DELLA IMPOSSIBILITA' DELLA QUADRATURA DEL CERCHIO

MEMORIA

Di Tommaso Valperga Caluso

Ricevuta il dì 24. Ottobre 1801.

UNa persona ostinata a perdere il tempo dietro una sua pretesa quadratura del Cerchio mi fa seriamente pensare quanto sarebbe utile, che da tutti i Maestri di Geometria si desse ai discepoli per certissimo essere la mentovata quadratura impossibile quale da male istruiti si cerca siccome cognitissima e possibile. Perchè non per altro alcuni tuttora si stillano inutilmente il cervello in sì sciagurato problema, se non perchè si dice non esserne dimostrata l'impossibilità; la qual cosa essi interpretano come s'ella fosse negata. Montucla ne ha scritto un egregio volumetto, *Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle*. Paris 1754, dove trovasi molto pure di dottrinale; ma sono forse necessarj maggiori schiarimenti. Onde rimandando a lui per quanto si può desiderare di Storico, ristringerommi alla speculativa, la quale volendo sgombrare da ogni dubbio e oscurità, stimo bene cominciare un pò da lontano.

1. Due grandezze essendo tali, che l'una per l'altra vicendevolmente restin determinate, chiamansi *funzioni* l'una dell'altra; e *relazione* chiamasi quella qualunque connessione, che passa fra esse, e reciprocamente l'una in dipendenza dell'altra determina; onde notando X un' espressione di qualunque numero di termini composti comunque di x, e di cognite, o costanti, che le vogliam dire, una forma $y = X$, per cui dato x si ha y, sarà la relazione di y a x.

Quan-

Quando X è composto di un numero finito di termini, potendosi questi esprimer tutti, non è necessario che passi fra essi alcuna legge di formazione successiva; ma sarà questa necessaria per quelli innumerabili termini, che forza è tralasciare da proseguirsi, quando il numero de' termini non ha fine. Sicchè X potrà comporsi di termini, che non fan serie, di serie, e di serie di serie, che sempre si sottintendano di termini senza fine.

Le serie non danno propriamente la determinazione, se non quando è noto il limite della somma della serie, il quale essendone l' esatto valore, sostituendolo riducesi X a un numero finito di termini. In altro caso se la serie è convergente, è buona e vera; ma non dando che un' approssimazione, e non tutti i valori, a cui la relazione si estende, non n' è mai l' espressione perfetta, benchè ne sia la propria, quando non se ne può avere una finita.

Termini algebraici son quelli, che si possono costruire geometricamente, e funzione algebraica quella, di cui la relazione può esprimersi con un finito numero di termini tutti algebraici, e quando ciò non si può, la funzione chiamasi *trascendente*.

Ma per accertare che sielo, è chiaro non bastare che non sappiasi, ma convenir dimostrare che assolutamente non si può la relazione esprimere con un numero finito di termini algebraici.

2. Però a vederne il caso il più semplice, sia la progressione $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\, a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3}$, &c., di cui se ciascun termine si paragoni con a, si ha primieramente la ragione di uguali-tà $\frac{a}{a} = 1$, non composta di ragione alcuna di b ad a; onde il numero delle ragioni $\frac{b}{a}$, che compongono quella prima ragione $\frac{a}{a}$, sarà *zero*. Il secondo paragone ci darà $\frac{b}{a}$, che

con-

contiene precisamente una volta la mentovata ragione. Il terzo termine $\frac{b^2}{a}$ comparato con a ne dà $\frac{b^2}{a^2}$ composto di due delle suddette ragioni. Quindi $\frac{b^3}{a^2} : a$ ne dà una ragione composta di tre $\frac{b}{a}$, e il termine seguente ce la dà composta di quattro, e generalmente i numeri delle ragioni $\frac{b}{a}$ componenti la ragione di ciascun termine al primo a saranno i termini della progressione aritmetica 0, 1, 2, 3, 4, &c.

Ma la geometria ci somministra il mezzo non solo di continovare la prima progressione con terze proporzionali all' infinito, ma d'interpolarla altresì con mezze proporzionali all' infinito, cominciando da $\sqrt{ab}$, che ci dà il termine di mezzo fra a e b; quindi $\sqrt{a\sqrt{ab}} = a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}$ non solo ci dà quello, che dee precedere $\sqrt{ab}$, ma, mediante una terza o una quarta proporzionale, il susseguente $a^{\frac{5}{8}} b^{\frac{3}{8}}$. E così generalmente col numero m di mezze proporzionali successive, le quali ci danno la radice dell' ordine 2^m, si ha il numero di termini $2^m - 1$ da interpolarsi non solo fra a e b, ma per via di terze o di quarte proporzionali da continuarsi fra tutti i termini della prima progressione all' infinito.

Che se compariamo con a il primo degli interpolati $a\sqrt[2^m]{\frac{b}{a}} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{1:2^m}$, avremo $\left(\frac{b}{a}\right)^{1:2^m}$ composto del numero 2^{-m} di ragioni $\frac{b}{a}$ submultiplicate, dovendosi per lo segno negativo pigliar al contrario, che vale a dire che in vece di essere quella ragione composta di tante $\frac{b}{a}$, si è questa

sta $\frac{b}{a}$ composta del numero 2^m di ragioni $b^{1:2^m} : a^{1:2^m}$.

Così per esempio pigliando fra i primi termini venticinque mezze proporzionali successive, avremo $2^{25} - 1 = 33554431$ termini a interpolare fra quei, che immediatamente si seguono nelle due prime progressioni; e tuttavia le due progressioni $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\, a,\ a\left(\frac{b}{a}\right)^{1:2^m},\ a\left(\frac{b}{a}\right)^{2:2^m},\ a\left(\frac{b}{a}\right)^{3:2^m}$, &c., $0, \frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, \frac{3}{2^m}$, &c. avranno i termini sempre tali, che il n^{esimo} della seconda essendo $\frac{n-1}{2^m}$, il corrispondente della prima $a\left(\frac{b}{a}\right)^{(n-1):2^m}$ si potrà geometricamente sempre determinare.

3. Se pertanto più generalmente io suppongo $y = c^x$, potendo fare $a = 1$, $b = c$, sempre che sarà $x = \frac{n-1}{2^m}$, essendo m, n numeri intieri e positivi, y sarà funzione algebraica di x, e di quelle, che si possono costruire colla geometria piana. Ma se x è una frazione, che nella espressione sua più semplice abbia nel denominatore per fattori de' numeri primi altri che 2, onde ponendo qualsivoglia numero intiero per m ed n, non possa mai essere $\frac{n-1}{2^m} = x$, non potranno x ed y esser termini delle due progressioni, come dianzi interpolate; ma potranno inserirsi nelle prime 0, 1, 2, 3 &c. a, b, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{b^3}{a^2}$, &c. con quella interpolazione, che il caso richieda, pigliando per esempio fra due termini della seconda due medie in proporzione continua, se un fattore è

3. Siccome però a pigliar due tali medie bisogna uscire dalla geometria piana, la determinazione di y quando $x = \frac{n-1}{2^m . 3^r}$, non sarà più possibile a tale geometria: ma non per ciò lascierà y di essere funzione algebraica di x. Solo il problema non sarà più del secondo, ma del terzo grado; come sarà del quinto, se il numero primo fattore del denominatore sarà 5. E così proseguendo per tutti i numeri primi avremo una serie infinita di casi, in cui y non lascierà di essere funzione algebraica, benchè d' ordini successivamente sempre superiori, che vanno sempre accrescendo difficoltà all' infinito, la quale potrà superarsi tanto più oltre, quanto sarà più perfetto ed esteso il saper nostro.

