# SULLA STEREOMETRIA

# MEMORIA

DEL SIG. PROFESSOR

ANTONIO MARIA BORDONI

*Ricevuta adì* 3. *Febbrajo* 1823.

1. Vi sono molti corpi le cui sezioni piane perpendicolari ad una retta individuata hanno le aree funzioni algebraiche razionali intere delle loro distanze da un medesimo punto; e tra essi alcuni ve ne sono pei quali in queste funzioni il maggior esponente della distanza non supera tre: il celebre Torricelli, il Sig. Rossi Amatis, ed il Prof. Brunacci dimostrarono per questi ultimi corpi, come tutti sanno, la singolare ed utile proprietà, che il volume di una qualunque di quelle loro porzioni che sono intercette fra due delle anzidette sezioni, eguaglia il prodotto di una terza parte della distanza di queste medesime sezioni estreme, per la semisomma delle loro aree insieme al doppio di quella della sezione equidistante da esse: io poi dimostrai in altra occasione, che questa proprietà è esclusiva ai soli corpi da essi contemplati; ed ora mi propongo di esporre e dimostrare pei primi dei suddetti corpi, cioè per quelli le cui sezioni hanno le aree funzioni algebraiche razionali intere qualsivogliono delle distanze che hanno i loro piani da un medesimo punto, alcune proprietà analoghe a quelle dimostrate da essi loro pel caso particolare sopra indicato.

Il vantaggio che può trarre sì la teorica che la pratica da queste nuove proprietà, e le singolarità loro insieme a quelle delle considerazioni analitiche che occorrono nella tratta-

zione di esse, mi fanno sperare che non ispiacerà questo mio lavoro.

2. Si immagini la porzione di un corpo intercetta tra due sue sezioni piane parallele una delle quali sia individuata, e l' altra indeterminata, e la cui area sia funzione algebraica razionale ed intera qualsivoglia della sua distanza dalla prima: si chiami $x$ questa distanza che ha il piano di quest' ultima cioè da quello della prima, e si rappresenti la sua area colla funzione

$$f(x) = a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \ldots + a^{(n)} x^n,$$

dove le $a$, $a'$, $a''$, $a'''$, . . . $a^{(n)}$ sono altrettanti costanti, e la $n$ anch' essa costante e numero intero positivo.

3. Incominciaremo a parlare de' valori che debbono avere le $(n+1)$ costanti

$$B,\ A',\ A'',\ A''' \ldots\ldots A^{(n)},$$

perchè il prodotto della $x$ pel polinomio

$$Bf(o) + A'f\left(\frac{x}{n}\right) + A''f\left(\frac{2x}{n}\right) + A'''f\left(\frac{3x}{n}\right) + \ldots + A^{(n)}f(x)$$

eguagli il volume di quella porzione del corpo in quistione, che è intercetta fra le sue due sezioni sopra nominate, cioè fra quelle le aree delle quali sono espresse dalle $f(o)$, $f(x)$; vale a dire incominceremo a scoprire quali parti si debbono prendere delle aree

$$f(o),\ f\left(\frac{x}{n}\right),\ f\left(\frac{2x}{n}\right),\ f\left(\frac{3x}{n}\right), \ldots f\left(\frac{n-1}{n}x\right),\ f(x)$$

delle $(n+1)$ sezioni fatte al corpo ed equidistanti l'una dall'altra, affinchè nel prodotto della somma delle parti

$$Bf(o),\ A'f\left(\frac{x}{n}\right),\ A''f\left(\frac{2x}{n}\right),\ A'''f\left(\frac{3x}{n}\right), \ldots A^{(n-1)}f\left(\frac{n-1}{n}x\right), A^{(n)}f(x)$$

delle aree delle medesime per la distanza delle due estreme, che hanno per aree $f(o)$, $f(x)$, si abbia il volume della porzione suddetta del corpo; risultamento che può riescire vantaggioso in varie occasioni tanto della pratica quanto della teorica.

4. Essendo il volume della porzione che abbiamo di mira la primitiva della $f(x)$ che si annulla colla variabile $x$ medesima, e però eguaglia

$$ax + \frac{a'}{2}x^2 + \frac{a''}{3}x^3 + \frac{a'''}{4}x^4 + \ldots + \frac{a^{(n)}}{n+1}x^{n+1},$$

la presente quistione si ridurrà a determinare i valori delle

$$B,\ A',\ A'',\ A''',\ \ldots\ A^{(n)},$$

che rendono indipendentemente dalla $x$ la quantità

$$x\left(Bf(0) + A'f\left(\frac{x}{n}\right) + A''f\left(\frac{2x}{n}\right) + A'''f\left(\frac{3x}{n}\right) + \ldots + A^{(n)}f(x)\right)$$

eguale alla

$$x\left(a + \frac{a'}{2}x + \frac{a''}{3}x^2 + \frac{a'''}{4}x^3 + \ldots + \frac{a^{(n)}}{n+1}x^n\right),$$

ovvero che soddisfanno l' equazione

$$Bf(0) + A'f\left(\frac{x}{n}\right) + A''f\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + A^{(n)}f(x)$$
$$= a + \frac{a'}{2}x + \frac{a''}{3}x^2 + \ldots + \frac{a^{(n)}}{n+1}x^n,$$

indipendentemente dalla $x$ medesima.

Sostituendo in questa equazione in luogo delle quantità

$$f(0),\ f\left(\frac{x}{n}\right),\ f\left(\frac{2x}{n}\right),\ f\left(\frac{3x}{n}\right),\ \ldots\ f\left(\frac{n-1}{n}x\right),\ f(x)$$

i loro valori, che sono ordinatamente

$$a,\ a + \frac{a'}{n}x + \frac{a''}{n^2}x^2 + \frac{a'''}{n^3}x^3 + \ldots + \frac{a^{(n)}}{n^n}x^n,$$
$$a + \frac{2a'}{n}x + \frac{2^2a''}{n^2}x^2 + \frac{2^3a'''}{n^3}x^3 + \ldots + \frac{2^na^{(n)}}{n^n}x^n,$$
$$a + \frac{3a'}{n}x + \frac{3^2a''}{n^2}x^2 + \frac{3^3a'''}{n^3}x^3 + \ldots + \frac{3^na^{(n)}}{n^n}x^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a + \frac{na'}{n}x + \frac{n^2a''}{n^2}x^2 + \frac{n^3a'''}{n^3}x^3 + \ldots + \frac{n^na^{(n)}}{n^n}x^n,$$

ed eguagliando tra loro i coefficienti delle simili potenze delle $x$ si ottengono $n+1$ equazioni, che facilmente si riducono alle seguenti

$$(1)\ldots B+A'+A''+A'''+A^{v}+\ldots+A^{(n)}=1,$$

$$(2)\ldots A'+2\,.\,A''+3\,.\,A'''+4\,.\,A^{v}+\ldots+n\,.\,A^{(n)}=\frac{n}{2},$$

$$(3)\ldots A'+2^2\,.\,A''+3^2\,.\,A'''+4^2\,.\,A^{v}+\ldots+n^2\,.\,A^{(n)}=\frac{n^2}{3}$$

$$(4)\ldots A'+2^3\,.\,A''+3^3\,.\,A'''+4^3\,.\,A^{v}+\ldots+n^3\,.\,A^{(n)}=\frac{n^3}{4}$$

$$(5)\ldots A'+2^4\,.\,A''+3^4\,.\,A'''+4^4\,.\,A^{v}+\ldots+n^4\,.\,A^{(n)}=\frac{n^4}{5}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(n)\ldots A'+2^{n-1}A''+3^{n-1}A'''+4^{n-1}A^{v}+\ldots+n^{n-1}A^{(n)}=\frac{n^{n-1}}{n},$$

$$(n+1)\ldots A'+2^{n}A''+3^{n}A'''+4^{n}A^{v}+\ldots+n^{n}A^{(n)}=\frac{n^{n}}{n+1}$$

le quali sciolte rispetto alle B, A', A'', A''', $A^{v}$, . . . . $A^{(n)}$, daranno i valori cercati di queste quantità, cioè quei valori che renderanno l' espressione

$$x\left(Bf(0)+A'f\left(\frac{x}{n}\right)+A''f\left(\frac{2x}{n}\right)+A'''f\left(\frac{3x}{n}\right)+\ldots+A^{(n)}f(x)\right)$$

identica alla

$$ax+\frac{a'}{2}x^2+\frac{a''}{3}x^3+\frac{a'''}{4}x^4+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^{n+1}.$$

5. Prima di intraprendere la soluzione delle $n+1$ equazioni quì sopra esposte, si osservi che in esse non vi sono le $a$, $a'$, $a''$, $a'''$, . . . $a^{(n)}$, ciò che insegna che i valori richiesti delle

$$B,\ A',\ A'',\ A''',\ \ldots\ A^{(n)}$$

debbono essere indipendenti dalle prime, cioè che queste ultime avranno gli stessi valori qualunque siano $a, a', a'', a''', \ldots a^{(n)}$

coefficienti che entrano nella funzione $f(x)$ : proprietà singolare e sommamente utile.

6. Incominciaremo a determinare le $A', A'', A''', \ldots A^{(n)}$ mediante le equazioni (2), (3), (4), . . . $(n+1)$, e poscia troveremo la B ricorrendo alla (1) che è la prima delle esposte.

Sottraendo i membri della equazione (2) dai corrispondenti della (3) si ha una equazione il cui primo membro è

$$1.2A''+2.3.A'''+3.4A^{iv}+\ldots+(n-1)nA^{(n)};$$

così sottraendo i membri delle (3), (4), (5), . . . . $(n)$ ordinatamente dai corrispondenti delle (4), (5), . . . $(n+1)$ si hanno delle equazioni i primi membri delle quali sono

$$1.2^2 . A''+2.3^2 . A'''+3.4^2 . A^{iv}+\ldots+(n-1)n^2 . A^{(n)},$$

$$1.2^3 . A''+2.3^3 . A'''+3.4^3 . A^{iv}+\ldots+(n-1)n^3 . A^{(n)},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$1.2^{n-1}A''+2.3^{n-1}A'''+3.4^{n-1}A^{iv}+\ldots+(n-1)n^{n-1}A^{(n)}.$$

Similmente, moltiplicando la prima di queste equazioni trovate per *due* e sottraendo i membri della risultante dai corrispondenti della seconda di queste medesime equazioni, se ne ottiene una, il cui primo membro consiste nel polinomio

$$1.2.3A'''+2.3.4A^{iv}+\ldots+(n-2)(n-1)nA^{(n)}:$$

così moltiplicando la seconda, terza, quarta . . . . . penultima per *due*, e sottraendo i membri delle risultanti ordinatamente dai corrispondenti della terza, quarta, . . . ultima si ottengono altre $n-3$ equazioni i primi membri delle quali consistono nei polinomj

$$1.2.3^2 . A'''+2.3.4^2 . A^{iv}+\ldots+(n-2)(n-1)n^2 . A^{(n)},$$

$$1.2.3^3 . A'''+2.3.4^3 . A^{iv}+\ldots+(n-2)(n-1)n^3 . A^{(n)},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$1.2.3^{n-2}A'''+2.3.4^{n-2}A^{iv}+\ldots+(n-2)(n-1)n^{n-2}A^{(n)}.$$

In terzo luogo, moltiplicando per *tre* la prima, seconda, terza, . . . penultima di queste ultime equazioni, e sottraendo i membri delle risultanti rispettivamente dai primi delle seconda, terza, quarta, . . . . ultima, si trovano $n-3$ equazioni i primi membri delle quali risultano

$$1.2.3.4\ .\ A^{(\text{iv})}+2.3.4.5\ .\ A^{(\text{v})}+\ldots+(n-3)(n-2)(n-1)n\ .\ A^{(n)},$$
$$1.2.3.4^2\ .\ A^{(\text{iv})}+2.3.4.5^2\ .\ A^{(\text{v})}+\ldots+(n-3)(n-2)(n-1)n^2\ .\ A^{(n)},$$
$$1.2.3.4^3\ .\ A^{(\text{iv})}+2.3.4.5^3\ .\ A^{(\text{v})}+\ldots+(n-3)(n-2)(n-1)n^3\ .\ A^{(n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1.2.3.4^{n-3}\ A^{(\text{iv})}+2.3.4.5^{n-3}\ A^{(\text{v})}+\ldots+(n-3)(n-2)(n-1)n^{n-3}\ A^{(n)}.$$

