SULA

MISTERIOSA ALEMBERTIANA EQUAZIONE

$$(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$$

LETTERA SCRITTA LI 9. LUGLIO 1783.

DAL P. PIETRO COSSALI

AL MEDESIMO SIG. D'ALEMBERT

Ricevuta il dì 30. Luglio 1801.

Nell' esaminare le nuove dottrine analitiche del Sig. Abate Nicolai Prof., ed Accadem. di Padova un forte seducente incantesimo mi avvenne di sentire là, dove dell'autorità vostra egli si serve, o preclaro Signore; ed il peso gravissimo di essa, e l' apparente giustezza nel calcolare, ed inferire di lui guadagnato mi avrebbero, se le conseguenze dedotte $1=-1$, $\pm 1=\sqrt{-1}$ non mi avessero ritenuto, con presentarmi una troppo aperta ripugnanza. Il perchè io mi son veduto costretto a rimontare dall' esame delle illazioni all' esame del principio, cioe all' investigazione, al conoscimento intimo della natura dell' equazione $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$, cui voi il primo, o Signore, dimostraste nelle Mem. di Berlino per l' anno 1746., ed a varj usi poi conduceste nel tomo 3.° delle Miscell. di Torino pag. 383., e nel tomo 5.° degli eccellenti opuscoli vostri pag. 206. Voi mi perdonate, o prestantissimo Signore, se ardisco di accignermi a fare delle riflessioni su di una cosa vostra analitica, tranquillamente, e con plauso accolta dagli Analisti, quale teorema, misterioso sì, ma nulla meno prezioso. Io son di parere, che egli crescerà tanto più di pregio, quanto verrà in esso meno il mistestero. E sì, che io confido di chiaramente dimostrare che alcuno non ne comprende, e che per lo appunto allor quando veste apparenza di mistero, si riduce realmente alla massima semplicità, ed evidenza. Riuscendomi però l' intrapresa, a voi ne sarà originalmente dovuto il riuscimento; poichè tutta l'opera mia altro non sarà, che metter nel suo vero lume la base, su cui voi la equazion vostra fondaste, su di essa insistere, e con essa sempre all' occhio determinare dell' equazione medesima ne' varj casi i convenevoli modi, e significati. Nè si ricerca di più ad intercluder l' adito alle assurdità, che dalla equazion vostra vorrebbesi trarre; anzi a spogliarla d' ogni mistero, o paradosso mal conveniente a cosa matematica, o sia di scienza, che nella più pura evidenza ha la gloria sua. Io dunque vi presento, Chiarissimo Signore, una figlia sgombra, come spero, di qualunque oscurezza, assicurata dall' esser tradotta a patrocinio di deformi chimere, per ogni parte di splendore ammantata. Ella non può non riescir più aggradevole ad un Padre di lume ricco, e tutto amore di lume.

Voi o Signore nel luogo citato de' vostri opuscoli §. 40., esposta la vostra equazione $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$ avvertite su di essa così: *il ne s'ensuit pas de-là (ce qui est contraire en apparence aux principes reçus dans l'algèbre ordinaire) que* $1+h\sqrt{-1}=1-h\sqrt{-1}$, *à moins que* h *ne soit* $=0$; *espèce de paradoxe digne d'être observé. Ce n'est pas tout; de ce que* $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$, *il n'en faut pas conclure que* $(1+h\sqrt{-1})^{mn}=(1-h\sqrt{-1})^{mn}$, n *étant un nombre quelconque; à moins que ce ne soit un nombre entier, positif, ou négatif*. E §. 42. soggiugnete. *Au fond il n'est guères plus surprenant que* $(1+h\sqrt{-1})^m$ $=(1-h\sqrt{-1})^m$ *ne donne pas* $1+h\sqrt{-1}=1-h\sqrt{-1}$, *qu'il ne l'est que* $(+a)^2=(-a)^2$ *ne donne pas* $+a=-a$. *Cependant il y a encore ici cette différence remarquable entre les quantités réelles, et les imaginaires, que* $+a$, $-a$ *ne diffèrent que par le signe, au lieu que* $1+h\sqrt{-1}$

et

et $1-h\sqrt{-1}$ *différent par la quantité , si on peut dire que des quantités imaginaires différent ainsi .*

Il Prof. Nicolai nella 1.ª delle sue Mem. §. 38. sciogliendo la vostra equazione nella forma $(1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}} \times (1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}} = (1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}} \times (1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}$, ne deduce immediatamente $\frac{(1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}}{(1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}} = \frac{(1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}}{(1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}}$; e quinci, fatto $m = 2$, ne tira $\frac{1+h\sqrt{-1}}{1-h\sqrt{-1}} = \frac{1-h\sqrt{-1}}{1+h\sqrt{-1}}$; e, posto $h = -1+q$, ne cava $\frac{1+\sqrt{(1-q)}}{1-\sqrt{(1-q)}} = \frac{1-\sqrt{(1-q)}}{1+\sqrt{(1-q)}}$. Poscia §. 39., 40., 41. indirettamente pretende dimostrare $2\sqrt{(1-q)} = -2\sqrt{(1-q)} \ldots \frac{1}{\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1} \ldots \frac{1+\sqrt{(1-q)}}{1-\sqrt{(1-q)}} = \frac{1+\sqrt{(-1+q)}}{1-\sqrt{(-1+q)}}$, che importa $\pm 1 = \sqrt{-1}$: e tutto ciò, perchè queste equazioni non fanno, che portare all'equazione $(1+\sqrt{-1})^2 = (1-\sqrt{-1})^2$. Finalmente §. 44. afferma : *suggerirgli il suo nuovo metodo , che la vostra equazione deve sempre verificarsi in ogni valore di* m , *ma non poterlo per ora dimostrare direttamente* . Intanto però, applicando all' equazion vostra il metodo Newtoniano per la elevazion del binomio alla podestà m, ne cava per necessaria conseguenza $+\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, $1+\sqrt{-1} = 1-\sqrt{-1}$. Ecco un cumulo di misteri, e di paradossi . Ma il mistero, il paradosso non si confà punto con la semplicissima natura, e coll' evidenza dell' analisi, ed io soglio , siami permesso il dirlo , riguardar tai vocaboli per bei colori della ripugnanza, e per indizj certi di qualche deviazione da' principj, ed imperfezione ne' metodi . La ripugnanza delle sopra riferite

equa-

equazioni dell' Ab. Nicolai è aperta, è solenne, è la massima, che immaginar si possa. Per altra parte non si sa scoprire nel calcolo, con cui dedotte sono, materiale errore. Dunque il difetto deve stare in dar alla formola $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ un senso, e farne un' applicazione ad essa non conveniente. Ecco il bisogno in cui creduto mi sono d' investigarne a fondo la natura, salendo alla sua origine, per quindi discendere a svilupparne ogni mistero, sciogliere qualunque paradosso, separare la verità dalla ripugnanza, e rompere lo specioso passaggio da quella a questa. Dividerò a maggior chiarezza le mie considerazioni in due articoli, il primo de' quali verserà sulla base, e sulla original forma dell' equazion $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$; il secondo su questa derivata forma propriamente.

ARTICOLO I.

L' Origine della equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ sta per le dimostrazioni vostre nelle due seguenti equazioni

$$(1^a)\quad (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA + \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$

$$(2^a)\quad (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA - \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$

Fatto in queste $\text{sen}.mA = 0$, e conseguentemente $\cos.mA = \pm 1$, si riducon esse alle due

$$(3^a)\quad (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA = \pm 1$$

$$(4^a)\quad (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA = \pm 1$$

e quinci, per la evidente equazione $\pm 1 = \pm 1$, ne viene

$$(5^a)\quad (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$$

Da questa si deduce

$$(\cos.A)^m\left(1+\frac{\text{sen}.A}{\cos.A}\sqrt{-1}\right)^m = (\cos.A)^m\left(1-\frac{\text{sen}.A}{\cos.A}\sqrt{-1}\right)^m,$$

donde, dividendo per $(\cos.A)^m$, e ponendo $\frac{\text{sen}.A}{\cos.A} = \text{tang}.A = h$, si ottiene

$$(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$$

L'equazione (5^a) $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$

quel-

quella si è che io chiamo la *original forma* della $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$. La ipotesi sen. $mA=0$, cos. $mA=\pm 1$, su cui è fondata, la denomino l' *ipotesi fondamentale*. E siccome due combinazioni comprende, appellerò *combinazion* 1.ª quella di sen. $mA=0$, cos. $mA=1$; e *combinazion* 2.ª quella di sen. $mA=0$, cos. $mA=-1$. E dirò poi *equazion causale*, e *rappresentata* la semplicissima equazione $\pm 1 = \pm 1$, che è la causa dell' inferire l' equazione $(\text{cos.}\,A+\text{sen.}\,A\sqrt{-1})^m = (\text{cos.}\,A-\text{sen.}\,A\sqrt{-1})^m$, e cui questa in fondo con aspetto sì composto rappresenta, e nella quale deve in ultimo cadere. Poste tali denominazioni io procedo ai teoremi, che seguono.

