Del Medesimo.

DELLA PRESSIONE DELL' ACQUA IN MOTO CONTRO I VASI E TUBI PE' QUALI SCORRE

MEMORIA

Ricevuta il dì 25 Novembre 1801.

1.° L' acqua che esce dall' apertura di un vaso, o di un tubo può escire con velocità costante, o con velocità variabile. Quand' anco però la velocità dell' uscita sia costante, tale non sarà quella con cui scorrerà lungo il vaso o il tubo, se non nell' ipotesi che questo sia di egual larghezza in ogni sua parte; imperciocchè nel caso contrario varia la velocità al variare delle sezioni, e sempre in una ragione inversa di quelle. Ora egli è noto che la velocità non può variare senza l' azione di una forza acceleratrice, e questa forza è il risultato del peso di ciascuna particella, e quindi delle pressioni scambievoli delle une contro le altre, le quali forze, se si fanno tutte equilibrio nel fluido stagnante o nello stato di quiete, non lo conservano più nello stato di moto. Nell' investigare pertanto le leggi, secondo le quali il moto dell' acqua si accelera, è necessario farsi una giusta idea della pressione che l' acqua soffre in ciascun luogo del canale. Osservisi adunque, che se l' acqua precedente (Fig. 2) NPFT si avanzasse con tanta celerità, con quanta viene inseguita dall' acqua posteriore NTBA, per modo che l' acqua, che in questo momento è passata per NT non recasse il minimo impedimento all' acqua immediatamente seguente, non potrebbe quindi risultarne alcuna pressione. Ma se all' opposto l' acqua che in questo istante passa per NT, NT, più lentamente si avanza di quello che sia inseguita dall' acqua posteriore, sicchè sfuggir non possa l' incontro e l' urto di questa, nasce allora una pressione dell' acqua posteriore contro NT in direzione perpendicolare ad NT, ed una contropressione dell' acqua anteriore contro la stessa NT, come pure per la natura del fluido una pressione contro le pareti del tubo in quel luogo in direzione ancor essa perpendicolare al luogo premuto delle pareti. Passiam dunque al

Problema I.°

2. Cercasi la forza acceleratrice dell' elemento d' acqua $NntT$ compreso fra le due sezioni NT, nt infinitamente prossime, e normali alla linea centrale (*a*).

Sol.

Pongasi la porzione indefinita IC della linea centrale $= s$; l' area della sezione $NT = z$, la quale sarà una funzione di s; la massa d' acqua $ANTB = M$; e il tempo trascorso dal principio del moto dell' acqua $= t$. Suppongasi che l' elemento d' acqua $NntT = dM$ nel tempuscolo infinitesimo dt scorra uno spazietto $= Cc = ds$, movendosi tutte le particelle d' acqua di detto elemento con uguali velocità nella direzione della tangente CH. La forza acceleratrice che fa variare la velocità dell' elemento nel giugnere da C in c, risulta in parte dal peso di lui, in parte dalla pressione contro di esso esercitata dall' acqua, che gli sta davanti e di dietro. Considerandosi in fatti come un tutto da se la massa elementare $NntT$ si vede assai chiaro, che preme sopra NT la massa d' acqua posteriore $ANTB$, e sopra nt in

(*a*) Per linea centrale intendo quella che passa per tutti i centri di gravità delle infinite falde, in cui s' immagina diviso il vaso o tubo.

in direzione contraria preme la massa d' acqua anteriore nPFt. Se ora la pressione contro NT si concepisce uguale al peso d' una colonna d' acqua, che ha per base NT $= z$, e per altezza p, sicchè posta $= 1$ la gravità specifica dell' acqua, pz rappresenti una tal pressione, questa si trasmette ad nt, e diventa $= p . nt = p(z + dz)$. Per tal modo dalla pressione sopra NT risulta in nt una pressione rappresentata da $p(z + dz)$. Inoltre il peso dell' elemento NntT, cioè dM preme ancor esso sopra nt, e perchè preme verticalmente all' ingiù, se si risolve questa pressione verticale in due, una perpendicolare ad nt, l' altra parallela e inoperosa, trovasi la prima $= d\mathrm{M} . \cos.\phi$, chiamando ϕ l' angolo composto dalla tangente CH, e dalla retta verticale CO. Tutta adunque la pressione perpendicolare, che soffre nt pel medesimo verso da C in c è $= p(z + dz) + d\mathrm{M}\cos.\phi$. Avvertasi ora, che la stessa nt soffre, come si è detto, un' altra pressione contraria dall' acqua, che le sta innanzi nPFt; e riguardandosi l' elemento NntT come una massa solida immersa nell' acqua, la sua superficie inferiore nt viene premuta perpendicolarmente da c in C con una forza $= pz + d . pz$, avveguachè se la superficie superiore NT è premuta da una forza $= pz$, l' inferiore infinitamente prossima nt dee soggiacere ad una pressione $= pz + d . pz = pz + pdz + zdp$ diretta da c verso C. Di qui apparisce che nt si trova fra due pressioni opposte, una $= pz + pdz + d\mathrm{M} . \cos\phi$, e tendente da C in c, l' altra $= pz + pdz + zdp$ e diretta da c verso C, onde sottratta questa da quella resta $d\mathrm{M} . \cos.\phi - zdp$ per la pressione della superficie nt esercitata in direzione di Cc. Laonde tutte le forze motrici, che agiscono sull' elemento NntT si riducono alla pressione $d\mathrm{M}\cos.\phi - z\,dp$, che si concepisce come applicata al suo centro di gravità, e spinge l' elemento da C in c facendogli descrivere nell' istante dt lo spazietto C$c = ds$. Quindi nominando v la velocità, di ciascuna particella di quell'

quell' elemento, dal principio delle forze acceleratrici si ha $\frac{dM\cos\phi - zdp}{dM} = \frac{vdv}{ds}$. Il che era &c.

Problema II.

3. Data un' equazione per la linea centrale ICE fra le coordinate ortogonali $IL = x$, $LC = y$, e date tutte le dimensioni del canale, e riguardando la pressione contro qualunque sezione NT come una funzione di s, ovvero IC, cercasi un' espressione generale per l' accelerazione di ciascun elemento $NntT$.

Sol.

Si scorge tantosto, essere $dM = zds$ (posta cioè $= 1$ la forza acceleratrice della gravità terrestre), $\cos.\phi = \frac{dx}{ds}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Che però sostituendo questi valori nell' espressione generale della forza acceleratrice (Probl. prec.), questa si cambia in $\frac{dx - dp}{ds} = \frac{vdv}{ds}$. Il che era &c.

Problema III.

4. Nello stesso tubo ANPFB giugne l' acqua da principio sino in AB, ed egli va continuamente vuotandosi per l' efflusso dell' acqua dal foro PF: cercasi la velocità dell' acqua dopo che se ne sarà smaltita tanta, quanta riempiva lo spazio AKVB, anche nel supposto che una data forza, come sarebbe l' azione di uno stantuffo, premesse sopra la superficie suprema KV dell' acqua, che va abbassandosi.

Sol.

Ritenute le precedenti denominazioni, prendasi una sezione nota $Q\beta = n$, e la velocità dell' acqua che passa per

 es-

essa, facciasi $= u$; onde la velocità di quella che passa per la sezione indeterminata NT, sarà $= \frac{nu}{z}$ che abbiamo posto $= v$. Ma si è trovato precedentemente $dx - dp = vdv$; dunque poichè nell' ipotesi presente varia, come è chiaro, la u non meno della z, preso il valore di $vdv = \frac{n^2udu}{z^2} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$, si otterrà $dx - dp = \frac{n^2udu}{z^2} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$. Osservisi ora, che nell' istante dt, mentre la sezione NT progredisce in nt, la sezione KV si avanza in kv, e l' elemento $NntT$ resta $= KkvV$, cioè chiamata r la porzione Ii della linea centrale, e q la sezione KV, nasce $qdr = zds$; essendo $IC = s$; cioè $z = \frac{qdr}{ds}$, e però $\frac{n^2udu}{z^2} = \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z}$. Laonde si avrà $dx - dp = \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$, ovvero $dp = dx - \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z} + \frac{n^2u^2dz}{z^3}$. Passando ad integrare quest' equazione deesi aver riguardo, che, siccome si cerca il valore di p per un dato istante, conviene considerare come date in quell' istante le quantità u, du, q, dr, e soltanto come variabili quelle che dipendono dal luogo NT del tubo cioè z, s, p. Perciò si ottiene $p = x - \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z} - \frac{n^2u^2}{2z^2} + \text{Cost.}$ Posta tutta la linea centrale $ICE = \Delta$, si determina il valore della Cost., se si fa $x = IG = b$, $z = PF = f$, $s = ICE = \Delta$, prendendo l' integrale $\int\frac{ds}{z}$ in modo, che si annulli allorchè diviene $s = \Delta$: in tal caso l' orifizio PF soffre la pressione dell' atmosfera, cioè il peso d' una colonna d' acqua di altezza A. Quindi l' equazione diventa $A = b - \frac{n^2u^2}{2f^2} + \text{Cost.}$, cioè

cioè Cost. $= A - b + \frac{n^2u^2}{2f^2}$; e conseguentemente $p = A - b + x + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2z^2} - \frac{n^2udu}{qdr} . \int \frac{ds}{z}$ prendendo talmente l' integrale $\int \frac{ds}{z}$, che svanisca al diventare $s = \Delta$. Dicasi ora P la forza premente sulla superiore superficie KV; e sarà $p = P$ allorchè diverrà $x = I\gamma = \omega, s = r, z = q$; d' onde nasce $P = A - b + \omega + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2q^2} - \frac{n^2udu}{qdr} . \int \frac{ds}{z}$. Ma poichè nota esser dee non meno la figura del tubo, che la natura della linea centrale, saranno espresse con funzioni di r tanto l' ascissa $\omega = I\gamma$, quanto la sezione $KV = q$, ed essendo inoltre P o costante, o una funzione ancor essa di r, oppure di u, ne risulterà un' equazione differenziale fra r, ed u, dalla quale mercè l' integrazione si troverà u dato per r. Il che era &c.

Notisi qui, che P dee rappresentare l' altezza della colonna d' acqua, il di cui peso uguaglia non solo la pressione d' uno stantuffo applicato alla superior superficie KV, ma ancora la pressione dell' atmosfera, per modo che nel supposto che KV sia di pochi piedi più alta dell' apertura PF, e che non siavi altra forza premente in KV fuori di quella dell' atmosfera, fatto $\int \frac{ds}{z} = M$, si ha

$$Mudu + \frac{(b - \omega) qdr}{n^2} + \left(\frac{u^2}{2q^2} - \frac{u^2}{2f^2}\right) qdr = 0.$$

Problema IV.

5. Supposte le sezioni dell' acqua normali alla linea centrale, oppure l' equivalente, cioè che il moto di ciascuna falda o strato elementare d' acqua si faccia in direzione della linea centrale: si dimanda la pressione dell' acqua contro le pareti del vaso o tubo per cui trascorre.

