# MEMORIE
## DI
# MATEMATICA

SULL' EQUILIBRIO DELLE CURVE A DOPPIA CURVATURA RIGIDE, OVVERO COMPLETAMENTE O SOLO IN PARTE ELASTICHE.

# MEMORIA

DEL PROFESSORE ANTONIO BORDONI

*Ricevuta adì* 22. *Maggio* 1818.

1.

I movimenti relativi, che possono avere luogo fra le parti di una curva a doppia curvatura, richieggono un' allungamento od un' accorciamento degli elementi di essa, od una aumentazione o diminuzione degli angoli di contingenza compresi fra i suoi elementi consecutivi, ovvero una simile variazione degli angoli diedri dei prossimi piani osculatori, o due o tutte insieme queste tre variazioni; dimò che, se saranno invariabili gli elementi della curva e con essi anche i due angoli anzidetti ossia le due sue flessioni, la curva si potrà porre bensì in più luoghi dello spazio, ma essa avrà sempre la medesima figura.

Applicando opportunamente delle forze ad una curva fisica, si possono produrre delle variazioni sì nei suoi elementi che nelle sue flessioni; e producendo effettivamente queste variazioni in siffatte linee, si sente una resistenza ossia una forza naturale, che si oppone ad esse variazioni, la qua-

le resistenza dicesi comunemente elasticità della curva.

I meccanici suppongono questa resistenza costituita di tre parti distinte, cioè della parte proveniente dalla variazione dei soli elementi della curva, e delle due che provengono dalle variazioni delle due flessioni di essa; e chiamano particolarmente, *tensione* la prima di queste parti, *elasticità* la seconda, che è prodotta dalla aumentazione o diminuzione naturale della prima flessione ossia degli angoli della contingenza ordinaria; *torsione* dicono la terza, la quale nasce dalla variazione della seconda flessione ossia degli angoli compresi fra i consecutivi piani osculatori.

Sebbene le tre variazioni anzidette abbiano luogo generalmente in tutte le curve fisiche alle quali sianvi applicate delle forze, non ostante, in molte occasioni interessa anche la cognizione di ciò, che avviene o può avvenire nello stato di equilibrio di quelle curve, la cui figura è supposta affatto affatto invariabile, le quali si dicono per questo *curve rigide;* come *elastiche completamente* si dicono quelle, nelle quali possono avere luogo le variazioni suddette, ed *elastiche solo in parte* le altre.

Nelle curve rigide, per tensione, elasticità, e torsione si intendono gli sforzi, che le forze esteriori fanno per variare, benchè in vano, gli elementi della curva o le due sue flessioni.

2.

Le cose principali, che si hanno di mira nell' equilibrio delle curve a doppia curvatura, sono, le forze esteriori, la tensione, la elasticità, la torsione, e le equazioni di esse curve; cosicchè tutti i dati delle quistioni relative allo stato di equilibrio delle curve consistono in alcune di queste cose ed i quesiti nelle altre. E di fatto, la quistione principale per le curve rigide è quella, nella quale sono conosciute le forze esteriori e le equazioni della curva in una data posizione, e si dimandano la tensione, la elasticità, la

torsione, e con esse anco le due equazioni individuate della medesima linea nello stato di equilibrio; e per le elastiche completamente è quella, in cui sono date le forze esteriori, le leggi della tensione, della elasticità, e della torsione, e si cercano le equazioni rappresentanti la curva nel suo stato o posizione di equilibrio, ed i valori delle medesime tre forze interiori, cioè della tensione, della elasticità, e della torsione. Anzi, la soluzione completa di qualunque quistione relativa all' equilibrio delle curve a doppia curvatura richiede generalmente la conoscenza delle medesime tre equazioni indefinite, nelle quali, come si vedrà, vi sono le forze esteriori, le interiori ossia la tensione, la elasticità, e la torsione, e con esse anco le coordinate della curva.

Lagrange, nella sua Meccanica Analitica, parlando dell' equilibrio delle curve rigide, trova tre equazioni indefinite fra le forze esteriori, le coordinate della curva e tre altre quantità, le quali quantità sono le grandezze di tre forze, che, agendo secondo determinate direzioni, equivalgono allo sforzo che fanno le forze esteriori per cambiare la figura alla curva stessa; ma cavando i valori di queste quantità dalle medesime tre equazioni di Lagrange, si trova che due di esse sono infinite.

Il Sig. Binet Jacques, il primo che dilucidò questo passo della Meccanica di Lagrange, con una Memoria inserita nel tomo decimo del giornale della scuola politecnica di Francia, scrivendo altrimenti la invariabilità della curva, trovò tre altre equazioni indefinite, nelle quali vi sono oltre le forze esteriori e le coordinate della curva, tre nuove quantità atte a misurare, una la vera tensione, l'altra la elasticità, e la terza la torsione; e desunse anche da queste equazioni quella espressione delle forze esteriori, che rappresenta la torsione; ma per rispetto alla tensione ed alla elasticità dichiarò, che „ On ne parvient aux valeurs générales de tension et d'élasticité que par des calculs pénibles, dont les résultats paraissent fort compliqués „.

In questa breve Memoria, nella quale si parla dell' equilibrio delle curve a doppia curvatura siano rigide, o siano elastiche completamente o solo in parte, si troveranno tre equazioni indefinite fra le coordinate della curva nella posizione di equilibrio, le forze esteriori, la tensione, la elasticità, e la torsione, colle quali si otterranno con facilità, mediante alcuni stratagemmi, queste ultime tre quantità, cioè la tensione, la elasticità, ed anche la torsione espresse tutte colle forze esteriori e le coordinate della curva nella posizione di equilibrio di esso.

3.

Denominerò $x$, $y$, $z$ le tre coordinate rettangole di un punto qualunque della curva in equilibrio; $s$ l'arco ed $m$ la massa corrispondente; $de$, differenziale della quantità variabile $e$, l' angolo di contingenza della stessa curva cioè l' angolo acuto compreso fra l' elemento $ds$ ed il suo seguente; $di$, differenziale di un' altra quantità variabile $i$, l' angolo acuto compreso fra due prossimi piani osculatori della medesima curva, vale a dire l' angolo compreso fra i due piani osculatori che passano, uno per l' elemento $ds$ ed il suo seguente, e l' altro per quest' ultimo medesimo elemento e pel seguente di esso: più prevengo, che, dicendo tangente, piano osculatore della curva, intenderò sempre, se non avvertirò altrimenti, quella tangente, quel piano osculatore corrispondenti al punto le cui ordinate sono $x$, $y$, $z$.

Qualunque sia la curva, cioè sia dessa elastica completamente o solo in parte, ovvero rigida, chiamerò $\lambda$, $\mu$, $\xi$ le tre forze equivalenti immediatamente alle tre differenti elasticità od invariabilità dei differenziali $ds$, $de$, $di$; cioè chiamerò $\lambda$ la tensione, $\mu$ la elasticità, e $\xi$ la torsione: e supporrò ciascuna forza esteriore ed applicata alla curva, decomposta in tre parallele ai tre assi delle coordinate e tendenti a diminuire le coordinate stesse; e nominerò X la somma di quelle fra queste componenti, le quali oltre di esse-

re parallele all' asse delle $x$, provengono dalla scomposizione delle singole forze esteriori agenti sul punto a cui corrispondono le coordinate $x, y, z$; ed Y, e Z le analoghe somme per quelle parallele agli assi delle altre ordinate $y, z$.

4.

