NUOVA DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA IMPORTANTE NELLA DOTTRINA DEI NUMERI

DI PIETRO PAOLI

Ricevuta il dì 9. Luglio 1801.

Il sommo Geometra Lagrange ha il primo dimostrato nelle Memorie dell' Accademia di Berlino dell' anno 1768., che la formola omogenea

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 \ldots + Ny^n,$$

ha, prescindendo dai segni, il più piccolo valore in numeri interi, quando $\frac{x}{y}$ è una delle frazioni convergenti nate dallo sviluppo in frazione continua delle radici reali, o delle parti reali delle radici immaginarie, che ha l' equazione

$$At^n + Bt^{n-1} + Ct^{n-2} \ldots + N = 0.$$

Il chiarissimo Legendre, giudicando questa dimostrazione astrusa, e difficile a comprendersi, ne ha data una nuova nella sua eccellente Opera, che ha per titolo *Teoria dei Numeri*. Ma poichè anche questa sembra ad alcuno assai oscura, ho pensato di esporre una nuova dimostrazione, la quale mi pare delle altre più facile e piana.

Data la formola omogenea

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 \ldots + Ny^n$$

ove non solo i coefficienti A, B, &c., ma anche le indeterminate x ed y siano numeri interi, se α, α', α'', &c. sono le radici reali, e $\beta + \gamma\sqrt{-1}$, $\beta - \gamma\sqrt{-1}$, &c. le radici immaginarie della equazione

$$At^n + Bt^{n-1} + Ct^{n-2} \ldots + N = 0,$$

essa potrà esprimersi sotto la forma

$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)(x-\alpha'' y)\ldots[(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2]\ldots$$

Sup-

Supposte tutte le quantità α, $'\alpha$, α'', &c. β, &c. del medesimo segno, per esempio tutte positive, sia primieramente proposto di trasformare la formola data in un' altra

$$A(x'-\delta y)(x'-\delta' y)(x'-\delta'' y)\ldots[(x'-\varepsilon y)^2+\gamma^2 y^2]\ldots$$

ove le quantità δ, δ', δ'', &c., ε, &c. non abbiano tutte il medesimo segno.

Sia k un numero intero minore di alcune radici, per esempio di α e di α', e maggiore delle altre, e si faccia $x = x' + ky$; la formola data diventerà

$$A(x'+\overline{k-\alpha}.y)(x'+\overline{k-\alpha'}.y)(x'+\overline{k-\alpha''}.y)\ldots[(x'+\overline{k-\beta}.y)^2+\gamma^2 y^2]\ldots$$

ove le quantità $\alpha - k$, $\alpha' - k$ sono positive, $\alpha'' - k$, &c., $\beta - k$, &c. sono negative, e quindi il problema è risoluto.

Questa soluzione riesce sempre fuorchè nel solo caso, in cui tutte le quantità α, α', &c. β, &c. cadono tra due numeri interi consecutivi; ma in tal caso potrà usarsi il metodo seguente. Siano le frazioni $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ una maggiore, l' altra minore di una qualunque radice, per esempio di α, ma talmente prossime ad essa, che siano ambedue minori di tutte le radici maggiori di α, e maggiori di tutte le altre minori di α, lo che è sempre possibile, e si faccia $x = ax' + by'$, $y = a'x' + b'y'$. Sara $x' = \frac{b'x - by}{ab' - a'b}$, $y' = \frac{ay - a'x}{ab' - a'b}$; ma acciò ai valori interi di x ed y corrispondano numeri interi per x' ed y', converrà che sia $ab' - a'b = \pm 1$, alla qual condizione soddisfaremo prendendo per $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ due frazioni consecutive convergenti verso α. Posto ciò, se facciamo

$$A' = A(a-a'\alpha)(a-a'\alpha')(a-a'\alpha'')\ldots(a-a'\beta)^2\ldots$$

la nostra formola diventerà

$$A'\left(x'+\frac{b-b'\alpha}{a-a'\alpha}y'\right)\left(x'+\frac{b-b'\alpha'}{a-a'\alpha'}y'\right)\ldots\left[\left(x'+\frac{b-b'\beta}{a-a'\beta}y'\right)^2+\left(\frac{a'x'+b'y'}{a-a'\beta}\right)^2\right]\ldots$$

ove la sola quantità $\frac{b-b'\alpha}{a-a'\alpha}$ è negativa, e le altre tutte

$b - b'\alpha'$

$\frac{b-b'\alpha}{a-a'\alpha}$, &c., $\frac{b-b'\beta}{a-a'\beta}$, &c. sono positive.

