)_r+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+7n-L$ esattamente divisibile per 7. Si aggiunga finalmente $7\left(\frac{H}{7}\right)_r$ e si sottragga $n7$ ambedue multipli di 7 e si avrà $1+2\left(\frac{H}{4}\right)_r+4\left(\frac{H}{7}\right)_r+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i-L$ esattamente divisibile per 7. La natura dunque della semplice divisione dimostra essere il residuo positivo $L = \left(\frac{1+2\left(\frac{H}{4}\right)_r + 4\left(\frac{H}{7}\right)_r + K - \left(\frac{K}{4}\right)_i}{7}\right)_r$. Servirà questa formola della lettera domenicale per un dato qualunque anno dopo la riforma, e se ne può fare uso, applicandola alla tanto nota formola del Ch. Dottor Gauss risguardante la Pasqua. Se si prenda la lettera domenicale innanzi la riforma si trova $L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ (5), ed il calcolo ora usato darà $L = \left(\frac{3 + 2\left(\frac{H}{4}\right)_r + 4\left(\frac{H}{7}\right)_r}{7}\right)_r$. Sia da determinarsi la lettera domenicale del 1818, sarà $H = 1818$, $\left(\frac{H}{4}\right)_i = 454$, $-(ſ - 16) = -(18 - 16) = -2$; dunque $L = 10 - \left(\frac{2260}{7}\right)_r$ $= 10 - 6 = 4 = D$.

7. La formola $L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10 - (K - 16)}{7}\right)_r$ dal 1700 servirà a tutto il 1999 in cui si trova $L = 10 - \left(\frac{2485}{7}\right)_r$ $= 10 - 0 = 10 - 7. = 3 = C$ (4). Nel 2000 bisognerà introdurre l' ultimo termine $\left(\frac{K-16}{4}\right)_i = \left(\frac{20-16}{4}\right)_i = 1$, e sarà $L = 10 - \left(\frac{2487}{7}\right)_i = 10 - 2 - 7 = 1 = A$ (4). Può sembrare che la formola sia molto composta, potendosi rendere più semplice sì rispetto agl' anni prima della riforma come a quelli posteriori (6). Si è creduto però bene di rappresentare in una medesima formola la lettera domenicale per qualunque anno anteriore, o posteriore alla riforma. Prova di ciò può essere per esempio l' erudita ricerca, che si fa, se sia stata sempre costumanza della Chiesa ordinare i Vescovi in giorno di domenica. Il dotto Cardinal Noris rileva da un codice vaticano se-

gnato 446, che Menna C. P. fu fatto Vescovo il dì 13. Marzo dopo il Consolato, che di nuovo prese Paolino Juniore. Dalli fasti di Vittorio Aquitano si sa, che ciò fu nell' anno 536, poichè Paolino prese il Consolato nel 534, e quindi nelli due susseguenti anni tenne il Consolato d' Occidente. Dunque il Consolato di nuovo preso da Paolino cade nel 536 anno bisestile. Si prendano dunque nella formola i soli due primi termini, onde sia $L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r = 10 - \left(\frac{536 + 134}{7}\right)_r = 10 - 5 = E$. Fu dunque E la lettera domenicale. Ma il dì 13. Marzo ha per lettera B. Dunque Menna fu ordinato Vescovo nel giovedì 13. Marzo An. 536.

8. Si è osservato che diversi numeri costanti possono ottenersi dalla diversa combinazione delli numeri esprimenti le retrogradazioni semplici (4). Queste diverse combinazioni appartengono alli diversi anni dell' Era cristiana ed innanzi la medesima, e da queste diverse combinazioni possono ottenersi diverse formole atte tutte a determinare la lettera domenicale.