Teorema I. La equazione $(\text{cos.}\,A+\text{sen.}\,A\sqrt{-1})^m = (\text{cos.}\,A-\text{sen.}\,A\sqrt{-1})^m$ è vera senza limitazione alcuna dell' esponente m, così che può esser esso qualunque numero, intero, fratto, positivo, negativo; purchè però tale sia l' arco A, che sussista la fondamentale ipotesi sen. $mA=0$, cos. $mA=\pm 1$: cioè purchè per queste due condizioni venga determinata la grandezza dell' arco A, e quinci il suo seno, ed il suo coseno.

Di fatto l' ipotesi fondamentale sen. $mA=0$, cos. $mA=\pm 1$ non addomanda, se non che nella 1.ª combinazione di sen. $mA=0$, cos. $mA=1$, dinotata per π la circonferenza, ed indicato per N un termine qualunque della serie naturale 0. 1. 2. 3. 4. 5. . . . . . sia $mA=N\pi$; e nella 2.ª combinazione di sen. $mA=0$, cos. $mA=-1$, sia $mA=(2N+1).\frac{\pi}{2}$. Ma queste due equazioni $mA=N\pi$, $mA=(2N+1).\frac{\pi}{2}$ lascian libero il valore di m, e sotto qualunque valore, che ad arbitrio gli si attribuisca, possono adempiersi, e verificarsi; dunque l'equazion $(\text{cos.}\,A+\text{sen.}\,A\sqrt{-1})^m = (\text{cos.}\,A-\text{sen.}\,A\sqrt{-1})^m$ per qualunque valore di m indistintamente può esser vera, purchè però convenientemente giusta la fondamental ipotesi, o sia per l' una, o per l' altra

tra delle due equazioni $mA = N\pi$, $mA = (2N+1)\frac{\pi}{2}$ che chiamerò rispettivamente *formole determinative di A* 1.ª e 2.ª, giusta le due combinazioni 1.ª e 2.ª onde nascono, si determini la grandezza di esso arco A.

Teorema II. Osservata la legge esposta nell' antecedente teorema, il sen. A, ed il cos. A prenderanno sempre nell' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$ valori tali, sebben ne' diversi casi diversi, che la equazione stessa generalmente, in qualunque caso, o supposto di m, rappresenterà la semplicissima equazione $\pm 1 = \pm 1$, ed all' ultimo in questa costantemente ricaderà.

Ciò facilmente si raccoglie dalla serie del calcolo, onde l'equazion $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$ ha sua generazione. Poichè, avverata la ipotesi fondamentale sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$, sarà $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = \pm 1$, e parimente $(\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = \pm 1$; conseguentemente l' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$ altro in fondo non sarà che l' equazione $\pm 1 = \pm 1$, alla quale, qualunque aspetto assumer possa, dovrà in ultimo ridursi. Ed il conseguimento o nò di tal riduzione sarà il criterio della convenienza, o nò tra i valori assegnati ad m, ed alle quantità circolari sen. A, cos. A.

Con la scorta di questi due teoremi non si può errare; nè più temere d' incontrare oscurità, ed immergersi in misteri, o paradossi nella ricerca degli accidenti di qualsivoglia caso dell'equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$, o degli effetti di un qualunque operare intorno alla medesima. Sia dunque

Quesito I.° Assegnare gli accidenti dell' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$, supposto m numero intero positivo?

Si prenda l' ipotesi fondamentale sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$, e primieramente si metta in uso la combinazion 1.ª,

sen.

sen. $mA = 0$, cos. $mA = 1$, la qual somministra la formola determinativa $mA = N\pi$. Quindi ne viene

$$A = \frac{N}{m} . \pi \ldots \text{sen.} A = \text{sen.} \frac{N}{m} . \pi \ldots \cos. A = \cos. \frac{N}{m} . \pi$$

In luogo di N si può sostituire un qualunque termine della serie naturale 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . Ma è da riflettere, che prendendo $N = m$ si avrà $A = \pi$, sen. $A = 0$, cos. $A = 1$, cioè non altro seno, e non altro coseno, che quando si prese da principio $N = 0$, e si ebbe $A = 0$; e che proseguendo ordinatamente a prendere $N = m + 1$, $N = m + 2$, $N = m + 3$ . . . . . risulterebbe $A = \pi + \frac{\pi}{m}$, $A = \pi + \frac{2\pi}{m}$, $A = \pi + \frac{3\pi}{m}$ . . . . i quali archi hanno i seni, e coseni medesimi, che gli archi $\frac{\pi}{m}$, $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{3\pi}{m}$ . . . . ottenuti già col prendere $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ . . . . . Tanti dunque, nè più, nè meno saranno gli archi A diversi da collocare nell' equazione $(\cos. A + \text{sen.} A \sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen.} A \sqrt{-1})^m$, quanti nella serie 0. 1. 2. 3. 4. . . . . i termini sino al numero $m - 1$, che sono in numero m. Ed altrettanti perciò saranno gli aspetti diversi, che l' equazione vestirà. Trasferendo questi riflessi sulla combinazion 2.ª si vedrà facilmente, che per essa del pari conseguiremo nell' equazione stessa un numero m di aspetti diversi a cagione di un numero m di archi differenti determinati per la determinativa formola $mA = (2N + 1) . \frac{\pi}{2}$. Dunque

Teorema III. Nel caso di m numero intero positivo l' equazione $(\cos. A + \text{sen.} A \sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen.} A \sqrt{-1})^m$ veste un numero $2m$ di aspetti diversi, i quali però tutti vanno a finire in $\pm 1 = \pm 1$: cioè in $1 = 1$ gli aspetti numero m provenienti dalla combinazion 1.ª, ed in $-1 = -1$ quelli parimenti in numero m, provenienti dalla combinazion 2.ª.

Ecco a maggior comodità la risoluzion del quesito in tavola.

Com-

Combinazion 1.ª

$$\text{sen}.mA = 0 \quad \ldots \quad \cos.mA = 1$$

Formola determinativa di A

$$mA = N.\pi \ \ldots\ldots \text{ e quindi } A = \frac{N}{m}.\pi$$

Valori diversi di A, od archi diversi

$$0,\ \frac{\pi}{m},\ \frac{2\pi}{m},\ \frac{3\pi}{m},\ \frac{4\pi}{m},\ \frac{5\pi}{m} \ \ldots\ldots\ldots \frac{(m-1)\pi}{m}$$

Combinazion 2.ª

$$\text{sen}.mA = 0 \ \ldots\ldots \cos.mA = -1$$

Formola determinativa di A

$$mA = (2N+1).\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots \text{ e quinci } A = \frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}$$

Valori diversi di A, od archi diversi

$$\frac{1}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{9}{m}.\frac{\pi}{2} \ \ldots\ldots \frac{2(m-1)+1}{m}.\frac{\pi}{2}$$

Esempio 1.° Sia $m = 2$ si avrà

Per la combinazion 1.ª $A = 0$, $A = \frac{\pi}{2}$; sen.$0 = 0$, cos.$0 = 1$; sen.$\frac{\pi}{2} = 0$, cos.$\frac{\pi}{2} = -$: onde i due aspetti, che veste l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, sono $(1 + 0\sqrt{-1})^2 = (1 - 0\sqrt{-1})^2 \ldots (-1 + 0\sqrt{-1})^2 = (-1 - 0\sqrt{-1})^2$, che si riducono ad $(1)^2 = (1)^2 \ldots\ldots (-1)^2 = (-1)^2$, ed ambedue cadono in $1 = 1$.

