RIFLESSIONI

INTORNO ALLA RETTIFICAZIONE, ED ALLA QUADRATURA DEL CIRCOLO

Di Paolo Ruffini

Ricevute il dì 21. Ottobre 1801.

1. Dato nella (Fig. 1.) il Circolo ADBEA, il cui raggio AC $= a$, supponghiamo, che esso raggio prolungato all' infinito verso S si aggiri perpetuamente intorno al punto C con moto uniforme, e supponghiamo, che nel tempo medesimo un punto partendo da C scorra esso pure con moto uniforme lungo la retta CS, e sia la velocità di questo punto alla velocità della CS $:: m : n$. In questa ipotesi è chiaro, che il nostro punto descriverà una spirale CNFG dotata d' infiniti giri, di cui facilmente determinerem l'Equazione; imperciocchè, supposto, che la CS venga in una posizione qualunque CT, e che contemporaneamente il nostro punto arrivi in N, fatto CN $= u$, l' arco ADM $= z$, avremo per le condizioni del Problema $u : z :: m : n$, e perciò sarà $nu = mz$.

Da questa Equazione vedesi, che il valore del raggio vettore u dipende totalmente dal valore dell' arco z, cosicchè, se quest' ultimo è determinabile algebraicamente per un' Equazione finita, resterà per la stessa Equazione determinato algebraicamente anche il raggio u. Ora quest' ultima determinazione è impossibile, poichè tagliandosi la spirale dalla CT in infiniti punti, infiniti sono i valori della u, e però l' Equazione in u deve necessariamente risultare di grado infinito. Dunque sarà ancora impossibile, che il valore dell' arco z sia determinabile algebraicamente col mezzo di un' Equazione finita.

Questo è il discorso, con cui l' immortale Newton nei (Princ. Mat. Lib. 1.° Sez. 6.ª Lem. 28.) dimostra impossibibile la Quadratura, e la Rettificazione del Circolo. Il Ch. Saurin con altro raziocinio dimostra il Teorema medesimo (Comment. di Parigi An. 1720) nella maniera seguente.

2. Sia nella (fig. 2.) il Quadrante Circolare AQMB, e sia AGND una Curva tale, che le sue ordinate, PN, ec. eguaglino gli archi circolari da essi tagliati, AQM, ec. Ciò presupposto, e condotta un' ordinata qualunque PN, venga richiesto di tagliare dall' arco AQM una porzione, la quale stia all' arco medesimo in una ragion data; nella ragione, per esempio, di PF : PN. Per soddisfare a questa domanda innalzo da F una perpendicolare FG, dal punto d' incontro G conduco la GH perpendicolare ad AC, e l' arco AQ da questa determinato sarà appunto tale, che AQ : AQM :: PF : PN; come è facile a vedersi, essendo AQM = PN, AQ = HG, ed HG = PF. Ora se AQ si voglia parte aliquota di AQM, l' Equazione, per cui si determina la corda che corrisponde ad essa AQ, sale a tanto grado, quante volte questa parte aliquota si contiene in AQM. Dunque se la ragione di PF : PN sia indefinita, e quindi AQ debba essere una parte indefinita di AQM, quella Equazione non potrà essere finita, e per conseguenza anche la AGND, pel cui mezzo possiam sempre con una medesima costruzione geometrica tagliare l' arco AQ, qualunque siasi il rapporto di PF : PN, non potrà essere razionale; ma se la ragione dell' Arco AQM con le coordinate AP, PM potesse esser razionale, diverrebbe razionale anche il rapporto di PN : AP, e però razionale l' Equazion della Curva AGND. Dunque non potendo ciò essere, non potrà essere neppure, che il valore dell' arco AQM possa ottenersi in generale con un' Equazione finita, e però ec.

I Matematici movendo delle difficoltà contro delle esposte dimostrazioni, ànno concluso non essere per anche risolta pienamente la celebre quistione, se sia possibile, o no la Rettificazione, e quindi la Quadratura del Circolo, ed esiggono tutt' ora raziocinii più rigorosi (d' Alembert Opusc.

ma-

Matemat. Tom. 4.° pag. 66.) . Io , presa ad esaminare una tal quistione , credo di poter asserire con tutta sicurezza la proposizione medesima , che è stata asserita da Newton , e da Saurin ; se mai ingannato mi fossi lo decidano i Dotti da quanto sono per dire .

3. Le difficoltà promosse contro le accennate dimostrazioni sono le seguenti

1.° E' vero , che l' Equazione algebraica , per cui nella (fig. 1.) si determina il valore del raggio vettore u (n.° 1.) , e l' altra , per cui nella (fig. 2.) si domanda il valore della corda AQ , mentre la ragione di PF : PN è indefinita , deggiono risultare di grado infinito ; ma tali Equazioni non potrebbero essere riducibili ad altre di grado finito , dalla soluzion delle quali si potesse poi ritrarre uno dei valori di u nel primo caso , od il valore della corda AQ nel secondo ? Difatti dovendosi il valore della u (fig. 1.) ricavare dalla natura del Circolo , e però dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, chiamata x l' ascissa , y l' ordinata , ed avendo in questa Equazione le variabili due valori , uno positivo , e l' altro negativo , vedesi facilmente , che ancora la u dovrà corrispondentemente ottenere due valori , uno positivo , l' altro negativo ; dunque nel tempo , che si cercano i valori delle rette CN , CG , ec. caderemo ad ottenere ancora quei delle Cn , Cg , ec. ; ma queste seconde rette uguagliano le prime prese negativamente , onde , supposto CN $= u'$, CG $= u''$, si ha C$n = -u'$, Cg $= -u''$, ec. dunque l' Equazione in u, venendo ad avere le sue radici tutte uguali fra loro a due a due e di segno contrario , col supporsi $u^2 = t$ si ridurrà ad un' Equazione in t di un grado metà minore . Ora come l' esposto rapporto fra le u' , $-u'$, u'' , $-u''$, ec. riduce la nostra Equazione ad un' altra di un grado metà minore ; non potrebbe egli esistere qualche altro rapporto capace di ridurre l' Equazione stessa ad un' altra di grado finito ?

Aumentasi la difficoltà , allorchè riflettiamo al Problema della trisezione dell'Arco Circolare . Venga difatti nel Circolo della (fig. 3.) proposto a trisecarsi l' arco BM. La determinazione di quest' arco dipende dalla posizione data del diametro AB, e da quella del coseno CP, e del seno PM; ma da questo diametro, e da questo seno, e coseno dipendono ancora egualmente gli archi tutti BDAEB + BM, 2BDAEB + BM, ec., i quali sono di numero infinito; dunque allorquando cerchiamo di trisecare l' arco BM, dovendo cadere a trisecare eziandio gli altri BDAEB + BM, 2BDAEB + BM ec., dovremo cadere in un' Equazione di grado infinito; ma l' Equazione, la quale coi metodi noti si ottiene per la soluzione di questo Problema, è del terzo grado: Dunque l' Equazione, che ne dovrebbe risultare di grado infinito sarà per se riducibile ad un' altra di grado finito, a quella cioè, che realmente si ottiene del grado terzo. Ora ciò, che succede nel Problema della trisezione dell' arco non potrebbe succedere nel Problema della Rettificazione?

2.° Le esposte dimostrazioni, mentre siano esatte, provano bensì essere impossibile l' esistenza di una formola generale, pel cui mezzo possa ottenersi algebraicamente il valore di un' arco circolare qualunque, ma non provano che non possa esistere un qualche arco determinato, e quindi la Circonferenza istessa, di cui si possa ottenere il valore in termini algebraici. Quantunque non possiamo quadrare una qualunque porzione di area circolare, pure possiam trovare la Quadratura di quelle porzioni determinate, che conosciamo col nome di Lunette d'Ippocrate (Encicloped. Art. Quadrat. du Cercl. Le Seur. et Jacquier Comment. in Newton n.° 365.).

3.° Il. Ch. d'Alembert ne'suoi Opuscoli Matematici (Tom. 4.° pag. 66) „ Confesso, dice, che fatico ad arrendermi „ senza scrupoli ai ragionamenti di Newton per provare l'im- „ possibilità della Quadratura, ossia della Rettificazione in- „ definita del Circolo, quando veggo, che simili raziocinii „ applicati alla Rettificazione della Cicloide condurrebbero ad „ una conclusion falsa. Non v'ha, sembrami, altra differenza „ se

„ se non che il Circolo è una curva rientrante, e la Cicloi-
„ de non lo è; ma non vedo nel raziocinio di Newton co-
„ sa, che possa cangiarsi per questa differenza, tanto più
„ perchè la Cicloide, se non è una curva rientrante, come
„ il Circolo, è almeno una curva continua, i rami della
„ quale non sono punto separati; in una parola il raziocinio
„ di Newton mi sembra poggiare unicamente sopra questo
„ supposto, che nel Circolo corrisponde alla medesima ascis-
„ sa un' infinità di archi, dal che egli conclude, che l' E-
„ quazione fra l' arco, e l' ascissa deve essere di un grado
„ infinito, ed in conseguenza l' arco irrettificabile algebrai-
„ camente: ora applicando questo raziocinio alla Cicloide,
„ ne concluderò, che l' Equazione fra l' ascissa, e l' ar-
„ co corrispondente deve essere di un grado infinito, e per
„ conseguenza l' arco irrettificabile algebraicamente, il che
„ è falso.