Questo metodo è generale per tutti i casi, e per mezzo di esso la data formola si potrà sempre trasformare nella seguente

$$A'(x'-\delta y')(x'+\delta' y')(x'+\delta'' y')\ldots\ (x'+\varepsilon y')^2+\zeta^2 y^2]\ldots$$

ove le quantità δ, δ', δ'', &c. ε, &c. sono tutte positive, ed è

$$x'-\delta y'=\frac{x-\alpha y}{a-a'\alpha},\ x'+\delta y'=\frac{x-\alpha' y}{a-a'\alpha'},\ \text{\&c.},\ (x'+\varepsilon y')^2+\zeta^2 y^2=\frac{(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2}{(a-a'\beta)^2},\ \text{ec.}$$

Premessi questi principj si potrà adesso facilmente risolvere il problema, in cui si cerca il più piccolo valore in numeri interi della formola data. Sia essa in primo luogo del secondo grado, e risoluta ne' suoi fattori ci presenterà da considerare le tre forme seguenti

$$A[(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2]$$
$$A(x-\alpha y)(x+\alpha' y)$$
$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)$$

secondo che i fattori sono immaginarj, o essendo reali le quantità α ed α' hanno il medesimo segno, o segni diversi.

Incominciando dalla prima siano p e q i valori di x ed y nel caso del minimo; la quantità $(p-\beta q)^2+\gamma^2 q^2$ sarà tale, che posti in luogo di p e di q de' numeri differenti, almeno fino ad un certo segno, essa acquisterà un valore maggiore. Ma se in luogo di p e di q porremo numeri un poco minori, il termine $\gamma^2 q^2$ riescirà minore; dunque converrà che divenga in tal caso maggiore la quantità $p-\beta q$.

Ciò posto io dico, che sarà $\frac{p}{q}$ una frazione convergente verso β; poichè se non lo fosse, siano $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ quelle tali frazioni convergenti consecutive, nelle quali s è $>q$, ed $n<q$. E' noto dalla teoria delle frazioni continue, che facendo astrazione dai segni è $m-\beta n< p-\beta q$; dunque $(p-\beta q)^2+\gamma^2 q^2$ non sarebbe un minimo contro l' ipotesi.

Nel secondo caso, se x ed y hanno il medesimo segno, al-

allorchè la formola è minima, il fattore $x + \alpha' y$ sarà sempre minore, quando ad x ed y si danno valori più piccoli, e perciò dovrà essere in tal caso un minimo il fattore $x - \alpha y$; e quindi col discorso usato nel primo caso si proverà, che $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α. Si vede egualmente, che quando x ed y hanno segni diversi, sarà nel caso del minimo $-\frac{x}{y}$ una frazione convergente verso α'.

Si trasformi la terza formola nella seguente

$$A'(x' - \delta y')(x' + \delta' y')$$

ed apparirà che, se nel caso del minimo x' ed y' hanno il medesimo segno, sarà un minimo il fattore $x' - \delta y' = \frac{x - \alpha y}{a - a'\alpha}$, cioè a motivo di $a - a'\alpha$ costante, sarà un minimo il fattore $x - \alpha y$, e quindi $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α. Se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo il fattore $x' + \delta y' = \frac{x - \alpha' y}{a - a'\alpha'}$, cioè il fattore $x - \alpha' y$, e perciò $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α'. Dunque nel caso del minimo $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α o verso α'.

Se mai ad alcuno facesse difficoltà il passaggio dal fattore $x' - \delta y'$ al fattore $x - \alpha y$, potrà usare la seguente rigorosa dimostrazione. Se x' ed y' hanno nel caso del minimo il medesimo segno, è certo che sarà in tal caso $\frac{x'}{y'}$ una frazione convergente verso δ. Sia $\frac{r}{s}$ la frazione convergente, che precede $\frac{x'}{y'}$, e z il quoziente completo, che corrisponponde a questa, il quale sarà perciò >1; avremo $\delta = -\frac{b - b'\alpha}{a - a'\alpha}$ $= \frac{x'z + r}{y'z + s}$. Quindi si deduce $\alpha = \frac{(ax' + by')z + ar + bs}{(a'x' + b'y')z + a'r + b's}$, e siccome $a'b - ab' = \pm 1$, ed $x's - ry' = \pm 1$, sarà ancora $(ax' + by')(a'r + b's) - (ar + bs)(a'x' + b'y') = \pm 1$. Onde a motivo di $z > 1$, sarà $\frac{ax' + by'}{a'x' + b'y'} = \frac{x}{y}$ una frazione convergente verso α. (Si veda Legendre *Essai sur la Théorie des nombres* a pag. 22., e seguenti.)