Per la combinazion 2.ª $A = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, $A = \frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$; sen.$\frac{\pi}{4} = 1$, cos.$\frac{\pi}{4} = 0$; sen.$\frac{3\pi}{4} = -1$, cos.$\frac{3\pi}{4} = 0$: e quindi i due aspetti nella equazione indotti $(0 + 1\sqrt{-1})^2 = (0 - 1\sqrt{-1})^2 \ldots (0 - 1\sqrt{-1})^2 = (0 + 1\sqrt{-1})^2$, che si riducono a $(1\sqrt{-1})^2 = (-1\sqrt{-1})^2 \ldots (-1\sqrt{-1})^2 = (1\sqrt{-1})^2$, ambedue le quali equazioni, fatti i quadrati giusta le vere leggi degli immaginarj, cadono in $-1 = -1$.

Esem-

Esempio 2.° Supponiamo $m = 1$.

Per la combinazion 1.ª sarà $A = 0$, sen.$A = 0$, cos.$A = 1$, e perciò l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ prenderà l'aspetto $(1 + 0\sqrt{-1})^1 = (1 - 0\sqrt{-1})^1$, che subito cade in $1 = 1$.

Per la combinazion 2.ª risulta $A = \frac{\pi}{2}$, sen.$A = 0$, cos.$A = -1$, così che l' equazione assume l' aspetto $(-1 + 0\sqrt{-1})^1 = (-1 - 0\sqrt{-1})^1$, che immediatamente finir vedesi in $-1 = -1$.

Teorema IV. Si rende dall' analisi di questi due esempj manifesto, ed irrefragabilmente provato, che le due equazioni $(1 + \sqrt{-1})^2 = (1 - \sqrt{-1})^2$, $1 + \sqrt{-1} = 1 - \sqrt{-1}$ non sono per verun modo comprese nell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, e che le sono affatto estranee, e sommamente ripugnanti, quanto ripugna, che l' arco stesso abbia il suo seno, ed il suo coseno ambedue $= 1$.

Esempio 3.° A maggior lume del modo, onde ad onta della diversità degli aspetti, l' equazione ricade sempre nella semplicissima equazione $\pm 1 = \pm 1$, aggiungo il terzo esempio, facendo $m = 3$.

Per la combinazion 1.ª si trova

$$A = 0, \quad A = \frac{\pi}{3} = 120°, \quad A = \frac{2\pi}{3} = 240°$$

$$\text{sen}.0 = 0, \quad \text{sen}.120° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}.240° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos.0 = 1, \quad \cos.120° = \frac{-1}{2}, \quad \cos.240° = \frac{-1}{2}$$

E quindi i tre diversi aspetti dell' equazione

$$(1 + 0\sqrt{-1})^3 = (1 - 0\sqrt{-1})^3 \ldots \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 \ldots \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3$$

Per la combinazion 2.ª

$A =$

$$A = \frac{\pi}{6} = 60^\circ \ldots A = \frac{3\pi}{6} = 180^\circ \ldots A = \frac{5\pi}{6} = 300^\circ$$

$$\text{sen.}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots \text{sen.}180^\circ = 0 \quad \ldots \text{sen.}300^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos.60^\circ = \frac{1}{2} \ldots \cos.180 = -1 \ldots \cos.300^\circ = \frac{1}{2}$$

e conseguentemente i tre diversi aspetti dell' equazione

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 \ldots (-1 + 0\sqrt{-1})^3 =$$

$$(-1 - 0\sqrt{-1})^3 \ldots \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3.$$

Il primo de' tre nati dalla combinazion 1.ª cade patentemente in $1 = 1$, ed il secondo dei tre nati dalla combinazion 2.ª patentemente in $-1 = -1$; ma fatti i cubi si ritroverà, che in $1 = 1$ cadono similmente gli altri due della combinazion 1.ª, ed in $-1 = -1$ gli altri due eziandio della 2.ª; ed il calcolo insegnerà, come si elidano tutte le diversità, si che in fine uno stesso sia il risultato dei tre primi, ed un solo del pari il risultato de' tre secondi.

Teorema V. Li valori diversi dei binomj $\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1}$ nell'equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1})^m$, sono le radici diverse dell' equazione $x^m - 1 = 0$, ossia le diverse radici m$^{\text{esime}}$ dell' unità positiva, quelli tratti dalla combinazione 1.ª; e sono le diverse radici dell' equazione $x^m + 1 = 0$, ossia le radici diverse m$^{\text{esime}}$ dell' unità negativa, quelli tratti dalla 2.ª combinazione. Gli esempj mettono sott' occhio la verità del teorema. Ma ne è in pronto la ragione, o dimostrazion generale. Dovendo i diversi valori dei due binomj $\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1}$, alla potenza m elevati, produrre tutti $+1$, se di quelli si parli, che per la 1.ª combinazion si determinano; e tutti produrre -1 gli altri determinati per la 2.ª combinazione: dunque i primi esser non possono, che le diverse radici m$^{\text{esime}}$ di $+1$, o sia le diververse radici dell' equazione $x^m - 1 = 0$; nè altro i secondi, che le diverse radici m$^{\text{esime}}$ di -1, o sia le radici dell' equazione $x^m + 1 = 0$.

Quesito II. Esporre l' avvenimento dell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ qualora m sia un numero intero negativo?

Sostituendo $-m$ ad m, avremo

$$\frac{1}{(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m} = \frac{1}{(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m},$$

e quindi $(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$; donde chiaramente apparisce, che questo caso cade in quello di m positivo; poichè la permutazione da destra a sinistra, e reciprocamente, dei due membri non induce cangiamento veruno intrinseco all' equazione.

Quesito III. Esaminare il caso in cui m sia fratto $= \frac{1}{t}$? Ponendo $\frac{1}{t}$ in luogo di m nella formola determinativa dalla 1.^{a} combinazione tratta, $mA = N\pi$, si ha $\frac{1}{t}A = N\pi$, e quindi $A = tN.\pi$, donde, fatto $N = 0$, risulta l' arco $A = 0$; e, preso per N un qualunque numero intero, risulta A un multiplo della circonferenza π. Per la qual cosa avendo tanto l' arco zero, quanto un multiplo qualunque della circonferenza il seno $= 0$, ed il coseno $= 1$, dalla 1.^{a} combinazione non ne seguirà nell'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$ $= (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$, che l' unica forma $(1 + 0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$ $= (1 - 0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$, che da se ristrignesi ad $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$. Questa equazione è moltiplice, e comprende tante equazioni, quante sono le diverse radici t$^{\text{esime}}$ dell' unità. Ma siccome pel teorema II. l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m =$ $(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ deve, in forza di sua origine, generalmente, ed in qualunque supposto di m, rappresentare l'equazione $1 = 1$, ed in questa cadere; così tra le numero t equazioni diverse comprese nella $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$, non vi ha propriamente che la più semplice $1 = 1$ formata per la radice razionale, reale, positiva dell' unità, di cui sempre, sia t dispari, sia pari, si debbe tener quì conto, sebben nel caso di t pari vi sia anche l'altra razionale, e reale $-1 = -1$. Del resto, quanto alla virtù comprensiva dell' equazione $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$ è chiaro non estendersi essa, che al numero t di equazioni, che formar si possono, prendendo in ambedue i membri una stessa delle numero t radici t^{esime} dell' unità. Ed anderebbe ben errato chi per confermar le accuse del Nicolai contro gli usati principj di Algebra, e per torta opinione di rilevarne la sublimità con circondarla di misteri, presa nel primo membro una radice t^{esima} dell' unità, la uguagliasse ad altra diversa presa nel secondo: il paradosso, lungi dall' essere effetto dell' equazione, non sarebbe che colpa d' irragionevolissimo arbitrio, e solenne capriccio.

Passando ad applicare all'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$ la formola determinativa di A propria della combinazion 2.ª, $mA = \frac{1}{t} A = (2N + 1) . \frac{\pi}{2}$: venendone $A = t(2N + 1) . \frac{\pi}{2}$, bisogna distinguere tre casi: di t dispari, di t pari dispari, di t pari pari.

Nel 1.° caso, essendo il prodotto $t(2N + 1)$ dei due numeri dispari, t e $2N + 1$, necessariamente numero dispari, se si rappresenti per $2x + 1$, ne segue $A = \frac{2x+1}{2} . \pi =$

$x\pi$

$x\pi + \frac{1}{2}\pi$, che non ci dà per sen.A, se non che sen. $\frac{1}{2}\pi = 0$, e per cos.A non altro che cos. $\frac{1}{2}\pi = -1$; il perchè l'equazione diviene $(-1+0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}} = (-1-0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$, vale dire $(-1)^{\frac{1}{t}} = (-1)^{\frac{1}{t}}$, la quale, per esser t dispari, con prender la prima, o più semplice delle t^{esime} radici di -1, trovasi coincider, come deve, con $-1 = -1$.