Prescindendo dalle forze particolari, che possono essere applicate ai termini della curva, la somma dei momenti virtuali delle forze agenti sulla intera curva, sarà l' integrale definito del polinomio differenziale

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + \lambda\delta ds + \mu\delta de + \xi\delta di$$

esteso tra i limiti indicati dai termini stessi della curva. Quindi, ponendo in questo polinomio in vece dei differenziali $ds$, $de$, $di$ le loro espressioni formate coi differenziali delle coordinate $x, y, z$, e facendo sparire i differenziali delle variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ da sotto il segno integrale, ed eguagliando a zero separatamente i coefficienti delle variazioni medesime rimaste sotto il segno integrale, si avranno, per le regole di Lagrange, le tre equazioni esprimenti le proprietà o relazioni che dovranno avere le forze colle coordinate della curva, affinchè non abbiano luogo movimenti relativi fra le parti della curva stessa: come annullando gli altri termini cioè quelli che non saranno più affetti dal segno integrale, si avranno le relazioni necessarie fra le forze, acciocchè non vi siano movimenti comuni a tutte le parti della curva medesima.

5.

Le espressioni dei differenziali $ds$, $de$, $di$ formate colle coordinate $x, y, z$ sono le seguenti

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\,,\ \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}\,,$$

$$ds\,\frac{dxd^2yd^3z+dzd^2xd^3y+dyd^2zd^3x-dxd^2zd^3y-dyd^2xd^3z-dzd^2yd^3x}{(dxd^2y-d^2xdy)^2+(dzd^2x-d^2zdx)^2+(dyd^2z-d^2ydz)^2}\,;$$

la prima di queste espressioni trovasi esposta e dimostrata in

quasi tutti i trattati di calcolo differenziale e integrale; e la seconda in molte opere, e dimostrata rigorosamente nel tomo sedicesimo di questa Società delle Scienze: la terza poi non è così comune, si può vedere però anch' essa dimostrata coi principj Leibniziani nella sopra citata memoria del Sig. Binet. Io approffitterò di questa occasione per pubblicare di essa la dimostrazione seguente, la quale è affatto simile a quella che diedi per la seconda nel tomo anzidetto di questa Società.

6.

Scriverò $y'$, $z'$, $y''$ ec. in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ec. e nominerò $p'$, $q'$, $r'$ le coordinate rettangole del piano, che passa per l' origine delle coordinate parallelamente al piano osculatore della curva.

L' equazione di questo piano, che passa per l' origine delle coordinate, sarà

$$p'+mq'+nr'=0\,,\ \text{posto}\ \frac{z''}{z'y''-z''y'}=m\,,\ \text{e}\ -\frac{y''}{z'y''-z''y'}=n\,;$$

giacchè i parametri $m$, $n$ di questo piano debbono essere eguali agli analoghi del piano osculatore parallelo ad esso.

Così, denominando $p$, $q$, $r$ le coordinate rettangole della retta, che passa per l' origine delle coordinate, ed è perpendicolare al piano anzidetto, le sue equazioni saranno

$$p=\mathrm{M}r\,,\ q=\mathrm{N}r\,;$$

purchè i parametri M, N siano desunti dalle due equazioni

$$\mathrm{M}n=1\,,\ \mathrm{N}n=m.$$

Queste ultime due equazioni danno $\mathrm{M}=\frac{1}{n}$, ed $\mathrm{N}=\frac{m}{n}$; e però sarà

$$\mathrm{M}=\frac{y'z''-y''z'}{y''}\,,\ \text{ed}\ \mathrm{N}=-\frac{z''}{y''}.$$

Quindi le equazioni della retta anzidetta saranno le due seguenti

$$p=\frac{y'z''-y''z'}{y''}\,r\,,\ q=-\frac{z''}{y''}\,r.$$

Ora, gli angoli compresi fra i piani osculatori della curva, eguagliano evidentemente quelli compresi dai loro paralleli passanti per l' origine delle coordinate, e gli angoli compresi da questi eguagliano quelli formati dalle rette perpendicolari ad essi loro; adunque gli angoli compresi dai piani osculatori saranno anch' essi eguali a quelli compresi da queste medesime rette. Ma tutte le rette espresse dalle equazioni, che si ottengono, variando la $x$ nelle ultime due equazioni, sono nella superficie conica espressa dall' equazione, la quale si otterrebbe, eliminando la medesima $x$ dalle stesse due ultime equazioni; quindi l' angolo $i$ sarà eguale anche all' arco della sezione fatta a questa superficie conica dalla superficie sferica avente il centro nella origine delle coordinate e per raggio l' unità trigonometrica. Vale a dire, sarà $i$ eguale all' arco della curva espressa dalle tre equazioni.

$$p = \frac{y'z''-y''z'}{y''}\, r,\ q = -\frac{z''}{y''}\, r,\ p^2+q^2+r^2 = 1\ ;$$

ovvero dalle seguenti loro equivalenti

$$p = \frac{y'z''-y''z'}{a},\ q = -\frac{z''}{a},\ r = \frac{y''}{a},$$

dove $a$ è posta per semplicità in vece di

$$\sqrt{y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2}\ ;$$

e $p$, $q$, ed $r$ rappresentano ora le tre coordinate rettangole della sezione medesima.

Essendo $\left(\frac{di}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2$,

ed i valori anzi-trovati delle coordinate $p$, $q$, $r$ dando

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{1}{a}(y'z''-y''z') - \frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dx}\right)(y'z''-y''z'),$$

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \frac{z''}{a^2}\left(\frac{da}{dx}\right) - \frac{z'''}{a},$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) = -\frac{y''}{a^2}\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{y'''}{a},\ \text{si avrà}$$

$$\left(\frac{di}{dx}\right)^2 = \frac{1}{a^4}\Big[\, a^2(y'''^2+z'''^2+(y'z'''-y'''z')^2) + \left(\frac{da}{dx}\right)^2(y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2)$$

$$-2a\left(\frac{da}{dx}\right)(y''y'''+z''z'''+(y'z''-y''z')(y'z'''-y'''z')\Big]$$

ovvero $a^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2=(y''^2+z''^2+y'^2z''^2-2y'y''z'z''+z'^2y''^2)\times$

$$(y'''^2+z'''^2+y'^2z'''^2-2y'y'''z'z'''+z'^2y'''^2)$$

$$-(y''y'''+z''z'''+y'^2z''z'''+z'^2y''y'''-y'y'''z'z''-y'y''z'z''')^2,$$

per essere $a^2=y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2$, e però anche

$$a\left(\frac{da}{dx}\right)=y''y'''+z''z'''+(y'z''-y''z')(y'z'''-y'''z').$$

Sviluppando il prodotto ed il quadrato ancora indicati nella espressione di $a^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2$, e facendo le riduzioni, si troverà

$$a^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2=(1+y'^2+z'^2)(y''^2z'''^2-2y''z''y'''z'''+z''^2z'''^2),$$

$$\text{ossia } a^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2(y''z'''-y'''z'')^2;$$

e conseguentemente si avrà

$$\left(\frac{di}{dx}\right)=\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{y''z'''-y'''z''}{y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2}$$

vale a dire la derivata dell' angolo $i$ presa rispetto alla variabile $x$.

7.