Sol.

SOL.

L' equazione del Probl. precedente maneggiata a dovere, vale a dire $p = A - b + x + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2z^2} - \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \int \frac{ds}{z}$ dà ciò che si cerca. Imperciocchè ritrovata u pel Probl. medesimo, e sostituito il suo valore in quest' equazione, indi preso l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ in modo che svanisca quando s è $=$ alla linea centrale di tutto il corpo d' acqua, cioè $= \Delta$, ne risulterà p dato per una funzione di s, oppure z, o anche x, cioè per una funzione di quantità relative al luogo del tubo, dove si vuol conoscere la pressione. Il che era &c.

6. Cor. Chiamata w la lunghezza del prisma d' acqua, che si slancia dall' apertura nel dato tempo, v la velocità in detta apertura, si ha $n^2u^2 = f^2v^2$, $qdr = fdw$; onde l' equazione precedente diventa

$p = A - b + x + \frac{1}{2}v^2 - \frac{f^2v^2}{2z^2} - \frac{fvdv}{dw} \int \frac{ds}{z}$, dove basterà sostituire il valore di v noto precedentemente per ottenere quello di p.

7. Allorchè il tubo AOLB (Fig. 3) ha una larghezza notabile, e l' acqua in esso contenuta si getta per l' apertura OL per la sola sua gravità; la superficie superiore AB durante il moto dell' acqua si mantiene orizzontale, tanto se la perdita dell' acqua viene con altr' acqua risarcita, quanto se il tubo si va successivamente vuotando. In tal caso tutte le particelle di un medesimo *strato orizzontale* discendono con uguale celerità, e di qui è chiaro, che le precedenti formole non potranno più aver luogo in questo caso se non quando la linea centrale sia verticale. Si può però senza difficoltà anche in questa nuova ipotesi degli strati sempre orizzontali ritrovare un' equazione fondamentale con un artifizio molto analogo al già praticato nel Probl. III., avendo

so-

solo riguardo, che laddove nelle precedenti ipotesi tutti gli strati d'acqua avevano la medesima situazione relativamente alla linea centrale, e conseguentemente cambiavano insieme colla linea centrale la situazione verso la linea orizzontale e verticale, quì per l'opposto, essendo tutti gli strati orizzontali, conservano la stessa posizione verso la linea orizzontale e verticale, e la cambiano solo per rispetto alla linea centrale. Che però è necessario d'introdurre nel calcolo l'angolo, che fa la linea centrale colla corrispondente sezione orizzontale, giacchè la velocità dell'acqua in ciascuna sezione orizzontale dipende da un tal angolo, siccome vedrassi nel seguente

Problema V.

8. Nel tubo AOLB arriva l'acqua da principio colla suprema superficie orizzontale in AB, ed esce per l'inferiore apertura OL. Nel tempo t si avanza AB in CD, rimanendo sempre orizzontale durante il movimento: cercasi per l'istante presente la velocità, con cui l'acqua passa per una data sezione orizzontale FG del tubo.

Sol.

Sia IEPQT la linea che passa pe' centri di gravità di tutti gli strati orizzontali d'acqua, cioè la così detta *linea centrale*, e facciansi le sezioni orizzontali $AB = h$, $CD = q$, $FG = n$, $MN = z$, $LO = f$. Inoltre pe' centri I, T delle sezioni suprema ed infima si guidino la verticale IK, e l'orizzontale KO, e si ponga $IK = b$. Prolungata la sezione indeterminata MN, sicchè incontri in g la linea verticale IK, sia $Ig = x$, $IEQ = s$, $IE = r$, $Il = \omega$. Tirata da Q la tangente QR alla linea centrale, si chiami φ l'angolo NQR; e parimente condotte per P, E le tangenti PS, EH, dicansi μ l'angolo GPS, ψ l'angolo DEH; e finalmente guidate le tan-

tangenti IV, TΠ alla linea stessa centrale ne' punti estremi I, T, si faccia l' angolo BIV $= \beta$, e l' angolo OTΠ $= \alpha$. Ora chiamisi u la velocità dell' acqua per la sezione data FG secondo la direzione della tangente PS, e risulterà la velocità secondo la direzione verticale $= u \operatorname{sen}\mu$. Perlocchè la velocità dell' acqua per la sezione indeterminata MN secondo la direzione verticale sarà $= \frac{nu \operatorname{sen}\mu}{z}$, e secondo la direzione della tangente QR sarà $= \frac{nu \operatorname{sen}.\mu}{z \operatorname{sen}.\phi}$. Fissato questo si rifletta, che l' elemento d' acqua MmnN viene accelerato così dal proprio peso, come dalla pressione prodotta dall' azione mutua delle particelle dell' acqua. Il suo peso è $= zdx$ (chiamata 1 la gravità terrestre acceleratrice); e se la pressione contro la superficie MN si fa uguale ad una colonna d'acqua avente MN per base, e p per altezza, una tal pressione si trova $= pz$; e col ragionamento già usato ne' Problemi I.° e II.° si scopre la forza acceleratrice di detto elemento secondo la direzione verticale all' ingiù $= \frac{zdx - zdp}{zdx} = \frac{dx - dp}{dx}$. Quindi risolvendo questa forza acceleratrice in due altre, una in direzione della tangente QR, l'altra in direzione normale a QR, si trova la prima $= \frac{dx - dp}{dx} \operatorname{sen}.\phi = \frac{dx - dp}{ds}$.
Sarà dunque pel principio delle forze acceleratrici $\frac{dx - dp}{ds} ds =$

$$\frac{nu \operatorname{sen}.\mu}{z \operatorname{sen}.\phi} \times \frac{nzdu \operatorname{sen}.\phi \operatorname{sen}.\mu - nudz \operatorname{sen}.\phi \operatorname{sen}.\mu - nuzd\phi \cos.\phi \operatorname{sen}.\mu}{z^2 \operatorname{sen}.\phi^2}$$

$$= \frac{n^2 udu \operatorname{sen}\mu^2}{z^2 \operatorname{sen}.\phi^2} - \frac{(n^2u^2dz \operatorname{sen}.\phi \operatorname{sen}.\mu^2 + n^2u^2zd\phi \cos.\phi \operatorname{sen}.\mu^2)}{z^3 \operatorname{sen}.\phi^3}.$$

Ma perchè nell' istante che MN s' innoltra in mn, CD si avanza in cd, ed è perciò l' elemento CcdD $=$ MmnN, cioè $qdr \operatorname{sen}.\Psi = zds \operatorname{sen}.\phi$, ovvero

z sen.

$z\,\text{sen.}\varphi = \frac{qdr\,\text{sen.}\Psi}{ds}$; nascerà $dx - dp = \frac{n^2ududs\,\text{sen.}\mu^2}{qdr\,\text{sen.}\Psi z\,\text{sen.}\varphi}$ $- \frac{(n^2u^2dz\,\text{sen.}\varphi\,\text{sen.}\mu^2 + n^2u^2z\,d\varphi\cos.\varphi\,\text{sen.}\mu^2)}{z^3\text{sen.}\varphi^3}$, vale a dire

$$dp = dx + \frac{n^2u^2dz\,\text{sen.}\varphi\,\text{sen.}\mu^2 + n^2u^2z\,d\varphi\cos.\varphi\,\text{sen.}\mu^2}{z^3\,\text{sen.}\varphi^3}$$

$- \frac{n^2ududs\,\text{sen.}\mu^2}{qdr\,\text{sen.}\Psi z\,\text{sen.}\varphi}$. Si pigli l' integrale di questa equazione considerando come variabili le z, x, s, φ, e come costanti u, r, q, &c., le quali essendo date per quell' istante, in cui cercasi la pressione p, non possono variare. Si otterrà dunque $p = x - \frac{n^2u^2\text{sen.}\mu^2}{2z^2\text{sen.}\varphi^2} - \frac{n^2udu\,\text{sen.}\mu^2}{qdr\,\text{sen.}\Psi} \times \int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\varphi} + \text{Cost.}$ Preso pertanto l' integrale $\int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\varphi}$ in modo, che svanisca quando $s = \Delta = \text{IQT}$; siccome allora diventa $x = b$; $z = f$; $\varphi = \alpha$; $p = \text{A} =$ all' altezza d' una colonna d' acqua, il di cui peso uguagli la pressione dell' atmosfera; quindi si ricava $\text{Cost.} = \frac{n^2u^2\text{sen.}\mu^2}{2f^2\text{sen.}\alpha^2} - b + \text{A}$. Laonde

$$p = \text{A} - b + x + \frac{n^2u^2\,\text{sen.}\mu^2}{2f^2\,\text{sen.}\alpha^2} - \frac{n^2u^2\,\text{sen.}\mu^2}{2z^2\,\text{sen.}\varphi^2} - \frac{n^2udu\,\text{sen.}\mu^2}{qdr\,\text{sen.}\Psi} \int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\varphi}.$$

Poichè inoltre si è supposto, che nel tempo t la suprema sezione AB siasi abbassata in CD, e CD non soffre altra pressione che quella dell' atmosfera equivalente al peso di una colonna d' acqua di altezza P (sebbene potrà P rappresentare anche qualunque altra forza esterna combinata con quella dell' atmosfera); diventerà perciò $p = \text{P}$ allorchè sarà $x = \omega$, $s = r$, $z = q$, $\varphi = \Psi$. Perlocchè nascerà

$$\text{P} = \text{A} - b + \omega + \frac{n^2u^2\,\text{sen}\mu^2}{2f^2\text{sen.}\alpha^2} - \frac{n^2u^2\text{sen.}\mu^2}{2q^2\text{sen.}\Psi^2} - \frac{n^2udu\,\text{sen}\,\mu^2}{qdr\,\text{sen.}\Psi} \times \int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\varphi}.$$

Quindi essendo ω, q, sen.Ψ funzioni di r, mediante l' integrazione di questa formola si troverà un' equazione, la quale esprimerà il rapporto fra u, ed r, come si ricercava. Il che era ec.

PROBLEMA VI.

9. Se si suppone che ne' vasi e tubi assai larghi si mantenga l' orizzontalità degli strati d' acqua anche nell' attual movimento; determinare la pressione dell' acqua contro qualunque luogo del tubo dentro il quale si muove.

SOL.

L' equazione relativa a quest' ipotesi è quella del Problema precedente, cioè $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{n^2 u^2 \text{sen.}\pi^2}{2f^2 \text{sen.}\alpha^2} - \frac{n^2 u^2 \text{sen}\,\pi^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2} - \frac{n^2 u du \text{sen.}\pi^2.}{q dr \text{sen.}\Psi} \int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\varphi}$, nella quale sostituendo il valore di u, che si troverà pel Probl. medesimo, e preso poscia a dovere l' integrale $\int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\varphi}$, si otterrà il valore di p dato per una funzione di x &c. Il che era &c.