*Era Cristiana.*

ANNO I.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 2. | 1. | 7. | 6. | 5. | 4. | 3. |

ANNO II.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 1. | 7. | 6. | 5. | 4. | 3. | 2. |

ANNO III.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 7. | 6. | 5. | 4. | 3. | 2. | 1. |

ANNO VI.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 3. | 2. | 1. | 7. | 6. | 5. | 4. |

ANNO IX.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 6. | 5. | 4. | 3. | 2. | 1. | 7. |

*Innanzi l' Era cristiana.*

ANNO I.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 3· | 2· | 1· | 7' | 6· | 5· | 4· |

ANNO II.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 4· | 3· | 2· | 1· | 7· | 6· | 5· |

ANNO III.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 5· | 4· | 3· | 2· | 1· | 7· | 6· |

ANNO IV.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· |

ANNO V.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 1· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2. |

ANNO IX.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· | 7· |

Paragonando queste diverse combinazioni con quella dell' anno primo dell' Era si rileva , che in quelle dell' Era medesima l' 1· esprimente la prima semplice retrogradazione diviene retrogrado per quanti sono gli anni dopo il primo trascorsi , e quanti i bisesti. Così per esempio nell'An. VI. l' 1· rispetto al primo anno è retrogrado di sei giorni quanti per appunto sono i cinque anni dopo il primo ed un bisesto trascorso. Nelle combinazioni poi innanzi l' Era l' 1· esprimente la semplice retrogradazione procede direttamente secondo l' ordine delle lettere per quanti sono gli anni antecedenti , e quanti i bisesti. Cosi nella combinazione dell' anno IX. l' 1· rispetto alla combinazione dell'anno primo dell' Era , tiene nelle lettere domenicali il luogo undecimo quanti appunto sono gl' anni nove antecedenti , più i due bisesti . Da qualunque dunque delle sei combinazioni dell' Era volendo andare all' anno primo , sarà necessario sottrarre dalle retrogradazioni dell' anno e bisesti dati tante retrogradazioni quante ne dà la combinazione che si prende. Al contrario da qualunque delle sei combinazioni innanzi l'Era volendo andare all'anno primo dell'Era, sarà necessario aggiugnere tante retrogradazioni a quelle, che si hanno dall'anno dato e bisesti, quanti ne dà la combinazione, che si prende. Fermo rimanendo quanto si è detto (4), i numeri costanti per l'anno I. II. III. ec. dell'Era sono 10, 9, 8, 13, 12, 11, 14. Similmente innanzi l'Era i numeri costanti degli anni I. II. III. IV. ec. sono 11, 12, 13, 8, 9, 14. questi sono i medesimi numeri costanti indicati (4).

9. È ben chiaro, che questi diversi numeri costanti, purchè s'osservi quanto si è rilevato (4), possono dare altrettante formole per la lettera domenicale. Si scelga per esempio fra tutte queste diverse combinazioni quella dell'anno nono innanzi, e dopo l'Era. In queste due combinazioni il numero costante è 14. Siccome poi l'1' nella combinazione dell'anno IX. innanzi l'Era è diretto nell'ordine delle lettere di 11, quindi per andare all'anno primo dell'Era bisogna aggiugnere 11. retrogradazioni (8). Al contrario nell'anno IX. dell'Era l'1' presenta 10. retrogradazioni già fatte le quali bisogna sottrarre per andare all'anno primo (8). Siano per brevità i termini dopo la riforma $\left(-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)=-A$, e sarà espresso il numero totale delle retrogradazioni per $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+11\\-10\end{smallmatrix} - A$, onde $L=14-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+11\\-10\end{smallmatrix} - A}{7}\right)_r$. Ma togliendo, o aggiungendo un settenario nel numeratore della frazione il residuo è sempre lo stesso. Dunque $L=14-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+4\\-3\end{smallmatrix} - A}{7}\right)_r$. Nella medesima maniera si operi in tutte le diverse combinazioni le quali hanno un medesimo numero costante.

Negli anni dunque diversi dell'Era, ed innanzi l'Era IV. e III'; V. e II'; VI. e I'; I; II. e V'; III. e IV'; i quali hanno per numero costante (8) 13, 12, 11, 10, 9, 8 sarà, pel metodo ora usato, il numero totale delle retrogradazioni espresso per $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+3\\-4\end{smallmatrix} -A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+2\\-5\end{smallmatrix} -A$, $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+1\\-6\end{smallmatrix} -A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i -A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+6\\-1\end{smallmatrix} -A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+5\\-2\end{smallmatrix} -A$.