4. Ma se fo $x = \sqrt{2}$, allora i progressi, che può fare la scienza, non ci possono più dare speranza alcuna, mentre sappiamo che l' espressione di $\sqrt{2}$ con numeri finiti è dimostrata impossibile assolutamente, e che a essendo una linea, $a\sqrt{2}$ è un limite, al quale con parti aliquote di a si può bene andar presso quanto si vuole, ma giunger non mai. Il 47453132mo termine della progressione aritmetica recata dianzi in esempio differisce così poco da $\sqrt{2}$, che appena se ne può dir minore; onde $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{47453131}{33554432}}$, che gli corrisponde nella progressione geometrica, sarà prossimo a $y = {}_c\sqrt{2}$; ed è chiaro che se ne potrà avere uno quanto si voglia più appressante con un maggior numero di medie proporzionali successive. Ma nulla gioverebbe saper costrurre $a\left(\frac{b}{a}\right)^{(n-1):2^m.3^r.5^s.\ \&c.}$; perchè nè più, nè meno non si potrebbe mai avere nè un termine della progressione aritmetica $= \sqrt{2}$, nè uno della geometrica $= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{2}}$. E lo

stes-

stesso è chiaro fatto $x = \sqrt{3}$, o a qualunque altra radice sorda. Sempre che x sia irrazionale, la relazione $y = c^x$ sarà trascendente.

5. Che se dalla sezione delle ragioni passiamo a quella degli angoli, e però degli archi in parti della periferia π, la geometria piana ci dà le corde di tutti gli archi $\frac{\pi}{2^m}$, $\frac{\pi}{3.2^m}$, $\frac{\pi}{5.2^m}$, $\frac{\pi}{15.2^m}$, ed oltre queste quattro serie di poligoni regolari, combinando i termini di serie diverse, per addizione o sottrazione, si hanno gli archi d'innumerabili settori, che non sono parti aliquote della circonferenza; de' quali tutti basterà la geometria piana a determinare la corda, il seno, il coseno, la tangente &c., che perciò saranno tutte funzioni del raggio di quella prima classe, di cui $y = c^x$, quando $x = \frac{n-1}{2^m}$. Che se aggiungonsi tutti gli archi espressi da $\frac{\pi}{2^m.3^n}$, $\frac{\pi}{5.2^m.3^n}$, che si hanno colla trisezione dell' angolo, che sì elegantemente si fa coll' iperbole, si uscirà dai limiti della geometria piana, e vieppiù ricorrendo a un' Equazione di quinto grado, che colle precedenti ne dia $\frac{\pi}{2^m.3^n.5^r}$. Così però proseguendo per tutti i numeri primi sempre con un' Equazione dell' ordine indicato dal numero, verranno pur sempre le funzioni dell' angolo di quel genere, di cui abbiam veduto $y = c^x$, quando x frazione razionale ha nel denominatore alcun fattore numero primo altro che due.

Ma se l'arco è $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, o più generalmente $\frac{m\pi}{n\sqrt{q}}$, ove $\sqrt{q}$ sia irrazionale, sarà il terzo caso delle funzioni trascendenti, poichè richiede un' Equazione dell' ordine $\sqrt{q}$, più impossibile ancora a ridursi a espressione finita che un solo termine coll' esponente irrazionale.

6. Or dall' angolo passiamo all' area d'un triangolo isoscele, di cui l' angolo fra i lati eguali sia A. Il qual angolo fatto variare fra' lati costanti, il triangolo sarà massimo quando A sia retto: nel qual caso se vogliamo che l' area del triangolo sia $= 1$, dovranno farsi i lati $= \sqrt{2}$, e l'area d' ogni altro triangolo sarà $2 \text{ sen.} \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = \text{sen.} A$. Sia dunque $v = \text{sen.} A$ (*) l'area del triangolo variante; la relazione di v al raggio sarà nei limiti della geometria piana sempre che A sia una frazione di π, nel cui denominatore non sieno altri fattori numeri primi che 2 quanti si vuole, un solo 3, un solo 5; sarà algebraica, ma superiore, quando nel denominatore di π sieno altri fattori numeri primi, ma pur sia frazione razionale. Ma dove A sia frazione irrazionale, la relazione di v al raggio sarà trascendente.

7. Sia z il segmento circolare sotteso dalla corda opposta ad A, $z + v$ sarà l' area del settore, che moltiplicato per $\frac{n}{m}$, essendo $A = \frac{m\pi}{n}$, darà l' area di tutto il cerchio. Che però dato un valore di z, se la relazione di v al raggio è nei limiti della geometria piana, è evidente che si avrà per essa ogni altro qualunque segmento z' per ogni altro angolo A', che sia similmente ne' limiti della geometria piana; poichè col dato valore di z trovata l' area del cerchio, e divisala nella ragione di $\pi : A'$, si avrà l' area del settore, da cui tolto il triangolo v', resterà z'.

Che se z sia dato per un valore di A, che sia nel secon-

(*) Seni per metafora dovettero primieramente chiamarsi i triangoli v, e quindi le perpendicolari, cui sono proporzionali, e che calcolate, come anche gli archi, pel raggio $= 1$, sono le aree di essi triangoli, e de' settori col raggio $= \sqrt{2}$, il quale suppone la stessa unità, che agguaglia ai logaritmi naturali le aree di quei, che possiam chiamare settori Iperbolici.

condo caso della relazione di v al raggio, algebraica, ma superiore, tutti gli altri valori, che se ne potranno ritrarre, di z, saranno per lo meno egualmente al di là de' limiti della geometria piana; perchè bisogna sempre cominciare dalla determinazione di A ed v. Se non che determinata una volta per mezzo di z con costruzione geometrica di qual si fosse grado l' area del cerchio, cominciando poscia da questa, come data, il problema si ridurrebbe per ogni altro angolo A' alla classe della relazione di v'.

Nè altrimenti se z sia dato a luogo, dove la relazione di v al raggio sia trascendente, verranno a essere trascendenti col cerchio tutti senza eccezione i segmenti sottesi a qualunque angolo; perchè trascendente essendo la relazione di v al raggio, l' è necessariamente eziandio quella del settore $v + z$, da cui si ha da trarre l' area del cerchio per passare agli altri segmenti.

8. Quindi si fa chiaro 1.° quello, che già da tutti i Geometri si concede, essere impossibile la quadratura geometrica del cerchio *indefinita*, cioè per qualsivoglia sua parte; 2.° ch' ella non può darsi per un segmento, un settore geometrico, che non sia data in conseguenza per infiniti altri, e pel cerchio intero; 3.° che se alcun valore di z è trascendente sotto un angolo di sezione geometrica, ne seguirà non esservi segmento, la cui relazione al raggio non sia trascendente; e però sarà impossibile non la sola quadratura indefinita, ma eziandio la definita.