Così moltiplicando per *quattro* i membri della prima, seconda, terza, . . . penultima di quest' ultimo sistema d'equazioni, e sottraendo i membri delle risultanti dai corrispondenti della seconda, terza, quarta, . . . ultima del medesimo sistema, si hanno $n-4$ equazioni nelle quali non vi sono le $A'$, $A''$, $A'''$, $A^{\text{iv}}$, ed i loro primi membri sono

$$1.2.3.4.5\ A^{(\text{v})}+2.3.4.5.6\ A^{(\text{vi})}+\ldots+(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n\ A^{(n)},$$
$$1.2.3.4.5^2\ A^{(\text{v})}+2.3.4.5.6^2\ A^{(\text{vi})}+\ldots+(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2\ A^{(n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1.2.3.4.5^{n-4}\ A^{(\text{v})}+2.3.4.5.6^{n-4}\ A^{(\text{vi})}+\ldots+(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^{n-4}\ A^{(n)}:$$

e moltiplicando queste, dalla prima sino alla penultima, per *cinque* e sottraendo le risultanti correlativamente dalle seconda, terza, . . . ultima, si ottiene un nuovo sistema di $(n-5)$ equazioni nelle quali mancano le $A'$, $A''$, $A'''$, $A^{\text{iv}}$, $A^{\text{v}}$: e così continuando $(n-1)$ volte, trovasi una equazione nella quale vi è la sola incognita $A^{(n)}$, ed il cui primo membro consiste nel prodotto

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots.\,(n-2)\,(n-1)nA^{(n)}.$$

7. Esaminando come sono formati i primi membri delle prime equazioni costituenti i sistemi che si sono ottenuti elimi-

nando le A'; A', A''; A', A'', A'''; ec. facilmente si comprenderà che, i primi membri delle prime equazioni dei sistemi penultimo, antepenultimo, ec. saranno

$$1.2.3.5..(n-1)A^{(n-1)}+2.3.4.5...nA^{(n)},$$

$$1.2.3.4..(n-2)A^{(n-2)}+2.3.4...(n-1)A^{(n-1)}+3.4.5...nA^{(n)},$$

$$1.2.3..(n-3)A^{(n-3)}+2.3.4..(n-2)A^{(n-2)}+3.4...(n-1)A^{(n-1)}+4.5...nA^{(n)},$$

ec. ec. ec.

in guisa che, denominati P, P', P'', P''', . . . i secondi membri di queste medesime equazioni esse consisteranno nelle seguenti

$$1.2.3.4...nA^{(n)}=P,$$

$$1.2.3.4...(n-1)A^{(n-1)}+2.3.4...nA^{(n)}=P',$$

$$1.2.3.4...(n-2)A^{(n-2)}+2.3.4...(n-1)A^{(n-1)}+3.4...nA^{(n)}=P'',$$

$$1.2.3.4...(n-3)A^{(n-3)}+2.3\ 4..(n-2)A^{(n-2)}+3.4..(n-1)A^{(n-1)}+4.5...nA^{(n)}=P''',$$

ec. ec. ec.

le quali danno le

$$1.2.3.4.\ldots\ldots(n-1)nA^{(n)}=P,$$

$$1.2.3.4.\ldots\ldots(n-1)A^{(n-1)}=P'-P,$$

$$1.2.3.\ldots\ldots(n-2)A^{(n-2)}=P''-P'+\frac{1}{2}P,$$

$$1.2.3.\ldots\ldots(n-3)A^{(n-3)}=P'''-P''+\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2.3}P,$$

$$1.2.\ldots\ldots(n-4)A^{(n-4)}=P^{iv}-P'''+\frac{1}{2}P''-\frac{1}{2.3}P'+\frac{1}{2.3.4}P;$$

e però in generale avrassi

$$1.2.3..(n-m)A^{(n-m)}=P^{(m)}-P^{(m-1)}+\frac{1}{2}P^{(m-2)}-\frac{1}{2.3}P^{(m-3)}+\ldots\pm\frac{P}{2.3\ldots.m},$$

dove per l'ultimo termine vale il segno + nel caso d'$m$ pari e l'altro nel caso di $m$ dispari: ed in fine sarà

$$A' = P^{(n-1)} - P^{(n-2)} + \frac{1}{2} P^{(n-3)} - \frac{1}{2.3} P^{(n-4)} + \ldots \pm \frac{P}{2.3.4 \ldots (n-1)}.$$

Quindi le $A', A'', A''', \ldots A^{(n)}$ saranno conosciute, quando si conosceranno le $P, P', P'', P''', \ldots P^{(n-1)}$: vediamo per tanto come si possono determinare queste ultime quantità, che sono i secondi membri delle prime equazioni costituenti i sistemi sopra considerati.

8. Essendo $\frac{n}{2}, \frac{n^2}{3}, \frac{n^3}{4}, \frac{n^4}{5}, \ldots\ldots\ldots \frac{n^n}{n+1}$

gli effettivi secondi membri delle equazioni del primo di detti sistemi, cioè delle (2), (3), (4), ... $(n+1)$, i secondi membri delle $(n-1)$ equazioni costituenti il secondo sistema saranno

$$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2}, \frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{3}, \frac{n^4}{5} - \frac{n^3}{4}, \ldots\ldots\ldots \frac{n^n}{n+1} - \frac{n^{n-1}}{n};$$

i secondi membri di quelle che costituiscono il terzo degli stessi sistemi

$$\frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{3} - 2\left(\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^3}{4} - 3 \cdot \frac{n^2}{3} + 2 \cdot \frac{n}{2},$$

$$\frac{n^4}{5} - \frac{n^3}{4} - 2\left(\frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{3}\right) = \frac{n^4}{5} - 3 \cdot \frac{n^3}{4} + 2 \cdot \frac{n^2}{3},$$

$$\frac{n^5}{6} - \frac{n^4}{5} - 2\left(\frac{n^4}{5} - \frac{n^3}{4}\right) = \frac{n^5}{6} - 3 \cdot \frac{n^4}{5} + 2 \cdot \frac{n^3}{4},$$

. . . . . .

$$\frac{n^n}{n+1} - \frac{n^{n-1}}{n} - 2\left(\frac{n^{n-1}}{n} - \frac{n^{n-2}}{n-1}\right) = \frac{n^n}{n+1} - 3\frac{n^{n-1}}{n} + 2\frac{n^{n-2}}{n-1}:$$

quelli del quarto

$$\frac{n^4}{5} - 6\frac{n^3}{4} + 11\frac{n^2}{3} - 2.3\frac{n}{2},$$

$$\frac{n^5}{6} - 6\frac{n^4}{5} + 11\frac{n^3}{4} - 2.3\frac{n^2}{3},$$

ec. ec.

In generale dal quì esposto si comprende che rappresentato il secondo membro della prima equazione dell' *x esimo* sistema con

$$(a)\ldots\frac{n^x}{x+1}-E'_x\frac{n^{x-1}}{x}+E''_x\frac{n^{x-2}}{x-1}-E'''_x\frac{n^{x-3}}{x-2}+\ldots\ldots\pm E^{(x-1)}_x\frac{n}{2}.$$

dove le $E'_x$, $E''_x$, $E'''_x$, ec. esprimono quelle funzioni dell' $x$ che sono i coefficienti delle quantità

$$\frac{n^{x-1}}{x},\ \frac{n^{x-2}}{x-1},\ \frac{n^{x-3}}{x-2},\ \text{ec.},$$

il secondo membro della seconda equazione dello stesso $x$ *esimo* sistema d' equazioni sarà

$$(b)\ldots\frac{n^{x+1}}{x+2}-E'_x\frac{n^x}{x+1}+E''_x\frac{n^{x-1}}{x}-E'''_x\frac{n^{x-2}}{x-1}+\ldots\ldots\pm E^{(x-1)}_x\frac{n^2}{3},$$

ed il secondo membro della prima equazione del sistema $(x+1)$ *esimo* cioè del seguente rappresentabile da

$$(c)\ldots\ldots\frac{n^{x+1}}{x+2}-E'_{x+1}\frac{n^x}{x+1}+E''_{x+1}\frac{n^{x-1}}{x}-E'''_{x+1}\frac{n^{x-2}}{x-1}+\ldots\ldots$$

dove i coefficienti $E'_{x+1}$, $E''_{x+1}$, $E'''_{x+1}$, ec. saranno formati coll'$x+1$ come gli $E'_x$, $E''_x$, $E'''_x$, ec. lo sono col semplice $x$.

Ma stante la legge seguita nel formare i primi membri delle equazioni costituenti i successivi sistemi d' equazioni sopra esposti, dev' essere l' espressione $(c)$ eguale alla $(b)$ meno il prodotto della $(a)$ in $x$; adunque dovrà essere

$$\frac{n^{x+1}}{x+2}-E'_{x+1}\frac{n^x}{x+1}+E''_{x+1}\frac{n^{x-1}}{x}-E'''_{x+1}\frac{n^{x-2}}{x-1}+\text{ec.}$$

indipendentemente dalle $\frac{n^{x+1}}{x+2}$, $\frac{n^x}{x+1}$, $\frac{n^{x-1}}{x}$, ec. eguale ad

$$\frac{n^{x+1}}{x+2}-E'_x\frac{n^x}{x+1}+E''_x\frac{n^{x-1}}{x}-E'''_x\frac{n^{x-2}}{x-1}+\text{ec.}$$

$$-x\frac{n^x}{x+1}+xE'_x\frac{n^{x-1}}{x}-xE''_x\frac{n^{x-2}}{x-1}+\text{ec.}$$

e per tanto avranno luogo tra le $E'_x$, $E''_x$, $E'''_x$, ec., $E'_{x+1}$, $E''_{x+1}$, ec. le equazioni seguenti

$$E'_{x+1}=E'_x+x,\ E''_{x+1}=E''_x+xE'_x,\ E'''_{x+1}=E'''_x+xE''_x,\ \text{ec.}$$

le quali somministrano

$$E'_x = \Sigma x,\ E''_x = \Sigma x E'_x,\ E'''_x = \Sigma x E''_x,\ \text{ec.}$$

ovvero $E'_x = \Sigma x,\ E''_x = \Sigma x \Sigma x,\ E'''_x = \Sigma x \Sigma x \Sigma x,$ ec.

cioè quelle funzioni del numero $x$ che sono i valori dei coefficienti. $E'_x$, $E''_x$, $E'''_x$, ec. Quindi il secondo membro della prima equazione dell' *x esimo* sistema sarà

$$\frac{n^x}{x+1} - \frac{n^{x-1}}{x}\Sigma x + \frac{n^{x-2}}{x-1}\Sigma x \Sigma x - \frac{n^{x-3}}{x-1}\Sigma x \Sigma x \Sigma x + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{n}{2}\Sigma x \Sigma x \Sigma x \ldots \Sigma x \Sigma x,$$

dove per formare il coefficiente d' $\frac{n}{2}$ si debbono eseguire $(x-1)$ integrazioni, le quali danno, determinate che siano opportunemente le costanti, per risultamento finale il semplice prodotto

$$1.2.3.4.\ldots(x-2)(x-1).$$

9. Esaminando l' andamento delle operazioni eseguite qui sopra per formare i secondi membri delle equazioni componenti i sistemi loro in considerazione, si comprende facilmente che i coefficienti delle quantità

$$\frac{n^2}{3},\ \frac{n}{2};\ \frac{n^3}{4},\ \frac{n^2}{3},\ \frac{n}{2};\ \frac{n^4}{5},\ \frac{n^3}{4},\ \frac{n^2}{3},\ \frac{n}{2};\ \text{ec.}$$

che entrano a comporre i secondi membri delle prime equazioni dei sistemi medesimi sono eguali ai coefficienti che hanno le

$$a^2,\ a;\ a^3,\ a^2,\ a;\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a;\ \text{ec.}$$

negli sviluppi dei prodotti

$$a(a-1),\ a(a-1)(a-2),\ a(a-1)(a-2)(a-3),\ \text{ec.}$$

e però gli $E'_x$, $E''_x$, $E'''_x$, ec. eguaglieranno i coefficienti che avranno le $a^{x-1}$, $a^{x-2}$, $a^{x-3}$, ec. nello sviluppo del prodotto

$$a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-x+2)(a-x+1);$$

cioè sarà identica l' equazione seguente

$$a(a-1)(a-2)\ldots(a-x+1)=a^{x}-E'_{x}a^{x-1}+E''_{x}a^{x-2}-E'''_{x}a^{x-3}+\text{ec.}$$

da ciò risulta che la $E'_x$ eguaglia la somma dei numeri 1, 2, 3, . . . $(x-1)$; l' $E''_x$ la somma di tutti i prodotti che si possono avere moltiplicando questi medesimi numeri a due a due; l' $E'''_x$ la somma di tutti i prodotti che si hanno moltiplicando gli stessi numeri a tre a tre; ec.; proprietà che somministra un' altra regola facile per costituire gli stessi coefficienti $E'_x$, $E''_x$, $E'''_x$, ec., la quale si poteva desumere dai loro valori trovati altrimenti nel paragrafo precedente.