Si troverà dunque.

$$\text{An. III. } L = 8-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+5\\-2\end{smallmatrix} -A}{7}\right)_r \quad \text{An. IV}'.$$

$$\text{An. II. } L = 9-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+6\\-1\end{smallmatrix} -A}{7}\right)_r \quad \text{An. V}'$$

$$\text{An. I. } L = 10-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i -A}{7}\right)_r \quad \text{An. I}$$

$$\text{An. VI. } L = 11-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+1\\-6\end{smallmatrix} -A}{7}\right)_r \quad \text{An. I}'$$

$$\text{An. V. } L = 12-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+2\\-5\end{smallmatrix} -A}{7}\right)_r \quad \text{An. II}'$$

$$\text{An. IV. } L = 13-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+3\\-4\end{smallmatrix} -A}{7}\right)_r \quad \text{An. III}'$$

$$\text{An. IX. } L = 14-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{smallmatrix}+4\\-3\end{smallmatrix} -A}{7}\right)_r \quad \text{An. IX}'.$$

Sembrerà che tredici diverse formole possano dare la lettera domenicale L. Quando dunque tutte queste formole apparentemente diverse si trattino col metodo usato (6) tutte si riducono all' identica formola

$$L = \left(\frac{1+2\left(\frac{H}{4}\right)_i + 4\left(\frac{H}{7}\right)_r + K - \left(\frac{K}{4}\right)_i}{7}\right)_r .$$

10. Dalla diversa disposizione delli numeri retrogradi dipendono evidentemente le diverse formole della lettera domenicale. Per dimostrare sempre più questa verità, si distri-

buiscano le lettere domenicali nella seguente maniera corrispondente all' anno primo dell' Era.

| Periodo I. incompleto | | Periodo I. completo | | | | | | | Periodo II. completo | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | A | B | C | D | E | F | G | A | B | C | D | E | F | G |
| 2· | 1· | 9· | 8· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 16· | 15· | 14· | 13· | 12· | 11· | 10· |
| | | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· |
| | | 2· | 2· | 2· | 2· | 2· | 2· | 2· | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7 |

Il primo periodo si dice incompleto come formato dalle sole lettere domenicali B, A. Si dice I, II, III, ec. periodo completo perchè composto da tutte le sette lettere domenicali, alle quali, incominciando da A corrispondono i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, e le retrogradazioni semplici incominciando in G dall' 1·, crescono fino al 7 in A. Ciò posto le retrogradazioni complete in qualunque periodo completo altro non sono, che le retrogradazioni passate più le retrogradazioni semplici del periodo completo, che si prende a considerare. Così nella disposizione fatta le retrogradazioni passate, del periodo incompleto sono 2·, e quindi 2·+1·, 2·+2·, 2·+3·, 2·+4·, 2·+5·, 2·+6·, 2·+7·, danno le retrogradazioni del periodo I. completo, e sono 3·, 4·, 5·, 6·, 7·, 8·, 9·. Similmente nel periodo secondo completo le retrogradazioni passate sono 2·+7·, e quindi 2·+7·+1·, 2·+7·+2·, 2·+7.+3·, 2·+7·+4·, 2·+7·+5·, 2·+7·+6·, 2·+7·+7· danno le retrogradazioni del medesimo periodo, e sono 10·, 11·, 12, 13·. 14·, 15·, 16·. Costantemente in qualunque periodo completo le retrogradazioni semplici più il numero corrispondente alla lettera domenicale dà 8=1·+7, 2·+6, 3·+5 ec. Dunque se le retrogradazioni passate genericamente si dicano R, sarà in qualunque periodo completo espressa per R+8 = R+1+7 = R+2+6= R+3+5. ec. la somma di una qualunque retrogradazione esistente nel medesimo periodo più il numero della lettera domenicale corrispondente. Così nel periodo I. completo essendo le retrogradazioni passate R=2·, sarà 2·+1·+7 = 3·+7 = 4·+6= 5·+5 = 6·+4 = 7·+3 = 8·+2 = 9·+1. Similmente nel periodo