Sicchè questa celebre distinzione si riduce a un' eccezione, che si avrebbe a fare quando fosse del resto la quadratura del cerchio possibile; che se ne avrebbero a eccepire i casi, dove s' avesse a tagliare un angolo, un arco, la cui ragione alla circonferenza fosse irrazionale. La qual cosa quantunque vera, non farebbe però torto a una quadratura geometrica, procedendo da un' impossibilità, per cui eziandio l' area de' triangoli rettilinei $v = \text{sen. A}$ in que' medesimi casi non si può avere geometricamente.

9.

9. Nè però è men chiaro che dall' impossibilità d' una Equazione finita, che ci dia il settore $\frac{r\pi}{2q}$, ove q sia irrazionale, ha necessariamente a seguirne l'impossibilità d'una Equazione generale finita, che ci dia i segmenti. Poichè sia la saetta $r-x$, posto $z=X$ funzione di x del grado m, essendo $v=x\sqrt{r^2-x^2}$, ed $v+z=\frac{r\pi}{2q}$, si avrebbe $x\sqrt{r^2-x^2}=\frac{r\pi}{2q}-X$, $r^2x^2-x^4=\frac{r^2\pi^2}{4q^2}-\frac{r\pi X}{q}+X^2$; e però trovato π mediante un valore di z preso dove v sia geometrico, avrebbesi x mediante un' Equazione del grado $2m$ per qualunque valore di q, eziandio irrazionale. Sicchè non solo per li settori, ma pur anche per li segmenti ogni Equazione generale finita è impossibile; e però non la sola quadratura indefinita è impossibile, ma eziandio la definita. Perchè la sola parte semplice del cerchio essendo il segmento, facilmente s' intende niuna parte di esso potersi avere che non s' abbia il segmento; e niun segmento può aversi geometricamente, se non per via d' un' Equazione, che vaglia per tutti. Poichè non trattandosi di una coincidenza fortuita di valori, per cui possa certo segmento capitare a essere uguale a certa superficie rettilinea, ma d' egualità necessaria per la connessione della grandezza del segmento con quella di una retta, l' Equazione che la connession loro include ed esprime, non può non esser la stessa per qualunque segmento; mentre la semplicità e l' uniformità del cerchio in ogni sua parte esclude evidentemente ogni varietà di casi, per cui possa un' Equazione fra le sue funzioni aver luogo in alcuna sua parte, e non in alcun' altra.

10. Ond' anche niuna forza ha l' esempio ricordato da Montucla pag. 95. di alcune curve Bernoulliane non quadrabili indefinitamente, che pur non lasciano di aver quadrabili uno o più spazj determinati. Perchè son curve composte

di

di due, togliendo, o aggiungendo all' ordinata dell' una quella dell' altra, *e. g.* di $u = \frac{a^2}{2\sqrt{2ax - x^2}}$, $v = \frac{x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$, facendo $u - v = y = \frac{a^2}{2\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$, di $u = \sqrt{a^2 + x^2}$, $v = \frac{1}{2}\sqrt{ax + \frac{1}{4}x^2}$, facendo $u + v = y = \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{ax + \frac{1}{4}x^2}$, che sono esempj dello stesso Giovanni Bernoulli (*v. Opera* t. III. pag. 405, e 409). Queste hanno spazj quadrabili per lo stesso principio, che il sono le lunule, perchè non v' ha ragione, per cui la differenza o la somma di due trascendenti sia trascendente; poichè ad A algebraico aggiungendo X trascendente, ho $A + X = Z$ trascendente, $Z - X = A$ algebraico; da A togliendo X, ho $A - X = Z'$ trascendente, $X + Z' = A$ algebraico. Che poi sieno quadrabili in alcuno e non in tutti i punti, viene da combinazioni, che si potran vedere presso lo stesso Bernoulli, bastandomi l' accennato a non lasciar dubbio sul punto dell' universalità, onde tanto sia certa l' impossibilità della quadratura del cerchio finita, quanto è certo che la fluente, o integrale che la vogliam dire, di $dx\sqrt{1 - x^2}$ è trascendente.

11. Che se questo non da tutti si reputa per li principj del calcolo integrale dimostrato abbastanza, ciò avviene perchè in flussioni complicate talora accadendoci di non saperne dare la fluente finita, quando pur si può, chi non discute minutamente i casi e le ragioni, non vede perchè non possa lo stesso aver luogo in espressioni più semplici, quali sono quelle delle flussioni dell' area $dx\sqrt{1 - x^2}$, $dx\sqrt{2x - x^2}$, o dell' arco $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$, $\frac{dx}{1 + x^2}$, $\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, se-

con-

condo che x noti il seno o retto o verso, o la tangente o la segante. Le quali flussioni tutte convengono in ripugnare alle condizioni, che necessariamente debbono trovarsi nelle flussioni esatte, intiere di fluenti algebraiche, e tutte sono state volte e rivolte in ogni possibil modo. Non può esistere una flussione, la cui fluente sia algebraica, e non si sappia, se non perchè niuno mai abbia cercata la flussione di tal fluente; e sebbene in tutta l'estensione dell'Algebra senza numero abbiano a essere le fluenti non esaminate da alcuno, non perciò è da temere che sia sfuggita a ogni calcolo alcuna di quelle ristrette combinazioni di formole, di cui la flussione possa avere qualche affinità colle circolari; come non perchè niuno può sapere tutte le voci, che si possono scrivere colle venti lettere dell'alfabeto, è men certo quante e quali sono puro anagramma di Roma.

E chi non intende la forza di alcune ragioni può rassicurarsi considerando quanta maestria si scorge ne' metodi, che abbiamo, di dar la fluente di Xdx, qualunque possa mai essere in tutta l'estensione dell'algebra l'espressione di X funzione di x, sempre che si sappia stralciarla e scomporla, e si possa al bisogno liberarla da radicali; e come allora la fluente si ha sempre con un numero finito di termini algebraici, o dipendenti dalle quadrature o del Cerchio, o dell'Iperbole; onde a queste quadrature si riducono altre innumerabili trascendenti.

12. Ed è da avvertire che sebbene la trascendenza della quadratura dell'Iperbole sia pur anch'essa certissima, vieppiù trascendente vuol riputarsi quella del Cerchio. Imperciocchè sia a = CA (Fig. 1.ª) il raggio di MAm, e la tangente AT = t, il triangolo CMm = v, il segmento PMAm = z; e sia M'Am' l'arco dell'Iperbole, di cui amendue gli assi eguali a $2a$; il triangolo CM'm' = v', il segmento P'M'Am' = z'. Avremo CP = $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$, PM = $\frac{at}{\sqrt{a^2+t^2}}$, v = $\frac{a^3t}{a^2+t^2}$.

$\frac{a^3t}{a^2+t^2}$. E nell' Iperbole, posto CP' $= x$, onde P'M' $=$ $\sqrt{x^2-a^2} = \frac{tx}{a}$, $a^2x^2 - a^4 = t^2x^2$, $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-t^2}} =$ CP', P'M' $= \frac{at}{\sqrt{a^2-t^2}}$, $v' = \frac{a^3t}{a^2-t^2}$. Ora la flussione del segmento z è la flussione di AP per 2PM; la flussione di AP è quella di CP $\left(\frac{-a^2tdt}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ col segno contrario; sicchè $dz =$ $\frac{2a^3t^2dt}{(a^2+t^2)^2}$. La flussione del triangolo è $dv = \frac{a^3dt}{a^2+t^2} -$ $\frac{2a^3t^2dt}{(a^2+t^2)^2}$. Dunque la flussione del settore CMAm $dv + dz$ $= \frac{a^3dt}{a^2+t^2}$.