4.° „ Sia, soggiunge d'Alembert (loc. cit.), $dy = Xdx$
„ l' Equazione dell' Arco *Circolare* corrispondente all' ascis-
„ sa x. L' integrale è $y = a + SXdx$, essendo a una co-
„ stante, ma variabile per ciascheduna rivoluzione, e che
„ può avere un' infinità di valori; e perchè dunque non po-
„ trebbe dirsi, che l'Equazione $y = a + SXdx$ non possa
„ essere una quantità algebraica? Questo è ciò, che ac-
„ cade infatti nella Cicloide, in cui l' Equazione, che
„ esprime l' Arco y, è $y = A \pm 2\sqrt{2ax}$, essendo A una
„ costante, che varia a misura, che si prolunga la Cicloide
„ da una parte, e dall' altra. Sembrami, che queste rifles-
„ sioni meritino l' attenzione dei Geometri, e possano im-
„ pegnarli a ricercare una dimostrazione più rigorosa dell'
„ impossibilità della Quadratura, e della Rettificazione indefi-
„ nita del Circolo. „

4. Ciò posto, venghiamo al nostro Problema, e dato in un Circolo il raggio, e date due coordinate qualunque, vogliasi determinare se possa rettificarsi, cioè se possa venire espresso algebraicamente per le quantità proposte il valore dell' arco.

Sia dato il Circolo ADBEA (fig. 3.), e chiamato a il raggio, x l' ascissa, y l' ordinata corrispondente, $y^2 = a^2 - x^2$ la sua Equazione, vogliasi determinare, se col mezzo delle coordinate CP, PM, e del raggio a possa venire espresso algebraicamente il valore dell' arco BM.

I dati alla soluzione del nostro Problema vedesi essere solamente 1.° il Circolo proposto, e le sue proprietà; 2.° quelle linee, o quantità, che stabiliscono l' arco da rettificarsi; nel nostro caso è dato il circolo ADBEA con le sue proprietà dipendenti tutte dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, data è la posizione del diametro AB, e dato è il coseno CP, per cui mediante l' Equazione resta determinato anche il seno PM. Ora supposto l' arco BM $= \alpha$, l' altro ADM $= \beta$, ed il quadrante AD $= \pi$, io dico, che questi dati portano tutti necessariamente alla simultanea determinazione di tutti gli archi qui sottoposti

$$\begin{array}{ll}
& \alpha,\ 4\pi + \alpha,\ 8\pi + \alpha,\ 12\pi + \alpha, \text{ ec. } 4c\pi + \alpha, \\
& -4\pi + \alpha, -8\pi + \alpha, -12\pi + \alpha, \text{ ec.} -4c\pi + \alpha, \\
& \beta,\ 4\pi + \beta,\ 8\pi + \beta,\ 12\pi + \beta, \text{ ec. } 4d\pi + \beta, \\
& -4\pi + \beta, -8\pi + \beta, -12\pi + \beta, \text{ ec. } -4d\pi + \beta, \\
(A) & -\alpha, -(4\pi + \alpha), -(8\pi + \alpha), -(12\pi + \alpha), \text{ ec. } -(4c\pi + \alpha), \\
& 4\pi - \alpha,\ 8\pi - \alpha,\ 12\pi - \alpha, \text{ ec. } 4c\pi - \alpha, \\
& -\beta\ -(4\pi + \beta), -(8\pi + \beta), -(12\pi + \beta), \text{ ec.}, -(4d\pi + \beta) \\
& 4\pi - \beta,\ 8\pi - \beta,\ 12\pi - \beta, \text{ ec. } 4d\pi - \beta.
\end{array}$$

Imperciocchè in quanto agli archi delle prime quattro righe, essi cominciando tutti in ugual modo nel punto B, oppure A, e terminando nel punto M, dipendono tutti in maniera eguale dalla posizione del diametro AB, e dalle rette CP, PM. In quanto poi agli archi delle ultime quattro file dovendo la soluzione del nostro Problema dedursi dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, ed essendo in questa le due ordinate PM $= y$, PN $= -y$ insiem collegate in guisa, che la considerazione dell' una non può andare disgiunta da quella dell' altra; ne viene, che mentre cerco gli archi, i quali ànno i loro estremi ne' punti B, oppure A, ed M, cadrò an-

ancora a dover determinare gli archi, che ànno i loro estremi ne' punti B, oppure A, ed N. Ora tutti questi archi (A) son di numero infinito; dunque nel cercare il valore dell' arco α espresso algebraicamente per le quantità a, CP, PM, dovendo cadere nella determinazione insieme di tutti gli archi (A), verremo a cadere in un' Equazione di grado infinito.

5. Chiamiamo α', α'', α''', α^{v}, ec. $\alpha^{(c)}$ le radici, che in (A) occupano la prima fila; chiamiamo β', β'', β''', β^{v}, ec. $\beta^{(d)}$ le radici della fila terza, e γ', γ'', γ''', γ^{v}, ec. $\gamma^{(e)}$, δ', δ'', δ''', δ^{v}, ec. $\delta^{(f)}$ quelle rispettivamente delle file seconda, e quarta. Chiamato ζ l' arco di cui si cerca il valore, sia

$$\text{(B)} \qquad \zeta^m + A\zeta^{m-1} + B\zeta^{m-2} + \text{ec.} = 0$$

l' Equazione di grado infinito (n.° prec.), che supponghiamo essersi ricavata, e poichè la soluzione di questa (B) considerata così in generale è impossibile, cerchiamo in primo luogo di determinare di quale abbassamento è dessa capace. Se questa (B) è riducibile ad altra Equazione di grado inferiore, ciò non potrà succedere, che in conseguenza di qualche rapporto particolare fra le radici (A) (Ruffini Capo 15.° Teor. delle Equazioni); i dati del Problema, anzichè poter servire all' abbassamento della (B) servono al contrario a rendere essa (B) del grado infinito m (n.° prec.); e se questa Equazione si considera in generale non potrà mai abbassarsi opportunamente di grado, poichè dal (Capo 13.° Teor. delle Equaz.) sappiamo, che nessuna Equazione algebraica generale di grado superiore al 4.° può ridursi ad altra di grado inferiore atta a produrre la propria soluzione. Considerando pertanto questi rapporti particolari, veggo in primo luogo, che in (A) le radici delle quattro seconde file altro non sono, che le radici delle prime quattro prese negativamente. Dunque essendo nella (B) le radici tutte a due a due fra loro uguali, e di segno contrario, se supporremo

ζ^2

$\zeta^2 = u$, vedesi, che per questo rapporto ci risulterà una trasformata

$$\text{(C)} \qquad u^{\mu} + F u^{\mu-1} + G u^{\mu-2} + \text{ec.} = 0,$$

in cui sarà $\mu = \frac{m}{2}$, e le radici saranno le quantità:

$$\alpha'^2,\ \alpha''^2,\ \alpha'''^2,\ \alpha^{\text{v}2},\ \text{ec.},\ \alpha^{(c)2}$$
$$\gamma'^2,\ \gamma''^2,\ \gamma'''^2,\ \gamma^{\text{v}2},\ \text{ec.},\ \gamma^{(e)2}$$
$$\beta'^2,\ \beta''^2,\ \beta'''^2,\ \beta^{\text{v}2},\ \text{ec.},\ \beta^{(d)2}$$
$$\delta'^2,\ \delta''^2,\ \delta'''^2,\ \delta^{\text{v}2},\ \text{ec.},\ \delta^{(f)2}$$

ossia, posto $\alpha^2 = \varepsilon$, $\beta^2 = \zeta$, $\gamma^2 = \eta$, $\delta^2 = \nu$, le quantità

$$\varepsilon',\ \varepsilon'',\ \varepsilon''',\ \varepsilon^{\text{v}},\ \text{ec.},\ \varepsilon^{(c)}$$
$$\eta',\ \eta'',\ \eta''',\ \eta^{\text{v}},\ \text{ec.},\ \eta^{(e)}$$
$$\text{(D)} \qquad \zeta,\ \zeta',\ \zeta'',\ \zeta^{\text{v}},\ \text{ec.},\ \zeta^{(d)}$$
$$\nu',\ \nu'',\ \nu''',\ \nu^{\text{v}},\ \text{ec.},\ \nu^{(f)}.$$

6. Questa riduzione della Equazione (B) alla (C) vedesi non difficilmente dipendere dal doppio valore della y nella $y^2 = a^2 - x^2$. Lo stesso rapporto, il quale esiste tra $+y$, e $-y$ esiste puranche tra gli archi delle prime quattro file, ed i corrispondenti delle seconde, e questo rapporto quello si è, che ha prodotto l' abbassamento accennato. Ma l' Equazione (C) potrà essa ridursi ulteriormente, ed opportunamente a grado inferiore? Non già: Gli archi delle quattro prime righe dipendendo tutti egualmente dalla stessa x, e dalla stessa y, devono necessariamente collegarsi insieme in una sola Equazione per modo, che non avvi ragione, per cui uno di tali archi possa determinarsi piuttosto, che l'altro, e quindi tra essi non può aver luogo alcuna particolar relazione, per cui possa opportunamente abbassarsi l' Equazione, dalla quale dipendono. Ora ciò, che abbiamo detto degli archi delle quattro prime file in (A) riportasi pienamente alle quan-

quantità (D). Dunque l' Equazione (C), della quale queste (D) sono radici, sarà un' Equazione incapace di una riduzione opportuna alla determinazione dell' arco richiesto.