10. Trovate le funzioni della $x$, che esprimono le somme delle potenze prime, seconde, terze, ec. dei numeri 1, 2, 3, 4, . . . $(x-2)$, $(x-1)$, col soccorso della notissima proposizione di Newton relativa alle somme delle potenze delle radici di una data equazione, si potranno trovare le funzioni della $x$ medesima rappresentanti le $E'_x$, $E''_x$, $E'''_x$, ec. considerando queste quantità come coefficienti della equazione

$$a^{x-1}-E'_{x}a^{x-2}+E''_{x}a^{x-3}-E'''_{x}a^{x-4}+\ldots\pm E^{(x-1)}_{x}=0:$$

non espongo queste ultime funzioni della $x$, perchè riescono alquanto complicate, ed anco perchè coll' altro metodo esposto, la loro determinazione riesce più breve di questa, d' altronde comoda, qualora l' $n$ sia individuato, come accadrà appunto nella pratica.

11. Se nella espressione

$$\frac{n^{x}}{x+1}-E'_{x}\frac{n^{x-1}}{x}+E''_{x}\frac{n^{x-2}}{x-1}-E'''_{x}\frac{n^{x-3}}{x-2}+\ldots\pm E^{(x-1)}_{x}\frac{n}{2}$$

ora interamente conosciuta, si farà $x$ eguale successivamente ad $n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . . . si avranno i valori richiesti delle quantità

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ldots:$$

sono per tanto determinate le $n$ incognite

$$A^{(n)}, A^{(n-1)}, A^{(n-2)}, A^{(n-3)}, \ldots\ldots A'', A';$$

giacchè a ciò non si richiede che le soluzioni delle semplicissime equazioni esposte al fine del paragrafo settimo.

Trovate queste, facilmente colla equazione (1) si potrà avere la B, essendo essa eguale alla unità diminuita della somma delle stesse $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$, ... $A''$, $A'$. Quest' ultima medesima incognita, la B, si può anco determinare indipendentemente dalle altre, col combinare le eqnazioni (1), (2), (3), ... ($n$) in modo di eliminare le $A'$, $A''$, $A'''$, ... $A^{(n)}$, eliminazione che riesce facile stante le medesime cose esposte sopra per la determinazione di queste ultime quantità.

12. Esempio. Sia $f(x)=a+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{v}x^4$, e si avrà $n=4$, $E'_4=1+2+3=6$, $E''_4=2+3+6=11$, $E'''_4=6$, $E'_3=1+2=3$, $E''_3=2$; ed $E'_2=1$; e però

$$P=\frac{4^4}{5}-6\frac{4^3}{4}+11\frac{4^2}{3}-6\frac{4}{2}=\frac{28}{15},\ P'=\frac{4^3}{4}-3\frac{4^2}{3}+2\frac{4}{2}=4,$$

$$P''=\frac{4^2}{3}-\frac{4}{2}=\frac{10}{3},\ P'''=\frac{4}{2}=2.\ \text{Quindi}$$

$$1.\,2.\,3.\,4\,A^{(4)}=\frac{28}{15},\ 1.\,2.\,3\,A^{(3)}=\frac{32}{15},\ 1.\,2\,A^{(2)}=\frac{4}{15},\ A'=\frac{16}{45};$$

e conseguentemente sarà

$$A^{(4)}=\frac{7}{90},\ A^{(3)}=\frac{32}{90},\ A^{(2)}=\frac{12}{90},\ A^{(1)}=\frac{32}{90},\ B=1-\frac{83}{90}=\frac{7}{90}.$$

Quindi il volume della porzione intercetta fra quelle sezioni di questo corpo, che hanno per aree $f(o)$, $f(x)$ ossia $a$, ed $a+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{v}x^4$, risulterà eguale ad

$$\frac{x}{90}\left(7f(0)+32f\left(\frac{x}{4}\right)+12f\left(\frac{2x}{4}\right)+32f\left(\frac{3x}{4}\right)+7f(x)\right).$$

13. Si ponga nella $f(x)$ in luogo della $x$ il binomio $x-y$, e si ritenga nel risultamento la $x$ come costante e la $y$ variabile; e si denomini $\varphi(y)$ la medesima funzione risultante, la quale sviluppata ed ordinata secondo le potenze crescenti della $y$ si ridurrà ad una della forma

$$a_{,}+a'_{,}y+a''_{,}y^2+a'''_{,}y^3+\ldots+a^{(n)}_{,}y^n.$$

Facendo per questa funzione $\varphi(y)$ ciò che si è fatto superiormente per la $f(x)$ si troverebbe che le costanti $B_{,}$, $A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, .. $A_{(n)}$ che hanno la proprietà di rendere il prodotto

$$y\left(B_{,}\varphi(0)+A_{,}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)+A_{,,}\varphi\left(\frac{2y}{n}\right)+\ldots A_{(n)}\varphi(y)\right)$$

eguale ad

$$y\left(a_{,}+\frac{1}{2}a'_{,}y+\frac{1}{3}a''_{,}y^2+\frac{1}{4}a'''_{,}y^3+\ldots+\frac{1}{n}a^{(n)}_{,}y^n\right)$$

indipendentemente dalla $y$ sarebbero ordinatamente le stesse $B$, $A'$, $A''$, $A'''$, ... $A^{(n)}$, siccome è facile a concepirsi per ciò che si è detto al paragrafo quinto; ma d' altronde per essere, nel caso $d'y=x$,

$$\varphi(0)=f(x),\ \varphi\left(\frac{y}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}x\right),\ \varphi\left(\frac{2y}{n}\right)=f\left(\frac{n-2}{2}x\right),\ldots$$

$$\varphi\left(\frac{n-1}{n}y\right)=f\left(\frac{x}{n}\right),\ \varphi(y)=f(0),\ \text{si ha}$$

$$B_{,}=A^{(n)},\ A_{,}=A^{(n-1)},\ A_{,,}=A^{(n-2)},\ldots A_{n-1}=A'',\ A_{n}=A';$$

adunque le incognite $B$, $A'$, $A''$, $A'''$, ... sopra cercate eguaglieranno ordinatamente le altre $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$, $A^{(n-3)}$, ... delle medesime, vale a dire la $B$ eguaglierà la $A^{(n)}$, la $A'$ la $A^{(n-1)}$, la $A''$ la $A^{(n-2)}$, ec., dimodochè pel caso d' $n$ dispari rimarranno tutte le quantità $B$, $A'$, $A''$, $A'''$, ... $A^{(n-2)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ determinate, quando si conosceranno le sole $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$, ... $A^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$; e per quello d' $n$ pari allorchè si conosceranno le $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$, ... $A^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Un esempio di quest' ultimo caso si può vedere al paragrafo penultimo.

14. Nella quistione sopra trattata si sono supposte indi-

viduate le sezioni fatte al corpo ossia quei punti della retta sulla quale si riportano le $x$ ai quali esse corrispondono, ora passiamo a trattarne una analoga nella quale manchi quest' ultima condizione.

I valori della $x$ corrispondenti alle sezioni intermedie alle $f(o)$, $f(x)$ siano indicati con $a_{,}x$, $a_{,,}x$, $a_{,,,}x$, . . . ; e proponiamci di determinare le B, A', A'', A''', . . . $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, . . . che rendono la quantità

$$x\left(a+\frac{a'}{2}x+\frac{a''}{3}x^2+\frac{a'''}{4}x^3+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^n\right)$$

eguale alla

$$x(\mathrm{B}f(\mathrm{o})+\mathrm{A}'f(a_{,}x)+\mathrm{A}''f(a_{,,}x)+\mathrm{A}'''f(a_{,,,}x)+\ldots);$$

ossia la $a+\frac{a'}{2}x+\frac{a''}{3}x^2+\frac{a'''}{4}x^3+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^n$ alla

$$\mathrm{B}f(\mathrm{o})+\mathrm{A}'f(a_{,}x)+\mathrm{A}''f(a_{,,}x)+\ldots\ldots+\mathrm{B}'f(x)$$

indipendentemente dalla $x$.

15. Ponendo in quest' ultima quantità in luogo delle $f(o)$, $fa_{,}(x)$, $f(a_{,,}x)$, $f(a_{,,,}x)$, . . . i loro valori

$$a,\ a+a'a_{,}x+a''a_{,}^2x^2+a'''a_{,}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{,}^nx^n,$$

$$a+a'a_{,,}x+a''a_{,,}^2x^2+a'''a_{,,}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{,,}^nx^n,$$

$$a+a'a_{,,,}x+a''a_{,,,}^2x^2+a'''a_{,,,}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{,,,}^nx^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a+a'a_{r}x+a''a_{r}^2x^2+a'''a_{r}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{r}^nx^n,$$

$$a+a'x\,.\ +a''\,.\ x^2+a'''\,.\ x^3+\ldots+a^{(n)}\,.\ x^n,$$

ed ordinando la risultante secondo le potenze crescenti della $x$ si ha

$$a(\ \mathrm{B}+\mathrm{A}'+\mathrm{A}''+\mathrm{A}'''+\ldots+\ \mathrm{A}^{(r)}+\mathrm{B}')+$$

$$a'(a_{,}\mathrm{A}'+a_{,,}\mathrm{A}''+a_{,,,}\mathrm{A}'''+\ldots+a_{r}\mathrm{A}^{(r)}+\mathrm{B}')x+$$

$$a'' (a_{,}^{2}A_{,}+a_{,,}^{2}A''+a_{,,,}^{2}A'''+\ldots+a_{r}^{2}A^{(r)}+B')x^{2}+$$

$$a''' (a_{,}^{3}A'+a_{,,}^{3}A''+a_{,,,}^{3}A'''+\ldots+a_{r}^{3}A^{(r)}+B')x^{3}+$$

$$a^{iv} (a_{,}^{4}A'+a_{,,}^{4}A''+a_{,,,}^{4}A'''+\ldots+a_{r}^{4}A^{(r)}+B')x^{4}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a^{(n)}(a_{,}^{n}A'+a_{,,}^{n}A''+a_{,,,}^{n}A'''+\ldots+a_{r}^{n}A^{(r)}+B')x^{n};$$

quindi le quantità $B, A', A'', A''', \ldots A^{(r)}, B', a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_{r}$ dovranno soddisfare le equazioni seguenti

$$(1)\ldots\ldots B+A'+A''+A'''+A^{iv}+\ldots+A^{(r)}+B'=1,$$

$$(2)\ldots\ldots a'A'+a_{,,}A''+a_{,,,}A'''+a_{iv}A^{iv}+\ldots+a_{r}A^{(r)}+B'=\frac{1}{2},$$

$$(3)\ldots\ldots a_{,}^{2}A'+a_{,,}^{2}A''+a_{,,,}^{2}A'''+a_{iv}^{2}A^{iv}+\ldots+a_{r}^{2}A^{(r)}+B'=\frac{1}{3},$$

$$(4)\ldots\ldots a_{,}^{3}A'+a_{,,}^{3}A''+a_{,,,}^{3}A'''+a_{iv}^{3}A^{iv}+\ldots+a_{r}^{3}A^{(r)}+B'=\frac{1}{4},$$

$$(5)\ldots\ldots a_{,}^{4}A'+a_{,,}^{4}A''+a_{,,,}^{4}A'''+a_{iv}^{4}A^{iv}+\ldots+a_{r}^{4}A^{(r)}+B'=\frac{1}{5},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n+1)\ldots a_{,}^{n}A'+a_{,,}^{n}A''+a_{,,,}^{n}A'''+a_{iv}^{n}A^{iv}+\ldots+a_{r}^{n}A^{(r)}+B'=\frac{1}{n+1}.$$

Essendo il numero di queste equazioni eguale ad $n+1$, il numero delle quantità $B, A', A'', A''', \ldots A^{(r)}, a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_{r}$, $B'$ dovrà essere in generale anch' esso non minore di $n+1$; e però nel caso d' $n$ eguale ad 1, 3, 5, 7, ec. cioè numero dispari dovrà esser almeno $r=\frac{n-1}{2}$, giacchè il numero delle $A_{,}, a_{,}, A'', a_{,,}, A''', a_{,,,}, \ldots A^{(r)}, a_{r}$ essendo eguale a due volte l' $r$ ossia ad $n-1$, esse insieme alle due $B, B'$ renderanno

il numero delle incognite eguale ad $n+1$, cioè allo stesso delle equazioni; nel caso poi di $n$ pari, si potrà ritenere la $r=\frac{n}{2}$, e risulterà evidentemente il numero totale delle incognite eguale ad $n+2$ cioè maggiore di una unità di quello delle equazioni, di maniera che una di esse si potrà ritenere arbitraria.