10. Cor. Perchè si ha $n^2 u^2 \text{sen.}\pi^2 = f^2 v^2 \text{sen.}\alpha^2$, $q dr\,\text{sen.}\Psi = f dw\,\text{sen}\alpha$, in luogo della predetta equazione si può far uso della seguente

$$p = \mathrm{A} - b + x + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \text{sen.}\alpha^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2} - \frac{f v dv \,\text{sen.}\alpha}{dw} \int \frac{ds^2}{z dx},$$

ed in questa surrogato il valore di v, che si potrà sempre trovare cogli artificj dianzi divisati, si otterrà il valor di p che si cerca.

PROBLEMA VII.

11. Scorre l' acqua per l' apertura LO del tubo, o vaso assai largo AOLB, il quale mercè l' afflusso di altr' acqua, che accorre superiormente in AB si mantiene costantemente pieno: si dimanda la pressione dell' acqua contro qualunque luogo del tubo per qualunque data velocità.

SOL.

Sol.

Richiamata l' equazione $p = A - b + x + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \text{sen.}\alpha^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2}$ $- \frac{fvdv \text{ sen.}\alpha}{dw} - \int \frac{ds^2}{zdx}$, basta trovare il valore dell' ultimo termine del secondo membro per conseguire il valore di p che si cerca. Ora è noto, che se si fa $x = 0$; $z = AB = h$, $\varphi = BIV = \beta$, e si prende l' integrale $\int \frac{ds^2}{zdx}$ per modo che sparisca quando $s = ICE = \Delta$, e quindi nella di lui espressione si mette $x = 0$, onde ne risulti una quantità costante $= M$, si deduce $P = A - b + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 u^2 \text{sen.}\alpha^2}{2h^2 \text{sen.}\beta^2} - \frac{fMvdv \text{sen.}\alpha}{dw}$, cioè $2h^2 P \text{ sen.}\beta^2$ $= 2h^2 A \text{ sen.}\beta^2 - 2h^2 b \text{sen.}\beta^2 + (h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)\, v^2$ $- \frac{2h^2 fMvdv \text{ sen.}\alpha \text{ sen.}\beta^2}{dw}$; e quindi $\frac{2vdv}{dw} =$ $\frac{2h^2 \text{sen.}\beta^2 (A - P - b) + (h^2 \text{sen.}\beta^2 f^2 \text{sen.}\alpha^2) v^2}{h^2 fM \text{sen.}\alpha \text{ sen.}\beta^2}$. Se pertanto si suppone come in tutti i casi ordinarj $P = A$, nasce $\frac{fvdv \text{ sen.}\alpha}{dw}$ $= \frac{(h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2) v^2 - 2h^2 b \text{sen.}\beta^2}{2h^2 M \text{ sen.}\beta^2}$; e se questo valore viene sostituito nella prima equazione, questa si cangia in

$$p = A - b + x + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \text{sen.}\alpha^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2} + \frac{[\,2h^2 b \text{ sen.}\beta^2 - (h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2) v^2\,]}{2h^2 M \text{sen.}\beta^2} \int \frac{ds^2}{zdx} =$$

$$A - b + x + \frac{(z^2 \text{sen.}\varphi^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)\, v^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2} + \left[\frac{2h^2 b \text{sen.}\beta^2 - (h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2) v^2}{2h^2 M \text{sen.}\beta^2}\right] \int \frac{ds^2}{zdx}.$$

Ora è palese dall' indole della primitiva equazione differenziale che l' integrale $\int \frac{ds^2}{zdx}$ ha da pigliarsi talmente, che esso si annulli allorchè si fa $s = \Delta$, perchè in tale ipotesi è stata integrata quella equazione. Un tale integrale, il quale sarà presentemente variabile come dato per s, sia nominato N, ed avremo per ultimo $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{(z^2 \text{sen.}\varphi^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)v^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2}$ $+ \frac{[2h^2 b \,\text{sen.}\beta^2 - (h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)v^2]}{2h^2 \mathrm{M} \text{sen.}\beta^2} \times \mathrm{N}$. Il che era &c.

12. Cor. I. Se si vuol conoscere la pressione nel primo principio del moto bisogna fare $v = 0$, ed allora abbiamo $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{\mathrm{N}b}{\mathrm{M}}$; cioè $= x + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} b - b$, qualora si supponga che l' acqua si scagli dall' orificio nel vuoto, dove $\mathrm{A} = 0$. Ora l' origine e la costituzione de' due integrali N, ed M mostra chiaramente, che $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ è una vera frazione < 1. Dunque $p = x + \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} - 1\right) b < x$; donde si trae il seguente

TEOREMA I.

13. La pressione, che soffre un punto qualunque d' un vaso o tubo dall' acqua che per entro vi scorre, è minore, anche nel primo istante del moto, del peso d' una colonna d' acqua elevata dal dato punto sino alla sezione suprema, e conseguentemente minore della pressione dell' acqua nello stato di piena quiete o d' equilibrio.

14. Cor. II. Se tutte le sezioni MN sono perpendicolari alla linea centrale, sicchè $\alpha = \varphi = \beta = 90.°$, il valore di p diventa $= \mathrm{A} - b + x + \frac{(z^2 - f^2)v^2}{2z^2} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]\mathrm{N}}{2h^2 \mathrm{M}} =$ $\mathrm{A} + x + \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} - 1\right) b + \frac{v^2(z^2 - f^2)}{2z^2} - \frac{(h^2 - f^2)v^2 \mathrm{N}}{2h^2 \mathrm{M}}$.

15. Cor. III. Quando il moto dell'acqua non più si accelera sensibilmente, il che succede prestissimo, allora fatto $\frac{vdv}{dw} = o$, l'equazione primitiva diviene $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{(z^2 \text{sen.}\varphi^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)v^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2}$; e perchè da questa ipotesi, essendo $\frac{fvdv\,\text{sen.}\alpha}{dw} = o$, ne deriva $v^2 = \frac{2h^2 b\,\text{sen.}\beta^2}{h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2}$; perciò nasce $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{h^2 b\,\text{sen.}\beta^2 (z^2 \text{sen.}\varphi^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)}{(h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2) z^2 \text{sen.}\varphi^2}$; e supposte le sezioni normali alla linea centrale, comparisce $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{h^2 b (z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2) z^2}$.

Altro non avvertendosi, supporremo in appresso le falde dell'acqua normali alla linea centrale, cioè $\alpha = \beta = \varphi = 90.^\circ$; ed innoltre ommetteremo la pressione A dell'atmosfera come se l'acqua dall'apertura del tubo si slanciasse nel vuoto.

Problema VIII.

16. Uscendo l'acqua dal vaso FMNG (Fig. 4.^{a}) per l'apertura orizzontale BE, e supponendosi, che mediante l'afflusso di altr'acqua sia mantenuto costantemente pieno sino in FG; si cerca la pressione totale, con cui l'acqua durante il suo moto spinge il vaso verticalmente all'ingiù.

Sol.

E' noto che ciascun elemento Hh dell'interna superficie del vaso soffre una pressione $= p\,.\,\mathrm{H}h$ in direzione perpendicolare ad esso elemento. Se questa pressione si risolve in due una verticale, l'altra orizzontale, e si chiama $d\mathrm{P}$ la pressione verticale, z al solito la sezione indeterminata PH, abbiamo l'analogia $\mathrm{H}h : dz :: p\,.\,\mathrm{H}h : d\mathrm{P}$, e quindi $d\mathrm{P} = pdz$.

Dun-

Dunque integrando sarà la somma di tutte le pressioni verticali $P = \int p dz$, cosicchè attaccato il vaso al braccio d'una bilancia vi vorrà nell' altro braccio un peso $= \int p dz$ per equilibrarsi colla pressione verticale dell' acqua del vaso. Siccome pertanto abbiamo già ritrovato $p = x - b + \frac{(z^2 - f^2)v^2}{2z^2} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]N}{2h^2 M}$ ne verrà $pdz = xdz - bdz + \frac{(z^2 - f^2)v^2 dz}{2z^2} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]N dz}{2h^2 M}$. Osservisi ora che essendo quì $f = x$, l' integrale $N = \int \frac{ds}{z}$ diventa $\int \frac{dx}{z}$, dove x sarà espresso per z, giacchè è data la figura del vaso. Nell' integrazione poi della precedente equazione debb' essere riguardata v come una grandezza costante, perchè si cerca la pressione per una velocità data. Laonde l' integrazione somministra

$$\int p dz = \int x dz - bz + \frac{1}{2} v^2 z + \frac{f^2 v^2}{2z} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]}{2h^2 M} \times \int N dz$$

$+$ Cost. Per determinare la Cost. convien por mente, che la pressione è nulla quando $z = FG = h$, ed $x = 0$: perciò presi gli integrali $\int x dz$, $\int N dz$ in modo, che spariscano allorchè $x = 0$, e $z = h$, apparisce Cost. $= bh - \frac{1}{2} v^2 h - \frac{f^2 v^2}{2h}$; donde si ricava $\int p dz = b(h - z) + \frac{1}{2} v^2 (z - h)$

$$+ f^2 v^2 \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{2z}\right) + \int x dz + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2] \int N dz}{2h^2 M}.$$

Dunque per avere la pressione totale per tutto il vaso basterà fare $z = f$, $x = b$, e risulterà la detta pressione,

$$= b(h - f) - \frac{1}{2} \frac{v^2 (h - f)^2}{h} + \int x dz, + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2] \int N dz}{2h^2 M}$$

dove gli integrali $\int x dz$, $\int N dz$ hanno a pigliarsi in tal maniera, che si annullino quando $x = 0$, e diventino completi quando $x = b$. Il che era ec.

17.

17. Un' osservazione di estrema importanza, che non dee quì trascurarsi in nessun conto, riguarda l' ipotesi, a cui è appoggiata l' analisi di questo Problema, vale a dire, che le sezioni z del vaso variar debbano insieme colle x secondo la legge di continuità. Che però qualora il vaso abbia un fondo piano orizzontale MN, ed in esso un' apertura BE, converrà usare una gran precauzione nell' applicazione della predetta formola per non urtare in risultati falsi. Se per $x = o$ si piglia $z = FG$, e per $x = b$ si prende $z = MN$, cioè al fondo; egli è evidente, che non può la formola rappresentare se non la somma di tutte le pressioni verticali contro le pareti del vaso esclusa la pressione contro il fondo, qualora per $x = o$, e $z = h = FG$ si pigli $\int pdz = o$. Quindi è che alla pressione rappresentata dalla formola dee in questi casi aggiugnersi la pressione contro il fondo per ottenere la pressione intera, a cui è esposto il vaso. A tal effetto servirà il

PROBLEMA IX.°

18. Il vaso FMNG (Fig.^e 4.^a, e 5.^a) ha un fondo piano e orizzontale MN con un' apertura BE, per cui l' acqua scaturisce, la quale viene costantemente rimessa per di sopra in FG: si dimanda la pressione dell' acqua corrente contro il fondo.

Sol.