Se la variabile principale, in vece di essere la $x$, sarà un' altra qualunque, per esempio $t$, dalla espressione trovata della $\left(\frac{di}{dx}\right)$ si desumerà quella della $\left(\frac{di}{dt}\right)$, moltiplicando per $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ciò che si otterrà, sostituendo nella medesima

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]^2}$$

anzi-trovata in luogo delle quantità

$$\left(\frac{ds}{dx}\right), \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \text{ ec.}$$

ordinatamente le seguenti

$$\frac{1}{x'}\left(\frac{ds}{dt}\right), \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}, \frac{x'y''-x''y'}{x'^3}, \text{ ec.}$$

nelle quali si è scritto $x'$, $y'$, $z'$, $x''$, $y''$, ec. in vece di

$$\left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right), \left(\frac{dz}{dt}\right), \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right), \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right), \text{ ec.}$$

Le sostituzioni quì indicate danno le quantità

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]^2$$

eguali rispettivamente alle seguenti

$$\frac{1}{x'^6}\left(x'y''z'''+z'x''y'''+y'z''x'''-x'z''y'''-y'x''z'''-z'y''x'''\right),$$

$$\frac{1}{x'^6}\left((x'y''-x''y')^2+(x'z''-x''z')^2+(y'z''-y''z')^2\right),$$

e per tanto sarà

$$\left(\frac{di}{dt}\right)=\left(\frac{ds}{dt}\right)\frac{x'y''z'''+z'x''y'''+y'z''x'''-x'z''y'''-y'x''z'''-x'y''x'''}{(x'y''-x''y')^2+(x'z''-x''z')^2+(y'z''-y''z')^2}$$

equazione che equivale, siccome è noto, a quest' altra

$$di=ds\frac{dxd^2yd^3z+dzd^2xd^3y+dyd^2zd^3x-dxd^2zd^3y-dyd^2xd^3z-dzd^2yd^3x}{(dxd^2y-d^2xdy)^2+(dxd^2z-d^2xdz)^2+(dyd^2z-d^2ydz)^2}$$

che è appunto quella, che si voleva dimostrare.

8.

Siccome le espressioni dei differenziali $ds$, $de$, $di$ sono visibilmente formate similmente dalle variabili $x$, $y$, $z$; così dai risultamenti, che si otteranno da essi differenziali operando per una di queste variabili, si potranno avere immediatamente e con grandissima facilità quelli, che si otterrebbero facendo delle operazioni analoghe per un' altra delle medesime tre variabili. Appoggiato a questa semplicissima osser-

vazione, nei calcoli seguenti, i quali si dovrebbero eseguire similmente per tutte tre le coordinate, avrò riguardo per ora alla variazione della sòla $x$, indi dai risultamenti che troverò, dedurrò gli analoghi risultamenti per le altre due coordinate $y$, $z$.

9.

Essendo $\partial ds = \frac{dx}{ds}\partial dx = \frac{dx}{ds} d\partial x$, sarà $\int \lambda \partial ds = \int \lambda \frac{dx}{ds} d\partial x$; e però $\int \lambda \partial ds = \lambda \frac{dx}{ds}\partial x - \int \partial x d \frac{\lambda dx}{ds}$.

Così, posto $\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2} = r$, per essere

$$\partial de = \frac{d^2x}{rds}\partial d^2x - \frac{d^2s}{rds}\partial d^2s - \frac{de}{ds}\partial ds, \text{ si avrà}$$

$$\int \mu \partial de = \int \frac{\mu d^2x}{rds} d^2\partial x - \int \frac{\mu d^2s}{rds}\partial d^2s - \int \frac{\mu de}{ds} d\partial s,$$

ossia

$$\int \mu \partial de = \int \frac{\mu d^2x}{rds} d^2\partial x + \int \left( d\frac{\mu d^2s}{rds} - \mu \frac{de}{ds}\right)\frac{dx}{ds} d\partial x - \mu \frac{dxd^2s}{rds^2}\partial dx;$$

e però la parte di $\int \mu \partial de$, che rimarrà sotto il segno integrale, risulterà

$$\left( d^2 \frac{\mu d^2x}{rds} + d\frac{\mu dxde}{d^2s} - d\frac{dx}{ds} d\frac{\mu d^2s}{rds}\right)\partial x;$$

e l' altra, cioè quella portata fuori del medesimo segno sarà

$$\frac{\mu}{rds^2}\left( dsd^2x - d^2sdx\right) - \left( d\frac{\mu d^2x}{rds} - \frac{dx}{ds} d\frac{\mu d^2s}{rds} + \mu \frac{dxde}{ds^2}\right)\partial x.$$

10.

Ponendo $d^2yd^3z - d^2zd^3y = a$, $dzd^3y - dyd^3z = b$, $dyd^2z - dzd^2y = c$, ed osservando, che $(dxd^2y - d^2xdy)^2 + (dxd^2z - d^2xdz)^2 + (dyd^2z - d^2ydz)^2$ è eguale a $(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)ds^2$ ossia a $de^2 . ds^4$, si avrà $di = \frac{adx + bd^2x + cd^3x}{m}$; e però

$$\partial di = \frac{a\partial dx + b\partial d^2x + c\partial d^3x}{m} - \frac{2di}{de}\partial de - 3\frac{di}{ds}\partial ds;$$

e conseguentemente sarà

$$\int \xi \partial di = \int \frac{a\xi}{m} d\partial x + \int \frac{b\xi}{m} d^2 \partial x + \int \frac{c\xi}{m} d^3 \partial x - 2 \int \frac{\xi di}{de} \partial e - 3 \int \frac{\xi di}{ds} \partial ds;$$

la $m$ è posta in vece di $de^2 . ds^4$.

Ma i termini portati da $\int \mu \partial de$, e che sono rimasti sotto il segno integrale, sono

$$\left( d^2 \frac{\mu d^2 x}{r ds} + d \frac{\mu de dx}{ds^2} - d \frac{dx}{ds} d \frac{\mu d^2 s}{r ds} \right) \partial x,$$

per cui i termini analoghi, che introdurrà $-2 \int \frac{\xi di}{de} \partial de$, saranno

$$-2 \left( d^2 \frac{\xi di d^2 x}{r^2} + d \frac{\xi di dx}{ds^2} - d \frac{dx}{ds} d \frac{\xi di d^2 s}{r^2} \right) \partial x;$$

ed i termini simili, cioè rimasti sotto il segno integrale e provenienti dagli altri termini dell' integrale in quistione $\int \xi \partial di$, sono evidentemente

$$-\left( d \frac{a\xi}{m} - d^2 \frac{b\xi}{m} + d^3 \frac{\xi c}{m} - 3 d \frac{\xi di dx}{ds^2} \right) \partial x.$$

Adunque i termini, che provveranno da $\xi \partial di$, e che rimarranno sotto il segno integrale, saranno i seguenti

$$-\left( d \frac{a\xi}{m} - d^2 \frac{b\xi}{m} + d^3 \frac{c\xi}{m} - 2 d \frac{dx}{ds} d \frac{\xi di d^2 s}{r^2} - d \frac{\xi di dx}{ds^2} + 2 d^2 \frac{\xi di d^2 x}{r^2} \right) \partial x:$$

e quelli fuori del medesimo segno, evidentemente gli altri

$$\left( \frac{a\xi}{m} - d \frac{b\xi}{m} + d^2 \frac{c\xi}{m} + 2 d \frac{\xi di d^2 x}{r^2} - 2 \frac{dx}{ds} d \frac{\xi di d^2 s}{r^2} - \frac{\xi di dx}{ds^2} \right) \partial x$$
$$+ \left( \frac{b\xi}{m} - d \frac{c\xi}{m} - 2 \frac{\xi di d^2 x}{r^2} + 2 \frac{\xi di dx d^2 s}{r^2 ds} \right) \partial dx + \frac{c\xi}{m} \partial d^2 x.$$

II.