II. completo essendo $R=2^{\cdot}+7^{\cdot}$, sarà $2^{\cdot}+1^{\cdot}+7^{\cdot}+7=10^{\cdot}+7=11^{\cdot}+6=12^{\cdot}+5=13^{\cdot}+4=14^{\cdot}+3=15^{\cdot}+2=16+1$. Nel periodo III. completo sarà $R=2^{\cdot}+7^{\cdot}+7^{\cdot}$, onde $2^{\cdot}+1^{\cdot}+7^{\cdot}+7^{\cdot}+7=17^{\cdot}+7=18^{\cdot}+6=19^{\cdot}+5=20^{\cdot}+4=21^{\cdot}+3=22^{\cdot}+2=23^{\cdot}+1$. È perciò evidente, che una qualunque retrogradazione esistente nel periodo I. completo sarà espressa per $2+1+7$. Nel periodo II. completo per $2+1+2\times7$. Nel periodo III. per $2+1+3\times7$, nel IV. per $2+1+4\times7$, e così successivamente. Se dunque qualunque periodo completo si dica I, II, III, IV, o genericamente $n$, sarà una qualunque retrogradazione esistente in questo medesimo periodo generico $n$ espressa per $7n+2+1$. Ma le retrogradazioni esistenti in qualunque periodo prima della riforma sono espresse per $H+\left(\frac{H}{4}\right)$ (5), e dopo la riforma si esprimono per $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-10-(S-16)+\left(\frac{S-16}{4}\right)_i$ (6). Dunque chiamando $L$ il numero della lettera domenicale, sarà generalmente $7n+3=L+H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i$, e quindi $L=7n+3+10-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)=7n+6+7-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$. Ponendo poi il settenario completo 7 nel valore delle unità dell' indeterminata $n$, sarà $L=7n+6-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$. Questa è l' identica equazione del Sig. Cav. Delambre (*a*), dimostrata ora con maggior precisione ed evidenza. Può qui rilevarsi, che se le combinazioni degli anni dell' Era, ed innanzi l' Era volessero disporsi come è qui disposta la combinazione dell' anno I. dell'Era, sarebbe in questo caso nel periodo I. incompleto dell' anno I, II, III, IV,

---

(*a*) *Connais. des tems* 1817. *pag.* 307.

V, VI, IX. dell'Era (8) $R=2$, $R=1$, $R=0$, $R=5$, $R=4$, $R=3$, $R=6$. Negli anni poi I', II', III', IV', V', IX' innanzi l'Era sarebbe (8) $R=3$, $R=4$, $R=5$, $R=0$, $R=1$, $R=6$. Procedendo dunque nella maniera medesima, e per brevità ponendo $\left(-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)=-A$ sarà (8. 9.)

| | |
|---|---|
| $L=7n+3-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-A\right)$ | $L=7n+4-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+1-A\right)$ |
| $L=7n+2-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-1-A\right)$ | $L=7n+5-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+2-A\right)$ |
| $L=7n+1-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-2-A\right)$ | $L=7n+6-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+3-A\right)$ |
| $L=7n+6-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-4-A\right)$ | $L=7n+1-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+5-A\right)$ |
| $L=7n+5-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-5-A\right)$ | $L=7n+2-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+6-A\right)$ |
| $L=7n+4-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-6-A\right)$ | $L=7n-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+4-A\right)$ |
| $L=7n-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-3-A\right)$ | |

11. Potranno sembrare diverse queste formole; se però si rifletta, le formole dell'anno II, III, IV, V, VI, IX, dell'Era sono identiche colla medesima formola dell'anno I. Le formole poi dell'anno I', II', III', innanzi l'Era sono identiche colla formola dell'anno I. dell'Era e le tre ultime formole dell'anno IV', V', IX' sono identiche colla medesima formola $L=7n-4-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-A\right)$. Tutte dunque le possibili formole alla maniera usata dal Sig. Cav. Delambre si riducono a due, e sono $L=7n\begin{smallmatrix}+3\\-4\end{smallmatrix}-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-A\right)$. Queste due formole poi possono sempre ridursi alla medesima del Cav. Delambre $L=7n+6-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-16-\left(\frac{K-16}{4}\right)_i$.