Ricorrendo al *gurgite Bernoulliano* (a) egli è mestieri in

(a) La nota *legge della continuità*, a cui sembrano appoggiate le formole fondamentali del moto nella Meccanica, non consente che la velocità dell' acqua, che scorre per un tubo o vaso possa in un istante cangiare di una quantità finita; ma poichè chiamata v la velocità dell' acqua nell' orifizio del tubo, f l'area dell' orifizio, b la sezione infima del tubo contigua al detto orifizio, e supposto $b > f$, la velocità in quella sezione sarebbe $\frac{fv}{b}$; cioè minore che nell' orifizio nel rapporto di $f:b$, perciò Giovanni Bernoulli nella sua Idraulica affine di attenersi a detta legge spiega la cosa così. In vicinanza del lume BE incomincia l' acqua a formare un canale infondibuliforme, ovvero a foggia d' imbuto per modo che l' acqua che trovasi negli angoli CMB, DNE, rimane in quiete, in luogo di FMNG immaginarsi il vaso FCBEDHG, e considerare i confini CBED del gurgite come una parte dei confini del vaso, dentro i quali tutta l' acqua è in moto. Se pertanto fosse nota la figura del gurgite, e QO fosse tutta la sua altezza si potrebbe applicare allo stesso, considerato come una parte del vaso, la soluzione del Problema antecedente. Per tal disegno basta intendere per z le sezioni del gurgite, e non del vaso quando i valori di x sono maggiori di RO, e pigliare talmente gli integrali $\int x dz$, $\int N dz$, che si annullino allorchè $x = \mathrm{RO}$, $z = \mathrm{CD}$, e ricevano il loro compimento quando $x = b = \mathrm{RQ}$, e $z = f = \mathrm{BE}$. In cotal modo si otterrà l' intera pressione che viene dall' acqua esercitata contro i confini CBED del gurgite, la qual pressione non pare dover essere diversa da quella che si esercita contro il fondo. Rigorosamente parlando dovrebbe aggiugnersi ad essa il peso dell' acqua stazionaria negli angoli CMB, DEN; ma siccome debbe assumersi picciolissima l' altezza del gurgite in confronto dell' altezza del vaso, si può riguardare come insensibile quel peso. Dunque (essendo quì dz negativa, perchè le sezioni del gurgite impiccioliscono a misura che si accostano all' apertnra BE) la pressione ricercata sarà $= -\int x dz + bz - \frac{1}{2} v^2 z - \frac{f^2 v^2}{2z} \frac{(2h^2 b - (h^2 - f^2) v^2)}{2h^2 \mathrm{M}} \times \int \mathrm{N} dz +$ Cost. La Cost. si determina con osservare che la pressione si annulla quando $x = \mathrm{RO}$, $z = \mathrm{CD} = m$; donde nasce Cost. $= - bm + \frac{1}{2} v^2 m + \frac{f^2 v^2}{2m}$. Laonde la pressione contro una parte indefinita de' confini del gurgite sarà

$$= b(z - m) + \frac{1}{2} v^2 (m - z) + f^2 v^2 \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2z} \right) - \int x dz$$

— (2h²b

mentre l' altra vi passa fra mezzo, e con velocità *continuamente* crescente si affaccia all' apertura, e ne sorte. Siffatto canale ed imbuto piacque a Bernoulli denominarsi lo colla parola di *gurgite*.

$-\frac{(2h^2b-(h^2-f^2)v^2)}{2h^2\mathrm{M}}\int \mathrm{N}dz$. Dunque per ultimo fatta $z=f$, la pressione contro tutto il gurgite si trova $=-b(m-f)+\frac{(m-f)^2v^2}{2m}-\int xdz-\frac{(2h^2b-(h^2-f^2)v^2)}{2h^2\mathrm{M}}\int \mathrm{N}dz$, pigliando i due integrali $\int xdz$, $\int \mathrm{N}dz$ nel modo quì prescritto. Se ora l' ascissa inferiore QK, corrispondente alla sezione indeterminata ST $=z$ del gurgite, si pone $=\omega$, sicchè sia $x=b-\omega$; nasce $\int xdz=bz-\int\omega dz+$ Cost., e questo integrale dovendo annullarsi quando $x=$ RO, ovvero $z=m$, e ricevere il suo compimento quando $x=b$, ovvero $z=f$; si deduce $\int xdz=bf-bm-\int\omega dz$, prendendo l' integrale $\int\omega dz$ in maniera, che sparisca allorchè $x=$ RO, ovvero $\omega=$ QO, e $z=m$, si renda completo con fare $x=b$, ossia $\omega=o$, e $z=f$. Perlocchè dimandata p la pressione che si cerca, la predetta equazione si riduce a quest'altra più semplice, $p=\frac{(m-f)^2v^2}{2m}+\int\omega dz-\frac{(2h^2b-(h^2-f^2)v^2)\int \mathrm{N}dz}{2h^2\mathrm{M}}$.

Si consideri innoltre, che la quantità N, ovvero l' integrale $\int\frac{df}{z}$, oppure in questo caso $\int\frac{dx}{z}$, posto $x=b-\omega$, diventa $-\int\frac{d\omega}{z}$ preso talmente, che si annulli allorchè $x=b$, oppure $\omega=o$; e che l'espressione variabile, cioè data per ω, risultante da questa integrazione dee moltiplicarsi per dz, e poscia nuovamente integrarsi, onde risulti $\int\left(-dz\int\frac{d\omega}{z}\right)$, ovvero $-\int.dz\int\frac{d\omega}{z}$; e questo nuovo integrale dee talmente determinarsi che sparisca facendo $\omega=$ QO, $z=$ CD $=m$, e diventi completo con prendere $\omega=o$, $z=$ BE $=f$. Dunque si ottiene finalmente l' equazione $p=\frac{(m-f)^2v^2}{2m}+\int\omega dz+\frac{(2h^2b-(h^2-f^2)v^2)}{2h^2\mathrm{M}}\int.dz\int\frac{d\omega}{z}$. Il che era &c.

19. Cor. I. Siccome ci è interamente ignota la vera figura del gurgite, non è possibile osattamente calcolare gli integrali $\int \omega dz$, $\int dz \int \frac{d\omega}{z}$, essendo perfino ignota, ne' vasi, che hanno le sezioni variabili come nella Fig. 4.ª, la grandezza di m, cioè di CD. Essendo però picciolissima l' altezza QO del gurgite, si può senza errore notabile assumere m, cioè CD uguale al fondo MN, e per la stessa ragione ponno disprezzarsi come estremamente piccioli gli integrali $\int \omega dz$, $\int dz \int \frac{d\omega}{z}$; e conseguentemente la pressione contro il fondo piano e orizzontale può essere a un dipresso rappresentata da $\frac{v^2 (m-f)^2}{2m}$. Di qui si deduce il

TEOREMA II.°

20. La pressione, che soffre il fondo piano e orizzontale d' un vaso dall' acqua posta in movimento nell' ipotesi, che la linea centrale sia una retta verticale, è uguale al peso d' una colonna d' acqua, che ha per base $m-f$, cioè la differenza tra il fondo e la luce, e per altezza una quarta proporzionale ad m, $m-f$, $\frac{1}{2} v^2$, vale a dire a tutto il fondo, alla differenza tra la luce e il fondo, e all'altezza dovuta alla velocità dell' uscita.

21. Cor. II.° Se il vaso è un prisma o cilindro retto (Fig. 5.ª) allora $m = CD = MN = h$, e la pressione cercata $= \frac{v^2 (h-f)^2}{2h}$, la quale non differisce punto dalla pressione totale che spinge il vaso verticalmente all' ingiù; giacchè le pressioni contro le pareti verticali del vaso essendo orizzontali, non possono produrre alcuna spinta verticale nel vaso ed anzi si equilibrano insieme.

PRO-

PROBLEMA X.°

22. Al vaso ACFB (Fig. 6.ª) in cui le sezioni o falde d' acqua riescono perpendicolari alla linea centrale, è annesso lateralmente per di sotto il tubo orizzontale FH, dentro il quale scorre l'acqua del vaso, ed esce per l'apertura PQ: si dimanda la pressione dell' acqua contro un dato luogo M del tubo nel supposto, che il vaso si conservi costantemente pieno.

Sol.

Si è trovato nel Cor. II.° del Probl. VII.° $p = A + x - b + \frac{v^2(z^2 - f^2)}{2z} + \frac{(2h^2b - (h^2 - f^2)v^2)N}{2h^2M}$; e quando la velocità si è ridotta allo stato permanente si è ottenuto nel Cor. III. $p = A - b + x + \frac{h^2b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}$. Stando ora a questa seconda formola, ed ommettendo, come sopra la pressione A dell' atmosfera si scorge subito, che $x = b$, perchè x dinota qui la distanza della sezione suprema AB dal centro della sezione data MN, la quale distanza non differisce da quella della stessa suprema sezione dal centro della sezione infima PQ, che si è sempre espressa per b. Nasce adunque la pressione domandata

$p = \frac{h^2b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}$. Il che era &c.

23. Cor. I.° Se la suprema sezione h del vaso è grandissima in paragone della luce f del tubo orizzontale, diviene $p = \frac{b(z^2 - f^2)}{z^2}$. Da ciò si deduce il

TEOREMA III.°

24. In un tubo orizzontale annesso inferiormente ad un

vaso che viene mantenuto costantemente pieno d' acqua, la pressione esercitata contro un dato luogo del tubo dall'acqua, che vi scorre dal vaso, e che sorte dal tubo per una data apertura, equivale al peso d' una colonna d' acqua, che ha per altezza la quarta proporzionale al quadrato della sezione del tubo in quel luogo, alla differenza di tal quadrato dell' apertura, e all' altezza della suprema sezione del vaso sopra il centro dell' apertura.

25. Cor. II.° Qualora il tubo orizzontale sia cilindrico, allora essendo z costante, la pressione è la medesima in tutti i luoghi del tubo.

26. Cor. III.° In quel luogo del tubo, dove la sua sezione è uguale all' apertura, la pressione è nulla; e perciò un tubo cilindrico o prismatico tutto aperto all' estremità non soffre pressione alcuna: in fatti essendo in questo caso uguali tutte le sezioni verticali del tubo, l' acqua che passa dall' una nell' altra scansa l' acqua inseguente colla medesima velocità, con cui questa la insegue; ond' è che nessun urto o niuna pressione può risultarne.

27. Cor. IV.° Stando all' ipotesi della sezione suprema del vaso grandissima in confronto dell' orifizio del tubo, poichè si ha $p = b - \frac{bf^2}{z^2}$, e la velocità per la sezione z è $= \frac{fv}{z}$, e l' altezza dovuta a tal velocità è $= \frac{f^2v^2}{2z^2}$, ed altronde è noto, che $\frac{1}{2}v^2$ è prossimamente $= b$; perciò $\frac{bf^2}{z^2}$, che nomineremo α sarà l' altezza dovuta alla velocità per la sezione z. Laonde $p = b - \alpha$, vale a dire *l' altezza della colonna d' acqua equivalente alla pressione contro un dato luogo del tubo, alla qual altezza salirebbe l' acqua in virtù di tal pressione, è uguale alla differenza fra l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua nel foro, e l' altezza dovuta alla velocità nella sezione del dato luogo.*

Esem-

Esempio.