Eguagliando a zero la somma di tutte le quantità, che moltiplicano la variazione $\partial x$ rimasta sotto il segno integrale del polinomio

$$(X \partial x + Y \partial y + Z \partial z)\, dm + \lambda \partial ds + \mu \partial de + \xi \partial di,$$

si ottiene un'equazione, alla quale si può dare la forma seguente,

$$X dm - d \left( \lambda \frac{dx}{ds} + A\mu + B d\mu + C\xi + D d\xi + E d^2 \xi \right) = 0,$$

ponendo

$$\frac{dx}{ds} d \frac{d^2 s}{r ds} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{de}{ds} - d \frac{d^2 x}{r ds} = A, \quad \frac{1}{r ds} \left( \frac{dx}{ds} d^2 s - d^2 x \right) = B,$$

$$\frac{a}{m} - d\frac{b}{m} + d^2\frac{c}{m} - \frac{dx}{ds}\frac{di}{ds} - 2\frac{dx}{ds}d\frac{did^2s}{r^2} + 2d\frac{did^2x}{r^2} = C,$$

$$-\frac{b}{m} + 2d\frac{c}{m} + \frac{2}{r^2}\left(d^2x - \frac{dx}{ds}d^2s\right)di = D, \text{ e finalmente } \frac{c}{m} = E.$$

12.

Si ponga $d^2zd^3x - d^2xd^3z = a'$, $dxd^3z - dzd^3x = b'$, $dzd^2x - dxd^2z = c'$, $d^2xd^3y - d^2yd^3x = a''$, $dyd^3x - dxd^3y = b''$, $dxd^2y - dyd^2x = c''$; e si indichino colle A', B', C', D', E', le espressioni, che si ottengono, cambiando in quelle indicate dalle A, B, C, D, E ordinatamente le $y$, $z$, $x$ nelle $z$, $x$, $y$, e però le $a$, $b$, $c$ nelle $a'$, $b'$, $c'$; e colle A'', B'', C'', D'', E'', le analoghe espressioni che si hanno cambiando in queste ultime le $z$, $x$, $y$ ordinatamente nelle $x$, $y$, $z$, epperò le $a'$, $b'$, $c'$ nelle $a''$, $b''$, $c''$.

Egli è facile a comprendersi, per quello che si è detto nel paragrafo ottavo, che le due equazioni, che si otterrebbero facendo per le variazioni delle ordinate $y$, $z$, ciò che si è fatto estesamente per quella della $x$, sarebbero le seguenti

$$Ydm - d\left(\lambda\frac{dy}{ds} + A'\mu + B'd\mu + C'\xi + D'd\xi + E'd^2\xi\right) = 0,$$

$$Zdm - d\left(\lambda\frac{dz}{ds} + A''\mu + B''d\mu + C''\xi + D''d\xi + E''d^2\xi\right) = 0.$$

Le tre equazioni indefinite

$$Xdm - d\left(\lambda\frac{dx}{ds} + A\mu + Bd\mu + C\xi + Dd\xi + Ed^2\xi\right) = 0,$$

$$Ydm - d\left(\lambda\frac{dy}{ds} + A'\mu + B'd\mu + C'\xi + D'd\xi + E'd^2\xi\right) = 0,$$

$$Zdm - d\left(\lambda\frac{dz}{ds} + A''\mu + B''d\mu + C''\xi + D''d\xi + E''d^2\xi\right) = 0,$$

le quali rappresentano in tutta la generalità la linea elastica od una proprietà che ha luogo nello stato di equilibrio qualunque sia la natura della linea medesima, sono quelle dalle quali desumerò i valori richiesti delle tre forze interiori $\lambda$, $\mu$, $\xi$.

13.

Prima di incominciare le operazioni colle quali determinerò le quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$, esporrò quì alcune proprietà delle funzioni $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, ec. ed altre delle A, B, C, D, E, A', B', ec. di cui mi valgo in essa determinazione.

Ponendo nelle equazioni, che quì seguono, in vece delle funzioni $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, ec. ciò che esse rappresentano, facilmente si verifica, che hanno luogo le proprietà scritte algebraicamente colle equazioni medesime, cioè che

$$cdx + c'dy + c''dz = 0;\ bdx + b'dy + c''dz = 0;$$

$$a'dy + a''dz - bd^2x - cd^3x = 0;$$

$$dc = -b,\ dc' = -b',\ dc'' = -b'';$$

$$(cd^2y - c'd^2x)dz + (c''d^2x - cd^2z)dy + (c'd^2z - c''d^2y)dx = -m^2ds^2;$$

$$db.dx + db'.dy + db''.dz = -adx - a'dy - a''dz.$$

Essendo, come si vede quì sopra, $dc = -b$, e però

$$\frac{a}{m} - d\frac{b}{m} + d^2\frac{c}{m} = \frac{a-2b}{m} - 3bd\frac{1}{m} + cd^2\frac{1}{m}, \text{ e}$$

$$-\frac{b}{m} + 2d\frac{c}{m} = -\frac{3b}{m} + 2cd\frac{1}{m}, \text{ sarà}$$

$$C = \frac{a-2b}{m} - 3bd\frac{1}{m} + cd^2\frac{1}{m} + \left(2d\frac{d^2x}{r^2} - 2\frac{dx}{ds}d\frac{d^2s}{r^2} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{ds}\right)di$$

$$+\frac{2}{r^2}\left(d^2x - \frac{dx}{ds}d^2s\right)d^2i, \text{ e } D = -\frac{3b}{m} + 2cd\frac{1}{m} + \frac{2}{r^2}\left(d^2x - \frac{dx}{ds}d^2s\right)di.$$

14.

Sostituendo nei due trinomj $Adx + A'dy + A''dz$, $Bdx + B'dy + B''dz$, in luogo delle funzioni A, A', A'', B, B', B' i loro valori, ed osservando, che si ha

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s, \text{ e}$$

$$\frac{dx}{ds}d\frac{d^2x}{rds} + \frac{dy}{ds}d\frac{d^2y}{rds} + \frac{dz}{ds}d\frac{d^2z}{rds} - d\frac{d^2s}{rds} = -\frac{de}{ds},$$

facilmente si verifica essere tanto $Adx + A'dy + A''dz = 0$,
quanto $Bdx + B'dy + B''dz = 0$.

Così per essere

$$\frac{dx}{ds} d \frac{d^2x}{r^2} + \frac{dy}{ds} d \frac{d^2y}{r^2} + \frac{dz}{ds} d \frac{d^2z}{r^2} - d \frac{d^2s}{r^2} = - \frac{1}{ds},$$

e stante l' ultima relazione delle $a$, $a'$, $a'$, $b$, $b'$, $b''$ trovata nell' antecedente paragrafo, essendo

$$-\frac{2}{m}\left( db.dx + db'.dy + db''.dz \right) + \frac{1}{m}\left( adx + a'dy + a''dz \right) =$$
$$\frac{3}{m}\left( adx + a'dy + a''dz \right),$$

il trinomio $Cdx + C'dy + C''dz$ sarà eguale a

$$-3di + \frac{3}{m}\left( adx + a'dy + a''dz \right) \text{ ossia a } \frac{3}{m}\left( adx + a'dy + a''dz - mdi \right);$$

cioè sarà anche $Cdx + C'dy + C''dz = 0$,

essendo $mdi = adx + bd^2x + cd^3x$, epperò

$$adx + a'dx + a''dz - mdi = a'dy + a''dz - bd^2x - cd^3x,$$

quantità che si annulla per la terza equazione esposta nel paragrafo antecedente.