Nel 2.° caso, rappresentando t per $2u$, con intender che u sia un numero dispari, la formola determinativa porge $A = 2u(2N+1)\frac{\pi}{2} = u(2N+1)\pi$, dove essendo $u(2N+1)$ un multiplo della circonferenza intera π, scorgesi evidentemente non risultarne, che sen.$A = 0$, cos.$A = 1$, e quinci $(1+0\sqrt{-1})^{\frac{1}{2u}} = (1-0\sqrt{-1})^{\frac{1}{2u}}$, o sia $(1)^{\frac{1}{2u}} = (1)^{\frac{1}{2u}}$, la quale comprende due equazioni razionali, e reali, cioè del pari $1 = 1$, che $-1 = -1$; ma però a questa sola si deve qui aver riguardo, come alla sola appartenente alla combinazion 2.^{a}.

Nel 3.° caso, significando per $4v$ un numero qualunque pari pari, avremo $A = 4v(2N+1)\frac{\pi}{2} = 2v(2N+1)\pi$, tornando, come si vede, un multiplo dell' intera circonferenza π, con la sola, nulla importante, diversità, d' esser qui un multiplo pari, in luogo, che di sopra era un multiplo dispari. Non avremo dunque di nuovo, che sen.$A = 0$, cos.$A = 1$, e conseguentemente $(1+0\sqrt{-1})^{\frac{1}{4v}} = (1-0\sqrt{-1})^{\frac{1}{4v}}$, equazione in simil modo, che la superiore del caso 2.° comprendente tanto $1 = 1$, quanto $-1 = -1$, ma in ragione della proprietà della combinazion 2.^{a} non rappresentante, che $-1 = -1$.

 Ab-

Abbiamo dunque, nel supposto di m fratto $= \frac{1}{t}$, sempre, sia t pari, o dispari, un' equazione molteplice, che è $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$ per la combinazion 1.^{a}, ed $(-1)^{\frac{1}{t}} = (-1)^{\frac{1}{t}}$, ovvero $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$ per la combinazione 2.^{a}, giusta che t è dispari, o pari; ma la cui molteplice virtù siamo obbligati a non valutare, restringendoci a non considerar, che una delle molte equazioni comprese, cioè la $1 = 1$ nella 1.^{a} combinazione, e la $-1 = -1$ nella combinazion 2.^{a} in ambedue i casi di t dispari, o di t pari. Nè recar dee maraviglia, che una equazione, di virtù in se molteplice, venga per una particolare ipotesi, qual' è nel proposito nostro la fondamentale ipotesi sen.$\frac{1}{t} A = 0$, determinata a rappresentare non più, che una equazione.

Teorema VI. Nel supposto di m fratto, ed $= \frac{1}{t}$, i binomj $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$ dell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ non ricevono per ciascheduna delle due combinazioni, che un valor solo, ed esso reale, e razionale; laddove, essendo m numero intero maggiore dell' unità, ne ricevono molti, due al più de' quali reali, ± 1, e gli altri immaginarj. Perciò vi ha una differenza tra il caso di m intero, e maggiore dell' unità, ed il caso di m fratto $= \frac{1}{t}$. Siccome però il numero de' valori immaginarj diminuisce a misura, che l' intero numero m divien minore, e cessano affatto essi valori immaginarj, facendosi $m = 1$, non rimanendo ai due binomj, che i due valori reali, $+1$, -1, l' uno nell' una, l' altro nell' altra combinazione; così vi ha in ciò una gradazione, e la differenza non induce punto di paradosso: il che si renderà più chiaro pel teorema, che vo a soggiugnere.

Teo-

Teorema VII. Si è veduto nel teorema V, che i valori diversi dei binomj $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$, dell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, nel supposto di m intero, sono nella 1.ª combinazione le diverse radici dell' equazione $x^m - 1 = 0$; e le radici diverse dell' equazione $x^m + 1 = 0$ nella 2.ª combinazione: facciamo in queste due equazioni $m = \frac{1}{t}$, ed avremo, $x^{\frac{1}{t}} - 1 = 0$, $x^{\frac{1}{t}} + 1 = 0$, donde $x = (1)^t$, $x = (-1)^t$. Or da ciascuna di queste due equazioni non si ha, per qualunque caso di t, che un valore; e distintamente, dalla prima per ogni caso di t dispari, o pari, non vien prodotto che $x = 1$, qual appunto si è trovato essere per ogni caso di t dispari, o pari nella frazione $\frac{1}{t}$ il valore dei binomj $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$ nella combinazion 1.ª; e dalla equazion seconda $x = (-1)^t$ nasce $x = -1$ nel caso di t dispari, ed $x = 1$ nel caso di t pari, secondo per lo appunto, che nei due casi risulta il valor dei due binomj per la combinazion 2.ª Dunque la pluralità dei valori dei due binomj nel supposto di m intero, maggior dell' unità, e la unicità nel supposto di $m = 1$, od $= \frac{1}{t}$, tanto è lungi, che si contrastino tra loro, ed involgano alcuna difficoltà, o paradosso veruno, che si richiaman anzi ad un comune principio, cioè alle due equazioni $x^m - 1 = 0$, $x^m + 1 = 0$, e la differenza si dimostra nascer tutta dalla differenza gradualmente da m intero maggior dell' unità ad $m = 1$, e quinci ad $m = \frac{1}{t}$.

Quesito IV. Svolgere in serie l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, ed assegnare il valore della parte reale di ciaschedun membro, ed il valore della parte immaginaria, o a meglio dire della somma delle quantità moltiplicate per $\sqrt{-1}$?

Se-

Segnando in grazia di brevità per $a, b, c, d, e, f \ldots$ ordinatamente i coefficienti $\frac{m}{1}$, $\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ ..... si ha $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m =$ $\cos.^m A + a\cos.^{m-1}A\,\text{sen}.A\sqrt{-1} - b\cos.^{m-2}A\,\text{sen}.^2 A - c\cos.^{m-3}A\,\text{sen}.^3 A\sqrt{-1} + d\cos.^{m-4}A\,\text{sen}.^4 A + e\cos.^{m-5}A\,\text{sen}.^5 A\sqrt{-1} - \ldots$ dove già si manifesta all' occhio la legge progressiva di due termini alternativamente positivi, e negativi. E separando la parte reale dalla parte immaginaria ne viene $\cos.^m A - b\cos^{m-2}A\,\text{sen}.^2 A + d\cos.^{m-4}A\,\text{sen}.^4 A - f\cos^{m-6}A\,\text{sen}.^6 A + h\cos^{m-8}A\,\text{sen}.^8 A - k\cos.^{m-10}A\,\text{sen}.^{10}A + \ldots\ldots\ldots + (a\cos.^{m-1}A\,\text{sen}.A - c\cos.^{m-3}A\,\text{sen}.^3 A + e\cos.^{m-5}A\,\text{sen}^5 A - g\cos^{m-7}A\,\text{sen}.^7 A + i\cos.^{m-9}A\,\text{sen}.^9 A - l\cos.^{m-11}A\,\text{sen}.^{11}A + \ldots)\sqrt{-1}$ con alternazione di segni di termine in termine, tanto nella reale parte, quanto nell' immaginaria.

Se la parte reale si rappresenti tutta per P, e la immaginaria tutta per $Q\sqrt{-1}$, si avrà $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = P + Q\sqrt{-1}$ .... e quinci $(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = P - Q\sqrt{-1}$. A determinare il valore della parte reale P, e quello della somma Q delle quantità moltiplicate per $\sqrt{-1}$, basta richiamar a memoria, che, per l' ipotesi fondamentale, alla verità dell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ dev' esser $A = \frac{N}{m}\pi$ pella 1.ª combinazione, od $= \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$ pella 2.ª. E che determinato l' arco A per la prima formola, l' equazione deve sempre in fondo rappresentare la semplice equazione $1 = 1$, e conseguentemente ciascun de' membri essere in sostanza non altro che 1; determinato poi l' arco A per la formola seconda, l' equazione stessa deve sempre in ultimo presentare $-1 = -1$, e per conseguenza ciascun dei due membri valere -1. Quindi siamo condotti a stabilire.