Se x' ed y' nel caso del minimo hanno segni diversi, $-\frac{x'}{y'}$ sarà certamente una frazione convergente verso δ', e se chiamiamo $-\frac{r}{s}$ la frazione, che precede quella, e z il quoziente completo corrispondente a $-\frac{x'}{y'}$, avremo $\delta' = \frac{b - b'\alpha'}{a - a'\alpha'}$ $= -\frac{x'z + r}{y'z + s}$. Quindi si ricava $\alpha' = \frac{(ax' + by')z + ar + bs}{(a'x' + b'y')z + a'r + b's}$ $= \frac{mz + n}{m'z + n'}$, se facciamo $ax' + by' = m$, $a'x' + b'y' = m'$, $ar + bs = n$, $a'r + b's = n'$. Ora, siccome possiamo prendere a piacere x' o y', r o s negative, prendiamole in modo, che siano m ed n positive. Ciò posto, io dico che saranno positive anche m' ed n'; perchè una di esse dev' essere necessariamente positiva, acciò ne risulti il valore di α' positivo, e se anche l' altra non fosse positiva, l' equazione $mn' - m'n = \pm 1$ non potrebbe sussistere. La medesima equazione ci avverte, che se m è $> n$, anche m' dev' essere maggiore di n'; onde nel caso di $m > n$, sarà $\frac{m}{m'}$ una frazione convergente verso α', ed $\frac{n}{n'}$ la frazione convergente, che la precede. Se $m < n$, ed in conseguenza $m' < n'$, sia cm il multiplo di m contenuto in n, e potremo dare ad α' la forma seguente $\alpha' = \frac{m(z+c)+n-cm}{m'(z+c)+n'-cm'}$; e siccome $m(n'-cm')-m'(n-cm)=\pm 1$, e perciò $n'-cm'$ positiva e $<m'$, sarà di nuovo $\frac{m}{m'}$ una frazione convergente verso α', ed $\frac{n-cm}{n'-cm'}$ quella, che la precede.

Passiamo alla formola del terzo grado

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3,$$

e consideriamo le tre diverse forme, che risoluta ne' di lei fattori può prendere

$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)(x+\alpha'' y)$$
$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)(x-\alpha'' y)$$
$$A(x-\alpha y)[(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2]$$

ove si omettono le altre, perchè o si riducono a queste presa y negativa, o non presentano difficoltà.

Riguardo alla prima, se nel caso del minimo x ed y hanno il medesimo segno, sarà un minimo la quantità $(x-\alpha y)(x-\alpha' y)$, e quindi, per ciò che abbiamo dimostrato di sopra, $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente o verso α o verso α'. Se x ed y hanno segni diversi, sarà un minimo il fattore $x+\alpha'' y$, e quindi $-\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α''.

La seconda formola si trasforma nella seguente

$$A'(x'-\delta y')(x'+\delta' y')(x'+\delta'' y')$$

onde apparisce che, se x' ed y' hanno il medesimo segno, è un minimo il fattore $x'-\delta y'$, cioè $x-\alpha y$, ed $\frac{x}{y}$ è una frazione convergente verso α. Se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo la quantità $(x'+\delta' y')(x'+\delta'' y')$, cioè

cioè $(x-\alpha' y)(x'-\alpha'' y)$, e perciò $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α' o verso α''.

Finalmente la terza formola diventa

$$A'(x'-\delta y')\left((x'+\varepsilon y')^2+\frac{\gamma^2}{(a-b\beta)^2}y^2\right)$$

e se nel caso del minimo x' ed y' hanno il medesimo segno, si vede che dovrà esser minima la quantità $x'-\delta y'$, cioè $x-\alpha y$; se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo la quantità $(x'+\varepsilon y')^2+\frac{\gamma^2}{(a-b\beta)^2}y^2$, o sia la quantità $(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2$. Onde $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α o verso β.

Continuando il medesimo ragionamento vedremo in generale, che la funzione

$$Ax^n+Bx^{n-1}y+Cx^{n-2}y^2\ldots+Ny^n$$

otterrà il più piccolo valore in numeri interi, quando $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso le radici reali, o verso le parti reali delle radici immaginarie della equazione

$$At^n+Bt^{n-1}+Ct^{n-2}\ldots\ldots+N=0,$$

avvertendo che si dovrà prendere x ed y col medesimo segno, o con segni diversi, secondo che le corrispondenti radici reali, o le parti reali delle radici immaginarie saranno positive o negative.