Se qualcuno mai esitasse su questo discorso metafisico, per convincerlo pienamente della verità della nostra asserzione prendiamo a considerare più particolarmente le relazioni tutte, che esister ponno tra le (D), e giusta il (Capo 15.° Teor. delle Equaz.) veggiam, se per esse possa dalla (C) ottenersi il valore di una delle sue radici, per es., della ε', e se per conseguenza possa ricavarsi il valore dell'arco α'.

7. Supposto, che la Lettera K ci esprima la ragione data del Quadrante π all' arco α', cosicchè si abbia $\pi : \alpha' = K$, e $\pi = K\alpha'$, vedesi, che sostituendo nelle prime quattro righe in (A) invece di β' il suo valore $2\pi - \alpha'$ (n. 4. 5.), ed in vece di π il valore $K\alpha'$ otterremo

$\alpha'' = (4K + 1)\alpha'$, $\alpha''' = (8K + 1)\alpha'$, $\alpha^{iv} = (12K + 1)\alpha'$, ec.,

$$\alpha^{(c)} = (4(c - 1)K + 1)\alpha'$$

(E) $\beta' = (2K - 1)\alpha'$, $\beta'' = (6K - 1)\alpha'$, $\beta''' = (10K - 1)\alpha'$,
$\beta^{iv} = (14K - 1)\alpha'$, ec., $\beta^{(d)} = ((4d - 2)K - 1)\alpha'$,
$\gamma = -(4K - 1)\alpha'$, $\gamma'' = -(8K - 1)\alpha'$, $\gamma''' = -(12K - 1)\alpha'$,
$\gamma^{iv} = -(16K - 1)\alpha'$, ec., $\gamma^{(e)} = -(4eK - 1)\alpha'$,
$\delta' = -(2K + 1)\alpha'$, $\delta'' = -(6K + 1)\alpha'$, $\delta''' = -(10K + 1)\alpha'$,
$\delta^{iv} = -(14K + 1)\alpha'$, ec., $\delta^{(f)} = -((4f - 2)K + 1)\alpha'$,

e per conseguenza $\varepsilon'' = (4K + 1)^2\varepsilon'$, $\varepsilon''' = (8K + 1)^2\varepsilon'$,
$\varepsilon^{iv} =)12K + 1)^2\varepsilon'$, ec., $\varepsilon^{(c)} = (4(c - 1)K - 1)^2\varepsilon'$,
(F) $\zeta = (2K - 1)^2\varepsilon'$, $\zeta'' = (6K - 1)^2\varepsilon'$, $\zeta''' = (10K - 1)^2\varepsilon'$,
ec., $\zeta^{(d)} = ((4d - 2)K - 1)^2\varepsilon'$,
$\eta' =)4K - 1)^2\varepsilon'$, $\eta'' = (8K - 1)^2\varepsilon'$, $\eta''' = (12K - 1)^2\varepsilon'$, ec.,
$\eta^{(e)} = (4eK - 1)^2\varepsilon'$,
$\nu' = (2K + 1)^2\varepsilon'$, $\nu'' = (6K + 1)^2\varepsilon'$, $\nu''' =$

(10 K

$(10K+1)^2\iota'$, ec., $\nu^{(f)} = ((4f-2)K+1)^2\iota'$. Queste Equazioni (F), io dico, che tutti ci esprimono i rapporti particolari fra le radici della (C), e qualunque altro ne esista non, potrà che essere identico, e dipendente dai rapporti medesimi; imperciocchè se si volesse altrimenti, che per es., fra le tre radici ι'', ζ''', ν' esistesse una relazione diversa, e indipendente dalle precedenti, espressa questa con l' Equazione $f(\iota'')(\zeta''')(\nu') = h$, e sostituite in luogo delle ι', ζ'', ν' le quantità α''^2, β'''^2, δ'^2 (n.° prec.) avremo pei (n.[i] 5, 6) le quattro Equazioni

$\alpha'' = 4\pi + \alpha'$, $\beta''' = 10\pi - \alpha'$, $\delta' = 2\pi - \alpha'$, $f(\alpha''^2)(\beta'''^2)(\delta'^2) = h$

con le cinque quantità α', α'', β''', δ', π. Elimino da queste le α'', β''', δ', ci verrà un' Equazione finale tra le sole α', π, che rappresenterò per $f(\alpha')(\pi) = 0$; ora tale Equazione non facendo, che esprimere la relazione dell' arco α al quadrante π deve essere identica con la supposta $\pi : \alpha' = K$. Dunque per mezzo dell' Equazione $f(\alpha')(\pi) = 0$ non ottenendosi alcun nuovo rapporto tra gli archi $= \alpha''$, β''', δ', neppur l' altra $(f\iota'')(\zeta''')(\nu') = h$ ci darà nuovo rapporto tra le quantità ι'', ζ''', ν', e per conseguenza tutte le relazioni particolari tra le radici della (C) verranno rappresentate, e dipenderanno dalle Equazioni (F).

8. Prendasi la prima delle Equazioni (F), e ridotta questa alla $\frac{\iota''}{\iota'} = (4K+1)^2$, vogliasi dipendentemente da tal relazione particolare fra le due radici ι', ι'' pel (Capo 15.° Teor. delle Equaz.) determinare se può ottenersi il valore della ι. Chiamate perciò u', u'', u''', u^{iv}, ec. le radici della (C), ossia le quantità (D) prendo la funzione $\frac{u''}{u'}$, e fatte in essa tutte le possibili permutazioni fra le u', u'', u''' u^{v}, ec. suppongo $\frac{u''}{u'} = t'$, $\frac{u'''}{u'} = t''$, $\frac{u^{\text{v}}}{u''} = t'''$, $\frac{u^{\text{v}}}{u'} = t^{\text{v}}$, ec., e giusta il (n.° 105. Teor. delle Equaz.) determino dalla (C) l' Equazione . (G)

$$\text{(G)} \qquad t^{n} + pt^{n-1} + qt^{n-2} + \text{ec.} = 0,$$

di cui le t', t'', t''', t^{v} ec. siano radici. Ciò posto suppongo $\epsilon' = u'$, $\epsilon'' = u''$, onde abbiasi $t' = (4K+1)^2$, e dipendentemente da $\frac{u''}{u'} = t'$ pei (n. 144, 147 Teor. delle Equaz.) cerco il valore di $u' = \epsilon'$. Se nella (G) non esistesse, che una sola radice $= t'$, allora sappiamo dal citato (n.° 144 Teor. delle Equaz.), che il valore di $u' = \epsilon'$ potrebbe determinarsi dalla t' mediante un' Equazione di primo grado, ed essendo $t' = (4K+1)^2$ quantità cognita, verremmo a conoscere anche il valore della ϵ'. Ma si verifica egli, che la (G) abbia una sola radice $= t'$?

Supponghiamo, che nelle Equazioni

$$\text{(H)} \quad \alpha^{(c)} = (4(c-1)K+1)\alpha'; \ \beta^{(d)} = ((4d-2)K-1)\alpha',$$
$$\gamma^{(e)} = -(4eK-1)\alpha', \ \delta^{(f)} = -((4f-2)K+1)\alpha'$$

esposte in (E) facciasi successivamente

$$c = 4K+3, \quad 8K+4, \quad 12K+5, \text{ ec.}, \ 4rK+r+2$$
$$d = 2K \quad , \quad 6K+1, \quad 10K+2, \text{ ec.}, \ (4r-2)K+r-1$$
$$e = 4K \quad , \quad 8K+1, \quad 12K+2, \text{ ec.}, \ 4rK+r-1$$
$$f = 2K+2, \quad 6K+3, \quad 10K+4, \text{ ec.}, \ (4r-2)K+r+1$$

esprimendo r un numero intero positivo qualunque. Col sostituire questi valori nelle Equazioni (H) vedremo dopo breve calcolo risultarci in corrispondenza

$$\alpha^{(4K+3)} = (4K+1)(4K+1)\alpha', \ \alpha^{(8K+4)} = (4K+1)(8K+1)\alpha',$$
$$\alpha^{(12K+5)} = (4K+1)(12K+1)\alpha', \text{ ec.}, \ \alpha^{(r(4K+1)+2)} =$$
$$(4K+1)(4rK+1)\alpha',$$
$$\beta^{(2K)} = (4K+1)(2K-1)\alpha', \ \beta^{(6K+1)} = (4K+1)(6K-1)\alpha', \ \beta^{(10K+2)}$$
$$= (4K+1)(10K-1)\alpha', \text{ ec. } \beta^{((4r-2)K+r-1)} = (4K+1)((4r-2)K-1)\alpha',$$
$$\gamma^{4K} = -(4K+1)(4K-1)\alpha', \ \gamma^{(8K+1)} = -(4K+1)(8K-1)\alpha',$$

$\gamma^{(12K+2)} = -(4K+1)(12K-1)\alpha'$, ec.

$\gamma^{(4rK+r-1)} = -(4K+1)(4rK-1)\alpha'$,

$\delta^{(2K+2)} = -(4K+1)(2K+1)\alpha'$, $\delta^{(6K+3)} = -(4K+1)(6K+1)\alpha'$,

$\delta^{(10K+4)} = -(4K+1)(10K+1)\alpha'$, ec.,

$\delta^{((4r-2)K+r+1)} = -(4K+1)((4r-2)K+1)\alpha'$.

Dunque sostituendo quivi i valori delle Equazioni (E) otterremo:

$\alpha^{(4K+3)} = (4K+1)\alpha''$, $\alpha^{(8K+4)} = (4K+1)\alpha'''$, $\alpha^{(12K+5)} = (4K+1)\alpha^{\mathrm{iv}}$, ec., $\alpha^{(r(4K+1)+2)} = (4K+1)\alpha^{(r+1)}$.