12. La formola medesima del Sig. Delambre può anche facilmente dedursi dalla nostra formola

$L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10 - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ (6). Per brevità il numeratore della frazione si dica B, onde sia $L = 10 - \left(\frac{B}{7}\right)_r$. Essendo $\left(\frac{B}{7}\right)_i$ un numero qualunque intero, si dica questo numero $n$. Dalla pura ed elementare aritmetica si sa, che il quoto numero intero multiplicato pel divisore, più il residuo dà il dividendo. Sarà dunque $7n + \left(\frac{B}{7}\right)_r = B$ e $7n - B = -\left(\frac{B}{7}\right)_r$. Sostituendo ora il valore di B si trova $L = 10 + 7n - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10 - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right) = 7 + 3 + 7 + 3 + 7n - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right) = 7n + 7 + 7 + 6 - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$. Finalmente, come si è fatto superiormente (9) ponendo li due settenarj completi $7 + 7$ nel valore delle unità indeterminate di $n$ si otterrà $L = 7n + 6 - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$.

13. Un metodo consimile usato nelle nostre sette formole (9) ci conduce a dimostrare le formole (10) per altra via già dimostrate. Si prenda per esempio la nostra formola ultima. $L = 14 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i {}^{+4}_{-3} - A}{7}\right)_r$. Si dica B il numeratore della frazione, onde sia $L = 14 - \left(\frac{B}{7}\right)_r$. Sarà dunque $\left(\frac{B}{7}\right)_i$ un numero qualunque intero il quale prima della riforma ed essendo H minore di 3 sarà zero, e divenendo $H=3$, potrà essere zero, o anche uno. Si dica questo numero $n$ ed atteso il principio ora esposto sarà $7n - B = -\left(\frac{B}{7}\right)_r$. Sostituendo dunque si trova $L = 14 + 7n - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right) {}^{+4}_{-3} - A\right) =$

$7n + 7 + 7\,{}^{+3}_{-4} - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - A\right)$; ossia (9. 12.) $7n\,{}^{+3}_{-4} - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - A\right) = L$. Qualunque altra delle nostre formole (9) si vogli esperimentare, tutte uniformemente, collo stesso metodo ora usato danno $L = 7n + 3 - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - A\right)$.

14. Quando non si volesse attendere che ad una formola la quale dal 1600 dasse per qualunque anno susseguente la lettera domenicale, questa diviene semplicissima e dopo un periodo di 400 anni tornano le lettere domenicali a prendere il medesimo ordine. L' anno 1600 fu bisesto, e le due lettere domenicali furono B, A (6). Nel primo anno dopo il 1600 fu G la lettera domenicale, e l' ordine delle lettere corrisponde all'anno III. dell'Era (8) del quale è data la formola della lettera domenicale (9). Da questo primo anno contando gl' anni susseguenti, si tenga fermo, che tre secoli consecutivi sono sempre comuni, ed il quarto bisesto. Si dica dunque H' un' anno qualunque dopo il 1600, ed S' esprima il numero de' secoli, che contiene l' anno dato H'. Sarà dunque (8. 9.) $L = 8 - \left(\frac{H' + \left(\frac{H'}{4}\right)_i - S' + \left(\frac{S'}{4}\right)_i}{7}\right)_r$. Sia da determinarsi la lettera domenicale dell' anno 1818. Sarà $H' = 218$; $\left(\frac{H'}{4}\right)_i = 54$, $S' = 2$; $\left(\frac{S'}{4}\right)_i = 0$. Dunque $L = 8 - \left(\frac{270}{7}\right)_r = 8 - 4 = 4 = D$. Questa formola dimostra, che per ogni periodo di anni 400, dopo il 1600 ritorna il medesimo periodo delle lettere domenicali. Così essendo H' ed S' zero sarà $L = 8 - 7 = 1 = A$; come già fu nel 1600 bisestile; posto $H' = 400, 800, 1200$ ec. sarà $S' = 4, 8, 12$ ec. e quindi ritornando il secolo bisestile ritorna pur anche $L = 8 - 7 = 1 = A$.