Teorema VIII. Distinguendo per P la parte reale della po-

potenza $(\cos. A \pm \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$, preso $A = \frac{N}{m}\pi$, e per P^1 essa parte, preso $A = \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$; e dinotando per $\pm Q$ la parte moltiplicata col radicale immaginario nel primo caso, e per $\pm Q^1$ essa parte nel caso secondo: è sempre

$P = 1 \ldots P^1 = -1 \ldots \pm Q = 0 \ldots \pm Q^1 = 0$

E spiegatamente

$$P = \cos.^m \frac{N}{m}\pi - \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \cos.^{m-2} \frac{N}{m}\pi \ \text{sen}.^2 \frac{N}{m}\pi + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} \cos.^{m-4} \frac{N}{m}\pi \ \text{sen}.^4 \frac{N}{m}\pi - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} \cos.^{m-6} \frac{N}{m}\pi \ \text{sen}.^6 \frac{N}{m}\pi + \ldots\ldots = 1$$

$$P^1 = \cos.^m \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \cos.^{m-2} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}.^2 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \cos.^{m-4} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}.^4 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} \cos.^{m-6} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}.^6 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$$

$$\pm Q = \pm \left(m \cos.^{m-1} \frac{N}{m}\pi \ \text{sen}. \frac{N}{m}\pi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} \cos.^{m-3} \frac{N}{m}\pi \ \text{sen}.^3 \frac{N}{m}\pi + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \cos.^{m-5} \frac{N}{m}\pi \ \text{sen}.^5 \frac{N}{m}\pi - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} \cos.^{m-7} \frac{N}{m}\pi \ \text{sen}.^7 \frac{N}{m}\pi + \ldots\ldots \right) = 0$$

$$\pm Q^1 = \pm \left(m \cos.^{m-1} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}. \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} \cos.^{m-3} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}.^3 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} + \right.$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cos.^{m-5}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}.\,\text{sen.}^{5}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}-$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\cos.^{m-7}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}.\,\text{sen.}^{7}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\,)=0.$$

Esempio. Sia $m = 3$; si ha

$$P=\cos.^{3}\frac{N}{m}\pi-3\cos.\frac{N}{3}\pi\,\text{sen.}^{2}\frac{N}{3}\pi$$

e dando ad N successivamente i valori 0, 1, 2

$$P=\cos.^{3}\frac{0}{3}\pi-3\cos.\frac{0}{3}\pi\,\text{sen.}^{2}\frac{0}{3}\pi=1^{3}=1$$

$$P=\cos.^{3}\frac{1}{3}\pi-3\cos.\frac{1}{3}\pi\,\text{sen.}^{2}\frac{1}{3}\pi=\left(\frac{-1}{2}\right)^{3}-3.\frac{-1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}$$

$$=\frac{-1}{8}+\frac{9}{8}=1$$

$$P=\cos.\frac{2}{3}\pi-3\cos.\frac{2}{3}\pi\,\text{sen.}^{2}\frac{2}{3}\pi=\left(\frac{-1}{2}\right)^{3}-3.\frac{-1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}$$

$$=\frac{-1}{8}+\frac{9}{8}=1$$

$$P^{1}=\cos.^{3}\frac{2N+1}{3}.\frac{\pi}{2}-3\cos.\frac{2N+1}{3}.\frac{\pi}{2}.\,\text{sen.}^{2}\frac{2N+1}{3}.\frac{\pi}{2}$$

e dando ad N successivamente i valori 0, 1, 2

$$P^{1}=\cos.^{3}\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}-3\cos.\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}\,\text{sen.}^{2}\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-3.\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{9}{8}=-1$$

$$P^{1}=\cos.^{3}\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2}-3\cos.\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2}\,\text{sen.}^{2}\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2}=(-1)^{3}=-1$$

$$P^{1}=\cos.^{3}\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2}-3\cos.\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2}\,\text{sen.}^{2}\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-3.\frac{1}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^{2}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{9}{8}=-1$$

$$Q = 3\cos.^2\frac{N}{3}\pi\ \text{sen.}\frac{N}{3}\pi - \text{sen.}^3\frac{N}{3}\pi$$

e dando ad N successivamente i valori o , I , 2

$$Q = 3\cos.^2\frac{o}{3}\pi\ \text{sen.}\frac{o}{3}\pi - \text{sen.}^3\frac{o}{3}\pi = o$$

$$Q = 3\cos.^2\frac{I}{3}\pi\,\text{sen.}\frac{I}{3}\pi - \text{sen.}^3\frac{I}{3}\pi = 3\left(\frac{-I}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = o$$

$$Q = 3\cos.^2\frac{2}{3}\pi\,\text{sen.}\frac{2}{3}\pi - \text{sen.}^3\frac{2}{3}\pi = 3\left(\frac{-I}{2}\right)^2.\frac{-\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} = o$$

$$Q^I = 3\cos.^2\frac{2N+I}{3}.\frac{\pi}{2}.\text{sen.}\frac{2N+I}{3}.\frac{\pi}{2} - \text{sen.}^3\frac{2N+I}{3}.\frac{\pi}{2}$$

e dando ad N successivamente i valori o , I , 2

$$Q^I = 3\cos.^2\frac{I}{3}.\frac{\pi}{2}\ \text{sen.}\frac{I}{3}.\frac{\pi}{2} - \text{sen}^3\frac{I}{3}.\frac{\pi}{2} = 3\left(\frac{I}{2}\right)^2.\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$- \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = o$$

$$Q^I = 3\cos.^2\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2}\ \text{sen.}\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2} - \text{sen.}^3\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2} = o$$

$$Q^I = 3\cos.^2\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2}\ \text{sen.}\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2} - \text{sen.}^3\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2} = 3\left(\frac{I}{2}\right)^2.\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$- \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{-3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} = o$$

Ecco visibilmente comprovata la verità del teorema.

Quesito 5.° Indagare se, ed a quali condizioni sia lecito dall'equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-I})^m = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-I})^m$ inferire quest' altra equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-I})^{m^n} = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-I})^{m^n}$?

L'equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-I})^m = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-I})^{\mu}$ fu dedotta dalle due

$$(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA + \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$
$$(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA - \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$

per mezzo dell' ipotesi da me chiamata fondamentale, $\text{sen}.mA = 0$

Si sostituisca nelle due equazioni m'' in luogo di m, per lo che diverranno

$$(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = \cos.m''A + \text{sen}.m''A\sqrt{-1}$$
$$(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = \cos.m''A - \text{sen}.m''A\sqrt{-1}$$

Ponendo $\text{sen}.m''A = 0$, ipotesi che chiamerò *fondamentale ipotesi* 2.ª si avrà

$$(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''}$$

Acciocchè dall'essere vera l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ si possa inferire quest' altra $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''}$, bisognerà, che si verifichino insieme, il che non può essere, se non si verificano insieme le due ipotesi fondamentali. Per verificarsi $\text{sen}.mA = 0$ fa d'uopo, che sia $mA = N\pi$ secondo la 1.ª combinazione, ovvero $= (2N+1)\frac{\pi}{2}$ giusta la combinazion 2.ª; ed affinchè si verifichi insieme la condizione $\text{sen}.m''A = 0$ dell' ipotesi fondamentale 2.ª, sarà mestieri, che distinte similmente in essa la combinazion 1.ª di $\text{sen}.m''A = 0$, $\cos.m''A = 1$, e la combinazione 2.ª di $\text{sen}.m''A = 0$, $\cos.m''A = -1$, e dinotato per H un altro numero della serie 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6 .... sia ad un tempo $m''A = H\pi$ giusta la 1.ª combinazione, ovvero $m''A = (2H+1)\frac{\pi}{2}$ giusta la combinazion 2.ª, intendendo per A nelle due ipotesi un medesimo arco. Componiamo le due ipotesi successivamente giusta la 1.ª e giusta la 2.ª combinazion di ciascheduna.

Composizion 1.ª Supponiamo dunque in primo luogo $mA = N\pi$, $m''A = H\pi$; ne verrà quinci $A = \frac{N}{m}\pi = \frac{H}{m''}$

$\frac{H}{m^n}\pi$, onde $\frac{Nm^n}{m}$, ossia $Nm^{n-1} = H$. Da questa formola che chiamerò la *formola definitiva della* 1.ª *composizione* apparisce

1.° Che la composizione delle due ipotesi è sempre possibile, se, essendo m numero intero positivo, sia pur n numero intero positivo; poichè sempre in tali supposti Nm^{n-1} darà numero intero positivo, qual si vuol H.