$\beta^{(2K)} = (4K+1)\beta'$, $\beta^{(6K+1)} = (4K+1)\beta''$, $\beta^{(10K+2)} = (4K+1)\beta'''$, ec., $\beta^{((4r-2)K+r-1)} = (4K+1)\beta^{(r)}$.

$\gamma^{(4K)} = (4K+1)\gamma'$, $\gamma^{(8K+1)} = (4K+1)\gamma''$, $\gamma^{(12K+2)} = (4K+1)\gamma'''$, ec. $\gamma^{(4rK+r-1)} = (4K+1)\gamma^{(r)}$.

$\delta^{(2K+2)} = (4K+1)\delta'$, $\delta^{(6K+3)} = (4K+1)\delta''$, $\delta^{(10K+4)} = (4K+1)\delta'''$, ec. $\delta^{((4r-2)K+r+1)} = (4K+1)\delta^{(r)}$

e per conseguenza sarà

$\epsilon^{(4K+3)} = (4K+1)^2\epsilon''$, $\epsilon^{(8K+4)} = (4K+1)^2\epsilon'''$, $\epsilon^{(12K+5)} = (4K+1)^2\epsilon^{\mathrm{iv}}$, ec., $\epsilon^{(r(4K+1)+2)} = (4K+1)^2\epsilon^{(r+1)}$.

$\zeta^{(2K)} = (4K+1)^2\zeta'$, $\zeta^{(6K+1)} = (4K+1)^2\zeta''$, $\zeta^{(10K+2)} = (4K+1)^2\zeta'''$, ec., $\zeta^{((4r-2)K+r-1)} = (4K+1)^2\zeta^{(r)}$.

$\eta^{4K} = (4K+1)^2\eta'$, $\eta^{(8K+1)} = (4K+1)^2\eta''$, $\eta^{(12K+4)} = (4K+1)^2\eta'''$, ec., $\eta^{(4rK+r-1)} = (4K+1)^2\eta^{(r)}$

$\nu^{(2K+2)} = (4K+1)^2\nu'$, $\nu^{(6K+3)} = (4K+1)^2\nu''$, $\nu^{(10K+4)} = (4K+1)^2\nu'''$, ec., $\nu^{((4r-2)K+r+1)} = (4K+1)^2\nu^{(r)}$,

e finalmente

$$\frac{\epsilon^{(4K+3)}}{\epsilon''} = (4K+1)^2, \quad \frac{\epsilon^{(8K+4)}}{\epsilon'''} = (4K+1)^2,$$

$\epsilon^{(12K+5)}$

$$\frac{\varepsilon^{(12K+5)}}{\varepsilon^{IV}} = (4K+1)^2, \text{ ec.}, \ \frac{\varepsilon^{(r(4K+1)+2)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (4K+1)^2.$$

$$\frac{\zeta^{(2K)}}{\zeta'} = (4K+1)^2, \ \frac{\zeta^{(6K+1)}}{\zeta'} = (4K+1)^2,$$

$$\text{(I)} \quad \frac{\zeta^{(10K+2)}}{\zeta'''} = (4K+1)^2; \text{ ec.}, \ \frac{\zeta^{((4r-2)K+r-1)}}{\zeta^{(r)}} = (4K+1)^2$$

$$\frac{u^{(4K)}}{u'} = (4K+1)^2, \ \frac{u^{(8K+1)}}{u''} = (4K+1)^2,$$

$$\frac{u^{(12K+2)}}{u'''} = (4K+1)^2, \text{ ec.}, \ \frac{u^{(4rK+r-1)}}{u^{(r)}} = (4K+1)^2$$

$$\frac{v^{(2K+2)}}{v'} = (4K+1)^2, \ \frac{v^{(6K+3)}}{v''} = (4K+1)^2,$$

$$\frac{v^{(10K+4)}}{v'''} = (4K+1)^2, \text{ ec.}, \ \frac{v^{((4r-2)K+r+1)}}{v^{(r)}} = (4K+1)^2.$$

Le u', u'', u''' ec. altro non essendo, che le quantità (D), ne segue che le (I) saranno tante radici della Equazione (G); ma ciascuna di queste (I) è $= (4K+1)^2$. Dunque essendo esse di numero infinito la (G) avrà infinite radici $= t'$.

Venendo ora a determinare, se possa dipendentemente dalla $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = (4K+1)^2$ ottenersi il valore della ε' osservo in primo luogo, che nel passare dall' una all'altra delle (I), per esempio dalla $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ alla $\frac{\varepsilon^{(4K+3)}}{\varepsilon''}$, da questa $\frac{\varepsilon^{(4K+3)}}{\varepsilon''}$ alla $\frac{\varepsilon^{(8K+4)}}{\varepsilon'''}$ ec., il valore $(4K+1)^2$ si mantiene sempre lo stesso, non per la forma della funzione, ma per un rapporto particolare fra le radici. Dunque chiamate t', t'', t''', t^{IV} ec. simili quantità tutte uguali fra loro, mentre voglio dipendentemente dalla $t' = (4K+1)^2$ il valore della ε' (pei num. 16. 20

 Me-

Memoria antecedente), formerò con tutte le accennate t', t'', t''', t^{iv} ec. la Equazione $t'+t''+t'''+t^{\mathrm{iv}}+ \text{ec} = h$, essendo h uguale alla quantità $(4\mathrm{K}+1)^2$ replicata tante volte quante sono le accennate (I), e chiamata essa $\mathrm{T}' = h$ cercherò da questa Equazione il valore della ε. Ora nella $t'+t''+t'''+t^{\mathrm{iv}}$ ec. $= h$, trasportiamo la t' nel secondo membro, ci verrà $t''+t'''+t^{\mathrm{iv}}+t^{\mathrm{v}}+ \text{ec.} = h - t'$; ma essendo le (I) di numero infinito la h è quantità necessariamente infinita. Dunque scomparendo rapporto ad essa la t' ci resterà $t''+t'''+t^{\mathrm{iv}}+t^{\mathrm{v}}+ \text{ec.} = h$, Equazione che esprimerò per $\mathrm{T}'' = h$. Trasportando in seguito nell' altro membro la t'', dalla $\mathrm{T}'' = h$, si ottiene $t'''+t^{\mathrm{iv}}+t^{\mathrm{v}}+t^{\mathrm{vi}} = h - t''$: dunque svanendo rapporto alla h, eziandio la t'' otterremo l' Equazione $t'''+t^{\mathrm{iv}}+t^{\mathrm{v}}+t^{\mathrm{vi}}+ \text{ec.} = h$ che chiamerò $\mathrm{T}''' = h$. Nella stessa maniera col portare nel secondo membro delle successive Equazioni le quantità t''', t^{iv}, ec. troveremo risultarci le Equazioni $\mathrm{T}^{\mathrm{iv}} = t^{\mathrm{iv}}+t^{\mathrm{v}}+t^{\mathrm{vi}}+ \text{ec.} = h$, $\mathrm{T}^{\mathrm{v}} = t^{\mathrm{v}}+t^{\mathrm{vi}}+t^{\mathrm{vii}}+t^{\mathrm{viii}} = h$, ec. Ora somiglianti Equazioni son di numero infinito, e nella medesima guisa con cui si determina la ε dalla T' deve evidentemente venir determinata la ε'' dalla T'', la ε''' dalla T''', ec. Dunque essendo tutte queste funzioni T', T'', T''' ec. uguali ad h, nel cercare dalla T', e però dalla h il valore ε dovrò necessariamente ottenere nel tempo medesimo eziandio i valori ε'', ε''', $\varepsilon^{\mathrm{iv}}$ ec., e per conseguenza unendosi tutte queste ε', ε'', ε''', $\varepsilon^{\mathrm{iv}}$ ec. in una sola Equazione di tanto grado, quanto sono le T', T'', T''' ec., caderemo nuovamente in un' Equazione necessariamente di grado infinito. Dunque per la determinazione della ε' dipendentemente dalla $\mathrm{T}' = h$, e però dalla $t' = (4\mathrm{K}+1)^2$ dovendosi di necessità cadere in un' Equazione di grado infinito, ne segue che tale determinazione sarà impossibile.

Cerchiamo presentemente dalla $\mathrm{T}' = h$ il valore di una funzione delle u', u'', u''', ec. che chiamerò y, e dipendentemente da questa y cerchiamo in seguito il valore della ε.

Qua-

Qualunque siasi questa y od essa à i suoi valori dipendenti dalla T' di numero infinito, o no. Se gli ha di numero infinito, allora potrebbe bensì questa funzione esser tale, che dipendentemente da uno dei suoi valori y' potrebbe determinarsi mediante un' Equazione finita il valore della ε', ma nel voler determinare dalla T' l'Equazione in y, e quindi il supposto valore y' cadremo, come precedentemente, nella necessità di dover risolvere un' Equazione di grado infinito. Che se si vuole che la y abbia i suoi valori dipendenti dalla T' di un numero finito: allora potremo bensì ottenere questi mediante un' Equazione di grado finito; ma cercando poi da essi il valore della ε caderem nuovamente in un' Equazione d' infinito grado. Imperciocchè se ciò non fosse, risultando allora la ε una funzione degli accennati valori della y dotata di un numero finito di risultati, e questi valori della y essendo funzioni delle t', t'', t''' ec., ed essendo per la ipotesi di un numero finito; ancora la ε sarebbe una funzione delle t', t'', t''', ec. avente un numero finito di valori, e quindi sarebbe determinabile dalla $T' = h$ col mezzo di un' Equazione finita, il che è contro quanto abbiamo dimostrato precedentemente. Dunque il valore della ε non potrà determinarsi dipendentemente dalla $T' = h$ e però dalla $t' = (4K + 1)^2$, nè immediatamente, nè col soccorso di una nuova funzione y.