Dal quì esposto risulta che per esprimere il volume della porzione del corpo intercetta tra le sezioni aventi le aree $f(o)$, $f(x)$ mediante le aree di queste medesime sezioni e di altre intermedie, di queste ne occorreranno in generale un numero non minore di $\frac{n-1}{2}$ nel caso d' $n$ dispari, e non minore di $\frac{n}{2}$ nel caso d' $n$ pari.

Incominciaremo a parlare della determinazione delle

$$B,\ A',\ a_{,},\ A'',\ a_{,,},\ A''',\ a_{,,,},\ \ldots\ A^{(r)},\ a_{r},\ B'$$

pel caso d' $n$ numero dispari, e poscia parleremo di esse pel caso d' $n$ pari.

16. Dalle equazioni (2), (3), (4), . . . $(n+1)$ esposte nel paragrafo precedente, si elimini la B', e si avranno le $(n-1)$ seguenti

$$a_{,}(1-a_{,})A'+a_{,,}(1-a_{,,})A''+a_{,,,}(1-a_{,,,})A'''+\ldots+a_{r}(1-a_{r})A^{(r)}=\frac{1}{2.3},$$

$$a_{,}^{2}(1-a_{,})A'+a_{,,}^{2}(1-a_{,,})A''+a_{,,,}^{2}(1-a_{,,,})A'''+\ldots+a_{r}^{2}(1-a_{r})A^{(r)}=\frac{1}{3.4},$$

$$a_{,}^{3}(1-a_{,})A'+a_{,,}^{3}(1-a_{,,})A''+a_{,,,}^{3}(1-a_{,,,})A'''+\ldots+a_{r}^{3}(1-a_{r})A^{(r)}=\frac{1}{4.5},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_{,}^{n-1}(1-a_{,})A'+a_{,,}^{n-1}(1-a_{,,})A''+a_{,,,}^{n-1}(1-a_{,,,})A'''+\ldots+a_{r}^{n-1}(1-a_{r})A^{(r)}=\frac{1}{n(n+1)}:$$

si elimini da queste la A', moltiplicando la prima, seconda, terza, . . . penultima per $a_{,}$, e sottraendo dalle risultanti or-

dinatamente la seconda, terza, quarta, . . . ultima, e si avranno le $(n-2)$

$$a_{ii}(a_i-a_{ii})(1-a_{ii})A'' + a_{iii}(a_i-a_{iii})(1-a_{iii})A''' + \ldots$$
$$\ldots + a_r(a_i-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = \frac{a_i}{2.3} - \frac{1}{3.4},$$
$$a_{ii}^2(a_i-a_{ii})(1-a_{ii})A'' + a_{iii}^2(a_i-a_{iii})(1-a_{iii})A''' + \ldots$$
$$\ldots + a_r^2(a_i-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = \frac{a_i}{3.4} - \frac{1}{4.5},$$
$$a_{ii}^3(a_i-a_{ii})(1-a_{ii})A_{ii} + a_{iii}^3(a_i-a_{iii})(1-a_{iii})A''' + \ldots$$
$$\ldots + a_r^3(a_i-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = \frac{a_i}{4.5} - \frac{1}{5.6},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_{ii}^{n-2}(a_i-a_{ii})(1-a_{ii})A'' + a_{iii}^{n-2}(a_i-a_{ii})(1-a_{ii})A'' + \ldots$$
$$\ldots + a_r^{n-2}(a_i-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = \frac{a_i}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)};$$

così eliminando da queste la $A''$, dalle nuove risultanti la $A'''$, la $A^{iv}$, e finalmente la $A^{(r-1)}$ si avranno le $(n-r)$ equazioni seguenti

$$a_r(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots(a_{ii}-a_r)(a-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = D',$$
$$a_r^2(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots(a_{ii}-a_r)(a_i-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = D'',$$
$$a_r^3(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots(a_{ii}-a_r)(a_i-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = D''',$$

. . . . . .

$$a_r^{n-r}(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots(a_{ii}-a_r)(a_i-a_r)(1-a_r)A^{(r)} = D^{(n-r)},$$

dove

$$D' = \frac{P^{(r-1)}}{2.3} - \frac{P^{(r-2)}}{3.4} + \frac{P^{(r-3)}}{4.5} - \ldots \mp \frac{P^{(2)}}{(r-1)r} \pm \frac{P^{(1)}}{r(r+1)} \mp \frac{1}{(r+1)(r+2)},$$
$$D'' = \frac{P^{(r-1)}}{3.4} - \frac{P^{(r-2)}}{4.5} + \frac{P^{(r-3)}}{5.6} - \ldots \mp \frac{P^{(2)}}{r(r+1)} \pm \frac{P^{(1)}}{(r+1)(r+2)} \mp \frac{1}{(r+2)(r+3)},$$

$$D'' = \frac{P^{(r-1)}}{4.5} - \frac{P^{(r-2)}}{5.6} + \frac{P^{(r-3)}}{6.7} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \mp \frac{P^{(2)}}{(r+1)(r+2)} \pm \frac{P^{(1)}}{(r+2)(r+3)} \mp \frac{1}{(r+3)(r+4)},$$

. . . . . .

$$D^{(n-r)} = \frac{P^{(r-1)}}{(r+2)(r+3)} - \frac{P^{(r-2)}}{(r+3)(r+4)} + \frac{P^{(r-3)}}{(r+4)(r+5)} - \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{P^{(2)}}{(n-2)(n-1)} \pm \frac{P^{(1)}}{(n-1)n} \mp \frac{1}{n(n+1)},$$

e le $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, $P^{(r-3)}$, . . . $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ che entrano in queste ultime espressioni significano, $P^{(r-1)}$ il prodotto delle $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, . . . $a_{r-1}$, $P^{(r-2)}$ la somma dei prodotti che si hanno moltiplicando queste stesse quantità ad $r-2$ ad $r-2$; $P^{(r-3)}$ la somma dei prodotti che hansi moltiplicandole ad $r-3$ ad $r-3$; e finalmente la $P^{(2)}$ la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicandole a due a due, e $P^{(1)}$ la loro semplice somma, cioè $a_{,} + a_{,,} + a_{,,,} \ldots + a_{r-1}$.

In fine eliminando la $A^{(r)}$ dalle medesime ultime $n-r$ equazioni trovate risultano le $n-r-1$ ossia $r$ equazioni

$$\frac{S^{(r)}}{2.3} - \frac{S^{(r-1)}}{3.4} + \frac{S^{(r-2)}}{4.5} - \frac{S^{(r-3)}}{5.6} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(2)}}{r(r+1)} \pm \frac{S^{(1)}}{(r+1)(r+2)} \mp \frac{1}{(r+2)(r+3)} = 0,$$

$$\frac{S^{(r)}}{3.4} - \frac{S^{(r-1)}}{4.5} + \frac{S^{(r-2)}}{5.6} - \frac{S^{(r-3)}}{6.7} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(1)}}{(r+1)(r+2)} \pm \frac{S^{(1)}}{(r+2)(r+3)} \mp \frac{1}{(r+3)(r+4)} = 0;$$

$$\frac{S^{(r)}}{4.5} - \frac{S^{(r-1)}}{5.6} + \frac{S^{(r-2)}}{6.7} - \frac{S^{(r-3)}}{7.8} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(2)}}{(r+2)(r+3)} \pm \frac{S^{(1)}}{(r+3)(r+4)} \mp \frac{1}{(r+4)(r+5)} = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{S^{(r)}}{(r+1)(r+2)} - \frac{S^{(r-1)}}{(r+2)(r+3)} + \frac{S^{(r-2)}}{(r+3)(r+4)} - \frac{S^{(r-3)}}{(r+4)(r+5)} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(2)}}{(n-2)(n-1)} \pm \frac{S^{(1)}}{(n-1)n} \mp \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

nelle quali il simbolo $S^{(r)}$ esprime il prodotto delle $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}, \ldots a_{r-1}$, $a_r$; l' $S^{(r-1)}$ la somma dei prodotti che si possono fare moltiplicando le stesse quantità $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}, \ldots a_r$ ad $r-1$ ad $r-1$; l' $S^{(r-2)}$ la somma di quei prodotti che si possono formare moltiplicando le medesime quantità ad $r-2$ ad $r-2$; in fine $S^{(2)}$ la somma dei prodotti che si avrebbero moltiplicandole a due a due, ed $S^{(1)}$ la semplice loro somma cioe $a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\ldots+a_{r-1}+a_r$.

17. Molte sono le regole che si potrebbero usare per determinare le quantità incognite $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}, \ldots a_r$ che entrano in queste ultime $r$ equazioni, noi usaremo la seguente: determineremo primieramente con esse le $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}, \ldots$ $S^{(2)}$, $S^{(1)}$ funzioni simmetriche delle stesse $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_r$. e poscia dai valori di queste funzioni desumeremo quelli delle medesime quantità incognite. Così varii sono i metodi che si potrebbero seguire onde determinare le funzioni $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}, \ldots S^{(2)}$, $S^{(1)}$, noi terremo l' ordinario; vale a dire, elimineremo dalle $r$ equazioni esposte la $S^{(r)}$, dalle $r-1$ risultanti elimineremo la $S^{(r-1)}$, da queste $r-2$ elimineremo la $S^{(r-2)}$, e continueremo sino alla eliminazione delle $S^{(3)}$, $S^{(2)}$, ed avremo una sola equazione nella quale vi sarà la sola funzione $S^{(1)}$.

Onde indicare con facilità le operazioni che faremo per

eseguire le anzidette eliminazioni, denominaremo i primi membri delle medesime $r$ esposte equazioni ordinatamente (1), (2), (3), (4), .... ($r$); i primi membri delle ($r-1$) risultanti dalla eliminazione della $S^{(r)}$ con ordine (1)', (2)', (3)' (4)', ... ($r-1$)'; quelli delle equazioni che otterremo eliminando da queste ultime la $S^{(r-1)}$ ordinatamente (1)'', (2)'', (3)'', ... ($r-2$)''; e così di seguito.