E similmente la flussione del segmento Iperbolico è la flussione di AP' per M'm'; la flussione di AP', la stessa che di CP', è $-\frac{a^2tdt}{(a^2-t^2)^{\frac{3}{2}}}$; e però $dz' = \frac{2a^3t^2dt}{(a^2-t^2)^2}$, $dv' = \frac{a^3dt}{a^2-t^2} + \frac{2a^3t^2dt}{(a^2-t^2)^2}$, onde la flussione di CM'Am', $dv' - dz' = \frac{a^3dt}{a^2-t^2}$.

Così fra le flussioni de' due settori la sola differenza è del segno; la quale però rende il caso dell' Iperbole capace di una scomposizione, essendo $\frac{a^3dt}{a^2-t^2} = \frac{a^2dt}{2(a+t)} + \frac{a^2dt}{2(a-t)}$, termini infimi, de'quali è la fluente ricomposta $\frac{1}{2}a^2 \log.\frac{a+t}{a-t}$, la quale quando $t = \frac{9}{11}a$, sarà $\frac{1}{2}a^2 \log.10$, che non sarebbe funzione trascendente, se il logaritmo fosse degli usuali di Briggs. Ma vuol essere del modulo $= 1$, al quale

 ezian-

eziandio giova ridurre la quadratura dell' Iperbole equilatera facendo la metà dell'asse CA $= \sqrt{2}$, o sia pigliando per unità il lato della potenza della Iperbole, il seno e coseno di 45°. Che però dovendo la base del sistema essere $e = 1 + \frac{A}{1} + \frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \frac{D}{4} +$ &c., dove ciascuna lettera significa il termine, che la precede, tutti i termini del sistema riescono trascendenti; siccome è chiaro supponendo $b = e$ trascendente nella progressione, di cui al n.° 2.

Ma $\frac{a^3 dt}{a^2 + t^2}$, flussione del settore del cerchio, non si può similmente ridurre all' infimo grado, $a^2 + t^2$ non avendo fattori che immaginarj; sicchè può stimarsi per la quadratura del cerchio la ragione di trascendenza tanto maggiore, quanto $\frac{dt}{a^2 + t^2}$, o, fatti $a^2 = \alpha$, $t^2 = \tau$, quanto $\frac{d\tau}{2(\alpha + \tau)\sqrt{\tau}}$ è men semplice di $\frac{dt}{a + t}$.

13. Ma vediamo se alla certezza del fatto possiamo aggiungere l' intendimento della cagione, per cui forza è che la quadratura del cerchio sia trascendente. Si sa che le Equazioni per avere $x = \text{sen.} \frac{A}{m}$, mediante il seno, o il coseno di A, sono

$$\text{Sen.A} = mx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^3 (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} x^5 (1-x^2)^{\frac{m-5}{2}} - \text{\&c.}$$

ovvero

$$\text{Cos. A} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} x^4 (1-x^4)^{\frac{m-4}{2}} - \text{\&c.}$$

On-

Onde essendo π la circonferenza, n il numero de' lati, a il raggio, e però l'area del poligono inscritto na^2 sen.$\frac{\pi}{2n}$ cos.$\frac{\pi}{2n}$ $= \frac{1}{2} na^2$ sen.$\frac{\pi}{n}$, fatto $m = \frac{1}{4}n$, onde A sia il quadrante, Sen. A$=1$, Cos. A$=0$, avremo l'area del poligono $\frac{1}{2} na^2$ sen. $\frac{\pi}{n} =$ $\frac{1}{2} na^2 x$ dipendente da qual si voglia delle due Equazioni

$$0 = 1 - mx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^3 (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} x^5 (1-x^2)^{\frac{m-5}{2}} + \&c.$$

$$0 = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} x^4 (1-x^2)^{\frac{m-4}{2}} - \&c.$$

che così pure senza fare svanire i radicali, sono dell'ordine m, e constano del numero di termini $\frac{m}{2}$ quando m è pari, e $\frac{m-1}{2}$ quando è caffo. Sicchè a misura che cresce il numero de' lati $= 4m$, la relazione dell' area del poligono al quadrato del raggio anderà crescendo e di grado e di numero di termini all' infinito. Dunque il limite di essa relazione è una serie senza fine. Ma l'area del cerchio è il limite di quelle de' poligoni inscritti; dunque la sua relazione a esso quadrato è una serie senza fine.

14. Ma più forza farà il considerar la ragione, per cui si può dimostrare *a priori* che l' Equazione, che ne dà il seno di $\frac{A}{m}$, vuol essere almeno dell'ordine m; e si è perchè il seno di A, da cui si parte, non è seno del solo arco A, e

del suo supplemento $\frac{1}{2}\pi - A$, ma eziandio di $\pi + A$, $2\pi + A$, $3\pi + A$, &c., e similmente di $\frac{3\pi}{2} - A$, $\frac{5\pi}{2} - A$, &c. Ond' è che quantunque l' intenzione di chi cerca il seno di $\frac{A}{m}$, possa ristringersi a un solo arco, col fatto però, valendosi del seno, la questione si estende a tutti quegli archi, che hanno per l' appunto quel seno; sicchè se il seno sia per esempio la metà del raggio, non s' avrà solo a divider l' arco di 30°, ma altresì quelli di 390°, 750°, 1110°, &c. e quelli di 150°, 510°, 870°, 1230°, &c., e però la formola, che dà sen. $\frac{A}{m}$, se poniamo $m = 3$, dovrà avere tanti valori, quanti sono i seni di tutti quegli archi divisi per 3, cioè quanti sono i seni degli archi di 10°, 130°, 250°, 370°, &c. e quelli di 50°, 170°, 290°, 410°, &c. Dove si vuol osservare che i seni di 10°, di 170°, e di 370° hanno uno stesso valore, e così quei di 50°, di 130°, di 410°, e quei di 250°, e di 290°. Onde tutti si riducono a tre; perchè da 370°, e da 410° ricominciando la volta dagli stessi punti estremi degli archi di 10°, e di 50°, da cui ebber le due serie principio, forza è che proseguendo si ricada sempre su punti di seno già incontrato. Vedesi inoltre, che tutti i seni vengono in ciascuna delle serie, onde basta la formola $n\pi + A$, dove n significhi tutti i numeri intieri successivamente, cominciando da zero, e proseguendo finchè sia $n = m$, e però $\frac{n\pi + A}{m} = \pi + \frac{A}{m}$, prima ripetizione: onde i seni diversi saranno quanti i termini 0, 1, 2, 3 . . . $m - 1$, il numero de' quali è appunto m.

Ma può essere A $a\pi$ nella ragione di 1 $a\sqrt{2}$, o in qualunque altra irrazionale, onde essendo m incommensurabile con n, i successivi valori di $\frac{n\pi + A}{m}$ vadano all' infinito sen-

za

za ricader mai a un medesimo punto; e così senza fine essendo il numero dei valori sempre diversi de' seni, che la risoluzione del problema compita dovrebbe dar tutti, e non può, si scorge *a priori* ch' ella dovrà ridursi alla espressione imperfetta d' una serie infinita. Poichè questo è principio infallibile che una Equazione finita non può non estendersi quanto le premesse, ond' è tratta, e non dar tanti valori, quanti soddisfanno al problema, non preso nella ristrettezza, in cui possiam volerlo, ma in tutta l' ampiezza del significato de' termini della sua prima espressione algebraica bene interpretata.