9. Passiamo alla seconda delle Equazioni (F), cioè alla $\varepsilon''' = (8K + 1)^2 \varepsilon'$, e cerchiamo il valore di ε' dipendentemente dal rapporto $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} = (8K + 1)^2$. Questa funzione $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'}$ altro essa pure non è, che una radice della (G); supposto pertanto $u'' = \varepsilon'''$, ed $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} = \frac{u'''}{u'} = t2$ (n.° 8), veggiamo in primo luogo siccome nel (cit. n.° 8), quante volte la (G) contiene una simil radice. Suppongasi perciò, che nelle Equazioni (H) si faccia successivamente

$\varepsilon =$

$c = 8K + 4,\ 16K + 5,\ 24K + 6,$ ec., $8rK + r + 3$

$d = 4K - 1,\ 12K,\ 20K + 1,$ ec., $(8r - 4)K + r - 2$

$e = 8K - 1,\ 16K,\ 24K + 1,$ ec., $8rK + r - 2$

$f = 4K + 3,\ 12K + 4,\ 20K + 5,$ ec., $(8r - 4)K + r + 2$

Sostituiscansi questi valori nelle (H), e proseguito il calcolo come nel (cit. n.° 8), vedremo quì pur risultarci

$$\frac{\epsilon^{(8K+4)}}{\epsilon''} = (8K + 1)^2,\ \frac{\epsilon^{(16K+5)}}{\epsilon'''} = (8K + 1)^2,$$

$$\frac{\epsilon^{(24K+6)}}{\epsilon^{iv}} = (8K + 1)^2, \text{ ec.}, \frac{\epsilon^{(r(8K+1)+3)}}{\epsilon^{(r+1)}} = (8K + 1)^2.$$

$$\frac{\zeta^{(4K-1)}}{\zeta'} = (8K + 1)^2,\ \frac{\zeta^{(12K)}}{\zeta''} = (8K + 1)^2,$$

$$\frac{\zeta^{(20K+1)}}{\zeta'''} = (8K + 1)^2, \text{ ec.}, \frac{\zeta^{((8r-4)K+r-2)}}{\zeta^{(r)}} = (8K + 1)^2.$$

$$\frac{\eta^{(8K-1)}}{\eta'} = (8K + 1)^2,\ \frac{\eta^{(16K)}}{\eta''} = (8K + 1)^2,$$

$$\frac{\eta^{(24K+1)}}{\eta'''} = (8K + 1)^2, \text{ ec.}, \frac{\eta^{(8rK+r-2)}}{\eta^{(r)}} = (8K + 1)^2.$$

$$\frac{\nu^{(4K+3)}}{\nu'} = (8K + 1)^2,\ \frac{\nu^{(12K+4)}}{\nu''} = (8K + 1)^2,$$

$$\frac{\nu^{(20K+5)}}{\nu'''} = (8K + 1)^2, \text{ ec.}, \frac{\nu^{((8r-4)+rK-2)}}{\nu^{(r)}} = (8K + 1)^2.$$

Dunque nella (G) esisteranno ancora infinite radici $= t2$, e per conseguenza, replicato lo stesso raziocinio del (cit. n.° 8) troveremo egualmente impossibile il determinare il valore della ϵ' dipendentemente dall' Equazione di rapporto $\frac{\epsilon'''}{\epsilon'} = (8K + 1)^2$.

10.

10. Ciocchè abbiamo dimostrato presentemente (n. 8, 9) riguardo alle due Equazioni di rapporto $\varepsilon'' = (4K+1)^2\varepsilon'$, $\varepsilon''' = (8K+1)^2\varepsilon'$, troveremo nella maniera medesima verificarsi ancora di tutte le Equazioni (F).

Imperciocchè supposto successivamente nelle Equazioni (H)

$c = 12K+5, 24K+6$, ec., $12rK+r+4$;

$c = 16K+6, 32K+7$, ec., $16rK+r+5$, ec.;

$c = 4qK+q+2, 8qK+q+3$, ec., $4rqK+r+q+1$.

$d = 6K-2, 18K-1$, ec., $(12r-6)K+r-3$;

$d = 8K-3, 24K-2$, ec., $(16r-8)K+r-4$, ec.;

$d = 2qK-q+1, 6qK-q+2$, ec. $(4rq-2q)K-q+r$.

$e = 12K-2, 24K-1$, ec., $12rK+r-3$;

$e = 16K-3, 32K-2$, ec., $16rK+r-4$, ec.,

$e = 4qK-q+1, 8qK-q+2$, ec., $4rqK-q+r$.

$f = 6K+4, 18K+5$, ec., $(12r-6)K+r+3$;

$f = 8K+5, 24K+6$, ec., $(16r-8)K+r+4$, ec;

$f = 2qK+q+1, 6qK+q+2$, ec., $(4rq-2q)K+q+r$.

Con la sostituzione e riduzione ne viene in corrispondenza

$$\frac{\varepsilon^{(12K+5)}}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon^{(24K+6)}}{\varepsilon'''} = \text{ec.} = \frac{\varepsilon^{(12rK+r+4)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{\varepsilon^{(16K+6)}}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon^{(32K+7)}}{\varepsilon'''} = \text{ec.} = \frac{\varepsilon^{(16rK+r+5)}}{\varepsilon^{(r+2)}} = (16K+1)^2, \text{ ec.};$$

$$\frac{\varepsilon^{(4qK+q+2)}}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon^{(8qK+q+3)}}{\varepsilon'''} = \text{ec.} = \frac{\varepsilon^{(4rqK+r+q+1)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (4qK+1)^2;$$

$$\frac{\zeta^{(6K-2)}}{\zeta'} = \frac{\zeta^{(18K-1)}}{\zeta''} = \text{ec.} = \frac{\zeta^{((12r-6)K+r-3)}}{\zeta^{(r)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{\zeta^{(8K-3)}}{\zeta'} = \frac{\zeta^{(24K-2)}}{\zeta''} = \text{ec.} = \frac{\zeta^{((16r-8)K+r-4)}}{\zeta^{(r)}} = (16K+1)^2, \text{ ec.}$$

$$\frac{\zeta^{(2qK-q+1)}}{\zeta'} = \frac{\zeta^{(6qK-q+2)}}{\zeta''} = \text{ec.} = \frac{\zeta^{((4rq-2q)K-q+r)}}{\zeta^{(r)}} = 4qK+1)^2.$$

$\varepsilon^{(12}$

$$\frac{\eta^{(12K-2)}}{\eta'} = \frac{\eta^{(24K-2)}}{\eta''} = \text{ec.} = \frac{\eta^{(12rK+r-3)}}{\eta^{(r)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{\eta^{(16K-3)}}{\eta'} = \frac{\eta^{(32K-2)}}{\eta''} = \text{ec.} = \frac{\eta^{(16rK+r-4)}}{\eta^{(r)}} = (16K+1)^2, \text{ ec.};$$

$$\frac{\eta^{(4qK-q+1)}}{\eta'} = \frac{\eta^{(8qK-q+2)}}{\eta''} = \text{ec.} = \frac{\eta^{(4rqK-q+1)}}{\eta^{(r)}} = (4qK+1)^2.$$

$$\frac{y^{(6K+4)}}{y'} = \frac{y^{(18K+5)}}{y''} = \text{ec.} = \frac{y^{((12r-6)K+r+3)}}{y^{(r)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{y^{(8K+5)}}{y'} = \frac{y^{(24K+6)}}{y''} = \text{ec.} = \frac{y^{((16r-8)K+r+4)}}{y^{(r)}} = (16K+1)^2, \text{ ec.};$$

$$\frac{y^{(2qK+q+1)}}{y'} = \frac{y^{(6qK+q+2)}}{y''} = \text{ec.} = \frac{y^{((4rq-2q)K+q+r)}}{y^{(r)}} = (4qK+1)^2.$$

Supposto in seguito

$c = (2r-1)K - r,\ (6r-3)K - r - 1,\ (10r-5)K - r - 2$, ec.,
$(4rq - 2r - 2q + 1)K - r - q + 1$;

$d = 2rK - r + 1,\ 6rK - r + 2,\ 10rK - r + 3$, ec.,
$(4rq - 2r)K - r + q$;

$e = (2r-1)K - r + 1,\ (6r-3)K - r + 2,\ (10r-5)K - r + 3$, ec.,
$(4rq - 2r - 2q + 1)K - r + q$;