Similmente, $Ddx + D'dy + D''dz$ eguagliando

$$-\frac{3}{m}\left( bdx + b'dy + b''dz \right) + 2\left( cdx + c'dy + c''dz \right)$$
$$+ \frac{2di}{r^2}\left( dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z - dsd^2s \right),$$

sarà pure, per le due prime equazioni del medesimo paragrafo precedente,

$$Ddx + D'dy + D''dz = 0.$$

In ultimo facilissimamente si verifica ancora, che è

$$Edx + E'dy + E''dz = 0$$

per la stessa prima equazione anzi-citata.

Ciò premesso, passo a determinare le quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$, ed incomincio dalla prima, cioè dalla $\lambda$.

15

Integrando le tre equazioni indefinite

$$Xdm - d\left(\lambda\frac{dx}{ds} + A\mu + Bd\mu + C\xi + Dd\xi + Ed^2\xi\right) = 0,$$

$$Ydm - d\left(\lambda\frac{dy}{ds} + A'\mu + B'd\mu + C'\xi + D'd\xi + E'd^2\xi\right) = 0,$$

$$Zdm - d\left(\lambda\frac{dz}{ds} + A''\mu + B''d\mu + C''\xi + D''d\xi + E''d^2\xi\right) = 0$$

trovate nel paragrafo dodicesimo, si hanno le seguenti

$$\int Xdm - \lambda\frac{dx}{ds} - A\mu - Bd\mu - C\xi - Dd\xi - Ed^2\xi = 0,$$

$$\int Ydm - \lambda\frac{dy}{ds} - A'\mu - B'd\mu - C'\xi - D'd\xi - E'd^2\xi = 0,$$

$$\int Zdm + \lambda\frac{dz}{ds} - A''\mu - B''d\mu - C''\xi - D''d\xi - E''d^2\xi = 0:$$

le tre costanti introdotte dalle tre integrazioni si suppongono contenute rispettivamente negli integrali $\int Xdm$, $\int Ydm$, $\int Zdm$ solamente indicati.

16.

Ora queste ultime tre equazioni si moltiplichino rispettivamente per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, e si faccia la somma delle tre risultanti, e si otterà una equazione, che si ridurrà alla seguente semplicissima

$$\frac{dx}{ds}\int Xdm + \frac{dy}{ds}\int Ydm + \frac{dz}{ds}\int Zdm - \lambda = 0,$$

per essere $Adx + A'dy + A''dz = 0$, $Bdx + B'dy + B''dz = 0$,
$Cdx + C'dy + C''dz = 0$, $Ddx + D'dy + D''dz = 0$,
$Edx + E'dy + E''dz = 0$
siccome abbiamo veduto nel paragrafo penultimo.

L' equazione quì trovata dà immediatamente

$$\lambda = \frac{dx}{ds}\int X dm + \frac{dy}{ds}\int Y dm + \frac{dz}{ds}\int Z dm,$$

cioè la tensione espressa colle forze esteriori e le coordinate della curva in equilibrio.

17.

Eliminando la funzione $\lambda$ dalle prime due delle ultime equazioni del paragrafo quindicesimo, si ottiene quest' altra equazione

$$dx\int Y dm - dy\int X dm + (A dy - A' dx)\mu + (B dy - B' dx)\, d\mu +$$
$$(C dy - C' dx)\xi + (D dy - D' dx) d\xi + (E dy - E' dx) d^2\xi = 0,$$

la quale integrata dà

$$x\int Y dm - y\int X dm + \int (yX - Yx)\, dm +$$
$$\frac{c''\mu}{r ds} + \frac{dz}{ds}\xi + \frac{c dy - c' dx}{m} d\xi = 0,$$

per essere le tre quantità

$$x\int Y dm - y\int X dm + \int (yX - Yx) dm,$$
$$\frac{c''\mu}{r ds}, \frac{dz}{ds}\xi + \frac{c dy - c' dx}{m} d\xi$$

rispettivamente gli integrali delle tre seguenti

$$dx\int Y dm - dy\int X dm, (A dy - A' dx)\mu + (B dy - B' dx)\, d\mu,$$
$$(C dy - C' dx)\xi + (D dy - D' dx)\, d\xi + (E dy - E' dx)\, d^2\xi,$$

come facilissimamente si verifica col soccorso delle relazioni $dc = -b$, $dc' = -b'$ esposte al paragrafo tredicesimo.

Facendo, per la prima e terza, e per la seconda e terza delle medesime tre equazioni del penultimo paragrafo due operazioni affatto simili a quelle fatte dianzi per le prime due di esse, cioè eliminando la $\lambda$, ed integrando le risultanti, si ottengono queste altre due equazioni

$$z\int X dm - x\int Z dm + \int (xZ - Xz) dm +$$
$$\frac{c'\mu}{r ds} + \frac{dy}{ds}\xi + \frac{c'' dx - c dz}{m} d\xi = 0,$$
$$y\int Z dm - z\int Y dm + \int (zY - Zy) dm +$$
$$\frac{c\mu}{r ds} + \frac{dx}{ds}\xi + \frac{c' dz - c'' dy}{m} d\xi = 0:$$

le costanti portate dalle tre integrazioni qui eseguite, si suppongono contenute nelle tre nuove espressioni

$$\int(yX-Yx)dm,\ \int(xZ-Xz)dm,\ \int(zY-Zy)dm,$$

cioè una nella prima, un'altra nella seconda, e la terza nell'ultima.

In fine si faccia

$$z\int Ydm-y\int Zdm-\int(zY-Zy)dm=L,$$
$$x\int Zdm-z\int Xdm-\int(xZ-Xz)dm=M,$$
$$y\int Xdm-x\int Ydm-\int(yX-Yx)dm=N,$$

ed i tre integrali trovati diverranno

$$L-\frac{c}{rds}\mu-\frac{dx}{ds}\xi-\frac{c'dz-c''dy}{m}d\xi=0,$$
$$M-\frac{c'}{rds}\mu-\frac{dy}{ds}\xi-\frac{c''dx-cdz}{m}d\xi=0,$$
$$N-\frac{c''}{rds}\mu-\frac{dz}{ds}\xi-\frac{cdy-c'dx}{m}d\xi=0.$$

18.

Ora si ponga, pure per semplicità $\sqrt{[(dxd^2y-d^2xdy)^2+(dxd^2z-d^2xdz)^2+(dyd^2z-d^2ydz)^2]}$ ossia $rds=\varpi$, e si moltiplichino ordinatamente per $\frac{c}{\varpi}$, $\frac{c'}{\varpi}$, $\frac{c''}{\varpi}$ le ultime tre equazioni trovate quì sopra, e somminsi le tre risultanti, e si otterrà una equazione, nella quale i coefficenti delle quantità $\mu$, $\xi$, $d\xi$ visibilmente saranno

$$-\frac{1}{\varpi^2}(c^2+c'^2+c''^2),\ -\frac{1}{\varpi ds}(cdx+c'dy+c''dz),$$
$$-\frac{c}{m\varpi}(c'dz-c''dy)-\frac{c''}{m\varpi}(c'dx-cdy)-\frac{c'}{m\varpi}(c''dx-cdz),$$

il primo dei quali è evidentemente eguale ad uno, il secondo a zero per l'equazione prima esposta al paragrafo tredicesimo, ed il terzo identicamente nullo. Quindi la equazione risultante dalla detta addizione si ridurrà alla seguente

$$\frac{c}{\varrho}L+\frac{c'}{\varrho}M+\frac{c''}{\varrho}N-\mu=0,$$

dalla quale si ha immediatamente

$$\mu=\frac{c}{\varrho}L+\frac{c'}{\varrho}M+\frac{c''}{\varrho}N,$$

cioè il valore della $\mu$ elasticità.