2.° Se stando m numero intero positivo, n sia intero ma negativo, cioè se in luogo di n abbiasi $-n$, in tal caso il congiungimento delle due ipotesi fondamentali sarà pur possibile, ma N sarà soggetto a particolar condizione. Poichè $\frac{N}{m^{n+1}}$ non può produr numero intero, che mediante la legge di prender $N =$ ad un numero composto, il quale abbia a suo fattore la potenza m^{n+1}, che sia in somma della forma Hm^{n+1}. Di quì risulterà $A = \frac{N}{m}\pi = Hm^n\pi$, e per conseguenza sen. $A = 0$, cos. $A = 1$; per la qual cosa l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ si ridurrà ad $(1)^m = (1)^m$, e l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^{-n}} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^{-n}}$ ad $(1)^{m^{-n}} = (1)^{m^{-n}}$, o sia ad $(1)^{\frac{1}{m^n}} = (1)^{\frac{1}{m^n}}$; onde l' argomentare dalle prime alle seconde sarà nulla più, che argomentare da $(1)^m = (1)^m$ ad $(1)^{\frac{1}{m^n}} = (1)^{\frac{1}{m^n}}$: argomentar assolutamente vero nell' estensione di ciascheduna delle numero m^n radici dell' unità, ma in forza delle ipotesi fondamentali ristretto alla radice reale, razionale e positiva $1 = 1$. Poichè siccome per ragione dell' ipotesi fondamentale 1.ª l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ deve rappresentare, ed in ultimo dar sempre $\pm 1 = \pm 1$, e distintamente $1 = 1$ usando della 1.ª sua combinazione; così, e non altrimenti per l' ipotesi

 fon-

fondamentale 2.ª l'equazione $(\cos. A + \operatorname{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n} = (\cos. A - \operatorname{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n}$.

3.° Cerchiamo se sia possibile il connettere le due fondamentali ipotesi, posto m numero intero, ed n fratto $= \frac{1}{r}$, che è quanto dire, se essendo N, m, H numeri interi, possa mai essere $Nm^{\frac{1}{r}-1} = H$. Or, un po' di attenzion, che vi si applichi, si scorge, che, essendo $Nm^{\frac{1}{r}-1} = \frac{N}{m^{\frac{r-1}{r}}}$, ciò non può essere, a meno, che m sia un numero tale, che considerar si possa qual potenza di grado r, e rappresentare in conseguenza per a^r. Supposto ciò avremo $\frac{N}{a^{r-1}} = H$, e non resterà, che prender $N =$ ad un numero composto della forma Ha^{r-1}; e si avrà così, $A = \frac{N}{m}\pi = \frac{Ha^{r-1}}{a^r}\pi = \frac{H}{a}\pi$, e giustamente si argomenterà dall' equazione $\left(\cos. \frac{H}{a}\pi + \operatorname{sen}. \frac{H}{a}\pi\sqrt{-1}\right)^{a^r} = \left(\cos. \frac{H}{a}\pi - \operatorname{sen}. \frac{H}{a}\pi\sqrt{-1}\right)^{a^r}$ a quest' altra $\left(\cos. \frac{H}{a}\pi + \operatorname{sen}. \frac{H}{a}\pi\sqrt{-1}\right)^{a} = \left(\cos. \frac{H}{a}\pi - \operatorname{sen}. \frac{H}{a}\pi\sqrt{-1}\right)^{a}$: il che, riflettasi esser quanto, che dall' equazione $(\cos. A + \operatorname{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n} = (\cos. A - \operatorname{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n}$ inferire la $(\cos. A + \operatorname{sen}. A \sqrt{-1})^{m} = (\cos. A - \operatorname{sen}. A \sqrt{-1})^{m}$, della quale illazione non vi ha niente minor ragione, che della illazione da questa a quella, se bene dell' inferire si consideri la base, che è l' avveramento simultaneo delle due equazioni pel simultaneo avveramento delle due ipotesi fondamentali. E' pertanto manifesto, che

che nel caso di $m = a^r$, $n = \frac{1}{r}$, altro non succede fuori, che la illazione da $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ a $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n}$ convertesi nella sua ugualmente giusta, e necessariamente connessa reciproca.

4.° Abbiamo sino ad ora variato n, ma ritenendo sempre m numero intero. Poniamo al presente m numero fratto $= \frac{1}{t}$; per lo che il congiungimento delle due ipotesi fondamentali importerà $\frac{N}{t^{n-1}} = H$. Questa condizione, se n sia numero intero positivo, non può avverarsi, se non pigliando N della forma composta Ht^{n-1}. All'incontro, se n sia intero negativo, poichè ad n sostituendo $-n$, risulta $Nt^{n+1} = H$, si vede chiaro restare a pieno arbitrio il numero intero N. Che se N sia numero fratto positivo, o negativo $= \pm \frac{1}{r}$, la condizione diverrà $N t^{\frac{r \mp 1}{r}} = H$, all'avveramento della quale sarà mestieri, che il numero t denominatore del fratto valor di m sia una potenza c^r, e ciò posto, la condizione riducendosi ad $Nc^{r \mp 1} = H$, lascierà di nuovo in tal particolarissimo caso ad assoluto piacimento il numero intero N.

5.° Un caso che singolarmente importa di esaminare si è quello di $n = 0$, cioè se essendo m diverso da 1 si possa dall'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ inferire $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^0} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^0}$, o che è lo stesso $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1} = \cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$. La formola definitiva della illazione, $Nm^{n-1} = H$, diventa in tal caso $Nm^{-1} = \frac{N}{m} = H$, la qual' esige, che prendasi per N un numero composto Hm. Dal che ne segue $A = \frac{N}{m}\pi$

=

$= \frac{Hm}{m}\pi = H\pi$, sen. $A = 0$, cos. $A = 1$, e le due equazioni simultaneamente vere vengono ad essere, non altro, che $(1)^m = (1)^m$, ed $1 = 1$.

Composizion 2.ª Passiamo in 2.° luogo a comporre le due ipotesi fondamentali giusta la 2.ª combinazion di ciascuna, supponendo $mA = (2N + 1)\frac{\pi}{2}$, ed $m''A = (2H+1)\frac{\pi}{2}$. Abbiamo di quì, a condizion generale della illazione dall' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$ alla $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^{m''} = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^{m''}$, o sia del simultaneo avveramento loro, la formola $(2N+1)m^{n-1} = 2H + 1$, che chiamerò *formola definitiva* della composizion 2.ª. Or comprendesi tosto

Teorema IX. Le due equazioni $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$, $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^{m''} = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^{m''}$ non possono simultaneamente avverarsi per composizione delle due ipotesi giusta la lor combinazion 2.ª, se non essendo m numero intero dispari, o avendo, se fratto ed $= \frac{1}{t}$, il denominatore t numero dispari. Quindi

1.° Espresso m intero dispari per $2d+1$, e posto n un numero intero positivo qualunque, si avrà $(2N+1)(2d+1)^{n-1} = 2H + 1$, equazione, che al suo avveramento non richiede altra legge, e lascia N a pieno arbitrio.

2.° Sostituito $-n$ ad n, ne proviene $\frac{2N+1}{(2d+1)^{n+1}} = 2H+1$, onde s' induce la legge di prender N della forma composta $(2H+1)(2d+1)^{n+1}$.

3.° Se sia n fratto $= \frac{1}{r}$ si ha $\frac{2N+1}{(2d+1)^{\frac{r-1}{r}}} = 2H+1$, equazione, che non può avverarsi, se non aggiunte due con-

di-

dizioni: la prima che $2d+1$ sia un numero di podestà r, ed esprimibile per $(2e+1)^r$ $(2e+1)^r$; la seconda di prender $2N+1$ della forma composta $(2H+1)(2e+1)^{r-1}$.