$f = 2rK - r,\ 6rK - r - 1,\ 10rK - r - 2$, ec.,
$(4rq - 2r)K - r - q + 1$;

corrispondentemente si ottiene

$z^{((2r}$

$$\frac{\varepsilon^{((2r-1)K-r)}}{\zeta^{(r)}}=(2K-1)^2,\quad \frac{\varepsilon^{((6r-3)K-r-1)}}{\zeta^{(r)}}=(6K-1)^2,$$

$$\frac{\varepsilon^{((10r-5)K-r-2)}}{\zeta^{(r)}}=(10K-2)^2,\text{ec.},\quad \frac{\varepsilon^{((4rq-2r-2q+1)K-r-q+1)}}{\zeta^{(r)}}=[(4q-2)K-1]^2,$$

$$\frac{\zeta^{(2rK-r+1)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=(2K-1)^2,\quad \frac{\zeta^{(6rK-r+1)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=(6K-1)^2;$$

$$\frac{\zeta^{(10rK-r+1)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=(10K-1)^2,\text{ec.},\quad \frac{\zeta^{((4rq-2r)K-r+q)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=[(4q-2)K-1]^2.$$

$$\frac{\eta^{((2r-1)K-r+1)}}{\nu^{(r)}}=(2K-1)^2,\quad \frac{\eta^{((6r-3)K-r+1)}}{\nu^{(r)}}=(6K-1)^2,$$

$$\frac{\eta^{((10r-5)K-r+1)}}{\nu^{(r)}}=(10K-1)^2,\text{ec.},\quad \frac{\eta^{((4rq-2q-2r+1)rK+q)}}{\nu^{(r)}}=[(4q-2)K-1]^2.$$

$$\frac{\nu^{(2rK-r)}}{\eta^{(r)}}=(2K-1)^2,\quad \frac{\nu^{(6rK-r+1)}}{\eta^{(r)}}=(6K-1)^2,$$

$$\frac{\nu^{(10rK-r-2)}}{\eta^{(r)}}=(10K-1)^2,\text{ec.},\quad \frac{\nu^{((4rq-2r)K-r-q+1)}}{\eta^{(r)}}=[(4q-2)K-1]^2,$$

e da ciascuna di queste Equazioni, fatto successivamente $r=1, 2, 3$, ec., ci risultano come precedentemente tante frazioni, le quali hanno per denominatori tutte le quantità (D), e le quali uguagliano i coefficienti tutti della ε' nella seconda riga della (F). Finalmente supposto

$c = 4rqK-r-q+1$, $d = (4rq-2q)K-r+q+1$,
$e = 4rqK-r+q$, $f = (4rq-2q)K-r-q+1$,
$c=(4rq-2r-2q+1)K+r+q$, $d=(4rq-2r)K+r-q+1$,
$e=(4rq-2r-2q+1)K+r-q$, $f=(4rq-2r)K+r+q$,

 ci

ci risultano in corrispondenza le formole

$$\frac{\varepsilon^{(4rqK-r-q+1)}}{\eta^{(r)}}=(4qK-1)^2,\quad \frac{\zeta^{((4rq-2q)K-r+q+1)}}{\upsilon^{(r)}}=(4qK-1)^2,$$

$$\frac{\eta^{(4rqK-r+q)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=(4qK-1)^2,\quad \frac{\upsilon^{((4rq-2q)K-r-q+1)}}{\zeta^{(r)}}=(4qK-1)^2,$$

$$\frac{\varepsilon^{((4rq-2r-2q+1)K+r+q)}}{\upsilon^{(r)}}=[(4q-2)K+1]^2,\quad \frac{\zeta^{((4rq-2r)K+r-q+1)}}{\eta^{(r)}}=[(4q-2)K+1]^2,$$

$$\frac{\eta^{((4rq-2r-2q+1)K+r-q)}}{\zeta^{(r)}}=[(4q-2)K+1)^2,\quad \frac{\upsilon^{((4rq-2r)K+r+q)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=[(4q-2)K+1]^2,$$

dalle quali col supporre successivamente $q=1, 2, 3$, ec.; $r=1, 2, 3$, ec., e combinando ciascun valore della q con ciascun valore della r, ricavansi, come nei casi precedenti, tante Equazioni, i secondi membri delle quali non sono, che tutti i coefficienti della ε' nelle righe terza, e quarta delle (F), e i membri primi sono tanti rotti, che hanno per denominatori tutte le quantità (D). Dunque nessuna delle Equazioni di rapporto (F) potrà servire a determinare il valore della ε'.

11. Ma non potrebbe ad una simile determinazione servire un qualche altro rapporto fra alcuna delle radici (D) diverso dai precedenti (F)? Esista questo nuovo rapporto, per es.°, fra le radici ε', ε'', ζ', η''', e venga espresso dall' Equazione $f(\varepsilon')(\varepsilon'')(\zeta')(\eta''')=h$. Questo quantunque appaja diverso dagli accennati (F), pure pel (n.° 7) dovrà essere dipendente dai medesimi, e dovrà perciò esser nato da una combinazione, qualunque essa siasi, fra le Equazioni

$$\varepsilon''=(4K+1)^2\varepsilon',\ \zeta=(2K-1)^2\varepsilon',\ \eta'''=(12K-1)^2\varepsilon'.$$

Ora pei (n. 7. 8. 9.) avendosi

$$\varepsilon^{(4K+3)}=(4K+1)^2\varepsilon'',\ \varepsilon^{(8K+4)}=(4K+1)^2\varepsilon''',\ \varepsilon^{(12K+5)}=(4K+1)^2\varepsilon^{iv},\ \text{ec.}$$

$$\zeta^{(2K)}=(2K-1)^2\varepsilon'',\ \zeta^{(4K-1)}=(2K-1)^2\varepsilon''',\ \zeta^{(6K-2)}=(2K-1)^2\varepsilon^{iv},\ \text{ec.}$$

$$\eta^{(12K+2)}=(12K-1)^2\varepsilon'',\ \eta^{(24K+1)}=(12K-1)\varepsilon''',\ \eta^{(36K)}=(12K-1)^2\varepsilon^{iv},\ \text{ec.}$$

è chiaè chiaro, che se la combinazione istessa, e le stesse operazioni, che abbiamo supposte praticate fra le Equazioni $\varepsilon'' = (4K+1)^2\varepsilon'$, $\zeta = (2K-1)^2\varepsilon'$, $\eta''' = (12K-1)^2\varepsilon'$, praticate si fossero fra le tre Equazioni, che nelle ultimamente ottenute formano la prima colonna, oppure fra le tre Equazioni della colonna seconda, o fra quelle della terza ec., è chiaro, dissi, che ci sarebbero risultate in corrispondenza le Equazioni

$$f(\varepsilon'')(\varepsilon^{(4K+3)})(\zeta^{(2K)})(\eta^{(12K+2)}) = h,$$

$$f(\varepsilon''')(\varepsilon^{(8K+4)})(\zeta^{(4K-1)})(\eta^{(24K+1)}) = h,$$

$$f(\varepsilon^{iv})(\varepsilon^{(12K+5)})(\zeta^{(6K-2)})(\eta^{(36K)}) = h, \text{ ec.},$$

le quali altro evidentemente non sono, che la $f(\varepsilon')(\varepsilon'')(\zeta)(\eta''') = h$, permutate avendosi le ε', ε'', ζ η''' rispettivamente nelle ε'', $\varepsilon^{(4K+3)}$, $\zeta^{(2K)}$, $\eta^{(12K+2)}$, nelle ε''', $\varepsilon^{(8K+4)}$, $\zeta^{(4K+1)}$, $\eta^{(24K+1)}$; nelle ε^{iv}, $\varepsilon^{(12K+5)}$, $\zeta^{(6K-2)}$, $\eta^{(36K)}$, ec. Dunque se dalla $f(\varepsilon')(\varepsilon'')(\zeta)(\eta''') = h$ vorrò cercare il valore di ε', troverò siccome precedentemente, di dover cadere in un' Equazione, di cui saranno radici eziandio le ε'', ε''', ε^{iv}, ec., e però di grado infinito. Ciò che abbiam' ora dimostrato del rapporto supposto fra le ε', ε'', ζ, η''', dimostrandosi egualmente di un' altro rapporto qualunque fra un qualunque numero delle radici (D), ne segue che nessuno nè potrà esistere atto alla determinazione della nostra ε'.

12. Il primo membro della Equazione (C) non puo avere alcun fattore algebraico di grado finito.

Esista se è possibile un simile fattore e tale sia il primo membro della Equazione algebraica finita

(K) $\quad u^{\rho} + au^{\rho-1} + bu^{\rho-2} + \text{ec.} = 0.$

di cui sia radice la ε'. Se esiste l' accennato divisore della (C), ciò non può essere che in conseguenza di qualche rapporto particolare fra quelle delle sue radici che sono radici ancora della (K). Ora in conseguenza di quanto abbiamo dimostrato, per niuno dei rapporti (F) nè per alcun altro che possa aver luogo fra le u', u'', u''' ec. può mai determinarsi un' Equazione di grado finito, la cui soluzione ci somministri il valore della ϵ'. Dunque non potrà neppur essere che il primo membro della supposta (K) sia fattore del primo membro della (C), poichè altrimenti la soluzione di questa Equazione (K) ci darebbe il valore ϵ'. Dunque ec.

Quindi segue che qualunque metodo si adoperi, cioè la via delle Equazioni, o quella delle serie, o il Calcolo infinitesimale, ec. non potrà mai trovarsi alcun' Equazione algebraica finita di cui ϵ' sia radice. Imperciocchè se ciò fosse possibile, il primo membro della (C) avrebbe evidentemente un fattore algebraico finito, contro quello che abbiamo dimostrato precedentemente.

13. Da quanto abbiamo detto, cominciando dal (n.° 7), sino al presente, concludiamo pertanto essere impossibile la determinazione della ϵ', tanto se si cerchi il suo valore dall' Equazione (C), o immediatamente, o mediatamente, tentando di abbassare essa (C), o di ridurla ad altra Equazione opportuna all' intento, quanto se si cerchi il valore medesimo con altro mezzo indipendente dalla stessa Equazione (C) (n.° 12). Ora abbiamo $\alpha'^2 = \epsilon'$ (n.° 5). Dunque essendo impossibile la determinazione della quantità ϵ', sarà ancora impossibile quella dell' arco α', e per conseguenza sarà impossibile la rettificazione del Circolo.