15. Or con questo principio facciamoci a esaminare la quadratura del cerchio, la fluente del prodotto della flussione del seno verso per il retto; ove supposta la flussione costante, resta la quadratura funzione del seno; il quale prescindendo tuttavia dalle intiere circonferenze, che agli archi si possono aggiungere, appartiene egualmente a due Archi, A, e 180° — A. Dovrà dunque la fluente aver due valori, uno, che dia l' area fra il diametro, il seno, e l' arco A, l' altro l' area fra il diametro, il seno, e l' arco 180° — A; vale a dire che supposto il seno PM, (fig. 2.ª) dovrà dare a un tempo AMP, e AMD*mp*, o PMDB, il quadrante AMDC ± CDMP. Onde avrà la fluente a dividersi in due parti, una la stessa per qualunque valore di PM, l'altra dipendente da PM, la cui relazione alla prima dipendendo da quella del seno al raggio, non potrà non essere trascendente, quando lo è quella del seno.

Ma PM è pur anche il seno di tutta la circonferenza più AM. Dunque l' Equazione finita ed esatta della quadratura dovrebbe pur dare un terzo valore, quello dell' area di tutto il cerchio $\frac{1}{2} r\pi$ aggiunta ai due precedenti; e così un quarto valore di due aree del cerchio più i medesimi, perchè la stessa PM è il seno di $2\pi + AM$; e in una parola dovrebbe dare l' infinito numero di tutti i valori di

$\frac{1}{2} n r x$ + AMDC ± CDMP, perchè PM è il seno di tutti gli archi $n r$ + AM.

16. La qual cosa schiarisce e conferma la dimostrazione, che dà Newton, del suo *Lemma* XXVIII. del libro I. de' *Principj Matematici*, dove asserisce non esservi figura ovale, la cui area fra rette tirate a piacimento possa generalmente trovarsi con Equazione di numero di termini e di grado finiti. Egli il dimostra facendo rotare intorno a un punto, preso nell' ovale, quasi polo, una retta, di cui la parte fra il polo e l' ovale sia y, l' angolo, ch' ella fa colla sua prima posizione, sia z, mentre un punto, che partendo dal polo, sempre sulla retta rotante, se ne allontana colla flussione $dx = ay^2dz$, descriva una curva, onde x, distanza dal polo a questa curva, sia sempre proporzionale all' area dell' ovale percorsa dalla retta rotante. Così x descriverà una spirale con giri senza fine, in ciascun de' quali ritornando la retta a una stessa posizione, vi avrà x un nuovo valore: sicchè infinito sarà il numero de' valori di x per ciascun valore dell' angolo z. Ora se un' Equazione finita desse l' area dell' ovale, non potrebbe non dare ciò che è lo stesso, la fluente finita di $ay^2dz = dx$; lo che è impossibile, avendo questa fluente x infiniti valori. Dunque impossibile è un' Equazione finita, che dia l' area dell' ovale.

Non è necessario ch' io aggiunga quel di più, che dice Newton, e ognun può leggere nel libro citato. Ma negandosi dal Lemma la possibilità dell' Equazione finita soltanto pigliando la quadratura in qualunque modo, *generaliter*, ci convien vedere se perciò si possa la negazione restringere a non includere quella di una quadratura del cerchio definita.

17. Dico pertanto che a giudicare a quali casi s' abbia, o non s'abbia da estendere il Lemma, convien vedere a quali perfettamente s' adegui, o non s' adegui la dimostrazione. Vi sono curve ovali solo in parte, esempigrazia quella dell' Equazione $ay^2 = 6a^3 + 5a^2x - 2ax^2 - x^3$, che oltre l' ovale

le BDEF (Fig. 3.ª, dove comincian le x in A, positive verso B) ha due rami GH, GI stendentisi all' infinito; ed è chiaro che facendo rotare AH intorno ad A, il caso non è più lo stesso. Di che segue non già che la curva sia quadrabile algebraicamente, ma che non si può per lo Lemma di Newton asserire che nol sia, e convien chiarirsene altrimenti. Che se perciò avendo $ydx = \frac{dx}{\sqrt{a}}\sqrt{6a^3+5a^2x-2ax^2-x^3}$, fatto $a+x=z^2$, sostituendo ne traggo $ydx = \frac{2z^2dz}{\sqrt{a}}\sqrt{6a^2+az^2-z^4}$, flussione comparabile alla forma XC di Cotes, veggo esserne la quadratura più trascendente di quella delle pure ovali; poichè l' esponente di z fuori del radicale ripugna alla riduzione della fluente a numero finito di termini mediante le quadrature del cerchio o dell' Iperbole, mentre a quella del cerchio riducesi la quadratura delle mere ovali, di cui assai acconcia Equazione per servirci di esempio si è $a^{2m+1}y^2 = b^2(c^2-x^2)(e^n+x^m)^2$, dove sia e non minore di c, ed m numero intiero e positivo, o zero. Nel qual caso essendo e^0, x^0 sempre $= 1$, l' ordinata, che generalmente è $y = \pm \frac{b(e^n+x^m)}{a^{m+1}}\sqrt{c^2-x^2}$, diventa $y = \pm \frac{2b}{a}\sqrt{c^2-x^2}$, Equazione all' Ellisse, di cui $2c$ sia l' asse delle ascisse x, e l' altr' asse $\frac{4bc}{a}$. Che se $2b = a$, la curva sarà il cerchio del raggio c. Negli altri casi se m è pari, l' ovale sarà simmetrico, diviso dai due assi in quattro parti eguali e simili; se caffo, saranno simili ed eguali soltanto le due parti divise dall' asse, su cui si tagliano le x; ma le parti divise dalla perpendicolare al mezzo di esso asse, dove $x = 0$, saranno ineguali e dissimili, maggiori dal lato, verso cui x è positivo. E per la quadratura, sì nell' uno, che nell' altro caso avendo $ydx = \pm \frac{bdx}{a^{x+1}}(e^n+x^m)\sqrt{c^2-x^2}$, moltiplicando sopra