28. Il Sig. Daniello Bernoulli (a) ha illustrato con elette sperienze questa teoria della pressione dell' acqua in moto. Egli adattava ad un ampio recipiente un tubo orizzontale di 7 linee di diametro, mantenendo l'acqua del recipiente all' altezza di 115 linee sopra il centro del tubo. All' esteriore apertura del tubo applicava de' coperchj differentemente forati; e verso il mezzo della lunghezza del tubo per un picciol pertugio inseriva un cannello verticale di vetro alto oltre 115 linee, dove osservava di quanto l'acqua si abbassava sotto il livello del recipiente allorchè pel foro del coperchio sprizzava dal tubo, fatto però sempre il diffalco di quanto era dovuto alla *virtù capillare* del cannello di vetro, la quale da Bernoulli fu prima ritrovata di cinque linee, come egli si esprime, cioè atta a sollevar l' acqua cinque linee sopra il suo livello.

Esper. I. Preso il coperchio, che aveva il foro circolare di $2\frac{1}{5}$ linee di diametro, l' acqua si abbassò nel cannello un tantino più d' una linea. Ora un tal abbassamento debb' essere per la teoria $= \frac{bf^2}{z^2} = 115 \cdot \left(\frac{11}{35}\right)^4$, giacchè $\frac{f}{z} = \left(\frac{11}{7 \cdot 5}\right)^2$. Perciò

log. 11	1, 0413927
log. 35	1, 5440680
log. $\frac{11}{35}$	9, 4973247

4 log.

(a) Experimenta coram Societate instituta in confirmationem theoriæ pressionum, quas latera canalis ab aqua transfluente sustinet. Comm. Petrop. T. IV.

$4 \log. \frac{11}{35}$ 7, 9892988

log. 115 . . . . 2, 0606978

$\log. 115 . \left(\frac{11}{35}\right)^4$ 0, 0499966,

al qual logaritmo corrisponde il numero 1, 122, che è per l' appunto un tantino maggiore dell' unità, come l' esperienza richiede.

Esper. II. Con un altro coperchio di $3 \frac{2}{5}$ linee di diametro nel foro, l'acqua discese nel cannello sei linee e due terzi. Quì abbiamo $\frac{bf^2}{z^2} = 115 . \left(\frac{17}{35}\right)^4$. Dunque

log. 17 . . . . 1, 2304489

log. 35 . . . . 1, 5440680

$\log. \frac{17}{35}$ 9, 6863809

$\log. \left(\frac{17}{35}\right)^4$ 8, 7455236

log. 115 . . . . 2, 0606978

$\log. 115 . \left(\frac{17}{35}\right)^4$ . . . . 0, 8062214.

A questo logaritmo corrisponde il numero 6, 4, che pochissimo, e fisicamente parlando niente differisce dall' esperienza.

Esper. III. Applicato all' esterior apertura del tubo orizzontale un terzo coperchio avente una luce di 5 linee di diametro, o un tantin meno, l' acqua discese di 28 linee nel cannello. Quì si ha $\frac{bf^2}{z_{,}^2} = 115 \left(\frac{5}{7}\right)^4$. Quindi

log. 5 . . . . 0, 6989700

log. 7 . . . . 0, 8450980

$\log. \frac{5}{7}$ 9, 8538720

log.

$\log.\left(\frac{5}{7}\right)^4$ 9, 4154880

log. 115 . . . . 2, 0606978

$\log.\ 115.\left(\frac{5}{7}\right)^4$ . . . . 1, 4761858.

Il numero che corrisponde a questo logaritmo sta fra 29, e 30; ma come avverte il Sig. Bernoulli è da prendersi per numero teoretico il 29, poichè il foro del coperchio non pareva avere pienamente cinque linee di diametro. La differenza adunque fra la teoria e l' esperienza è di una sola linea in 28; differenza certamente assai picciola, e da attribuirsi agli impedimenti, che incontra l' acqua lungo il tubo orizzontale.

Esper. IV. Tolto il coperchio, e lasciata uscir l' acqua liberamente pel pieno orifizio del tubo, discese tosto l'acqua pressocchè tutta nel cannello, così che detratte cinque linee dovute alla virtù capillare del cannello, ve ne rimasero tre sole da attribuirsi ancor queste agli ostacoli e ritardi del moto lungo il tubo, giacchè la teoria esige quì una total discesa per essere $p = b - \frac{bf^2}{z^2} = b - b = 0$.

29. Cor. V. Quanto è più grande z in confronto di f, tanto è maggiore la pressione del tubo in quella sezione, e viceversa. E se il tubo fosse un cono troncato unito al vaso colla sua base minore, e tramandasse l' acqua dalla maggiore tutta aperta; allora per essere $z < f$, si fa p negativo, e vi presenta un curioso fenomeno, che or ora esamineremo.

PROBLEMA XI.°

30. Sia il tubo ANPFB (Fig.ª 2.ª) di qualunque forma e conservato costantemente pieno d' acqua, di cui ciascuno strato si muove in direzione della linea centrale, e sorte per la luce PF: si vuol sapere la pressione dell' acqua contro qualunque dato luogo del tubo quando il suo moto è diventato uniforme.

Sol.

SOL.

L' equazione ritrovata al Cor. III.° del Probl. VII.°, cioè $p = x - b + \frac{h^2 b (z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2) z^2} = x - \frac{f^2 b (h^2 - z^2)}{(h^2 - f^2) z^2}$ soddisfa al quesito. Quindi supposta picciolissima la luce PF in paragone della suprema sezione AB, risulta $p = x - \frac{bf^2}{z^2} + \frac{bf^2}{h^2} = x - \frac{bf^2}{z^2}$, che è la differenza fra l' altezza dell' acqua sopra la sezione premuta NT, e l' altezza dovuta alla velocità per la stessa sezione NT. Il che era &c.

31. Cor. I.° Se si pone $x = \frac{bf^2}{z^2}$, il tubo non sente più pressione di sorte alcuna; il che dimostra che i tubi, le cui larghezze o sezioni seguitano la legge di questa equazione non soggiacciono a veruna pressione dell' acqua, che dentro vi scorre e si scaglia da un picciolissimo foro.

32. Cor. II.° Dall' equazione $x = \frac{bf^2}{z^2}$ si ricava $z = f\sqrt{\frac{b}{x}}$. Dunque affinchè i tubi non soggiacciano alla pressione dell' acqua che portano, aver debbono le sezioni reciprocamente proporzionali alle radici delle altezze dell' acqua sopra di se, ed innoltre una qualunque sezione $= f\sqrt{\frac{b}{x}}$. Una tal figura, che aver debbono i tubi non soggetti a pressione dee parimente esser quella, in cui si conforma la vena d' acqua tramandata da un orifizio fatto nel fondo orizzontale d' un vaso. Ed è una verità di fatto, che la vena si va restringendo a misura che si scosta dall' orifizio; e la legge di tal restrizione viene rappresentata dalla detta equazione fino a che però la vena resta unita e raccolta, giacchè quando incomincia a sparpagliarsi e dispergersi, cessa ogni regolarità ed ogni legge.

33. Cor. III.° Se fosse $z = f\sqrt{\frac{b}{x-a}}$, nascerebbe $p = x - \frac{bf^2}{z^2} = a$, cosicchè qualora sia a una quantità costante, starebbe la medesima la pressione contro tutte le sezioni del tubo; e sarebbe dovunque la pressione dell' acqua corrente alla pressione dell'acqua stagnante, come sta l'altezza costante arbitraria a all' altezza x dell' acqua sopra il dato luogo.

34. Cor. IV.° A parlare però più rigorosamente, siccome p non indica se non l' altezza della colonna d' acqua, il di cui peso equivale alla pressione, la pressione contro il perimetro della sezione nascerà dal moltiplicare il detto perimetro per p. E però supposta circolare la sezione z, il suo semidiametro y, e il rapporto del diametro alla periferia $1:\pi$, la pressione contro un tal perimetro sarà $= 2\pi y p$, cioè proporzionale al prodotto yp, ovvero $p\sqrt{z}$, oppure finalmente ad $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z}$. E di qui si raccoglie, che se $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z}$ sarà uguale ad una grandezza costante c, il pericolo, che il tubo si schianti per lo sforzo dell' acqua che dentro vi corre, è il medesimo per tutta la lunghezza del tubo. L'equazione poi $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z} = c$, ovvero $x^2 z^4 - 2bf^2 x z^2 + b^2 f^4 - c^2 z^3 = 0$, oppure supposte le sezioni circolari coi semidiametri y, l' equazione $\pi^4 x^2 y^8 - 2bf^2 \pi^2 x y^4 - \pi^3 c^2 y^6 + b^2 f^4 = 0$ manifesta la legge, che seguir debbono le sezioni del tubo per soggiacere lungo tutta la di lui estensione alla stessa pressione.

35. Cor. V. Qualunque sia la forma del tubo, l' Equazione $p = x - \frac{bf^2}{z^2}$ ci appalesa i seguenti risultati: 1.° Che la pressione è positiva fintanto che $x > \frac{bf^2}{z^2}$, ovvero

 $z > y\sqrt{}$

$z > f\sqrt{\frac{b}{x}}$. 2.° Che è nulla quando $x = \frac{bf^2}{z^2}$, ovvero $z = f\sqrt{\frac{b}{x}}$, e nulla parimente nel foro, dove $z = f$, ed $x = b$. 3.° Che è negativa quando $x < \frac{bf^2}{z^2}$, oppure $z < f\sqrt{\frac{b}{x}}$. 4.° Che è negativa quando il tubo è cilindrico e tutto aperto, come EHGF nella Fig.ª 7.ª, dove $MN = HG = z = f$, $RM = x$, $RH = b$, e però $x < b$. 5.° Che è maggiormente negativa quando il tubo è conico, e inferiormente divergente, essendo allora $z < f$. 6.° Che se il tubo è conico ma converge inferiormente, la pressione è positiva tutte le volte che $z > f\sqrt{\frac{b}{x}}$; nulla tutte le volte che $z = f\sqrt{\frac{b}{x}}$; finalmente negativa anche in questo caso, qualora sia $z < f\sqrt{\frac{b}{x}}$. Per dilucidare pienamente questo fenomeno singolare è necessario stabilire le seguenti

Riflessioni intorno alla pressione negativa.

36. Ogni sezione MN allora solamente soffre una pressione propriamente detta, quando lo strato d' acqua che immediatamente precede si avanza con minore velocità che lo strato contiguo seguente, talmente che quello viene accelerato da questo, e questo ritardato da quello. Che se entrambi si muovono di passo uguale, e nulla vi ha che tenda ad imprimere maggior velocità allo strato posteriore che all' anteriore, non può l' uno agire nell' altro, e non può quindi nascere pressione di sorte alcuna. Ma se finalmente per l'opposto lo strato anteriore più velocemente si avanza che il posteriore, allora non solo non ne risulta alcuna pressione, ma

i due

i due strati, qualora fossero insieme uniti come due corpi solidi, verrebbero l' uno dall' altro separati e respinti con una certa forza proporzionata alla differenza delle velocità. La colonna d' acqua del tubo non rimarrebbe più allora unita e continua, se, parte la picciola forza di coerenza delle particelle d' acqua fra loro, parte un' altra causa, che toccheremo or ora, non la tenesse unita fino a tanto che la forza che tende a disunirla, non giugne a superare quella che la mantiene congiunta, nel qual caso succede effettivamente la separazione della colonna in più parti.