19.

Finalmente, per determinare il valore della $\xi$, si moltiplichino le stesse tre ultime equazioni del paragrafo penultimo rispettivamente per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, e si sommino qui pure le tre risultanti, ed avrassi

$$\frac{dx}{ds}L+\frac{dy}{ds}M+\frac{dz}{ds}N-\xi=0,$$

per essere, stante l'equazione prima del tredicesimo paragrafo già più volte citato,

$$cdx+c'dy+c''dz=0,$$

ed evidentemente $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$, e nulla la quantità

$$-(c'dz-c''dy)dx-(c''dx-cdz)dy-(cdy-c'dx)dz.$$

Quindi $\xi=\frac{dx}{ds}L+\frac{dy}{ds}M+\frac{dz}{ds}N$, cioè il valore della $\xi$ torsione in quistione.

Se in questo valore della $\xi$ si pone in luogo delle L, M, N ciò che esse rappresentano, si ha un' espressione per la stessa $\xi$, alla quale si può dare con facilità la forma seguente

$$\frac{zdx-xdz}{ds}\int Ydm+\frac{xdy-ydx}{ds}\int Zdm+\frac{ydz-zdy}{ds}\int Xdm+$$
$$\frac{dx}{ds}\int(yZ-Yz)dm+\frac{dy}{ds}\int(zX-Zx)dm+\frac{dz}{ds}\int(xY-Xy)dm$$

che è quello del Signor Binet, di cui si è parlato nel paragrafo secondo.

Differenziando il valore della $\xi$, ed osservando, che

$$\frac{dx}{ds}dL+\frac{dy}{ds}dM+\frac{dz}{ds}dN=0,$$

si ha $d\xi = \mathrm{L}\, d\,\frac{dx}{ds} + \mathrm{M} d\,\frac{dy}{ds} + \mathrm{N} d\,\frac{dz}{ds}$, il che è singolare.

20.

Essendo $\int \mathrm{X} dm$, $\int \mathrm{Y} dm$, $\int \mathrm{Z} dm$ le grandezze di tre forze parallele rispettivamente agli assi delle coordinate $x$, $y$, $z$ ed equivalenti a tutte le forze esteriori, che agiscono sulla massa $m$, e $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ essendo i coseni degli angoli fatti dalla tangente cogli assi delle medesime coordinate, sarà

$$\frac{dx}{ds}\int \mathrm{X} dm + \frac{dy}{ds}\int \mathrm{Y} dm + \frac{dz}{ds}\int \mathrm{Z} dm$$

l' espressione della somma di quelle componenti di tutte le forze esteriori applicate alla massa $m$, che sono parallele alla tangente medesima.

21.

Così, essendo evidentemente L, M, N le somme dei momenti di tutte le forze esteriori applicate alla massa $m$, rispetto delle rette parallele ai tre assi delle coordinate, e che passano pel punto a cui corrispondono le $x$, $y$, $z$; e pel paragrafo sesto, essendo $\frac{c}{\varrho}$, $\frac{c'}{\varrho'}$, $\frac{c''}{\varrho''}$ i coseni degli angoli che fanno queste medesime parallele colla retta, che passa pel punto corrispondente alle coordinate stesse $x$, $y$, $z$ ed è perpendicolare al piano osculatore, riuscirà

$$\frac{c}{\varrho}\mathrm{L} + \frac{c'}{\varrho}\mathrm{M} + \frac{c''}{\varrho}\mathrm{N}$$

la somma dei momenti delle forze esteriori, che agiscono sulla massa $m$, rispetto della retta anzidetta, cioè della retta, che passa pel punto corrispondente alle coordinate $x$, $y$, $z$ ed è perpendicolare al piano osculatore.

22.

Similmente, per essere $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, come si è già detto, i coseni degli angoli fatti dalla tangente con quelle rette rispetto cui le somme dei momenti sono L, M, N, sarà

$$\frac{dx}{ds}\mathrm{L}+\frac{dy}{ds}\mathrm{M}+\frac{dz}{ds}\mathrm{N}$$

la somma dei momenti delle forze suddette rispetto della tangente.

23.

In ultimo, siccome $-\frac{ds}{r}d\frac{dx}{ds}$, $-\frac{ds}{r}d\frac{dy}{ds}$, $-\frac{ds}{r}d\frac{dz}{ds}$, sono i coseni degli angoli compresi fra il raggio di curvatura della linea in equilibrio e le rette rispetto delle quali i momenti delle forze esteriori sono L, M, N, così la somma dei momenti delle medesime forze rispetto della normale di cui è parte il raggio di curvatura stesso sarà evidentemente

$$-\frac{ds}{r}\left(\mathrm{L}\,d\frac{dx}{ds}+\mathrm{M}d\frac{dy}{ds}+\mathrm{N}d\frac{dz}{ds}\right).$$

24.

Quindi, stante i valori delle $\lambda$, $\mu$, $\xi$ trovati ai paragrafi sedicesimo, diciassettesimo, e diciannovesimo, concludiamo, che nello stato di equilibrio, la forza $\lambda$ eguaglia la somma di quelle componenti di tutte le forze esteriori agenti sulla massa $m$, che sono parallele alla tangente; $\mu$ la somma dei momenti delle stesse forze esteriori rispetto alla retta, che passa pel punto a cui corrispondono le coordinate $x$, $y$, $z$ ed è perpendicolare al piano osculatore; in fine che la $\xi$ eguaglia la somma dei momenti delle medesime forze relativamente alla tangente. Come, pel valore di $d\xi$ esposto alla fine del medesimo paragrafo diciannovesimo, sarà $-\frac{ds}{r}d\xi$ la

somma dei momenti rispetto della normale in cui cade quel raggio di curvatura della curva in equilibrio, il quale passa pel punto corrispondente alle coordinate $x$, $y$, $z$.

25.

Fra le infinite rette che possano passare pel punto a cui corrispondono le coordinate $x, y, z$, quella intorno della quale le forze esteriori applicate alla massa $m$, produrranno il massimo momento, farà cogli assi delle coordinate degli angoli i cui coseni saranno rispettivamente

$$\frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$$

e colle rette intorno delle quali i momenti sono eguali a $\mu$, $\xi$, $-\frac{ds}{r}d\xi$, farà degli angoli i coseni dei quali saranno

$$\frac{\mu}{\sqrt{(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2)}}, \frac{\xi}{\sqrt{(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2)}}, \frac{-\frac{ds}{r}d\xi}{\sqrt{(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2)}}$$

ed il massimo momento stesso sarà eguale a

$$\sqrt{(L^2+M^2+N^2)} \text{ ossia a } \sqrt{\left(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2\right)},$$

siccome facilmente si comprende colla teorica della composizione dei momenti. Quindi la massima resistenza necessaria che dovranno opporre le parti della curva nel punto corrispondente alle coordinate $x$, $y$, $z$, affinchè essa non si spezzi in esso punto, dovrà esser quella, la quale si oppone alla rotazione, che potrebbe aver luogo intorno alla retta quì determinata.

26.

Le tre equazioni, che formano lo scopo principale dei paragrafi anzi-citati e che equivalgono alle prime tre del paragrafo quindicesimo, si possono trovare anche, senza ricorrere al principio fecondissimo delle velocità virtuali di Gio-

vanni Bernulli ovvero allo equivalente degli indeterminati di Poinsot e riprodotto dal Magistrini, usando cioè immediatamente il principio della composizione delle forze.