A pieno compimento di questa dimostrazione, osserviamo, che se per esprimere il Circolo, e per istabilire l' arco dato BM (Fig. 3), invece delle CP, PM, prendiamo per coordinate altre due rette qualisivogliono, o se riferiamo questa Curva ad un fuoco, o la rappresentiamo in un' altra maniera diversa, osserviamo, dissi, che sempre verrà la medesima conclusione. Qualunque siasi questa maniera, essa dipenderà sempre pienamente dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, dipendendo da tale Equazione tutte le proprietà del Circolo, e per conseguenza l' arco $\alpha' =$ BM non potendosi esprimere al-

algebraicamente per le quantità α, CP, PM, non potrà neppure venire espresso algebraicamente dalle quantità dipendenti dal nuovo metodo supposto.

14. La dimostrazione, che ingegnati ci siam d'assegnare, vedesi facilmente, che tutte esclude le obbiezioni, che ponnosi fare contro del nostro Teorema. Imperocchè in quanto alla prima delle obbiezioni esposte nel (n.° 3), allorchè abbiamo dimostrata impossibile la determinazione della quantità ε', abbiam dimostrato insieme non potere l' Equazione (C), e quindi la (B) ricevere abbassamento opportuno a determinare il valore dell' arco α'. In quanto all' obbiezione seconda del (n.° 3), osservisi, che la nostra dimostrazione si verifica qualunque valore determinato si attribuisca alla Lettera K (n. 6), e però avendosi $\alpha' = \frac{\pi}{K}$ si verifica rapporto ad un qualunque arco determinato, il quale abbia una determinata relazione con la intera circonferenza; se sia $K = 1$, risultando $\alpha' = \pi$, il precedente discorso ci dimostra impossibile la rettificazione del Quadrante. Potremo rispondere alle obbiezioni proposteci dal Ch. d' Alembert (3.°, 4.° n.° 3), nella maniera, che segue.

15. Supponghiamo, che $dz = X dx$ ci esprima il Differenziale Mm dell' arco di una Curva qualunque BMD (Fig. 4), e però che il suo Integrale, che supporrò essere $z = f(x)$ (C), essendo C la Costante da aggiungersi, rappresenti il valore dell' arco medesimo. Ciò posto, consideriamo in qual luogo terminerà l' arco, di cui vogliamo il valore, è chiaro, che finirà nel punto M, ove termina l' ordinata, e che questo punto viene determinato dal valore dell' ascissa AP, e dell' ordinata PM; ma da qual punto deve cominciare a computarsi l' arco medesimo? Ecco a che serve nella Integrazione la Costante C; le coordinate AP, PM dandoci nella Curva soltanto la posizione del punto M non possono determinarci il principio dell' arco, che consideriamo; questo principio per la proprietà, che, stabilito

una

una volta si conserva sempre lo stesso, viene determinato dalla Costante. Se nella nostra curva vogliasi che l'arco cominci dal punto B già dato, abbassata l'ordinata BC, e supposto, che sia AC $= p$, e che quando $x = p$ sia $z = 0$, sostituisco questi valori nell'Equazione $z = f(x)$ (C), avremo $0 = f(p)$ (C), trovo quindi il valore della C, lo sostituisco nella $z = f(x)$ (C), e stabiliti così il principio B, e l'estremo M, avremo dall' Equazion risultata il valore dell'arco z. Dunque tanto la costante C, quanto le due coordinate AP, PM non fanno, che determinarci due punti, cioè le due estremità dell'arco, e il valore dell'arco dipenderà dall' Equazione $z = f(x)$ (C). Venghiamo ora al circolo (Fig. 3) di cui l'Equazione è $y^2 = a^2 - x^2$ (n.° 4), e supposto l'arco BM $= z$, facciamo la precedente formola $Xdx = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, onde sia $dz = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, e $z = f(x)$(C) uguale all'arco circolare; venendo qui pure dalle coordinate CP, PM determinato il solo punto M, l'altro punto B dovrà dipendere dalla Costante C; ora se si vuole, che da un tal punto cominci l'arco allorchè $x = a$, deve essere $z = 0$, dunque sostituendo questi valori nella $z = f(x)$ (C), avremo l'Equazione $0 = f(a)$ (C), e il valor della C da questa ricavato, e sostituito nella $z = f(x)$ (C) non farà, che stabilire il punto B, la grandezza dell'arco dipenderà dall'Equazione ottenuta. Egli è poi un assurdo il volere nel nostro caso attribuire alla C dei valori arbitrarj; avendosi stabilito, che il principio del nostro arco sia in B, non possiamo alla C dare quel valore, che ci piace, dobbiamo darle quello, che risulta dalla soluzione della $0 = f(a)$ (C).

Ciò posto potrà la $f(x)$ (C) essere una funzion algebraica? Non già. Essendosi determinato dalla $0 = f(a)$ (C), e sostituito nella $z = f(x)$ (C) il valore della C, da quest' ultima Equazione devesi ottenere il valore dell' arco compreso tra i punti B, M; ora di simili archi non v'è già il solo BM, ma ve ne sono infiniti, tali essendo gli archi tutti

$4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec. (n.° 4). Dunque dovendo risultare infiniti i valori della z, la funzione $f(x)$ (C) dovrà avere infiniti valori, conservandosi la C sempre la medesima, ed essa $f(x)$ (C) per conseguenza non potrà essere funzione Algebraica.

Suppone il Ch. d'Alembert, che la nostra Costante sia variabile per ogni rivoluzione (4.° n.° 3); ma riflettendo, che la Costante non fa, che determinare il punto B, e che questo punto è sempre il medesimo rapporto a tutti gli archi α, $4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec., è facile a vedersi essere questa una supposizione, la quale nel nostro caso non può aver luogo.

Il d'Alembert paragona la rettificazione del Circolo con quella della Cicloide (3.°, 4.° n.° 3), e dalla possibilità di questa sospetta la possibilità della prima; ma tra queste due Curve esiste tal differenza, che, per quanto a me sembra, non può giammai aver luogo una simile deduzione: sì nel Circolo, che nella Cicloide ad una medesima ascissa corrispondono, è vero, infiniti archi diversi, cosicchè nel circolo della (Fig. 3.ª) alla stessa ascissa CP corrispondono gli infiniti archi α, $4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec. (n.° 4.) e nella Cicloide della (Fig. 5.ª) all'ascissa medesima AP corrispondono gli infiniti archi AM, AMBM', AMBM'EM", ec.; ma i primi fra questi (fig. 3.ª) oltre la medesima ascissa CP hanno ancora l'ordinata stessa PM; non così i secondi; l'arco AM (fig. 5.ª) corrisponde all'ordinata PM, l'altro AMBM' all'ordinata PM', il terzo AMBM'EM" all'ordinata PM", ec. Ora per la natura della curva la determinazione d'un arco dipendendo dall'integrazione della formola $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, dipender deve dal valore dell'ascissa insieme, e da quello dell'ordinata. Dunque nel circolo dalle stesse coordinate CP, PM dipendendo in egual modo tutti gli archi α, $4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec. l'Equazione algebraica richiesta ad esprimere, il valore del primo di questi archi dovrà racchiudere insieme il valor degli altri, ed essere perciò di grado infinito;

ma

ma nella Cicloide, quantunque l' ascissa sia sempre la stessa, pure gli archi venendo a dipendere da ordinate diverse, evidentemente ne siegue, che la determinazione dell' arco AM potrà essere affatto indipendente da quella dell' arco AMBM', da quella dell' arco AMBM'EM'', ec., e però non dovendo essi, siccome gli archi circolari, collegarsi necessariamente insieme in una sola Equazione, non dovrò nella ricerca del primo AM cadere necessariamente a determinare anche gli altri AMBM', AMBM'EM'', ec., e per conseguenza non dovrò necessariamente cadere in Equazione di grado infinito.

16. Per rispondere finalmente alla difficoltà promossa dal paragonare il Problema della trisezione con quello della rettificazione dell' arco circolare (1.° n.° 3) osserviamo, che dimandandosi di trisecare l' arco BM (fig. 3.ª), pei (1.° n.° 3. n.° 4) simultaneamente dimandasi la trisezione di tutti gli archi (A); ma allorchè, dato l' arco BM, cerco di tagliarlo in tre parti uguali, altro non faccio, che cercar di trovare un punto R, il quale determini l' arco BQ terza parte di BM. Dunque lo stesso dicendosi di tutti gli archi (A), ne viene, che il nostro Problema si ridurrà alla ricerca di tutti i punti Q, ec., dai quali restano determinate le terze parti di tutti gli archi sovraccennati; ora quantunque gli archi siano infiniti, pure tali punti, come vedremo fra poco, riduconsi a tre soli; dunque tre sole essendo in fine le cose richieste dal Problema, l' Equazione che per la soluzione di questo si ottiene, dovrà soltanto ascendere al terzo grado, e non già ad un grado infinito. Dunque il paragone accennato nel (1.° n.° 3), e quindi la promossa difficoltà non potrà punto aver luogo.