Ne' calcoli precedenti dal Problema VIII.° sino a questo paragrafo è stato supposto, che il vaso si trovi nel vuoto, e si è voluto prescindere affatto dalla pressione dell' atmosfera. Ora inerendo a questo supposto in tutti que' casi, ne' quali la pressione diviene negativa, l' acqua che corre pel tubo EHGF, non riempirebbe più tutta la capacità interna del tubo: e in conseguenza le formole appoggiate alle precedenti teorie non avrebbero più applicazione nè uso. Per applicare adunque anche a questi casi, che hanno luogo in natura, i nostri calcoli, sarà mestieri considerar l' acqua soggetta sempre alla pressione dell' atmosfera o dell' aria. E però chiamata al solito A l' altezza d' una colonna d' acqua, il cui peso uguaglia la pressione dell' atmosfera, si avrà dal Cor. III.° del Probl. VII.° per la pressione dell' acqua $p = A - b + x + \frac{h^2 b (z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2) z^2}$, e supposta come sopra picciolissima la f in confronto di h, sicchè sia $\frac{h^2}{h^2 - f^2} = 1$, risulterà $p = A + x - \frac{bf^2}{z^2}$, cioè fatto $x - \frac{bf^2}{z^2} = p'$, sarà $p = A + p'$, dove p' esprimerà la pressione dell' acqua nel vuoto. Ora se all' aria libera l' acqua preme contro il perimetro del tubo dal di dentro al di fuori colla forza $p = A + p'$; vice versa l' aria ambiente preme questo perimetro dal di fuori al di dentro verso l' asse con uno sforzo $= A$;

e da ciò ne deriva che anche nell' aria libera il circuito del tubo non soffre se non la pressione $p = A + p' - A = p'$, che soffre nel vuoto. Che se p' diventa negativa, la circonferenza del tubo viene allora premuta all'indentro colla forza $= p'$: imperciocchè l' atmosfera preme dal di fuori al di dentro colla forza A, l'acqua preme dal di dentro al di fuori colla forza $A - p'$; dunque la pressione dal di fuori al di dentro è $= A - (A - p') = p'$.

37. E' poi manifesto, che in questo caso della pressione negativa la pressione interna dell' acqua contro il tubo svanisce allorchè $p' = A$. Per rendere tutto questo sensibile coll'esperienza, si saldi lateralmente al tubo cilindrico EFHG (Fig.ª 8.ª) un altro tubo MSO, che ripiegandosi in S all' ingiù arriva colla sua apertura inferiore O quasi al fondo d' un vaso L I. Si immagini pel foro M dove questo tubo s' inserisce nel primo una sezione NM del primo; si cerchi la pressione corrispondente a tal sezione, ovvero il valore di $p' = x - \frac{bf^2}{z^2}$; e si prenda di tal lunghezza il tubo MSO, che l' altezza di M sopra O sia $= p'$. Chiudasi ora l' orifizio GH, e si empia d' acqua il vaso ACEGHFDB, la quale discenderà pel tubo MSO nel vaso RQ. Quando l' acqua nel vaso RQ si sarà alzata sopra l' orifizio O, aperto allora GH, non solamente esce per GH l' acqua del vaso superiore CB, ma sale nel tempo istesso quella del vaso inferiore RQ pel tubo OSM, e qualora venga supplito con nuov'acqua, il dispendio di AD sorte per GH insieme coll' altr' acqua, che ascende per OM, e ciò dura fino a tanto che il fondo O si trova sott' acqua (a). La cagione di tal fenomeno è la seguente: l' acqua del vaso ACEGHFDB preme contro il picciolo foro M, con una forza $= A - p'$. Se pertanto il tubo MSO è pieno d'acqua, e il vaso RQ o manca, o è vuoto;

(a) Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. XII. Exper. 6.

to; l' aria esterna preme contro O colla forza $= A$; ma l' acqua del tubo MSO preme contro O dal di dentro, cioè in direzione opposta 1.° colla forza $= p'$, perchè si è fatta $= p'$ l' altezza di M sopra O; 2.° colla forza $= A - p'$, perchè tanto appunto preme contro M l' acqua del tubo EH. Dunque l' orifizio O sostiene dal di dentro una pressione $= p' + A - p' = A$, cioè = alla pressione, che sostiene dal di fuori; e perciò l' acqua del tubo MSO vi resta sospesa. Ma se il vaso LI è pieno d' acqua sino a P; allora il foro O è premuto dal di fuori con una forza $= A + PO$, e dal di dentro con una forza $= A$; e da queste due forze risulta una pressione dal di fuori al di dentro $= A + PO - A = PO$. Per la qual cosa l' acqua verrà spinta per O dentro il tubo, e salirà in esso per indi scaricarsi per l' apertura GH, e ciò seguiterà finchè O si troverà sott' acqua. Ciò si dimostra eziandio dal ragguaglio delle quantità d' acqua, che passano nel medesimo tempo per le due sezioni MN, e GH; imperciocchè quella che passa per NM non basta a supplire il dispendio, e a riempire il vuoto lasciato da quella che sorte per l'apertura GH. In fatti siccome si piglia larghissimo il vaso AD in confronto delle due aperture EF, GH, la velocità dell' acqua in ciascun luogo del tubo EH sarà dovuta all' altezza di tutta l' acqua sopra lo stesso luogo; e però chiamata h l' altezza dell' acqua sopra il luogo M, ovvero sopra la sezione MN, ed $h + k$ l' altezza sopra l'apertura GH, sarà la velocità nel primo luogo $= \sqrt{2h}$, e la velocità nel secondo $= \sqrt{(2h + 2k)}$. Se ora si fa $NM = \varphi$, $GH = f$, passerà nel tempicciuolo dt per l'apertura GH una quantità d' acqua $= f\,dt \sqrt{(2h + 2k)}$, e per la sezione NM una quantità $= \varphi\,dt \sqrt{2h}$: la prima quantità è visibilmente maggiore della seconda tutte le volte che f è o maggiore, o uguale a φ. Dunque in questi due casi di $f > \varphi$, ed $f = \varphi$, non passerà per MN tant' acqua quant' è necessaria a riempire il luogo lasciato da quella che esce per GH; ond' è che formasi un vuoto fra NM, e GH, per cui

l' aria

l' aria esterna che preme sul vaso RQ non essendo più contrabbilanciata, sforza l'acqua a salire pel tubo OSM, e gettarsi per M in quel vuoto. Quindi è, che se tutto questo apparato si portasse sotto il recipiente della macchina pneumatica, e dopo averne estratta l' aria si lasciasse uscir l' acqua per l'apertura GH, non salirebbe più pel tubo OM quella che è contenuta nel vaso RQ.

Se nella parete d' un Camino si fanno delle aperture, il fumo che internamente s' innalza non solo non esce punto per quelle, ma l' aria esterna all' opposto vi entra con forza a motivo della rarefazione prodotta dal calore nell' aria interna. Il lodato Sig. Bernoulli intorno a questo fenomeno si esprime così: *Sunt porro alia naturae phaenomena, quorum vera explicatio ab ista theoria hydraulico-statica pendet: veluti quod fumus per caminum ascendens aerem per foramen in camino factum magno post se trahat impetu: quod ventus ex loco angustiori in apertiorem flans aliquid de sua elasticitate perdat, prouti id colligitur ex eo, quod fenestrae apertae ab aere, e camera egressum ob majorem suam elasticitatem tentante, claudantur; et hujusmodi alia quae examinare singula non licet* (a). Potrebbe qui parere che il Sig. Bernoulli riguardasse il fumo come un fluido, che di sua natura tende all' alto secondo l' opinione degli antichi, e si trae dietro l' aria esteriore per le aperture fatte alla tromba; ma la teoria da lui quivi adottata mostra il vero senso da darsi alle sue parole; ed altronde tutti convengono, che il fumo, messo anche da parte l' urto che riceve dai gas sviluppati nella combustione, viene spinto in alto dall' aria a quel modo che il legno dall' acqua.

38. Dalle cose fin qui esposte si scorge in qual senso possa dirsi, che qualora il valore della pressione ritrovato colle precedenti regole diventa negativo, essa si cangia in un

(a) Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. XII. §. 17.

un succhiamento (*a*). Il Sig. D' Alembert non sembra soddisfatto di questa spiegazione. Crede egli, che il valor negativo della pressione indichi soltanto, che lo strato NT (Fig.ª 2.ª), il quale veniva prima premuto nella direzione del moto da C verso *c*, sia ora premuto in direzione opposta da *c* verso C. Egli aggiugne, che ciò non ostante l' acqua contenuta nello strato N*nt*T seguita a premere come prima le pareti del tubo, essendo indifferente che lo strato sia premuto in avanti, o all' indietro (*b*). Ma i principj da noi qui premessi e dimostrati fanno abbastanza conoscere, che la spiegazione del Sig. D'Alembert non può essere legittima. Convien per altro osservare che il Sig. D' Alembert pone affatto in non cale la pressione dell' aria, ed allora non può certamente immaginarsi alcun succhiamento: e quindi è, che lo sperimento Bernoulliano non riuscirebbe nel vuoto. Ma le osservazioni che lo stesso Sig. D' Alembert (*c*) fa sopra i casi, ne' quali la massa fluida dee disunirsi, avrebbero di leggieri potuto convincerlo, che questi sono appunto que' casi, in cui la pressione si cangia in negativa, e che allora in uno spazio vuoto le pareti del tubo non possono in alcun modo essere premute dal di dentro verso l' infuori. Certo è che più chiaramente si sarebbe espresso il Sig. Bernoulli nel luogo citato della sua Idrodinamica, se alle parole *pressio in suchionem mutatur, idest latera canalis introrsum premuntur*, avesse aggiunto *ab aere ambiente*. Ciò è avvertito dal Sig. D' Alembert ne' suoi Opuscoli Matematici (*d*), dove egli ritratta in parte quel tanto che nel citato luogo del Trattato de' fluidi aveva col Sig. Bernoulli obbiettato. Non pare però che voglia ritrattar tutto, tenendo egli anzi per giusta la sua spiegazione tutte le volte che la pressione dell' atmosfe-

ra

(*a*) Ved. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. XII. §. 11. Joh. Bernoulli Hydraul. P. II. § XIV. Op. T. IV.

(*b*) D'Alembert Traité de l'Equilibre et du Mouvement des Fluides §. 149.

(*c*) L. c. §. 99.