e sot-

e sotto per $\sqrt{c^2-x^2}$, ho $ydx = \pm \frac{bdx}{a^{m+1}} \times \frac{e^m c^2 - e^m x^2 + c^2 x^m - x^{m+2}}{\sqrt{c^2-x^2}}$, flussione di quattro termini, de' quali i due primi hanno sempre la fluente per mezzo della quadratura del cerchio, e i due altri l' hanno similmente per la medesima, quando m è pari; e quando è caffo, l' hanno algebraica. Poichè sappiamo che, essendo in parti del raggio $= 1$, A l'arco, il cui seno $= \frac{x}{c}$, la fluente di $\frac{e^m c^2 dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$ è ec^{m+1} A, quella di $\frac{-e^m x^2 dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$ è $\frac{1}{2} c^m x \sqrt{c^2-x^2} - \frac{1}{2} e^m$ A; e per le altre, la cui fluente è algebraica sempre che m è caffo, quando l' esponente è pari, si ha $\int \frac{x^p dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = \frac{3.5.7\ldots(p-1)}{2.4.6\ldots p} \left[A - \left(x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2.4}{3.5} x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7} x^7 \ldots + \frac{2.4.6\ldots(p-2)}{3.5.7\ldots(p-1)} x^{p-1} \right) \sqrt{c^2-x^2} \right]$. Sicchè quanto v' ha di trascendente in queste quadrature, riducesi ad A, e alla ragione del raggio alla periferia, onde si ha l' area del settore $\frac{1}{2} c^2 A = DCM$ (fig. 2.ª), supposto $CP = x$, $CB = c$; e però eziandio quella di $DCpm = \frac{1}{2} c^2 A + \frac{1}{2} x \sqrt{c^2-x^2}$, di cui è facile capire che ha da esser funzione algebraica l' area dell' ovale, generata e percorsa dall' ordinata y nel passare dalla primitiva sua posizione su CD, dove $x = 0$, $y = \frac{bce^m}{a^{m+1}}$, a quella, che le conviene quando $x = Cp$.

18. Ma se così vediamo, che la trascendenza della quadratura dell' ovale è la stessa che quella di A, e del suo settore, vediamo insieme che senza aver fatto uso di alcuna ipo-

ipotesi di rotazione, come Newton, troviam niente meno, ch' essa deve avere infiniti valori corrispondenti a una qualunque x; poichè nell' analisi, che abbiam seguita, nulla avendo introdotto, che possa ristringer A al solo primo arco, di cui è il seno $= \frac{x}{c}$, forza è che ogni altro arco dello stesso seno parimente soddisfi all' Equazione. L' intendimento ristretto alla ricerca della superficie rinchiusa dalla curva ci fa voler l' impossibile, che ne finisca la flussione quando l' area è tutta percorsa una volta, com' ella si concepisce finire allorchè l' area si fa generare dal prodotto della doppia ordinata per la flussione dell' ascissa. Ma perchè tal supposto non può fare che la quadratura non sia quello, che veramente ella è; pur partendo da esso il calcolo va alla fluente propria e naturale delle curve rientranti in se, ovali puri, che come le spirali, vogliono concepirsi generate dalla rotazione di un raggio, per così chiamarlo, vettore, il quale se ad ogni suo ritorno a una stessa direzione ogni volta è maggiore, descriverà una spirale; se vi ritorna sempre uguale senza esserlo da per tutto, descriverà un' ovale; ed un cerchio, s' è uguale da per tutto. Fingiamo un' orbita d' un pianeta non alterata dall' attrazione degli altri; acciocchè sia veramente un' Ellisse, le arce dal raggio vettore descritte, proporzionali ai tempi, non abbraccieranno elle una, o più intiere superficie dell' Ellisse, quando il tempo è maggiore di una o di più rivoluzioni? Ma stando al cerchio $\frac{1}{2}\pi$, essendo il raggio $= 1$, per ogni area $\frac{\pi}{2z}$ si concepisca che z partendo dall' infinito per dare alle arce il primo nascimento, venga via via scemando, onde $\frac{\pi}{2z}$ riceva successivamente tutti i valori delle parti del cerchio, sinchè giunga a quello del cerchio intiero, quando $z = 1$, non v' ha cosa che impedisca z di proseguir quindi scemando finchè

giunga a zero, onde $\frac{\pi}{2z}$ passerà a tutti i valori delle medesime parti coll' aggiunta successivamente all' infinito di ciascun numero di cerchj intieri. Or nell' aggiunta di ciascun cerchio, ogni volta, che la parte cadrà sopra uno stesso punto, il seno, e tutte le altre linee rette, funzioni similmente dell' angolo, ritorneranno le stesse. Dunque se vi fosse un' Equazione finita $E = \frac{\pi}{2z}$, non potendo E non esser funzione di alcuna di esse linee rette, dovrebbe per uno stesso valore di essa retta dare all' area infiniti valori diversi. Che però non v' ha dubbio che la dimostrazione di Newton convenga perfettamente e s' adegui alla quadratura del cerchio, eziandio, se vogliamo così chiamarla, definita, cioè per Equazione trovata in certo supposto, con certo modo, per certo caso, ma Equazione verace, qual vuol esser quella, di cui si nega la possibilità.

19. Che se alcuno domandasse, poichè Newton ha negato solo *generaliter*, se il suo Lemma lasci luogo ad eccezioni di aree d' ovali puri di quadratura algebraica, dirò che la dimostrazione non soffre eccezioni di vere quadrature, cioè di spazj fra una curva semplice e linee rette. Ma fra due ovali, o fra un ovale ed un cerchio si possono avere lunule quadrabili algebraicamente, non solo sul totale, come le comprese fra due cerchj, ma eziandio per ciascuna loro parte fra due ordinate. E ad averne un esempio basterà costruire sullo stesso asse un caso della formola $y = \pm \frac{b(c^m + x^m)}{a^{m+1}} \sqrt{c^2 - x^2}$, preso m caffo, e $y' = \pm \frac{K}{c} \sqrt{c^2 - x^2}$, facendo $K = \frac{b c e^m}{a^{m+1}}$, e si avrà (fig. 4.ª) un ovale ACDMB, e un' Ellisse, o un cerchio, se $be^m = a^{m+1}$, che avranno comune, oltre all' asse AB, l' ordinata CD al centro. E la parte trascendente della quadratura dell' ovale essendo appunto la quadratura

dell'

dell' Ellisse o del cerchio, le lunule AFDG, DOBM saranno la parte algebraica, così che D O M sarà la fluente di $\frac{b\,d\,x}{a^{m+1}} \times \frac{c^2 x^m - x^{m+2}}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, fatto $x = CP$.

Ma questo torna a quello, che ho già detto a proposito delle curve Bernoulliane, non esservi difficoltà che la differenza, o la somma di trascendenti sia algebraica, e non fa che maggiormente schiarire che tutta la trascendenza degli ovali sta in quella del cerchio. Onde solo resta a vedere se anche prescindendo dalla impossibilità di aver da un' Equazione finita il numero senza fine delle aree corrispondenti a ogni valore di $n\,\pi + A$, si possa dar altra dimostrazione *a priori* dell' impossibilità della quadratura del cerchio per Equazione finita.

20. Ma perciò convien ricordarci che abbiam dimostrato che se la quadratura fosse algebraica pel cerchio intiero, il sarebbe necessariamente per tutti i segmenti sottesi ad angolo, che si possa tagliare geometricamente; ed è chiaro che se fossero algebraiche l' aree di tali segmenti, il sarebbero niente meno gli spazj fra le corde loro, e la metà di questi fra i seni; onde avremmo un' infinità di spazj fra due seni il diametro e l' arco, de' quali sarebbe la quadratura algebraica. Onde mi basterà dimostrare che non v' ha alcuno di tali spazj, che non sia trascendente.