18. Si formino le equazioni

$$4(2)-2(1)=0, 5(3)-3(2)=0, 6(4)-4(3)=0, \ldots (r+2)(r)-r(r-1)=0,$$

si dividano le risultanti per *due*, e si avranno le

$$-\frac{S^{(r-1)}}{3.4.5}+\frac{2S^{(r-2)}}{4.5.6}-\frac{3S^{(r-3)}}{5.6.7}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)}\mp\frac{r}{(r+2)(r+3)(r+4)}=0,$$

$$-\frac{S^{(r-1)}}{4.5.6}+\frac{2S^{(r-2)}}{5.6.7}-\frac{3S^{(r-3)}}{6.7.8}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(r+2)(r+3)(r+4)}\mp\frac{r}{(r+3)(r+4)(r+5)}=0,$$

$$-\frac{S^{(r-1)}}{5.6.7}+\frac{2S^{(r-2)}}{6.7.8}-\frac{3S^{(r-3)}}{7.8.9}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(r+3)(r+4)(r+5)}\mp\frac{r}{(r+4)(r+5)(r+6)}=0,$$

. . . . . .

$$-\frac{S^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)}+\frac{2S^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)(r+4)}-\frac{3S^{(r-3)}}{(r+3)(r+4)(r+5)}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(n-2)(n-1)n}\mp\frac{r}{(n-1)n(n+1)}=0,$$

che sono quelle i cui primi membri si sono denominati ordinatamente (1)', (2)', (3)', .... ($r-1$)': si formino le equazioni $6(2)'-3(1)'=0$, $7(3)'-4(2)'=0$, ... $(r+3)(r-1)'-r(r-2)'=0$, si dividano le risultanti per *tre*, e si avranno le

$$\frac{1.2S^{(r-2)}}{4.5.6.7}-\frac{2.3S^{(r-3)}}{5.6.7.8}+\ldots\pm\frac{(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}\mp\frac{(r-1)r}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}=0,$$

$$\frac{1.2S^{(r-2)}}{5.6.7.8}-\frac{2.3S^{(r-3)}}{6.7.8.9}+\ldots\pm\frac{(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\mp\frac{(r-1)r}{(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)}=0,$$

. . . . . .

$$\frac{1.2S^{(r-2)}}{(r-1)r(r+1)(r+2)}-\frac{2.3S^{(r-3)}}{r(r+1)(r+2)(r+3)}+\ldots\pm\frac{(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(n-3)(n-2)(n-1)n}\mp\frac{(r-1)r}{(n-2)(n-1)n(n+1)}=0,$$

che sono quelle i primi membri delle quali si sono chiamati $(1)''$, $(2)''$, $(3)''$, . . . $(r-2)''$: si formino le equazioni $8(2)''-4(1)''=0$, $9(3)''-5(2)''=0$, . . . . . $(r+4)(r-2)''-r(r-3)''=0$, si dividano le risultanti per *quattro* e si otterranno le $(r-3)$ seguenti

$$-\frac{1.2.3S^{(r-3)}}{5.6.7.8.9}+\ldots\pm\frac{(r-3)(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\mp\frac{(r-2)(r-1)r}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)}=0,$$

$$-\frac{1.2.3S^{(r-3)}}{6.7.8.9.10}+\ldots\pm\frac{(r-3)(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)}\mp\frac{(r-2)(r-1)r}{(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)(r+7)}=0,$$

. . . . . .

$$-\frac{1.2.3.S^{(r-3)}}{(r-2)(r-1)r(r+1)(r+2)}+\ldots\pm\frac{(r-3)(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}\mp\frac{(r-2)(r-1)r}{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}=0:$$

così formando le

$$10(2)'''-5(1)'''=0,\ 11(3)'''-6(2)'''=0,\ \text{ec.}$$

e dividendo le risultanti per *cinque*, si hanno $r-4$ equazioni nelle quali vi sono le sole $S^{(r-4)}$, $S^{(r-5)}$, . . . $S^{(2)}$, $S^{(1)}$: ec. ec.

Ora si osservi come sono formate le quantità $(1)'$, $(1)''$, $(1)'''$, ec. cioè i primi membri delle prime equazioni dei sistemi d' equazioni registrate quì sopra, e si concepirà facilmente che la prima delle tre equazioni risultanti dalla eliminazione delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, . . . . . $S^{(5)}$, $S^{(4)}$ dev' esser la

$$\frac{1.2\ldots(r-3)}{(r-1)r\ldots(n-4)}S^{(3)}-\frac{2.3\ldots(r-2)}{r(r+1)\ldots(n-3)}S^{(2)}+\frac{3.4\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots(n-2)}S^{(1)}$$

$$-\frac{4.5\ldots r}{(r+2)(r+3)\ldots(n-1)}=0:$$

che la prima delle due che si ottengono eliminando anco la $S^{(3)}$ è

$$\frac{1.2\ldots(r-2)}{r(r+1)\ldots(n-2)}\,S^{(2)}-\frac{2.3\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots(n-1)}\,S^{(1)}+\frac{3.4\ldots r}{(r+2)(r+3)\ldots n}=0:$$

ed infine che la risultante della eliminazione della $S^{(2)}$ da queste ultime sarà la seguente

$$\frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots(n-1)n}\,S^{(1)}-\frac{2.3.4\ldots r}{(r+2)(r+3)\ldots n(n+1)}=0.$$

19. Denominisi Q la quantità $\frac{2.3.4\ldots r}{(r+2)(r+3)\ldots n(n+1)}$ e si avrà

$$\frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots(n-1)n}\,S^{(1)}=Q:$$

si elimini dalla penultima equazione esposta nel paragrafo precedente la $S^{(1)}$ mediante quest' ultima, e si avrà

$$\frac{1.2.3\ldots(r-2)}{r(r+1)\ldots(n-2)}\,S^{(2)}=nQ-\frac{n+1}{2}Q=\frac{n-1}{2}Q:$$

si eliminino le $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ dalla antepenultima equazione esposta nel medesimo paragrafo precedente col soccorso delle due quì trovate, e si avrà

$$\frac{1.2.3\ldots(r-3)}{(r-1)r\ldots(n-4)}\,S^{(3)}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}Q-\frac{n(n-1)}{2}Q+\frac{n(n+1)}{2.3}Q\text{, ossia}$$

$$\frac{1.2.3\ldots(r-3)}{(r-1)r\ldots(n-4)}\,S^{(3)}=\frac{(n-2)(n-3)}{2.3}Q.$$

Così eliminando le $S^{(3)}$, $S^{(2)}$, $S^{(1)}$ dalla prima di quelle che si avrebbero mediante la eliminazione delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, .... $S^{(6)}$, $S^{(5)}$ dalle prime del paragrafo antecedente, si trova

$$\frac{1.2.3\ldots(r-4)}{(r-2)(r-1)\ldots(n-6)}\,S^{(4)}=\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4}Q.$$

Vale a dire hanno luogo le equazioni seguenti

$$\frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots n}\,S^{(1)}=Q,$$

$$\frac{1.2.3\ldots(r-2)}{r(r+1)\ldots(n-2)}\,S^{(2)}=\frac{n-1}{2}Q,$$

$$\frac{1.2.3....(r-3)}{(r-1)r....(n-4)}\,S^{(3)}=\frac{(n-2)(n-3)}{2.3}\,Q,$$

$$\frac{1.2.3....(r-4)}{(r-2)(r-1).....(n-6)}\,S^{(4)}=\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4}\,Q,$$

$$\frac{1.2.3....(r-5)}{(r-3)(r-2)....(n-8)}\,S^{(5)}=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4.5}\,Q,$$

ec. ec.

la legge secondo la quale procedono queste equazioni è sì semplice che io credo inutile il dichiararla.

20. Ponendo nelle ultime equazioni quì esposte in luogo della Q il suo valore, e desumendo dalle risultanti i valori delle $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ec. si trova

$$S^{(1)}=\frac{r}{2},\ S^{(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{(r-1)r}{2r+1},\ S^{(3)}=\frac{1}{2}\,\frac{r(r-1)}{2.3}\cdot\frac{(r-2)(r-1)r}{2r(2r+1)},$$

$$S^{(4)}=\frac{1}{2}\,\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3.4}\cdot\frac{(r-3)(r-2)(r-1)r}{(2r-1)2r(2r+1)},$$

$$S^{(5)}=\frac{1}{2}\,\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4.5}\cdot\frac{(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r}{(2r-2)(2r-1)2r(2r+1)},$$

$$S^{(6)}=\frac{1}{2}\,\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{(r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r}{(2r-3)(2r-2)(2r-1)2r(2r+1)},$$

. . . . . .

$$S^{(r-2)}=\frac{1}{2}\,\frac{r(r-1)(r-2)...5.4}{2.3...(r-2)}\cdot\frac{3.4.5....(r-1)r}{(r+5)...2r(2r+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r(r-1)}{2.3}\cdot\frac{3.4.5...(r-1)r}{(r+5)...2r(2r+1)},$$

$$S^{(r-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{2.3.4...(r-1)r}{(r+4)....2r(2r+1)},$$

$$S^{(r)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1.2.3.4....(r-1)r}{(r+3).....2r(2r+1)}.$$

21. Essendo $S^{(1)}$ la somma delle quantità $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... $a_{r}$; $S^{(2)}$ la somma di tutti i prodotti che si possono fare moltiplicando queste medesime quantità a due a due; $S^{(3)}$ la somma dei loro prodotti che si hanno moltiplicandole a tre a tre;

e finalmente $S^{(r)}$ il loro prodotto $a_{i}\, a_{ii}\, a_{iii} \ldots a_{r}$; i valori di queste medesime quantità, la ricerca dei quali forma lo scopo attuale, saranno gli $r$ valori della $a$ dati dalla equazione seguente

$$a^{r} - S^{(1)} a^{r-1} + S^{(2)} a^{r-2} - S^{(3)} a^{r-3} + \ldots\ldots \mp S^{(r-1)} a \pm S^{(r)} = 0.$$

Si chiamino $a_{i}$, $a_{ii}$, $a_{iii}$, ... $a_{r}$ le radici di questa equazione, e suppongansi ordinate secondo le rispettive grandezze cioè

$$a_{i} < a_{ii} < a_{iii} < \ldots < a_{r-1} < a_{r}:$$

occorrendo terremo le $a_{i}$, $a_{ii}$, $a_{iii}$, ... $a_{r}$ ordinatamente eguali alle $a_{i}$, $a_{ii}$, $a_{iii}$, ... $a_{r}$.

22. Ora che conosciamo i valori delle $r$ incognite $a_{i}$, $a_{ii}$, $a_{iii}$, ... $a_{r}$ passiamo a determinare le altre $r$; $A'$, $A''$, $A'''$, ... $A^{(r)}$, non che le due $B$, $B'$. Abbiamo veduto sopra che eliminando dalle equazioni (2), (3), (4), ... $(r+1)$ le $A'$, $A''$, $A'''$, ... $A^{(r-1)}$ si ottiene la

$$a_{r}(a_{r-1} - a_{r})(a_{r-2} - a_{r}) \ldots (a_{ii} - a_{r})(a_{i} - a_{r})(1 - a_{r}) A^{(r)} = D';$$

Così eliminando dalle stesse equazioni le quantità

$$A', A'', A''', \ldots\ldots, A^{(r-3)}, A^{(r-2)}, A^{(r)};$$

$$A', A'', A''', \ldots\ldots, A^{(r-3)}, A^{(r-1)}, A^{(r)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A', A'', A^{iv}, \ldots\ldots, A^{(r-3)}, A^{(r-1)}, A^{(r)};$$

$$A', A''', A^{iv}, \ldots\ldots, A^{(r-3)}, A^{(r-1)}, A^{(r)};$$

$$A'', A''', A^{iv}, \ldots\ldots, A^{(r-3)}, A^{(r-1)}, A^{(r)};$$

si otterrebbero ordinatamente le seguenti

$$a_{r-1}(a_r - a_{r-1})(a_{r-2} - a_{r-1}) \ldots$$

$$\ldots (a_{ii} - a_{r-1})(a_i - a_{r-1})(1 - a_{r-1}) A^{(r-1)} = D_i'',$$

$$a_{r-2}(a_r - a_{r-2})(a_{r-1} - a_{r-2}) \ldots$$

$$\ldots (a_{ii} - a_{r-2})(a_i - a_{r-2})(1 - a_{r-2}) A^{(r-1)} = D_i''',$$

. . . . . .

$$a_{iii}(a_r - a_{iii})(a_{r-1} - a_{iii}) \ldots$$

$$\ldots (a_{ii} - a_{iii})(a - a_{iii})(1 - a_{iii}) A''' = D_i^{(r-2)},$$

$$a_i(a_r - a_{ii})(a_{r-1} - a_{ii}) \ldots$$

$$\ldots (a_{iii} - a_{ii})(a_i - a_{ii})(1 - a_{ii}) A'' = D_i^{(r-1)},$$

$$a_i(a_r - a_i)(a_{r-1} - a_i) \ldots (a_{iii} - a_i)(a_{ii} - a_i)(1 - a_i) A' = D_i^{(r)},$$

dove le $D_i''$, $D_i'''$, ... $D_i^{(r)}$ esprimono le quantità che si hanno cambiando in D' la $a_r$ ordinatamente nelle $a_{r-1}$, $a_{r-2}$, ... $a_i$ e reciprocamente queste in $a_r$.