Consideriamo la curva nel suo stato di equilibrio, e come composta di due porzioni, cioè della porzione $m$ e dell' altra; e supponiamo queste parti ambedue rigide, più la seconda immobile, ossia fissa nello spazio.

La natura del sistema costituito dai punti della curva è tale, che i movimenti possibili, onde alterare le distanze della sua parte dall' altra parte, sono, o di moversi parallelamente alla retta tangente, o di rotare intorno di questa medesima retta, ovvero intorno alla retta che passa pel punto a cui corrispondono le stesse coordinate $x, y, z$ ed è perpendicolare al piano osculatore; quindi impediti questi tre movimenti la prima parte di essa curva non si potrà nè avvicinare nè allontanare dalla seconda, cioè saranno impediti i movimenti relativi fra le parti della curva stessa. Ma la parte $m$ della curva è spinta parallelamente alla tangente da una forza eguale a

$$\frac{dx}{ds}\int X dm + \frac{dy}{ds}\int Y dm + \frac{dz}{ds}\int Z\, dm\,,$$

a rotare intorno a questa medesima retta con un momento eguale a

$$\frac{c}{\varrho} L + \frac{c'}{\varrho} M + \frac{c''}{\varrho} N,$$

ed intorno la detta retta perpendicolare al piano osculatore col momento

$$\frac{dx}{ds} L + \frac{dy}{ds} M + \frac{dz}{ds} N;$$

adunque, se $\lambda$ esprimerà la tensione della curva nello stato di equilibrio, $\mu$ la forza che si opporrà alla rotazione intorno la detta retta perpendicolare al piano osculatore cioè la elasticità, e $\xi$ quella forza, che impedisce la rotazione intorno la tangente cioè la torsione, sarà

$$\lambda = \frac{dx}{ds}\int X dm + \frac{dy}{ds}\int Y dm + \frac{dz}{ds}\int Z\, dm\,,$$

$$\mu = \frac{c}{v} L + \frac{c'}{v} M + \frac{c''}{v} N,$$

$$\xi = \frac{dx}{ds} L + \frac{dy}{ds} M + \frac{dz}{ds} N$$

le quali relazioni sono visibilmente quelle trovate sopra col principio delle velocità virtuali.

27.

Ora passo a considerare i termini, che sono fuori del segno integrale, cioè quelli che si riferiscono ai termini della curva in equilibrio, e dai quali si deducono le relazioni, che debbono avere le forze, affinchè non abbiano luogo movimenti comuni. Quelli provenienti dalla variazione della $x$ sono, come abbiamo veduto ai paragrafi nono e decimo,

$$\left(\lambda \frac{dx}{ds} + A\mu + Bd\mu + C\xi + Dd\xi + Ed^2\xi\right)\delta x$$
$$-(B\mu + F\xi + Ed\xi)\,\delta dx + E\xi\delta d^2x, \text{ ove}$$
$$F = D - d\frac{1}{m};$$

e però pel paragrafo undecimo i termini analoghi provenienti dalle variazioni delle $y$, $z$ saranno

$$\left(\lambda \frac{dy}{ds} + A'\mu + B'd\mu + C'\xi + D'd\xi + E'd^2\xi\right)\delta y$$
$$-(B'\mu + F'\xi + E'd\xi)\,\delta dy + E'\xi\delta d^2y,$$
$$\left(\lambda \frac{dz}{ds} + A''\mu + B''d\mu + C''\xi + D''d\xi + E''d^2\xi\right)\delta z$$
$$-(B''\mu + F''\xi + E''d\xi)\,\delta dz + E''\xi\delta d^2z:$$

$F'$, $F''$ hanno colla $F$ relazioni simili a quelle, che hanno $B'$, $B''$ colla $B$.

28.

Se la curva sarà interamente libera, rimarranno indeterminate tutte le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta dx$, $\delta dy$, $\delta dz$, $\delta d^2x$,

$\delta d^2y$, $\delta d^2z$ tanto al principio quanto al fine dell' integrale; e però, affinchè spariscano i termini anzi-esposti, dovranno essere nulle tutte le quantità $\lambda$, $\mu$, $d\mu$, $\xi$, $d\xi$, $d^2\xi$ sì al principio che al fine del medesimo integrale. Se la prima estremità sarà fissa, a questa medesima estremità saranno nulle le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, epperò spariranno i termini moltiplicati per esse; quindi l'annullamento dei termini relativi a questa estremità richiederà solamente quello delle $\mu$, $d\xi$, $\xi$. Così, se alla prima estremità della curva fosse individuato anco il luogo geometrico della tangente corrispondente, dalle anzidette espressioni sparirebbero anche $\delta dx$, $\delta dy$, $\delta dz$; e però a questa estremità si annullarebbe solamente la $\xi$; in ultimo, se la curva avrà fisse ambedue le estremità, saranno nulle sì all' una che all' altra le tre quantità $\mu$, $\xi$, $d\xi$ per la indeterminazione delle variazioni $\delta dx$, $\delta dy$, $\delta dz$, $\delta d^2x$, $\delta d^2y$, $\delta d^2z$ ad ambedue le medesime estremità.

Così, se alle estremità della curva vi fossero applicate delle forze particolari, o le estremità medesime dovessero moversi in superficie o linee date, sommando i momenti virtuali di queste forze esteriori o di questi ostacoli coi termini rimasti fuori del segno integrale, e sopra esposti, e trattando l' equazione risultante, come se rappresentasse un equilibrio particolare a questi punti, si avrebbero anco in questi casi, le proprietà delle quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$, ai termini stessi.

29.

Colle proprietà quì accennate delle quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$, $d\mu$, $d\xi$, $d^2\xi$, e col soccorso delle ultime equazioni esposte ai paragrafi quindicesimo e diciassettesimo si trovano facilmente le note relazioni, che debbono avere le forze esteriori, affinchè non abbiano luogo movimenti comuni. Io non espongo queste equazioni, giacchè sarei obbligato anche in questa occasione a ripetere ciò che dice Lagrange nella sua Meccanica Analitica, parlando dell' equilibrio delle curve dette da

lui elastiche, ma fo però osservare, che per istabilire con questo metodo le dette equazioni, si ha bisogno di annullare delle quantità, le quali sono in generale finite, od infinitesime se sono differenziali, per tutti gli altri punti della curva, e non già infinite, come succede in quello di Lagrange.

30.

Quando la curva sarà rigida, colle equazioni dalle quali verrà data la sua figura, cioè colle equazioni dà cui verrà essa rappresentata in una data posizione, insieme alle altre sue proprietà o date o determinate, che sono necessarie per impedire i movimenti comuni, si avranno le equazioni rappresentanti la medesima nella posizione di equilibrio; e cavando da queste ultime equazioni i valori di due fra le coordinate $x$, $y$, $z$ e sostituendoli nelle espressioni trovate delle $\lambda$, $\mu$, $\xi$, si otterranno immediatamente queste tre forze, le quali equivarranno allo sforzo, che faranno le forze esteriori per cambiare la figura alla curva stessa vale, a dire otterransi la tensione, la elasticità, e la torsione di essa.

31.