Ritenute le denominazioni dei (n. 4, 5), e supposti nel Circolo ABDE determinati i tre punti Q, R, S tali, che $BQ = \frac{\alpha}{3}$, $BDR = \frac{4\pi + \alpha}{3}$, $BDAS = \frac{8\pi + \alpha}{3}$ avremo pre-

scin-

scindendo per ora dalle direzioni,

$$BES = 4\pi - \frac{8\pi + \alpha}{3} = \frac{4\pi - \alpha}{3},\ BEAR = 4\pi - \frac{4\pi + \alpha'}{3} = \frac{8\pi - \alpha'}{3},$$

$$BEADQ = 4\pi - \frac{\alpha'}{3} = \frac{12\pi - \alpha'}{3},\ AR = 2\pi - \frac{4\pi + \alpha'}{3} = \frac{2\pi - \alpha'}{3} = \frac{\beta'}{3},$$

$$ADQ = 2\pi - \frac{\alpha'}{3} = \frac{6\pi - \alpha'}{3} = \frac{4\pi - \beta'}{3},\ ADBES = 2\pi + \frac{4\pi - \alpha'}{3} = \frac{10\pi - \alpha'}{3} = \frac{8\pi + \beta'}{3},$$

$$AS = 4\pi - \frac{8\pi + \beta'}{3} = \frac{4\pi - \beta'}{3},\ AEBQ = 4\pi + \frac{4\pi - \beta'}{3} = \frac{8\pi - \beta'}{3},$$

$$AEBDR = 4\pi - \frac{\beta'}{3} = \frac{12\pi - \beta'}{3}.$$

Tengo ora conto delle direzioni trascurate, colloco nei dovuti luoghi le lettere supposte nel cit. (n.° 4), e sarà

$$BQ = \frac{\alpha'}{3},\ BDR = \frac{\alpha''}{3},\ BDAS = \frac{\alpha'''}{3},$$

$$BES = \frac{\gamma'}{3},\ BEAR = \frac{\gamma''}{3},\ BEADQ = \frac{\gamma'''}{3},$$

$$\text{(L)} \qquad AR = \frac{\beta'}{3},\ ADQ = \frac{\beta''}{3},\ ADBES = \frac{\beta'''}{3},$$

$$AS = \frac{\delta'}{3},\ AEBQ = \frac{\delta''}{3},\ AEBDR = \frac{\delta'''}{3},$$

Ora supponendo le espressioni

$$4n\pi + \frac{z'}{3},\ 4n\pi + \frac{z''}{3},\ 4n\pi + \frac{z'''}{3},$$

queste sono tali, che se in luogo di n si collocano successivamente tutti i numeri interi 0, 1, 2, 3, ec., e in luogo delle z', z'', z''' sostituisconsi corrispondentemente da prima le quantità α', α'', α''', poscia le γ', γ'', γ''', in terzo luogo le β', β'', β''', e finalmente δ', δ'', δ''' ottengonsi evidentemente le terze parti di tutti gli archi espressi nelle prime quattro file di (A), e inoltre qualunque valore abbiasi il numero n, gli archi (M) hanno tutti in corrispondenza i loro estremi nei punti, ne' quali li hanno li archi $\frac{z'}{3}$, $\frac{z''}{3}$, $\frac{z'''}{3}$. Ritenuta pertanto l' indicata ipotesi poichè questi $\frac{z'}{3}$, $\frac{z''}{3}$, $\frac{z'''}{3}$ altro non rappresentano, che gli archi (L), e cominciano quindi tutti nei punti B, od A, e terminano negli altri Q, ed R, od S, ne viene, che ancora le terze parti degli archi esistenti nelle prime quattro file di (A) espressi in (M), cominciando essi pure da uno dei due punti B, A, termineranno tutti in uno degli altri tre Q, R, S; ma i primi due punti B, A sono cogniti, dunque restando a trovarsi solamente i tre Q, R, S, ne segue, che la sola determinazione di questi, basterà per trisecare gli archi tutti, che in (A) formano le prime quattro file. Gli archi poi delle quattro file seconde, altro non essendo, che quei delle prime presi negativamente, è chiaro, che, ritrovate le terze parti di questi, restano determinate eziandio le terze parti di quelli; e per conseguenza la trisezione di tutti gli archi (A) dipenderà dalla determinazione dei soli esposti tre punti, Q, R, S.

17. Dimostrata così impossibile la rettificazione del Circolo, ne concludiamo ancora impossibile la quadratura; quest' ultima, ognun sa, pienamente dipendere dalla prima, e viceversa.

18. L' immortale Newton non restringe già il suo discorso al solo Circolo, ma lo estende a tutte le figure ovali (Princ. Matem. Lib. 5. Sez. 6. Lem. 28.); col mezzo sempre di una Spirale dimostra egli impossibile tanto la quadratura, che la rettificazione di queste. Lo stesso potremo fare ancor noi: supposto, che la (Fig.ª 6.ª) rappresenti una qualunque figura ovale, vogliasi la sua rettificazione, o la sua quadratura. Condotti perciò i due assi AB, DE, tirata l' ordinata PM, supposto CP $=x$, PM $=y$, e chiamati α, β, π (n.° 4) nel caso della rettificazione, i tre archi BM,

BM, ADM, BMD, e nel caso della quadratura le tre aree BPM, APM, BCD, troveremo quì ancora, siccome nel cit.° (n.° 4), che nel cercare il valore dell'arco, o dell'area α espresso algebraicamente per gli assi, e le coordinate, dovremo cadere nella determinazione di tutti gli archi, o di tutte le aree, che vengono rappresentate dalle espressioni (A); imperciocchè tutti questi archi cominciano egualmente in uno dei punti B, A, e terminano in M, e le aree principiano tutte dalla retta PB, oppure PA, e finiscono nella PM. Supposta in seguito (B) l'Equazione, di cui sono radici gli archi, o le aree (A), proseguendo il discorso medesimo, che abbiam fatto nei (n. 4, 5, ec. 13), troveremo egualmente, che questa Equazione (B) risultata di grado infinito è innabbassabile a grado finito, che niun metodo esiste capace alla determinazione sì dell'arco BM, che a quella dell'area BPM, e che per conseguenza è impossibile tanto la rettificazione, che la quadratura di tutte le figure ovali.

19. Aggiungo essere in egual modo impossibile la rettificazione, e la quadratura di tutte le curve, che vengono espresse con l'Equazione $y^{2m} = A^2(x^{2n} - B^2)$. Imperciocchè rapporto alla quadratura, avendosi l'area della curva supposta $= \int y dx = \int dx \sqrt[2m]{\left(A^2(x^{2n} - B^2)\right)}$, ed essendo $\sqrt[2m]{\left(A^2(x^{2n} - B^2)\right)} = \sqrt[2m]{-A^2} \times \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$, sarà quest' area $= \sqrt[2m]{-A^2} \int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$. Ora l'Equazione $y^{2m} = (B^2 - x^{2n})$ ci rappresenta evidentemente una Curva ovale, la cui area è $= \int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$. Dunque essendo pel (n.° prec.) quest' ultim' area indeterminabile algebraicamente, ed essendo perciò inintegrabile la formola

Fig. 1.

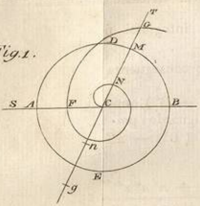


Fig. 2.

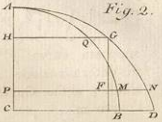


Fig. 3.

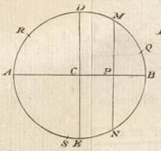


Fig. 4.

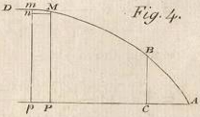


Fig. 5.

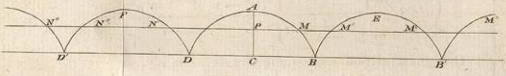
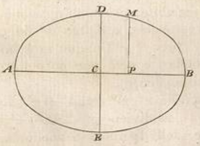


Fig. 6.



$\int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$, non potrà integrarsi neppur l'altra $\sqrt[2m]{- A^2} \int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$, e per conseguenza l'area della supposta curva $y^{2m} = A^2 (x^{2n} - B^2)$ non sarà capace di determinazione algebraica. Riguardo poi alla rettificazione, nella Curva $y^{2m} = a^2 (B^2 - x^{2n})$, abbiamo l'arco =

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{[a^2(B^2 - x^{2n})]^{4m-2}} + n^2 a^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{[a^2 (B^2 - x^{2n})]^{4m-2}}}} =$$

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{a^{8m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}} + n^2 a^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{a^{8m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}}}},$$

e nella Curva $y^{2m} = A^2 (x^{2n} - B^2)$, abbiamo l'arco

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{[A^2(x^{2n} - B^2)]^{4m-2}} + n^2 a^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{[A^2 (x^{2n} - B^2)]^{4m-2}}}}$$

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{- A^{8m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}} + n^2 A^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{- A^{8m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}}}}.$$

Ora quest'ultima espressione è tale, che se ponghiamo a^2 in luogo di $- A^2$, si cangia nella prima, ed altronde questa prima è inintegrabile, poichè l'Equazione $y^{2m} = a^2(B^2 - x^{2n})$ esprime una Curva ovale, e l'arco di tal curva non si può determinare (n.° prec.). Dunque sarà inintegrabile anche l'espressione seconda, e però non potremo ottenere il valore dell'arco corrispondente.

Se nella Equazione $y^{2m} = A^2 (x^{2n} - B^2)$ facciamo $m = 1$, $n = 1$, essa diviene $y^2 = A^2 (x^2 - B^2)$, diviene cioè l'Equazione dell'Iperbola Appolloniana. Dunque la qua-

quadratura, e la rettificazione di questa Curva sono impossibili. La rettificazione della Parabola Appolloniana, sappiamo dipendere dalla quadratura dell' Iperbola. Dunque essendo quest' ultima indeterminabile, tale sarà ancora la prima.

DELLA