Ponendo nelle $r$ equazioni quì esposte in luogo delle $a_i$, $a_{ii}$, $a_{iii}$, ... $a_r$ i loro valori $\alpha_i$, $\alpha_{ii}$, $\alpha_{iii}$, ... $\alpha_r$, si avranno $r$ altre equazioni di primo grado colle quali facilmente si potranno determinare le A', A'', A''', ... $A^{(r)}$.

23. Per trovare la B si osservi che eliminando le A', A'', A''', ... $A^{(r)}$, B' dalle equazioni (1), (2), (3), ... $(r+2)$ esposte al paragrafo quindicesimo si ottiene la

$$S^{(r)} B = \frac{1}{2} S^{(r)} - \frac{S^{(r-1)}}{2.3} + \frac{S^{(r-2)}}{3.4} - \frac{S^{(r-3)}}{4.5} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(1)}}{r(r+1)} \pm \frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

eliminando poi le A', A'', A''', ... $A^{(r)}$ dalle medesime anzicitate equazioni eccettuata la prima risulta evidentemente

$(a_r - 1)(a_{r-1} - 1)(a_{r-2} - 1) \ldots\ldots (a_{ii} - 1)(a_i - 1)B'$ eguale ad

$$\frac{1}{2} S^{(r)} - \frac{1}{3} S^{(r-1)} + \frac{1}{4} S^{(r-2)} - \frac{1}{5} S^{(r-3)} + \ldots \mp \frac{S^{(1)}}{r+1} \pm \frac{1}{r+2},$$

ossia l'equazione

$$\left( S^{(r)} - S^{(r-1)} + S^{(r-2)} - \ldots\ldots \mp S^{(1)} \pm 1 \right) B' =$$

$$\frac{S^{(r)}}{2} - \frac{S^{(r-1)}}{3} + \frac{S^{(r-2)}}{4} - \frac{S^{(r-3)}}{5} + \ldots \mp \frac{S^{(1)}}{r+1} \pm \frac{1}{r+2}.$$

Con queste due ultime equazioni trovate si vede come in un tratto si possono avere i valori richiesti delle B, B'; anzi esse insegnano anco che i valori di queste due quantità dipendono dalle sole funzioni invariabili $S^{(r)}, S^{(r-1)}, S^{(r-2)}, \ldots S^{(2)}, S^{(1)}$ delle $a_i, a_{ii}, a_{iii}, \ldots a_r$, e non da queste medesime ultime quantità individualmente; dimodochè trovati i valori di queste funzioni invariabili, agevolmente si avranno quelli delle B, B' senza bisogno di conoscere le altre separatamente.

24. Si ponga $a^r - S^{(1)} a^{r-1} + S^{(2)} a^{r-2} - \ldots \mp S^{(r-1)} a \pm S^{(r)} = \Delta(a)$, e si avrà

$$r a^{r-1} - (r-1) S^{(1)} a^{r-2} + (r-2) S^{(2)} a^{r-3} - \ldots\ldots \mp S^{(r-1)} = \left( \frac{d\Delta}{da} \right);$$

e per tanto le espressioni

$$r a_r^{r-1} - (r-1) S^{(1)} a_r^{r-2} + (r-2) S^{(2)} a_r^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

$$r a_{r-1}^{r-1} - (r-1) S^{(1)} a_{r-1}^{r-2} + (r-2) S^{(2)} a_{r-1}^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

. . . . . .

$$r a_{ii}^{r-1} - (r-1) S^{(1)} a_{ii}^{r-2} + (r-2) S^{(2)} a_{ii}^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

$$r a_i^{r-1} - (r-1) S^{(1)} a_i^{r-2} + (r-2) S^{(2)} a_i^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

saranno i valori della $\left( \frac{d\Delta}{da} \right)$ corrispondenti all' $a$ eguale ordinatamente alle

$$a_r, a_{r-1}, \ldots a_{ii}, a_i.$$

Ma per essere

$$\Delta(a)=(a-a_{,})(a-a_{,,})(a-a_{,,,})\ldots(a-a_{r-1})(a-a_{r}),$$

i valori della $\left(\frac{d\Delta}{da}\right)$ corrispondenti agli anzidetti della $a$ sono anco le

$$(a_{r}-a_{,})(a_{r}-a_{,,})(a_{r}-a_{,,,})\ldots\ldots(a_{r}-a_{r-1}),$$
$$(a_{r-1}-a_{,})(a_{r-1}-a_{,})(a_{r-1}-a_{,,,})\ldots\ldots(a_{r-1}-a_{r}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_{,,}-a_{,})(a_{,,}-a_{,,,})\ldots\ldots\ldots\ldots(a_{,,}-a_{r}),$$
$$(a_{,}-a_{,,})(a_{,}-a_{,,,})\ldots\ldots\ldots\ldots(a_{,}-a_{r}),$$

adunque i coefficienti che hanno le $A^{(r)}$, $A^{(r-1)}$, .... $A''$, $A'$ nelle equazioni esposte al paragrafo ventunesimo equivarranno alle quantità

$$(1-a_{r})\left(ra_{r}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{r}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{r}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{r}\right),$$
$$(1-a_{r-1})\left(ra_{r-1}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{r-1}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{r-2}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{r-1}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1-a_{,,})\left(ra_{,,}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{,,}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{,,}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{,,}\right),$$
$$(1-a_{,})\left(ra_{,}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{,}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{,}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{,}\right),$$

nella prima delle quali vi è la sola $a_{r}$, nella seconda la $a_{r-1}$, nella terza $a_{r-2}$, nell' ultima $a_{,}$, oltre le funzioni $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... $S^{(r-1)}$ che vi sono indistintamente in tutte.

Essendo evidentemente

$$S^{(r)}=a_{r}P^{(r-1)},\ S^{(r-1)}=a_{r}P^{(r-2)}+P^{(r-1)},\ S^{(r-2)}=a_{r}P^{(r-3)}+P^{(r-2)},\ldots$$
$$S^{(3)}=a_{r}P^{(2)}+P^{(3)},\ S^{(2)}=a_{r}P^{(1)}+P^{(2)},\ S^{(1)}=a_{r}+P^{(1)},$$

si ha

$$P^{(r-1)} = \frac{1}{a_r} S^{(r)},$$

$$P^{(r-2)} = \frac{1}{a_r} S^{(r-1)} - \frac{1}{a^2_r} S^{(r)},$$

$$P^{(r-3)} = \frac{1}{a_r} S^{(r-2)} - \frac{1}{a^2_r} S^{(r-1)} + \frac{1}{a^3_r} S^{(r)},$$

$$P^{(r-4)} = \frac{1}{a_r} S^{(r-3)} - \frac{1}{a^2_r} S^{(r-2)} + \frac{1}{a^3_r} S^{(r-1)} - \frac{1}{a^4_r} S^{(r)},$$

. . . . . .

$$P^{(1)} = \frac{S^{(2)}}{a_r} - \frac{S^{(3)}}{a^2_r} + \frac{S^{(4)}}{a^3_r} - \frac{S^{(5)}}{a^4_r} + \ldots\ldots\ldots\ldots \pm \frac{S^{(r)}}{a^r_r};$$

e però ponendo nella quantità

$$\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{P^{(1)}}{r(r+1)} + \frac{P^{(2)}}{(r-1)r} - \frac{P^{(3)}}{(r-2)(r-1)} + \ldots \mp \frac{P^{(r-2)}}{3.4} \pm \frac{P^{(r-1)}}{2.3},$$

che costituisce il secondo membro della prima delle equazioni pocanzi citate, si otterrà la

$$\frac{1}{(r+1)(r-2)} - \frac{S^{(2)}}{r(r+1)} a_r^{-1} + \left( \frac{a_r^{-2}}{r(r+1)} + \frac{a_r^{-1}}{(r-1)r} \right) S^{(3)}$$

$$- \left( \frac{a_r^{-3}}{r(r+1)} + \frac{a_r^{-2}}{(r-1)r} + \frac{a_r^{-1}}{(r-2)(r-1)} \right) S^{(4)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \left( \frac{a_r^{-r}}{r(r+1)} + \frac{a_r^{-r+1}}{(r-1)r} + \ldots\ldots + \frac{a_r^{-1}}{2.3} \right) S^{(r)},$$

la quale è formata colle sole funzioni $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ... $S^{(r)}$ e colla quantità suddetta.

Se in quest' ultima espressione si cambiasse quella sola $a_r$ che vi è esplicita successivamente nelle $a_{r-1}$, $a_{r-2}$, .... $a_{11}$, $a_1$ si avrebbero le quantità costituenti i secondi membri delle equazioni, seconda, terza, quarta, ec. delle medesime esposte al paragrafo quì sopra citato.

25. Dallo esposto nei due paragrafi precedenti risulta che per conoscere le B, B' basta conoscere le funzioni invariabili $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ... $S^{(r)}$, e che per conoscere le $A^{(r)}$, $A^{(r-1)}$, ...

A'', A' si debbono in oltre conoscere ordinatamente le $a_r$, $a^{r-1}$, ... $a_{ii}$, $a_i$, cioè la $a_r$ per la $A^{(r)}$, la $a_{r-1}$ per la $A^{(r-1)}$, in fine la $a_i$ per conoscere la A': proprietà singolari ed utili.

25. Passiamo a contemplare la quistione nel caso di $n$ numero pari: in esso terremo $r=\frac{n}{2}$, per cui il numero delle incognite

$$B,\ A',\ A'',\ A''',\ldots A^{(r)},\ B'$$
$$a_i,\ a_{ii},\ a_{iii},\ldots a_r$$

supererà di una unità quello delle equazioni alle quali esse debbono soddisfare; quindi sarà sciolta la quistione, quando sapremo esprimere $n+1$ di queste incognite colle altre: noi cercheremo i valori di tutte le B, A', $a_i$, A'', $a_{ii}$, A''', $a_{iii}$, ... $A^{(r)}$, $a_r$, B' espressi colla $a_i$.

27. Ritenute le stesse denominazioni usate pel caso d'$n$ dispari, mediante le stesse operazioni eseguite per quest'ultimo caso si trovano le due equazioni

$$S^{(r)}.B=\frac{S^{(r)}}{2}-\frac{S^{(r-1)}}{2.3}+\frac{S^{(r-2)}}{3.4}-\frac{S^{(r-3)}}{4.5}+\ldots\pm\frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

$$\left(S^{(r)}-S^{(r-1)}+S^{(r-2)}-\ldots\ldots\mp S^{(1)}\pm 1\right)B'$$
$$=\frac{1}{2}S^{(r)}-\frac{2}{3}S^{(r-1)}+\frac{1}{4}S^{(r-2}-\ldots\pm\frac{1}{r+2}:$$

se ne trovano $r$ analoghe affatto a quelle esposte al paragrafo ventiduesimo; ed anco altre $r$ simili a quelle registrate al paragrafo sedicesimo i cui secondi membri si sono denominati D', D'', ec.