Qualunque sia la natura della curva, se le tre forze $\lambda$, $\mu$, $\xi$ saranno date in funzioni delle sole coordinate $x, y, z$ o saranno date due equazioni fra queste forze e le stesse coordinate; nel primo caso, ponendo i dati valori delle $\lambda$, $\mu$, $\xi$ nelle prime tre equazioni del paragrafo quindicesimo, avransi tre nuove equazioni fra le coordinate $x$, $y$, $z$, due qualunque delle quali saranno quelle, che rappresenteranno la curva nella posizione dell'equilibrio; e nell'altro caso, eliminando le quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$ dalle due equazioni date e dalle tre anzidette del paragrafo quindicesimo, si otterranno due equazioni fra le sole coordinate $x, y, z$, le quali rappresenteranno la curva stessa nella posizione dell' equilibrio.

32.

Pelle curve elastiche saranno $\lambda$, $\mu$, $\xi$ funzioni delle coordinate $x$, $y$, $z$ e dell' allungamento od accorciamento che avrà subìto la curva nello stato di equilibrio. Sostituendo queste funzioni nelle prime equazioni del paragrafo quindicesimo in vece delle stesse $\lambda$, $\mu$, $\xi$, si avranno bensì tre equazioni fra le coordinate $x$, $y$, $z$ della curva in equilibrio, ma in esse vi sarà l' allungamento o l' accorciamento incognito subìto dalla curva sotto l' azione delle forze nello stato di equilibrio; ed eliminando quest' ultima quantità, cioè l' allungamento o l' accorciamento anzidetto, si otterranno due equazioni, le quali rappresenteranno la curva nello stato di equilibrio.

Con queste equazioni e colle espressioni delle quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$ trovate ai paragrafi sedicesimo, diciassettesimo, potransi avere tre funzioni di una sola di queste coordinate, le quali rappresentino le stesse tre forze $\lambda$, $\mu$, $\xi$, cioè la tensione la elasticità, e la torsione della curva completamente elastica, in equilibrio.

33.

In fine, se fossero conosciute la figura della curva nello stato di equilibrio, e le funzioni delle sole coordinate rappresentanti le forze $\lambda$, $\mu$, $\xi$, colle medesime prime equazioni del paragrafo quindicesimo, si potrebbero trovare le forze esteriori X, Y, Z.

34.

Se pei poligoni rigidi, ovvero completamente o solo in parte elastici, si farà col calcolo delle differenze finite, ciò che si è fatto superiormente col calcolo differenziale per le curve, si troveranno dei risultamenti, i quali avranno cogli esposti e dimostrati superiormente, quei medesimi rapporti che hanno quelli, che trovai in altra occasione pei poligoni co-

gli analoghi delle curve, che si trovano nella Meccanica analitica di Lagrange.

## NOTA.

Nel volume delle corrispondenze della scuola Politecnica di Francia pubblicato l'anno appena scorso vi è una breve memoria del celebre Poisson sulle linee elastiche a doppia curvatura. Le tre equazioni, che egli trova necessarie per l'equilibrio, sono differenti dalle nostre, più non si possono dedurre tutte da queste. Affinchè si vegga l'origine di questa differenza, esporrò qui in breve i ragionamenti, che egli fa in quella memoria per trovare le dette tre equazioni.

Si consideri la curva in equilibrio composta di due parti, precisamente come si è fatto al paragrafo vigesimosesto, e si ritengano tutte le denominazioni usate già più volte.

Per la teorica dei momenti saranno $L, \frac{c}{\varrho}\mu, \frac{dx}{ds}\xi$ i rispettivi momenti delle forze esteriori, della elasticità, e della torsione rispetto della retta parallela all'asse delle $x$, e che passa pel punto corrispondente alle coordinate $x, y, z$: così saranno $M, -\frac{c}{\varrho}\mu, -\frac{dy}{ds}\xi$; $N, -\frac{c''}{\varrho}\mu, -\frac{dz}{ds}\xi$ i momenti analoghi rispetto delle altre due rette parallele rispettivamente agli assi delle $y, z$ e che passano pel punto a cui corrispondono le coordinate $x, y, z$. Quindi, affinchè la prima parte della curva non concepisca verun movimento di rotazione intorno al punto corrispondente alle stesse coordinate $x, y, z$, dovranno sussistere contemporaneamente le tre equazioni seguenti

$$L - \frac{c}{\varrho}\mu - \frac{dx}{ds}\xi = 0,$$

$$M - \frac{c'}{\varrho}\mu - \frac{dy}{ds}\xi = 0,$$

$$N - \frac{c''}{\varrho}\mu - \frac{dz}{ds}\xi = 0:$$

nelle quali, ponendo in luogo delle L, M, ed N ciò, che esse rappresentano, si ottengono le suddette di Poisson.

Prescindendo dalla tensione della curva in equilibrio, i rapporti, che ha la quistione trattata da Poisson con quella trattata da noi superiormente, sono i seguenti. Egli suppone tacitamente che, la prima parte della curva possa concepire qualunque movimento di rotazione intorno al punto a cui corrispondono le coordinate $x$, $y$, $z$, per cui la natura del sistema costituito dalla curva non rende impossibile verun movimento di rotazione intorno al punto stesso: noi invece abbiamo tacitamente supposto impossibile, che la prima parte rotasse intorno al raggio di curvatura corrispondente al medesimo punto dato dalle coordinate $x$, $y$, $z$, movimento, il quale se accadesse, farebbe cambiare natura al sistema, rendendo la linea discontinua; onde pel nostro equilibrio non fa d'uopo, che le forze esteriori applicate alla prima parte abbiano la proprietà necessaria per impedire insieme agli altri movimenti anche questo, essendo desso impossibile per la natura medesima del sistema. All' opposto, per Poisson, le forze esteriori debbono avere tali relazioni d' impedire insieme agli altri movimenti anche quest' ultimo, vale a dire, oltre le relazioni esposte pel caso nòstro, esse dovranno avere quella, che è necessaria per l' annullamento della somma dei loro momenti rispetto della retta nella quale cade il raggio di curvatura.

Tutte queste proprietà o relazioni sono appunto espresse dalle tre equazioni anzi-esposte. Di fatto, si moltiplichino esse separatamente per

$$\frac{c}{\varrho}, \frac{c'}{\varrho}, \frac{c''}{\varrho}; \text{per } \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}; \text{ e per } d\frac{dx}{ds}, d\frac{dy}{ds}, d\frac{dz}{ds};$$

e si sommino fra loro, le tre risultanti dalla prima di queste operazioni, le tre risultanti dalla seconda, e le tre provenienti dall' ultima, e si avranno le tre equazioni seguenti

$$\frac{c}{\varrho} L + \frac{c'}{\varrho} M + \frac{c''}{\varrho} N - \mu = 0,$$

$$\frac{dx}{ds} L + \frac{dy}{ds} M + \frac{dz}{ds} N - \xi = 0,$$

$$L\, d\frac{dx}{ds} + M\, d\frac{dy}{ds} + N\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

precisamente equivalenti a quelle di Poisson dalle quali si sono desunte.

Le prime due di queste ultime equazioni sono visibilmente le stesse nostre esposte ai paragrafi diciottesimo, diciannovesimo, ed esprimono che non vi sarà movimento di rotazione nè intorno la tangente nè intorno alla nota retta perpendicolare al piano osculatore; e la terza esprime evidentemente, per quello che si è detto al paragrafo vigesimoterzo, che è nulla la somma dei momenti delle forze esteriori, rispetto della retta nella quale cade il raggio di curvatura della linea in equilibrio.

Nella ipotesi di Poisson, stante l'ultima equazione esposta e ciò che si è trovato alla fine del paragrafo diciannovesimo, sarà $d\xi = 0$; cioè costante la torsione: proprietà singolarissima dimostrata altrimenti dallo stesso Poisson.