(*d*) T. I. Memoire IV. §. XVIII.

ra non viene computata. Ma se è vero che l' acqua nel tubo OSM (Fig.ª 8.ª) non salirebbe se la pressione dell' atmosfera mancasse; è altresì vero, che l' acqua nel tubo FG non premerebbe contro le sue pareti.

39. Dal fin qui detto si deducono le seguenti massime. L' acqua che scorre nel canale APFB (Fig.ª 2.ª) formerà un corpo unito e continuo fintantochè l' equazione ritrovata per p darà un valore positivo. Ma allorchè in un luogo NT del canale questo valore incomincia a diventar negativo, l' acqua che precede incomincia in questo luogo a separarsi da quella che segue. Può bene la coerenza delle particelle d' acqua fra loro, e l' adesione alle pareti del tubo far sì, che il valore negativo di p debba acquistare una qualche grandezza prima che effettivamente succeda la divisione dell' acqua. Ma è tanto picciola questa forza di coerenza e adesione, che può senza scrupolo trascurarsi. Per la qual cosa supponendo il canale esposto alla pressione dell' aria, l' acqua che dentro vi corre, incomincierà a dividersi in quel luogo dove p' (supposta negativa) diviene $>$ A. Perlocchè se al vaso AD (Fig.ª 7.ª) sarà unito nel fondo il tubo verticale cilindrico EHGF, non potrà questo esser più lungo di 32 piedi, perchè l'acqua vi si mantenga nello stato di continuità. Che se il tubo supera una tal lunghezza, presso l' inserzione EF l' acqua che corre in avanti si separa da quella che le vien dietro, e lascia in quel luogo uno spazio vuoto. Diffatti nel presente supposto la pressione in EF è $p = A + x - \frac{bf^2}{z^2} = A + x - b$, ossia $= A - (b - x)$, dove $b - x = p' = RH - RE = EH$ indica la lunghezza del tubo. Nella parte poi inferiore del tubo dee rimanere sospesa una colonna d' acqua alta 32 piedi sostenuta dalla pressione dell' atmosfera; e non uscirebbe punto d' acqua per l' apertura HG, se quella che corre per EF non accrescesse l'altezza della predetta colonna, e non la rendesse preponderante all'atmosfera: e di qui apparisce quanto grande sarebbe l' er-

ro-

rore di chi calcolasse in questo caso la velocità dell'acqua nell' uscita da HG come dovuta all' altezza della superior superficie AB sopra l'apertura HG. Tutto ciò si applica egualmente ai tubi cilindrici obbliqui all' orizzonte, ne' quali l' inferior' apertura HG è più di 32 piedi al di sotto della superiore EF.

Se il tubo EHGF è un tubo conico, che si va allargando al basso, la separazione dell'acqua succede in EF tutte le volte che $\frac{bf^2}{z^2} - x$ diventa maggiore di 32 piedi: e perciò se HG è due volte così largo come EF, la separazione accade allorchè $4b - x$ è maggiore di 32 piedi; dal che si scorge non dover essere $b - x$, cioè l' altezza del tubo maggiore di 8 piedi, perchè essendo $b > x$, sarebbe $4b - x$ molto maggiore di 32 piedi.

41. Le precedenti dottrine intorno alla forza premente dell' acqua contro le pareti de' canali sono tanto più interessanti, in quanto elle ritrovano un' acconcia applicazione allorchè si dee formar giudizio della fermezza da darsi ai canali per non essere rotti e schiantati dalla forza dell' acqua. Qualora i tubi sieno cilindrici, o almeno tutte le sezioni NT (Fig.ª 2.ª) perpendicolari alla linea centrale sieno circolari, il Calcolo Integrale ci dà il modo di ritrovare l' intera pressione, a cui soggiace il canale. Rappresenti il circolo ACBD (Fig.ª 9.ª) una cotal sezione d' un tubo; e condotti a squadra i due diametri AB, CD, si prenda ad arbitrio sulla circonferenza un punto F. Questo punto viene premuto dall' acqua nella direzione Ff del semidiametro EF prolungato, e ciò vale di qualunque altro punto della periferia. La forza premente rappresentata da Ff si risolva in due altre FG, FN parallele ad AB, DC; ed è manifesto che tutte le forze FG nella semicirconferenza CAD tendono a distaccare in C, e D questa semicirconferenza dall' altra CBD. Così preso in quest' altra il punto M, e risoluta la forza premente Mm dell' acqua contro di essa nelle due Mg, Mn parallele ad

AB, DC, la somma delle forze F G sarà in equilibrio colla somma delle forze Mg, e parimente la somma delle forze FN, Mn che tendono a disgiugnere in A, e B la semicirconferenza ACB dall' altra ADB sarà in equilibrio colla somma delle forze, che in quest'altra semicirconferenza ADB agiscono in direzione opposta alle prime. La media direzione di tutte le forze FG passa per A, come passa per B la direzione media di tutte le Mg. Pigliando Aa uguale alla risultante di quelle, Bb di queste, si equilibreranno Aa, e Bb, e ciascuno de' due punti C, o D soffrirà uno sforzo $= \frac{1}{2} Aa$ $= \frac{1}{2} Bb$. Da ciò è agevole il passo al

Problema XII.

42. Al di sotto del vaso o della conserva ACFB (Fig.ª 6.ª) havvi un tubo cilindrico orizzontale FGHE, ma chiuso alla sua imboccatura HG. L' acqua riempie il tubo, e il vaso sino ad AB: si domanda con quanta forza l' acqua stagnante preme il tubo FGHE per farlo crepare.

Sol.

Essendo IL la profondità dell' asse del tubo sotto il pian di livello AB, ciascun elemento dell' interna superficie del tubo soffre una pressione equivalente al peso d' una colonna d'acqua, che ha questo elemento per base, ed IL per altezza, giacchè si suppone picciolissimo il semidiametro del tubo in confronto di IL. Se ora fatto $IL = b$, si prende (Fig.ª 9.ª) il cerchio ACBD per rappresentare una sezione del tubo; e si concepisce, che contro ciascun elemento Fe della periferia prema una forza che vaglia il peso d' una colonna d' acqua di base $= Fe$, e di altezza $= b$; e si fa il resto come nel §. antecedente; indi si guida FR normale a CD, e si fa

FR

$FR = y$, $ER = x$, il raggio $CE = r$, l'arco $DAF = u$; ne verrà in conseguenza la forza $Ff = bdu$: e perchè sta $Ff : FG :: EF : FR$, sarà $FG = \frac{bydu}{r} = dp$, nominando p la somma di tutte le forze FG. Innoltre siccome $u = DAC - CF = r\left(\pi - \text{Arc.cos.}\frac{x}{r}\right)$, e però

$$du = -d.r\,\text{Arc. cos.}\frac{x}{r} = \frac{dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)}} = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \frac{rdx}{y};$$

quindi $dp = bdx$. L'integrazione di questa formola offre $p = bx + \text{Cost.}$ E poichè p è $= 0$ in D, dove $x = -r$; ne viene $\text{Cost.} = br$; conseguentemente $p = b(r + x)$: facendo ora $x = r$, sarà la somma delle forze FG per tutta la semiperiferia $= p = 2br = Aa$, e perciò ciascuno dei due punti C, D soffrirà lo sforzo $\frac{1}{2}Aa = br$. Sia pertanto $MNnm$ (Fig.ª 6.ª) un elemento della superficie del tubo, e si assuma $HM = s$; sarà lo sforzo contro la zona elementare $MNnm$ tendente a spezzarla $= brds$, e contro la superficie indeterminata HMNG sarà un tale sforzo $= brs$, e per ultimo (chiamata l la lunghezza del tubo) la spinta dell'acqua contro tutto il tubo in quanto è diretta a farlo crepare si trova $= lbr$. Il che era &c.

43. Nella soluzione di questo Problema non abbiamo tenuto conto della grossezza del tubo, e lo abbiamo considerato come puramente superficiale, perchè quando un canale di competente larghezza ha solamente poche linee di grossezza, come si costuma ne' condotti di rame, i quali per la grande fermezza di questo metallo malgrado la loro sottigliezza fanno una sufficiente resistenza, si può senza errore lasciar da parte la grossezza del tubo, e considerare tutto il contorno solido del medesimo come una geometrica superficie cilindrica. Quando però si vorrà procedere con rigore, in ve-

vece del semidiametro r dell' interna larghezza del canale converrà prendere un medio proporzionale aritmetico fra il semidiametro r, e il semidiametro della larghezza esteriore, perciocchè tutta la forza di coerenza dee supporsi concentrata nel mezzo della grossezza del tubo, come appunto nella Statica si suppone questa forza unita nel centro della fermezza.

44. Cor. Se la superficie cilindrica del tubo EG si spianasse e distendesse sopra un piano, il peso d' una colonna d' acqua innalzata sopra di lei all' elevazione IL $= b$ equivarrebbe all' intera pressione perpendicolare, con cui l' acqua spinge l' interna superficie del tubo. Questa pressione sarebbe adunque $= 2\pi rbl$. E perchè $2\pi rbl : rbl :: 2\pi : 1$, sta in conseguenza *la pressione intera perpendicolare contro la superficie interna del tubo alla forza che tende a spaccarlo, come sta la circonferenza al semidiametro*.

PROBLEMA XIII.

45. Supponendo lo stesso tubo EG chiuso con un coperchio HG, che ha nel mezzo una picciola apertura PQ, per cui l'acqua esce mentre il vaso AF è mantenuto costantemente pieno; si cerca la forza dell' acqua tendente a far crepare il tubo.

SOL.

Pel Cor. I.° del Probl. X.° il tubo soggiace ad una pressione come se l' acqua nel vaso si sollevasse ad un' altezza $= b - \frac{bf^2}{z^2}$, e quivi rimanesse stagnante e tranquilla. Dunque pel Probl. antecedente moltiplicando quest' altezza pel semidiametro, e per la lunghezza del tubo, il prodotto $\left(1 - \frac{f^2}{z^2}\right) brl$ darà lo sforzo che tende a fendere il tubo. Il che era &c.

Di

Di quì si ricava il seguente

TEOREMA.

46. Nel tubo cilindrico orizzontale EG per cui scorre l'acqua dal vaso AF, e sorte pel picciol foro PQ, sta la forza fenditrice dell' acqua stagnante a quella dell' acqua corrente, come il quadrato della larghezza del tubo alla differenza de' quadrati della stessa larghezza, e dell' orifizio.

Problema XIV.

47. Al fondo del vaso IHEL (fig.ª 10.ª) è unito il tubo cilindrico ERBA inclinato all' orizzonte, e chiuso nell' imboccatura AB, sicchè l'acqua, che riempie il tubo e il vaso sino in IL vi resti stagnante: cercasi la forza, con cui l' acqua tende a far crepar il tubo.

Sol.