Eliminando la $A^{(r)}$ da queste ultime $r$ trovansi le

$$\frac{S^{(r)}}{2.3}-\frac{S^{(r-1)}}{3.4}+\frac{S^{(r-2)}}{4.5}-\ldots\ldots\ldots\pm\frac{1}{(r+2)(r+3)}=0,$$
$$\frac{S^{(r)}}{3.4}-\frac{S^{(r-1)}}{4.5}+\frac{S^{(r-2)}}{5.6}-\ldots\ldots\ldots\pm\frac{1}{(r+3)(r+4)}=0,$$
. . . . . .

$$\frac{S^{(r)}}{r(r+1)} - \frac{S^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)} + \frac{S^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

il numero delle quali non è $r$, ma bensì $r-1$, per cui non si possono con esse determinare tutte le $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$, come si è fatto pel caso di $n$ dispari.

28. Pongasi nelle ultime equazioni trovate nel paragrafo precedente in luogo delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$ i rispettivi loro valori

$$a_r P^{(r-1)},\ a_r P^{(r-2)} + P^{(r-1)},\ \ldots\ a_r P^{(1)} + P^{(2)},\ a_r + P^{(1)},$$

e si avranno le seguenti

$$a_r\left(\frac{p^{(r-1)}}{2.3} - \frac{p^{(r-2)}}{3.4} + \frac{p^{(r-3)}}{4.5} - \ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{p^{(r-1)}}{3.4} - \frac{p^{(r-2)}}{4.5} + \frac{p^{(r-3)}}{5.6} - \ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$
$$a_r\left(\frac{p^{(r-1)}}{3.4} - \frac{p^{(r-2)}}{4.5} + \frac{p^{(r-3)}}{5.6} - \ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{p^{(r-1)}}{4.5} - \frac{p^{(r-2)}}{5.6} + \frac{p^{(r-3)}}{6.7} - \ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_r\left(\frac{p^{(r-1)}}{r(r+1)} - \frac{p^{(r-2)}}{(r+1)(r+2)} + \frac{p^{(r-3)}}{(r+2)(r+3)} - \ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{p^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)} - \frac{p^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)} + \frac{p^{(r-3)}}{(r+3)(r+4)} - \ldots\ldots\right) = 0$$

colle quali si potranno determinare le $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, $P^{(r-3)}$ ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ che vi sono in esse

Il metodo più semplice che si presenta immediatamente onde determinare i valori di queste $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, è il seguente: si ponga

$$\frac{p^{(r-1)}}{2.3} - \frac{p^{(r-2)}}{3.4} + \frac{p^{(r-3)}}{4.5} - \ldots \mp \frac{p^{(1)}}{r(r+1)} \pm \frac{1}{(r+1)(r+2)} = \beta,$$

e le $r-1$ equazioni anzi trovate si ridurranno alle

$$\frac{p^{(r-1)}}{3.4}-\frac{p^{(r-2)}}{4.5}+\frac{p^{(r-3)}}{5.6}-\ldots\mp\frac{p^{(1)}}{(r+1)(r+2)}\pm\frac{1}{(r+2)(r+3)}=\beta a_r,$$

$$\frac{p^{(r-1)}}{4.5}-\frac{p^{(r-2)}}{5.6}+\frac{p^{(r-3)}}{6.7}-\ldots\mp\frac{p^{(1)}}{(r+2)(r+3)}\pm\frac{1}{(r+3)(r+4)}=\beta a_r^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{p^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)}-\frac{p^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)}+\frac{p^{(r-3)}}{(r+3)(r+4)}-\ldots\mp\frac{p^{(1)}}{(2r-1)2r}\pm\frac{1}{2r(2r+1)}=\beta a_r^{r-1};$$

Ora, si combini l' equazione quì sopra stabilita colle prime $r-2$ di queste ultime, e da esse insieme si desumano i valori delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, $P^{(r-3)}$, ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, ciò che si può conseguire seguendo un metodo analogo a quelli usati sopra per isciogliere equazioni simili a queste; indi si pongano i valori delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ così determinati, i quali saranno tutti della forma $M\beta+N$, nell' ultima quì esposta e si otterrà una equazione in $\beta$ di primo grado; e si determini con essa il valore di $\beta$ medesima atto a soddisfarla: poscia si sostituisca questo valor della $\beta$ nei valori anzi trovati delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, e rimarranno queste affatto determinate in $n$ ed $a_r$.

Finalmente si costituisca l' equazione

$$\beta^{r-1}-P^{(1)}\beta^{r-2}+P^{(2)}\beta^{r-3}-P^{(3)}\beta^{r-4}+\ldots\mp P^{(r-2)}\beta\pm P^{(r-1)}=0,$$

si trovino le sue radici, che saranno i valori richiesti delle $r-1$ quantità $a_i$, $a_{ii}$, $a_{iii}$, ... $a_{r-1}$: fatto ciò si pongano i valori delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ insieme a quello dato ad arbitrio alla $a_r$, nelle espressioni

$$a_r P^{(r-1)},\ a_r P^{(r-2)}+P^{(r-1)},\ a_r P^{(r-3)}+P^{(r-2)},\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots a_r P^{(1)}+P^{(2)},\ a_r+P^{(1)};$$

e così si avranno quelli delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$;

quindi anco quelli di tutte le altre quantità richieste: ciò basti pel caso d' $n$ dispari.

29. Riunendo le cose esposte si conclude che la difficoltà principale di sciogliere la quistione che abbiamo avuto di mira dal paragrafo sedicesimo a quest' ultimo, è ridotta alla soluzione di una equazione numerica del grado $\frac{n-1}{2}$ nel caso di $n$ numero dispari, e del grado $\frac{n}{2} - 1$ pel caso d' $n$ pari. Or ora faremo vedere come si possa in certa guisa dimezzare tanto questa difficoltà, quanto tutte le altre inerenti alla lunghezza dei calcoli; e per non allongarci di troppo limiteremo queste nuove riflessioni al primo dei casi sopra contemplati, cioè al caso d' $n$ numero dispari.

30. Facendo per la presente quistione considerazioni analoghe a quelle fatte nei paragrafi quinto e dodicesimo per la prima trattata, facilmente si comprende che le quantità $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_{r-2}, a_{r-1}, a_{r}$ hanno le proprietà seguenti

$$a_{,} + a_{r} = 1, \; a_{,,} + a_{r-1} = 1, \; a_{,,,} + a_{r-2} = 1, \text{ ec.}$$

cioè che la somma di due qualunque delle radici della equazione costituita nel paragrafo ventisettesimo ed equidistanti dalle estreme, non che le estreme medesime è costantemente eguale alla unità; ed anco che nel caso d' $r$ numero dispari la media di esse radici cioè l' $a_{\left(\frac{r+1}{2}\right)}$ eguaglia una *metà*: come, che le

$$B, B'; A', A^{(r)}; A'', A^{(r-1)}; A''', A^{(r-2)}; \text{ ec.}$$

sono tra loro eguali.

Stante la proprietà delle $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_{r-2}, a_{r-1}, a_{r}$ quì sopra dichiarata si può ridurre la ricerca di esse alla soluzione di una equazione del grado $\frac{r}{2}$ nel caso d' $r$ pari, e del grado $\frac{r}{2} - 1$ nel caso di $r$ medesimo dispari.

Si ponga nella equazione

$$a^r - S^{(1)} a^{r-1} + S^{(2)} a^{r-2} - S^{(3)} a^{r-3} + \ldots \pm S^{(r)} = 0$$

in luogo della $a$ il binomio $y + \frac{1}{2}$, ove l'$y$ esprime una nuova incognita, e si avrà una equazione in $y$ della forma

$$y^r - N' y^{r-2} + N'' y^{r-4} - N''' y^{r-6} + \text{ec.} = 0.$$

dove

$$N' = \frac{r(r-1)}{2^3(2r-1)}, N'' = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2^7(2r+1)(2r-1)}, N''' = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{3.2^{10}(2r-3)(2r-1)(2r+1)}, \text{ec.}$$

la quale manca di quei termini ove la $y$ avrebbe per esponenti $r-1$, $r-3$, $r-5$, ec.

Questa equazione, in virtù di questa sua proprietà, nel caso d' $r$ pari avrà tutte le radici a due a due eguali ma di segni differenti: nel caso poi d' $r$ dispari mancherà del termine senza la $y$, per cui avrà per radice lo zero, e divisa per $y$ darà una equazione della forma

$$y^{r-1} - N' y^{r-3} + N'' y^{r-5} - N''' y^{r-7} + \text{ec.} = 0$$

le cui radici saranno anch' esse eguali a due a due e di segni differenti: quindi nel primo caso l' equazione in $y$ sarà derivativa del grado $\frac{r}{2} = \frac{n-1}{4}$, e nel caso secondo cioè d' $r$ dispari sarà essa derivativa del grado $\frac{r-1}{2} = \frac{n-3}{4}$; dimodochè la ricerca delle $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ dipenderà in sostanza dalla soluzione di una equazione del grado $\frac{n-1}{4}$, ovvero da una del grado $\frac{n-3}{4}$.

Se si introducessero le condizioni

$B = B'$, $A' = A^{(r)}$, $A'' = A^{(r-1)}$, $A''' = A^{(r-2)}$, ec. insieme a quella di $A^{\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{1}{2}$ pel caso d' $r$ pari, e si cambiassero le incognite $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{r-2}, a_{r-1}, a_r$ nelle

$$\frac{1}{2}-y',\ \frac{1}{2}-y'',\ \frac{1}{2}-y''',\ \ldots\ldots\frac{1}{2}+y'',\ \frac{1}{2}+y'',\ \frac{1}{2}+y'$$

e pel caso d' $r$ pari la $a_{\left(\frac{r}{2}\right)}$ in $\frac{1}{2}$, e ciò si facesse immediatamente nelle $(n+1)$ equazioni (1), (2), (3), (4), . . . $(n)$, $(n+1)$ esposte al paragrafo quindicesimo, si avrebbero tante equazioni quante sono le incognite B, A', A'', . . . $y'$, $y''$, $y'''$, . . dalle quali si potrebbe desumere direttamente la equazione avente per radici le nuove incognite $y'$, $y''$, $y'''$, ec. cioè l' equazione in $y$ trovata sopra, e ciò si avrebbe senza bisogno di quella in $a$ sopra esposta e dalla quale si è desunta effettivamente: io non mi trattengo ad esporre nè le dette equazioni, nè quest' ultima, perchè il detto sin quì basta per l' attuale quistione: anzi altrettanto farò in altri due casi consimili che si incontrano nei paragrafi seguenti.

31. Prima di lasciare quest' ultima proposizione facciamo di essa l'esempio di $n=3$. Essendo l' $n$ dispari, sarà $r=\frac{n-1}{2}=1$. In questo esempio occorreranno le equazioni seguenti

$$S^{(1)}.B=\frac{1}{2}S^{(1)}-\frac{1}{2.3},\ a-S^{(1)}=0,\ S^{(1)}=\frac{r}{2},\ a_{,}(1-a_{,})A'=\frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

le quali danno $S^{(1)}=\frac{1}{2}$, $a_{,}=\frac{1}{2}$, $B=B'=\frac{1}{6}$, $A'=\frac{2}{3}$,

Quindi il volume della porzione del corpo una cui sezione qualunqne ha l' area espressa da $a+a'x+a''x^2+a'''x^3$, intercetta fra le sezioni aventi per aree $f(0)$, $f(x)$, sarà espresso da

$$x\left(\frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{6}f(x)\right)$$

e però anco dalla formula

$$\frac{x}{3}\left[\frac{f(0)+f(x)}{2}+2f\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

la quale esprime il teorema che costituisce ciò che di più generale era noto rispetto alla presente materia, e che si è citato al principio di questa medesima memoria.