Dico adunque che la grandezza di tali spazj, e la cognizione, che ne possiamo avere, dipende da quella dei seni; onde la nostra cognizione di essi spazj non può essere più determinata e perfetta della cognizione, che abbiamo, de' seni; essendo un principio evidente che ogni cognizione ricavata da alcun' altra, dove questa sia in difetto, il sarà essa parimente. Or la cognizione de' seni ha l' imperfezione, che la relazione loro al raggio è trascendente, ogni qual volta la ragione dell' arco alla circonferenza è irrazionale. Dun-

que questa stessa imperfezione si ha da trovare nella cognizione delle aree, quali si cercano, relativamente allo stesso raggio. E farebbono eccezione i seni, la cui relazione al raggio è algebraica, se in alcuna parte fossero tutti tali. Ma sono frammischiati in modo che non v'ha spazio finito fra due seni algebraici, in cui non cada alcun seno trascendente; non potendosi assegnare una differenza finita fra due ragioni razionali di due archi alla periferia, che non si possa trovare una irrazionale, che ne differisca meno. Sicchè non vi può esser fra' seni intervallo finito, dove la quadratura non dipenda da' trascendenti. Dunque di niuno si potrà avere quadratura non trascendente.

Che se alcuno dicesse valer l' argomento soltanto per la cognizione diretta, che si ricavi da' seni, ma non per l'indiretta, che si traesse dal sapere che un tale spazio deve essere la tantesima parte del cerchio, osserverò primieramente che soddisferebbe sempre al mio intento di mostrare che l' impossibilità di un' Equazione finita di tanti valori, quante successivamente sono le aree corrispondenti a $n\pi + A$ non è la sola ragione della trascendenza della quadratura del cerchio. Rimanderò poscia a quanto ho già detto in più luoghi sull'assurdità del supposto d'un' Equazione, che non sia generale, aggiungendovi che il supporla unicamente per l'intiero cerchio, è un supporre che un impossibile abbia luogo in quel caso appunto, in cui, se non fosse impossibile, sarebbe men probabile. Perchè ogni lume, che abbiamo sulle vie di pervenire alla cognizione dell' area del cerchio, ci mostra che la via non è dal tutto alle parti, ma dalle parti al tutto; e dacchè ricorrendo agli evanescenti, o agli infinitamente piccoli abbiam tanta facilità di determinarla per serie, non possiam però aver il tutto, se non come somma e moltiplice di parti minori. L' intiera periferia, l'area del cerchio non dipendendo che dal raggio, agevolmente si scorge che dalla sola immediata considerazione di questo, e di quella non si può trar nulla. Mediatamente se ne conosce il rap-

por-

porto; e la conoscenza accertatissima, che se ne ha, ci conferma col fatto quello, che s'è dimostrato al n.° 13, che la ragione del cerchio al raggio, $\frac{1}{2}\pi = 3,14159.$ &c. è trascendente. Poichè cercati i denominatori, che la riducono a frazione continua, 3, 7, 15, 1, 292, &c. (v. la Grange *Additions aux Elémens d'Algebre d'Euler* t. II. pag. 394) proseguendo il calcolo, quanto si voglia, si trovan senza fine le frazioni continue, e senza ritorno periodico de' medesimi denominatori; onde si scorge che il rapporto non solo non è frazione razionale, ma nemmeno irrazionale riducibile a termini finiti mediante radicali. Sicchè resta esclusa anche dalla certezza di fatto la possibilità di un' eguaglianza eziandio fortuita fra l'area del cerchio e una grandezza rettilinea, che si possa col raggio ottenere dalla geometria piana.

21. Ma già parmi aver detto più che assai per accertare la trascendenza della quadratura del cerchio, onde non potendo essa darsi con un numero finito di termini algebraici, ne segue l'impossibilità d'ogni costruzione geometrica. Mi rimane a dire alcuna cosa dell' altra parte della mia prima proposizione, cioè che faranno cosa utile i Maestri di Geometria cospirando a divolgare che la quadratura del cerchio, com' ella è possibile, è conosciutissima. Essi non ignorano i valori calcolatine a cotante figure, e ripetuti in tanti libri e tavole, onde il computo degli archi, come quello de' seni, e delle tangenti, sia naturali, sia co' logaritmi, vien ridotto a una facilità e precisione tale, che non ne può nemmeno far degno concetto chi non è molto esercitato in ogni maniera di calcoli delle mentovate funzioni trascendenti. Sanno che coi valori numerici e una buona scala di parti millesime si hanno le grandezze lineari esatte quanto in pratica s'abbiano per costruzioni geometriche. Sanno che senza libri è facile tener a memoria la ragione di 7 : 22, o più esattamente 113 : 355 del diametro alla circonferenza;

e vi

e vi si possono aggiungere quella di 11 : 14, dell' area del cerchio al quadrato del diametro, e di 11 : 21 della sfera al cubo, o più esattamente la ragione di 355 : 452 per l' area, e quella di 355 : 678 per la sfera, delle quali i termini 452, e 678 dovendo essere come 2 : 3, l' ultimo 678, facile a rammentarsi per lo seguito naturale de' numeri 5, 6, 7, 8, può servire ad accertarci dell' altro 452. Ma non è forse inutile che sappiano ancora che per operazioni da farsi senza scala vi sono molti mezzi, non pochi de' quali si possono vedere nel libro già citato di Montucla (pag. 61–64.) Io ne accennerò solo due, il primo di Huygens, che per aver il quarto della periferia, diviso un semicircolo in due parti eguali AB, AD (Fig. 5.ª) e l' altra in tre BE, EF, FD, tira le corde AE, AF, ed ha AG + GH = segante 15.° + 2 tang. 15 = 1, 571174565, posto il raggio = 1, e però AB = 1, 5707963. L' altro più esatto del P. Kolhanski, che menate ad angolo retto BD, AI, e tagliato BE di 60°, colla prolungata CE taglia in K la tangente al punto I, e fatto

$$KL = 3CI, \text{ ha } AL = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3,\ 14158333385,$$

mentre la semicirconferenza è 3, 14159265.

22. A questi aggiungerò una mia costruzione di un quadrato *proxime* uguale al cerchio col centro stesso, e i lati nella direzione, che si vuole.

Siano i due diametri AB, DE (Fig. 6.ª) in essa direzione; tirisi AE, e col raggio CA, fatto centro in A, taglinsi gli archi A*a*, A*b*, e fatto centro in E, si tagli E*m*. Si congiungano i punti *a*, *b*, con una retta *ab* prolungata bastantemente, la quale tagliando AC in *d*, col raggio A*d* si tagli A*n*, e divisa *mn* in due parti eguali in *o* portisi E*o* di *d* in *e*, e tirisi C*e*, che taglierà la circonferenza in un punto *r*, per cui facendo passare FG parallela ad AB, e menando alla stessa distanza C*s* dai diametri le parallele FH, GI, HI, si avrà il quadrato quale si domandava.

Poi-

Poichè ponendo AC = 1, sarà AE = $\sqrt{2}$ = 1, 4142136 *proxime*. Dunque togliendone via A*n* = A*d* = 0, 5, resterà E*n* = 0, 9142136. Ma E*m* = 1. Dunque *mn* = 0, 0857864, *no* = 0,0428932, che aggiunto ad E*n*, dà E*o* = 0, 9571068 = *de*, metà della tangente di *e*CA. Ora per mezzo delle tavole dalla tangente passando al seno, troverassi quello di *e*CA essere 0, 8863417. Il lato del quadrato eguale al quarto del cerchio è 0, 8862271. Si sarà dunque fatto maggiore del vero soltanto di 0, 0001146. E il quadrato, che così riesce = 0, 7856014, mentre dovrebb' essere 0, 7853982, eccederà solo di 0, 0002032.