Si faccia l' angolo d' inclinazione del tubo all' orizzonte, cioè $EMG = EAF = \phi$, il semidiametro delle sue interne sezioni $= r$, la sua lunghezza $= l$, l' altezza IF dell' acqua sopra l' inferiore imboccatura del tubo $= a$. Se ora si piglia una sezione indeterminata MN, e si pone $EM = x$, diventa $HG = x \,\text{sen.}\phi$, $HF = l \,\text{sen.}\phi$, e però $GF = (l - x)\,\text{sen.}\phi$, e $IG = a - (l - x)\,\text{sen.}\phi$. Laonde soffre il tubo nell' elemento MmnN della sua superficie dall' acqua premente una forza fenditrice $= [a - (l - x)\,\text{sen.}\phi]\,r dx$, per ciò che si è dimostrato nella soluzione del Probl. XII.° Integrando pertanto questa espressione, il suo integrale $r(a - l\,\text{sen.}\phi)\,x + \frac{1}{2} r x^2 \,\text{sen.}\phi$ dà la forza fenditrice per la porzione indeterminata EMNR del tubo, nè vi ha quì costante da aggiugnere all' integrale, perchè si annulla la forza insieme con

x.

x. Quindi posto $x = l$, risulta la forza ricercata per tutto il tubo $= (a - \frac{1}{2} l \,\text{sen.}\phi) rl$. Il che era &c.

48. Cor. I.° quando $\phi = 0$, cioè il tubo è orizzontale, la forza fendente diviene ral come nel Probl. XII.°: e se il tubo è verticale, cioè $\phi = 90.°$ la forza diventa $(a - \frac{1}{2} l) r l$.

49. Cor. II.° Se il solo tubo è pieno d' acqua; allora è $a = l \,\text{sen}.\phi$, e la forza $= \frac{1}{2} r l^2 \text{sen}.\phi = \frac{1}{2} r l^2$ nel tubo verticale: dal che si scorge, che nel tubo verticale questa forza è la metà di quella del medesimo tubo orizzontale premuto da una colonna d' acqua di altezza uguale alla sua lunghezza, e nel tubo obliquo è la metà di quella stessa forza moltiplicata pel seno d' inclinazione.

50. Cor. III.° In generale lo sforzo che tende a spaccare il tubo inclinato è tanto grande, quanto se il tubo fosse orizzontale, e venisse premuto dall' acqua nell' altezza $a - \frac{1}{2} l \,\text{sen}.\phi$.

51. Cor. IV.° Ne' tubi verticali, e inclinati questo sforzo non è uniformemente distribuito per tutta la loro lunghezza, come lo è negli orizzontali. In quelli va sempre crescendo verso l' imboccatura, dove si fa tanto grande quanto in un tubo orizzontale che viene premuto dall' acqua elevata all' altezza di quelli. Quindi è, che i tubi verticali e inclinati debbono verso il basso formarsi ugualmente resistenti che gli orizzontali. In un tubo verticale di 100 piedi di lunghezza la sua estremità inferiore della lunghezza di un piede soggiace ad una forza fenditrice $= (a - \frac{1}{2} l) r l =$ $(100 - \frac{1}{2}) r$, che è tanto grande quanto se questa porzione d' un piede stasse orizzontalmente sott' acqua alla profondità di

di 99 $\frac{1}{2}$ piedi . Di quì si scorge qual inutile dispendio sarebbe il formare siffatti tubi di ugual grossezza nella parte superiore che nella inferiore .

Problema XV.

52. Se l' acqua nel tubo predetto EB non è più stagnante , ma esce per l' orifizio PQ , ed in tanto ne viene sempre restituita altrettanta nel vaso HL ; si cerca lo sforzo esercitato da quest' acqua corrente per far crepare il canale .

Sol.

Dal Problema XI.° si ha la pressione dell' acqua in un punto qualunque M del tubo $= IG - \frac{IF \,.\, PQ^2}{MN^2} = a - (l - x)\,\text{sen.}\varphi - \frac{af^2}{m^2}$, facendo la luce $PQ = f$, e la sezione $MN = m$. Perlocchè ragionando come nella soluzione del Problema antecedente sarà la forza fendente nell' elemento superficiale $MmnN = [a - (l - x)\,\text{sen.}\varphi]\, r\,dx - \frac{af^2 r\,dx}{m^2}$, il cui integrale $[a - (l - \frac{1}{2}x)\,\text{sen.}\varphi] rx - \frac{af^2 rx}{m^2}$ dà una tal forza per la porzione indeterminata EN del tubo . Laonde preso $x = l$, la forza fendente per tutto il tubo si trova $= \left(a - \frac{1}{2}\, l\,\text{sen.}\varphi - \frac{af^2}{m^2}\right) rl$. Il che era ec.

Problema XVI.

53. Supposte circolari tutte le sezioni NT (Fig.ª 2.ª) del tubo ANPFB , da cui l' acqua esce per l' apertura PF, ve-

venendo sempre superiormente restituita: ritrovare lo sforzo che fa l'acqua per spaccare il tubo nell'ipotesi che il di lei moto sia già ridotto uniforme.

S o l.

Sia NT*tn* una zona evanescente dell' interna superficie del tubo, ed r il semidiametro della sezione circolare NT, il qual semidiametro sarà variabile, se tale sarà la larghezza del tubo. Preso pertanto $Nn = Cc = dy$, trovasi la detta zona $= 2\pi r dy$: e poichè qualunque suo punto N soggiace pel Cor. III.° del Probl. VII.° alla pressione $x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}$, dove $x = IL$, $z = NT$, $h = AB$, $f = PF$, $b = IG$; perciò la pressione della zona sarà $2\pi\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r dy$. Ma la pressione sta alla forza che tende a far crepare la zona come sta la circonferenza del cerchio al semidiametro: Dunque la forza fenditrice della zona sarà $= \left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r dy$. Perlocchè essendo r, z, y date per funzioni di x, l' integrazione di questa formola differenziale farà conoscere la forza schiantante per tutto il canale APFB. Il che era &c.

54. Se un tubo cilindrico retto viene segato con un piano che passa pel suo asse, la sezione fatta nel contorno solido del tubo è un rettangolo, di cui un lato è la lunghezza del tubo, l'altro lato è la sua grossezza: e questo rettangolo appunto è il piano o *la sezione di rottura* quando la forza dell' acqua fa crepare il canale. A tali rettangoli sono perciò proporzionali le saldezze o resistenze de' canali composti della stessa materia. Se ora tale suppongasi la saldezza della materia del tubo, che fatto un prisma di questa materia, il quale abbia ss per la sezione di rottura, il massimo peso che esso può sostenere senza schiantarsi sia $= P$: e se innoltre un tubo orizzontale di lunghezza l, di semidiame-

metro r, e di grossezza c viene premuto dall' acqua stagnante all' altezza a, e la sua saldezza s' agguaglia ad un peso F; si troverà F per l' analogia $ss : cl :: P : F$, che dà $F = \frac{clP}{ss}$. Ora chiamando γ il peso d'un piede cubico d'acqua, si è già dimostrato nel Probl. XII.° che lo sforzo dell' acqua tendente a far crepare il tubo è $= \gamma lar$; sarà dunque $\frac{clP}{ss} = F = \gamma lar$. Per la qual cosa sostituendo pel caso della zona elementare NntT la lunghezza infinitesima dy in luogo di l, e l' espressione $x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}$ in vece di a, cioè dell' altezza rappresentatrice della pressione contro la zona, nascerà $\gamma\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r dy = \frac{cPdy}{ss}$, vale a dire $\gamma\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r = \frac{cP}{ss}$.

54. Cor. I.° Da questa formola si ha la grossezza del canale $c = \frac{\gamma rss}{P}\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right)$; ed essendo $z = \pi r^2$, e però $r = \sqrt{\frac{z}{\pi}}$, risulta $c = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right)\frac{ss\sqrt{z}}{P}$. Dunque la grossezza del tubo per resistere alla forza spaccante dell' acqua debb' essere proporzionale al prodotto $\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right)\sqrt{z}$, cioè (supposto f picciolissimo in confronto di h) proporzionale al prodotto $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z}$. Da ciò si raccoglie, che se questo prodotto è costante il tubo potrà avere da per tutto la stessa grossezza, e il pericolo di fendersi sarà da per tutto lo stesso.

55.

55. Cor. II.° Se si fa $\left(x - b + \frac{h^2 b (z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2) z^2}\right)\sqrt{z} =$ ad una grandezza costante ω, onde risulti $[(x-b)(h^2-f^2)z^2 + h^2 b (z^2 - f^2)]\sqrt{z} - (h^2 - f^2) z^2 \omega$, ovvero $[(x-b)(h^2-f^2)z^2 + h^2 b(z^2-f^2)]^2 - (h^2-f^2)^2 z^3 \omega^2 = 0$; questa equazione farà conoscere qual relazione aver debba z ad x, affinchè il canale resista da per tutto ugualmente alla forza fendente dell' acqua. Se il lume è picciolissimo, l' equazione si cangia in $(xz^2 - bf^2)^2 - \omega^2 z^3 = 0$.

LET-

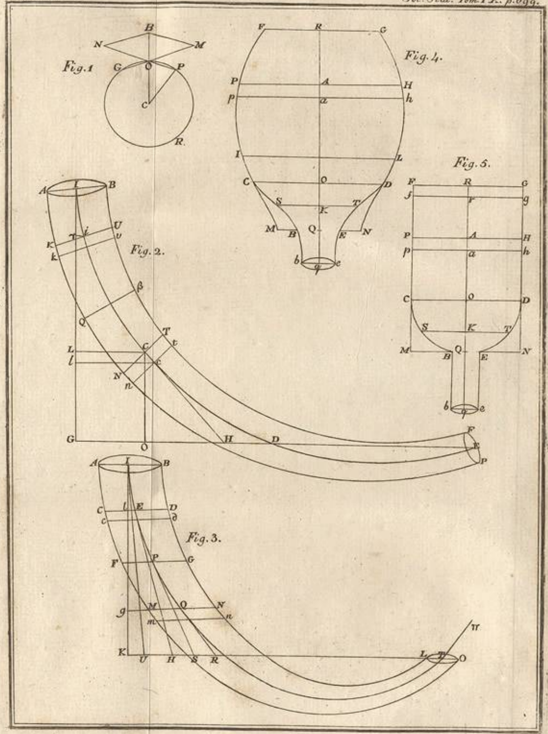


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5

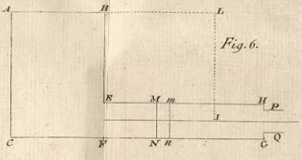
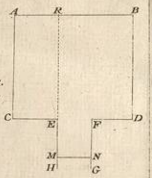


Fig. 6.

Fig. 7.



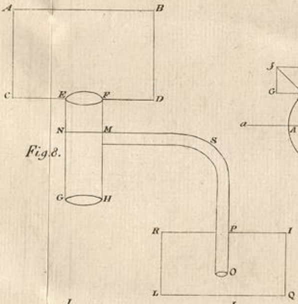


Fig. 8.

Fig. 9.

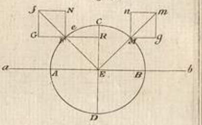


Fig. 10.