32. Se si volesse che le quantità B, A', A'', A''', . . . $A^{(r)}$

fossero tutte fra loro eguali e che la $B' = 0$, le equazioni a soddisfarsi dalle rimanenti incognite, ed esposte al paragrafo quindicesimo, si ridurrebbero alle seguenti

$$nB=1, A'\left(a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\ldots+a_{r-1}+a_{r}\right)=\frac{1}{2},$$

$$A'\left(a_{,}^{2}+a_{,,}^{2}+a_{,,,}^{2}+\ldots+a^{2}_{r-1}+a^{2}_{r}\right)=\frac{1}{3},$$

$$A'\left(a_{,}^{3}+a_{,,}^{3}+a_{,,,}^{3}+\ldots+a^{3}_{r-1}+a^{3}_{r}\right)=\frac{1}{4},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$A'\left(a_{,}^{n}+a_{,,}^{n}+a_{,,,}^{n}+\ldots+a^{n}_{r-1}+a^{n}_{r}\right)=\frac{1}{n+1};$$

e però affine di poterle soddisfare generalmente dovrà essere l'$r=n$. La prima delle equazioni qui esposte dà B, e però $A'$, $A''$, $A'''$, ... $A^{(n)}$ eguali ad $\frac{1}{n}$, e riduce le altre alle

$$a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n}=\frac{n}{2},$$

$$a_{,}^{2}+a_{,,}^{2}+a_{,,,}^{2}+\ldots+a^{2}_{n-2}+a^{2}_{n-1}+a^{2}_{n}=\frac{n}{3},$$

. . . . . .

$$a_{,}^{n}+a_{,,}^{n}+a_{,,,}^{n}+\ldots+a^{n}_{n-2}+a^{n}_{n-1}+a^{n}_{n}=\frac{n}{n+1},$$

dimodochè la difficoltà consiste nella determinazione delle $n$ quantità $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n}$ che soddisfanno quest' ultime $n$ equazioni.

33. Si rappresentino i primi membri delle ultime equazioni esposte nel paragrafo precedente coi simboli $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ $P^{(3)}$, ... $P^{(n)}$ ordinatamente, e si ritengano li $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ... $^{n-1)}$, $S^{(n)}$ per indicare la somma $a_{,}+a_{,,}+\ldots\ldots+a_{n}$, la somma dei prodotti che si possono fare moltiplicando queste medesime quantità a due a due, a tre a tre, insieme ad $n$ ad $n$ cioè $a_{,}\, a_{,,}\, a_{,,,} \ldots a_{n}$.

Essendo per le equazioni anzi citate

$$P^{(1)}=\frac{n}{2},\ P^{(2)}=\frac{n}{3},\ P^{(3)}=\frac{n}{4},\ldots\ldots P^{(n-1)}=1,\ P^{(n)}=\frac{n}{n+1},$$

mediante le note relazioni tra le $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}$, ec. e le $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ec. espresse dalle equazioni seguenti

$$P^{(1)}=S^{(1)},$$
$$P^{(2)}=S^{(1)}P^{(1)}-2S^{(2)},$$
$$P^{(3)}=S^{(1)}P^{(2)}-S^{(2)}P^{(1)}+3S^{(3)},$$
$$P^{(4)}=S^{(1)}P^{(3)}-S^{(2)}P^{(2)}+S^{(3)}P^{(1)}-4S^{(4)}$$
ec. ec.

si potranno facilmente determinare le prime cioè $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}$, ec.: trovati i valori di queste ultime quantità, si formi l'equazione

$$\mu^{n}-S^{(1)}\mu^{n-1}+S^{(2)}\mu^{n-2}-S^{(3)}\mu^{n-3}+\ldots\pm S^{(n)}=0,$$

che le sue radici, cioè gli $n$ valori della $\mu$ che la soddisfanno, saranno appunto i richiesti valori delle $n$ incognite

$$a_{i},\ a_{ii},\ a_{iii},\ldots a_{n}.$$

34. Siccome le quantità $a_{i}, a_{ii}, a_{iii},\ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n}$ hanno fra loro delle proprietà analoghe a quelle delle $a_{i}, a_{ii}, a_{iii},\ldots a_{r-2}, a_{r-1}, a_{r}$ di cui si è parlato al paragrafo trentesimo, così nel caso d'$n$ numero dispari una di esse sarà eguale ad una metà, e la somma di due altre equidistanti dalle estreme in grandezza, non che quella di queste ultime due, eguaglierà una unità; nel caso poi d'$n$ pari esse avranno tutte quest'ultima proprietà; e per tanto, se nella equazione

$$\mu^{n}-S^{(1)}\mu^{n-1}+S^{(2)}\mu^{n-2}-S^{(3)}\mu^{n-3}+\ldots\pm S^{(n)}=0$$

si porrà $z+\frac{1}{2}$ in luogo della $\mu$, ove la $z$ esprime una nuova incognita, si avrà una equazione in $z$ derivativa del grado

$\frac{n-1}{2}$ nel caso d' $n$ dispari, e del grado $\frac{n}{2}$ in quello d' $n$ pari.

35. Se si volesse che B eguagliasse la B', e che le A', A'', A''', ... $A^{(r)}$ fossero eguali fra loro come nella proposizione precedente, le equazioni a soddisfarsi sarebbero le

$$2B+rA'=1, \left(a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\ldots+a_{r}\right)A'+B=\frac{1}{2},$$

$$\left(a_{,}^{2}+a_{,,}^{2}+a_{,,,}^{2}+\ldots+a_{r}^{2}\right)A'+B=\frac{1}{3},$$

$$\left(a_{,}^{3}+a_{,,}^{3}+a_{,,,}^{3}+\ldots+a_{r}^{3}\right)A'+B=\frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(a_{,}^{n}+a_{,,}^{n}+a_{,,,}^{n}+\ldots+a_{r}^{n}\right)A'+B=\frac{1}{n+1};$$

e però onde sia possibile in generale la determinazione di tutte le incognite che vi sono in esse, senza che nessuna rimanga arbitraria o indeterminata, dovrà essere $r=n-1$.

Supposto che le $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ec. esprimano le somme delle potenze prima, seconda, terza, ec. di tutte le incognite $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,} \ldots a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}$, le equazioni quì sopra esposte si potranno scrivere anco come segue

$$2B+(n-1)A'=1,\ P^{(1)}A'+B=\frac{1}{2},\ P^{(2)}A'+B=\frac{1}{3},$$

$$P^{(3)}A'+B=\frac{1}{4},\ P^{(4)}A'+B=\frac{1}{5},$$

$$P^{(5)}A'+B=\frac{1}{6},\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^{(n-1)}A'+B=\frac{1}{n},\ P^{(n)}A'+B=\frac{1}{n+1}.$$

Queste ultime $n$ danno

$$P^{(2)}-P^{(1)}=-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{A'},\ P^{(3)}-P^{(2)}=-\frac{1}{3.4}\cdot\frac{1}{A'},$$

$$P^{(4)}-P^{(3)}=-\frac{1}{4.5}\cdot\frac{1}{A'},\ P^{(5)}-P^{(4)}=-\frac{1}{5.6}\cdot\frac{1}{A'},$$

. . . . . .

. . . . . $P^{(n)}-P^{(n-1)}=-\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{A'}$; e però

$$P^{(2)}=P^{(1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{A'},\ P^{(3)}=P^{(1)}-\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{A'},\ P^{(4)}=P^{(1)}-\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{A'},$$

$$P^{(5)}=P^{(1)}-\frac{4}{12}\cdot\frac{1}{A'},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

. . . . . $P^{(n)}=P^{(1)}-\frac{n-1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{A'}$.

Ma dalle due equazioni $2B+(n-1)A'=1$, $B+A'P^{(1)}=\frac{1}{2}$, si ha evidentemente $P^{(1)}=\frac{n-1}{2}$; adunque determinata che sarà la $A'$ e conseguentemente anco le $A''$, $A'''$, .... $A^{(n)}$ sue eguali, rimarranno determinate pure le funzioni invariabili $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, $P^{(4)}$, $P^{(5)}$, ... $P^{(n)}$ delle altre $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... $a_{n-1}$, e con esse anco la B, per essere eguale ad $\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}A'$.

36. Per determinare la $A'$, dalla quale attualmente ora dipende interamente la soluzione della proposta quistione, si osservi, che tra le quantità

$$P^{(1)},\ P^{(2)},\ P^{(3)},\ldots.P^{(n)} \text{ e le } S^{(1)},\ S^{(2)},\ S^{(3)},\ldots\ldots P^{(n)}$$

hanno luogo le relazioni rappresentate dalle equazioni note

$$P^{(1)}=S^{(1)},$$
$$P^{(2)}=S^{(1)}\,P^{(1)}-2S^{(2)},$$
$$P^{(3)}=S^{(1)}\,P^{(2)}-S^{(2)}\,P^{(1)}+3S^{(3)},$$
$$P^{(4)}=S^{(1)}\,P^{(3)}-S^{(2)}\,P^{(2)}+S^{(3)}\,P^{(1)}-4S^{(4)},$$

. . . . . .

$$P^{(n-1)} = S^{(1)} P^{(n-2)} - S^{(2)} P^{(n-3)} + S^{(3)} P^{(n-4)} - \ldots \mp S^{(n-2)} P^{(1)} \pm (n-1) S^{(n-1)},$$

$$P^{(n)} = S^{(1)} P^{(n-1)} - S^{(2)} P^{(n-2)} + S^{(3)} P^{(n-3)} - \ldots \mp S^{(n-1)} P^{(2)} \pm S^{(n-1)} P^{(1)}$$

dalle quali eliminando le $(n-1)$ quantità $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots S^{(n-1)}$ si ottiene una equazione, non difficile a concepirsi dal teorico perito benchè essa non vi sia registrata in nessun' opera, tra le sole

$$P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots P^{(n-1)}, P^{(n)}$$

nella quale sostituendo per queste medesime quantità i loro valori trovati superiormente, si ha una equazione in A' mediante la quale si potrà determinare il valore richiesto di questa medesima quantità.

Essendo ora note le $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots P^{(n)}$, colle equazioni Newtoniane sopra esposte si determineranno le $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots S^{(n)}$: determinate queste ultime funzioni simmetriche delle incognite $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_{n-1}$, si costituirà l' equazione

$$\lambda^{n-1} - S^{(1)} \lambda^{n-2} + S^{(2)} \lambda^{n-3} - S^{(3)} \lambda^{n-4} + \ldots \mp S^{(n-2)} \lambda \pm S^{(n-1)} = 0$$

se ne troveranno le radici, cioè i valori della $\lambda$ che la soddisfanno, e questi saranno i valori cercati delle stesse $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}$.

37. Anco quest' ultima equazione ha, nel caso d' $(n-1)$ dispari, una radice eguale ad una metà, e la somma di due altre qualsivogliono fra le equidistanti dalla più grande e più piccola eguale ad una unità, e nel caso d' $(n-1)$ pari, la somma di due qualunque delle medesime equidistanti dalle estreme in grandezza, eguale ad uno; e per conseguenza la trasformata che si avrà ponendo in essa $u + \frac{1}{2}$, ove l' $u$ esprime una nuova incognita, sarà derivativa del grado $\frac{n-3}{2}$ nel primo di questi casi, e del grado $\frac{n-1}{2}$ nel secondo. Non es-

pongo questa trasformata per la stessa ragione per cui non ho esposto l' analoga di cui si è parlato al paragrafo trentesimo, ed anco perchè la sua determinazione non presenta nessuna difficoltà.

38. Se la funzione $f(x)$ in vece di rappresentare, come sin' ad' ora l' area di quelle sezioni di un corpo, la quale ha la distanza $x$ da un punto dato, rappresentasse l' ordinata di una linea piana corrispondente alla ascissa $x$, l' area del quadrilatero racchiuso dalle due ordinate $f(o)$, $f(n)$ e dalle porzioni della linea e dell' asse delle $x$ intercette fra queste medesime ordinate, avrebbe colle ordinate della linea corrispondenti a quei medesimi valori della $x$ ai quali corrispondevano, nelle quistioni trattate, le sezioni del corpo da noi contemplato, delle relazioni affatto simili a quelle osservate tra le aree di queste sezioni ed il volume della porzione del corpo intercetta tra le due estreme di esse. Anzi, in generale, qualunque sia il significato concreto della $f(x)$, purchè essa sia algebraica, razionale ed intera, avranno luogo delle relazioni analoghe a quelle esposte per la stereometria, tra i valori di questa funzione corrispondenti agli anzidetti della $x$ e la quantità che sarà quella primitiva della $f(x)$, rispetto alla $x$, che si annullerà colla $x$ medesima.