Che se, dato il quadrato, si volesse il cerchio, converrebbe, tirate le rette AB, DE, che dividono i lati in due parti eguali, e danno il centro C, da esso con un raggio ad arbitrio descrivere un cerchio, in cui colle stesse operazioni, che dianzi, determinata *de*, si meni C*e* a tagliare un lato del quadrato in un punto *r*; quindi col raggio C*r* descrivere il cerchio, che sarà il richiesto.

23. Ma nell' esporre sì fatte pratiche è d' uopo farsi incontro a un inganno, che più ch' altro può lusingar le speranze de' meno intelligenti a ostinarsi nella ricerca d' una costruzione geometrica, che quadri il cerchio. Sembra loro che siccome si trova geometricamente un lato prossimo, il quale se tuttavia è maggiore, è pur chiaro che si può aver minore; così con alcuna delle infinite combinazioni possibili si abbia pure a poter trovare il punto vero: poichè certamente questo punto esiste, e crescendo, o scemando, vi si ha pure a dar dentro. Eglino si vogliano però avvertire non esser dubbio che può alcuno imbattersi a indovinarlo operando, e può un quadrato fatto per esempio colla costruzione data quì dianzi riuscire esattamente eguale al cerchio, quanto in pratica possa mano d' uomo fare un quadrato eguale ad altro quadrato. Ma la possibilità, che si nega, non è quella dell' eguaglianza perfetta d' un quadrato ad un cerchio, ma sibbene che tale uguaglianza possa essere la

ne-

Fig. 1.

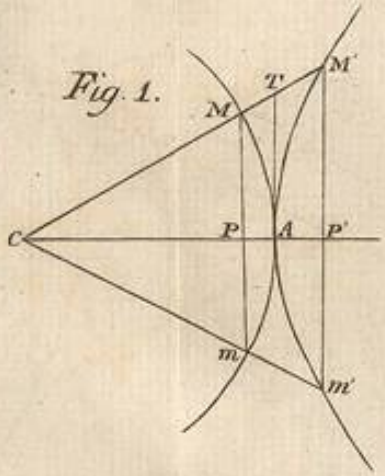


Fig. 4.

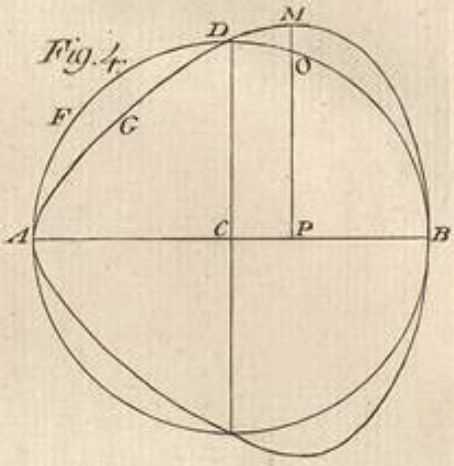


Fig. 2.

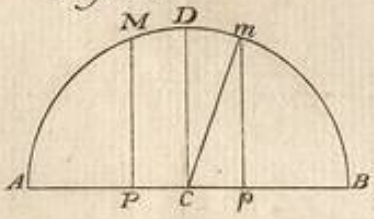


Fig. 5.

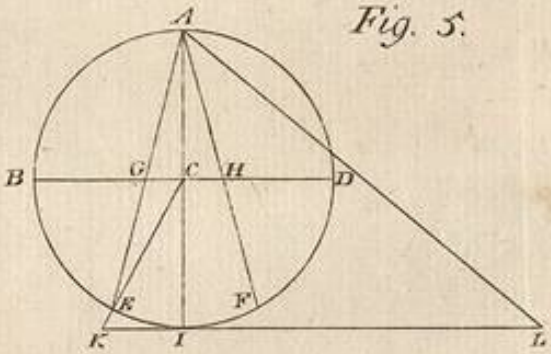


Fig. 3.

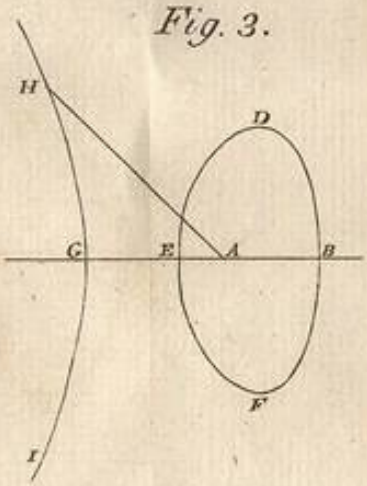
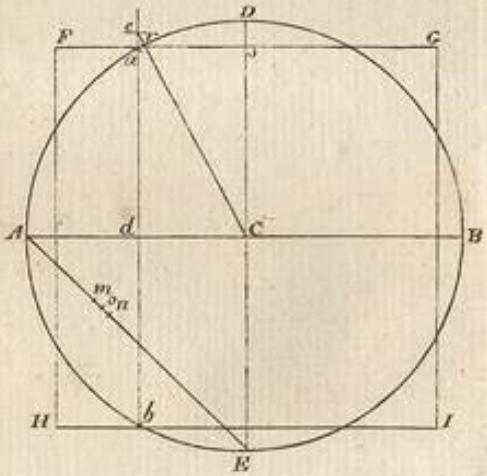


Fig. 6.



necessaria conseguenza di una costruzione. Non è l'eguaglianza pratica, ma la speculativa, che si nega. Onde poniamo il caso che alcuno trovasse una costruzione, che desse il lato vero a dieci, a venti, a cento cifre, o figure, sarebbe niente meno cosa certa che la sua costruzione non darebbe veramente la quadratura, ma sibbene un'altra grandezza, che nell'estensione è quasi la stessa, ma nel genere è diversa affatto, poichè la sua relazione al raggio non è trascendente, come quella del cerchio si è dimostrata.

Non ho sfuggito di ripeter cose notissime per ottenere il mio intento. Siccome però non potevano le più esser tali, che le intenda chi solo ha studiato i primi elementi di geometria, che dovrà fare chi, non capendo, non legga o non resti persuaso? Rivolgersi ad imparare quella parte delle matematiche, il cui scopo è per l'appunto la ricerca delle quadrature; parte bella maravigliosamente ed utilissima, nella quale qualunque tempo ei consumi, se ha fior d'ingegno, non andrà senza frutto, mentre egli dietro Newton e tanti sommi Geometri studiandosi di recarla a vie maggior perfezione, tenterà quel più, che gli possa venir fatto. Ei dee pur capire che, se la quadratura del cerchio, com'ei vuol credere, è possibile alla geometria piana, vieppiù sarallo valendosene, senza ristringervisi; e se v'è strada per giungervi, la scorgerà più facilmente chi conosca bene quella, per cui si giunge alla quadratura d'infinite altre curve. Ma forse alcuno risponderà ch'ei non vuole studiar tanto, e niente meno pretende sapere quello, che chi più ha studiato, non ispera di poter saper mai; onde converrà lasciarlo nel suo inganno, forse dolce a lui ancor più che molesto a chi abbia da esaminarne gli sbagli.

DEL-