4.° Che se pongasi $m = \frac{1}{2f+1}$, ed n sia intero positivo, si avrà $\frac{2N+1}{(2f+1)^{n-1}} = 2H+1$, e perciò dovrà $2N+1$ pigliarsi della forma $(2H+1)(2f+1)^{n-1}$. Ma se n si faccia negativo, risultandone in tal caso, sostituito $-n$ ad n, $(2N+1)(2f+1)^{n+1} = 2H+1$, non si avrà più per N legge di particolare composta forma. E finalmente, se sarà n fratto $= \frac{1}{r}$, converrà adempiere l'equazione $(2N+1)(2f+1)^{\frac{r-1}{r}} = 2H+1$, la quale aggiugne la condizione, che $2f+1$ sia un numero di podestà r, o della forma $(2g+1)^r$, e per conseguenza $m = \frac{1}{(2g+1)^r}$. Raccogliendo si deduce

Teorema X. L'avveramento simultaneo delle due equazioni $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^m=(\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = (\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''}$ per composizion delle due ipotesi fondamentali giusta la lor combinazion 1.^{a} è esteso a più casi (*Teor.* IX), che per composizione delle stesse ipotesi giusta la 2.^{a} lor combinazione. 2.° In alcuni casi nelle espressioni dell' arco $A = \frac{N}{m}\pi$, ovvero $= \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$, il numero N resta libero, in altri viene assoggettato a legge di certa forma. 3.° I binomj ricevono ne' primi casi molti valori, ne' secondi un solo, e conseguentemente il simultaneo avveramento delle due equazioni in quelle è molteplice, in questi semplice, ed unico. Mi riservo una più precisa distinzione, e spiegazione nell'articolo secondo, applicando il teorema alle equazioni $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, $(1+h\sqrt{-1})^{m''}$
=

$= (1 - h\sqrt{-1})^m$, essendo ormai tempo di procedere a fare immediate parole di ciò, che è il proprio oggetto di questa Lettera.

ARTICOLO II.

Io mi spedirò qui più in breve con una ordinata serie di teoremi, la verità de' quali si comprenderà agevolmente, tenendo fissa l' attenzione al modo, nel principio dell' articolo antecedente descritto, col quale l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ si trasforma nella $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, e ricorrendo di teorema in teorema i relativi luoghi del medesimo articolo antecedente.

Teorema I. L'equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ non è di una verità assoluta, ma ipotetica, od il valore della quantità h non è arbitrario, ma dipendente dall' esponente m, ed è per esso, e per una ipotesi fondamentale determinato. Ecco in ristretto quadro la fondamentale ipotesi dell' equazione, e la determinazione di h.

Ipotesi fondamentale.

$\text{sen}.\, mA = 0 \quad \ldots \quad \cos.mA = \pm 1$

che ammette due combinazioni,

Combinazion 1.ª ... $\text{sen}.mA = 0$ ... $\cos.mA = 1$

Combinazion 2.ª ... $\text{sen}.mA = 0$ ... $\cos.mA = -1$

conseguenza della combin. 1ª ... $mA = N\pi$

conseguenza della combin. 2.ª $mA = (2N + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$.

Formola determinativa dell' arco A per la combinazion 1.ª

$$A = \frac{N}{m}\,\pi.$$

Formola determinativa di esso Arco A per la combin. 2.ª

$$A = \frac{2N + 1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Espres-

Espression di h generale . . . $h = \text{tang.} A$

Valore di h per la combin. 1.ª . . . $h = \text{tang.} \frac{N}{m} . \pi$

Valore di h per la combin. 2.ª . . . $h = \text{tang.} \frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2}$.

Teorema II. L'equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ giusta la combinazion 1.ª, cioè l'equazione $(1 + \text{tang.} \frac{N}{m} \pi \sqrt{-1})^m = (1 - \text{tang.} \frac{N}{m} \pi \sqrt{-1})^m$ rappresenta sempre l'equazione $\frac{1}{(\cos. \frac{N}{m} \pi)^m} = \frac{1}{(\cos. \frac{N}{m} \pi)^m}$, ed in ultimo generalmente in questa cade. E l'equazione stessa $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ giusta la combinazion 2.ª, cioè l'equazione $(1 + \text{tang.} \frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}) = (1 - \text{tang.} \frac{2N+1}{m} \sqrt{-1})^m$ rappresenta costantemente, ed all'ultimo esibisce l'equazione $\frac{-1}{(\cos. \frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2})^m} = \frac{-1}{(\cos. \frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2})^m}$.

La cosa si fa chiara, se a ciò, che stabilito si è nel teorema II. dell' articolo I., si aggiunga il riflesso, che $(1 \pm h\sqrt{-1})^m = (1 \pm \frac{\text{sen.} A}{\cos. A} \sqrt{-1})^m = \frac{(\cos. A \pm \text{sen.} A \sqrt{-1})^m}{(\cos. A)^m}$.

Teorema III. Se m sia numero intero, h avrà per la combinazion 1.ª un numero m di valori, che si offeriranno, sostituendo in luogo di N successivamente i termini della serie $0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5$ . . . . sino ad $m - 1$. E parimente un numero m di valori avrà h per la combinazion 2.ª risultanti dal sostituire gli stessi numeri per N in $2N+1$: così che h riceverà un numero $2m$ di valori, e per conseguenza anche i binomj $1+h\sqrt{-1}$, $1-h\sqrt{-1}$ riceveranno ciascuno un numero $2m$ di valori. Quanto all'equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, rappresentando nella combinazion 1.ª l'equazion $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m} = \frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m}$, e nella combinazion 2.ª

l'equazione $\frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m} = \frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$, vestirà essa successivamente un numero m di forme per la combinazion 1.ª, ed altrettante per la 2.ª, e conseguentemente in somma un numero $2m$; onde, comprendendo un numero $2m$ di equazioni, dir si potrà un'equazione virtualmente molteplice di grado $2m$. Si deve però riflettere, che, al caso di essere m un numero pari, un coseno positivo, ed un ugual negativo elevati alla potenza m daranno la stessa quantità. Così, essendo $m=2$, si ha (esempio 1.° sotto il teor. III. dell' artic. I.) $\cos.\frac{0}{2}\pi = 1$, $\cos.\frac{1}{2}\pi = -1$, che elevati al quadrato producono ambedue 1; per la qual cosa le due forme, che l'equazione $(1+h\sqrt{-1})^2 = (1-h\sqrt{-1})^2$ riceve, l'una dopo l'altra, per la combinazion 1.ª coincidono tra loro. Può inoltre ristrignersi il numero delle forme diverse dell'equazione, tanto nel caso di m pari, quanto nel caso di m dispari, per risultare dalle formole $\frac{N}{m}\pi$, $\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}$ degli archi diversi, ai quali convenga un ugual coseno, avendo il solo seno differente. Di fatto nell' esempio 3.° del luogo citato, posto $m=3$, ne provengono nella 1.ª combinazione gli archi $120°$, $240°$ forniti dello stesso coseno $= \frac{-1}{2}$; e per la 2.ª i due archi $60°$, $300°$, a' quali è comune il co-

se-

seno $\frac{1}{2}$. Dunque, se piaccia di non tener conto, che delle forme diverse, e dal numero di queste misurare la virtù della molteplicità, l'equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ si dirà tanto in virtù molteplice, quanti, tutti insieme paragonati, saranno i diversi valori di $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}.\pi)^m}$, e di

$\frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$. Dico paragonati tutti insieme, cioè non

solo tra loro quelli di $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m}$, e separatamente tra loro quelli di $\frac{1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$, ma eziandio i primi co' secondi; poichè se sia un $\cos.\frac{N}{m}\pi = p$, ed un $\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2} = -p$, o viceversa, e sia m dispari, sarà, rispetto a tali coseni, $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}.\pi)^m} = \frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$, e si restrignerà, anche per tal ragione, d' altrettanto il numero delle diverse forme. Accade effettivamente anche ciò nell' addotto esempio 3.°, avendosi per due archi, non che per uno, nella combinazion 1.ª il coseno $= -\frac{1}{2}$, e per due altri nella 2.ª il coseno $= \frac{1}{2}$, ed essendo manifestamente $\frac{1}{(\frac{-1}{2})^3} = \frac{-1}{(\frac{1}{2})^3}$:

Se facciamo $m = 2$, e nella equazione $(1 + h\sqrt{-1})^2 =$ (1

$(1-h\sqrt{-1})^2$ determiniamo h giusta la 2.ª combinazione per la formola $h = \text{tang.}\frac{2N+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\text{sen.}\frac{2N+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\text{cos.}\frac{2N+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$, fatto $N=0$ si trova $h = \frac{\text{sen. }\frac{\pi}{4}}{\text{cos. }\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{0}$; e fatto $N = 1$, trovasi $h = \frac{\text{sen.}\frac{3\pi}{4}}{\text{cos.}\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1}{0}$, onde le due forme, che l'equazione riceve, sono $(1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 \ldots (1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$. Queste forme, che possiamo ristrignere nella sola $(1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$ non consentono col teorema, non rappresentando punto l'equazione $\frac{-1}{0} = \frac{-1}{0}$, e non potendo in questa all'ultimo cadere. Poichè, effettuati i quadrati, l'equazione $(1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2=(1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$ si cangia in $1+\frac{2}{0}\sqrt{-1}-1 = 1-\frac{2}{0}\sqrt{-1}-1$, che si riduce a $+\frac{2}{0}\sqrt{-1} = -\frac{2}{0}\sqrt{-1}$ equazion ben lontana dalla $\frac{-1}{0} = \frac{-1}{0}$; ed in se assurdissima. E come conciliar tale mostruosità col teorema? Forse che dicendo che nei binomj $1+\frac{1}{0}\sqrt{-1}$, $1-\frac{1}{0}\sqrt{-1}$ a confronto dell'

dell' infinito, sebbene immaginario, $\frac{1}{0}\sqrt{-1}$ devesi contar per nullo, e rigettare il finito reale 1? Rigettandolo di fatto, resta $(+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$ che, eseguiti i quadrati, presenta $\frac{-1}{0} = \frac{-1}{0}$. Si deve, così è, dai binomj $1+\frac{1}{0}\sqrt{-1}$, $1-\frac{1}{0}\sqrt{-1}$ espeller il primo termine 1, ma vi ha di ciò fare sua intrinseca, essenziale, e convincente ragione. Si rimonti dall' equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ alla original di lei forma $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$. Dove $\cos.A$ sia $=0$, distrutto il primo termine de' suoi binomj, essa si contrae a $(\text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, o sia ad $(\pm 1\sqrt{-1})^m = (\mp 1\sqrt{-1})^m$, perchè $\cos.A = 0$ porta necessariamente seco $\text{sen}.A = \pm 1$. Corrispondentemente dunque, qualunque volta sia $\cos.A = 0$, devono i binomj $1+h\sqrt{-1}$, $1-h\sqrt{-1}$ perdere il primo lor termine 1. Questo è fondato sul supposto, che nell' original forma dell' equazione esista $\cos.A$, o sia che questo coseno abbia un qualche valore di grandezza, venendo meno il supposto, deve insieme venir meno ciò che da esso ha nascita, cioè il termine 1 dei binomj $1+h\sqrt{-1}$, $1-h\sqrt{-1}$. Nella divisione che si fa dei binomj $\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1}$ per $\cos.A$, onde passare dall' equazione $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ alla $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, operando algebraicamente, cioè in maniera generale, e prescindente da' casi particolari, si concepisce $\cos.A$ come un prodotto di $\cos.A \times 1$; il concetto è esatto sinchè $\cos.A$ ha qualche grandezza, ma cessa d' esserlo, allorchè $\cos.A = 0$; poichè se è vero, che si può considerare indeterminatamente $0 = 0 \times a$, ed includentemente $= 0 \times 1$, egli è insieme manifesto non esservi maggior ragione di considerarlo $= 0 \times 1$

pintpiuttosto, che $= 0 \times 2 \ldots$, ed è parimente irrefragabile includersi in $0 = 0 \times a$ eziandio $0 = 0 \times 0$, e la corrispondenza essenziale tra i cangiamenti dei binomj $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$, e dei binomj $1 + h\sqrt{-1}$, $1 - h\sqrt{-1}$ definisce, che nel caso di $\cos.A = 0$, questo 0 non si abbia a considerar, che come 0×0. Che se, senza punto detrarre alla generalità algebraica della trasformazione, considerando indistintamente $\cos.A = \cos.A \times 1$, e senza la pena di rimontare all'origine, piaccia all' analista, nel caso di $h = \frac{1}{0}$, ripiegare all' inconveniente della indistinta considerazione per tal caso risultante, con contar per nullo in confronto dell' infinito immaginario $h\sqrt{-1}$ il finito reale 1, l' effetto sarà il medesimo; ma chi non vuol urtata sua ragione, ma appagata ed illuminata, ricorrerà alla metafisica sopra esposta. Intanto stabiliamo

Teorema IV. Sempre, che nell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ sia $h = \frac{1}{0}$ si deve rigettar il primo termine dei binomj 1, e ristrigner l' equazione ad $(h\sqrt{-1})^m = (-h\sqrt{-1})^m$, e ciò per intrinseca, necessaria, originale ragione dell' equazion medesima:

Teorema V. Dall'equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ in niun modo discendono, anzi sono tanto aliene, quanto false, ed assurde, le due equazioni, delle quali l' Ab. Nicolai ha creduto di formar alle strane sue idee analitiche sì gran base, le due equazioni cioè: $1 + \sqrt{-1} = 1 - \sqrt{-1}$, $(1 + \sqrt{-1})^2 = (1 - \sqrt{-1})^2$. Poichè nè $\text{tang}.\frac{N}{1}\pi$, $\text{tang}.\frac{2N+1}{1}.\frac{\pi}{2}$; nè $\text{tang}.\frac{N}{2}\pi$, $\text{tang}.\frac{2N+1}{2}.\frac{\pi}{2}$ danno 1; vedi gli esempj 1° e 2° sotto il Teor. III. art. I. È bensì figlia dell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ l' equazione $(1 + \sqrt{-1})^4 = (1 - \sqrt{-1})^4$; imperciocchè

2N

$\frac{2N+1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$, fatto $N = 0$, dà $\frac{\pi}{8} = 45°$, e sen.$45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; e parimenti cos.$45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, onde tang.$45° = h = 1$. Ma e che? Da $(1 + \sqrt{-1})^4 = (1 - \sqrt{-1})^4$ non è lecito inferire $(1 + \sqrt{-1})^2 = (1 - \sqrt{-1})^2$, nè $1 + \sqrt{-1} = 1 - \sqrt{-1}$? Nò, e lo dimostrerò più sotto nei teoremi IX. e XIV.

Teorema VI. Il caso di m negativo si converte in quello di m positivo, e per conseguenza vale per tal caso quanto pel caso di m positivo si è stabilito.

Teorema VII. Se m sia un numero fratto $= \frac{1}{t}$, sarà h $=$ tang.$Nt\pi$, ovvero $=$ tang.$(2N + 1)t \cdot \frac{\pi}{2}$, cioè, e per la 1.ª, e per la 2.ª combinazione sarà $h = 0$.

Corollario dei teoremi III. VI. VII. Nell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, per la combinazion 1.ª, che determina $h =$ tang.$\frac{N}{m}\pi$, ha sempre h un valor $= 0$ proveniente al prender $N = 0$, e non è h che $= 0$ essendo m fratto $= \frac{1}{t}$, essendo intero $= 1$, essendo $= 2$; e solo divenendo $m = 3$ incomincia h ad acquistar vero valore o grandezza. E per la 2.ª combinazion, che determina $h =$ tang.$\frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$, non è h che $= 0$, essendo m fratto $= \frac{1}{t}$, ed essendo $= 1$; diventando $m = 2$, salta h a valor infinito, e comincia a ricevere valori finiti nel caso di $m = 3$. Rimangono poi simili gli avvenimenti in h, cangiando in negativi gli assegnati positivi valori di m.

Teorema VIII. Se determinata h per le formole tang.

$\text{tang.}\frac{N}{m}\pi$, $\text{tang.}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}$, ne' casi, ne' quali non risulta essa, nè zero, nè infinita, ed in conseguenza i binomj restan tali, si svolga in serie $(1 \pm h\sqrt{-1})^m$, effettuando la podestà m, e si chiami R la parte reale della serie, avendo determinata h per la formola prima, ed R^1 essa parte reale, avendo determinata h per la formola seconda; si denoti poi per $\pm S\sqrt{-1}$ la parte immaginaria della serie, usata la prima determinazione di h, e $\pm S^1\sqrt{-1}$ la parte immaginaria, usata la seconda determinazione: sarà costantemente

$$R = \frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m} \ldots R^1 = \frac{1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m} \ldots \pm S = 0$$

$\ldots \pm S^1 = 0$.

Va con ciò in un colpo a terra tutto il misterioso edificio, che l' Ab. Nicolai, svolti in serie i membri dell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, paragonando reali a reali, ed immaginarj ad immaginarj, fabbricò su l' equazione $+S\sqrt{-1} = -S\sqrt{-1}$.

Teorema IX. A potere dall' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ inferire l' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^{m''} = (1 - h\sqrt{-1})^{m''}$, o, che è lo stesso, ad essere simultaneamente vere queste due equazioni, è d' uopo, che simultaneamente si avverino le due seguenti ipotesi fondamentali.

Due ipotesi fondamentali.

$\text{sen.}mA = 0$, $\cos.mA = \pm 1 \ldots \text{sen.}m''A = 0$, $\cos.m''A = \pm 1$. E siccome l' una, e l' altra ammette due combinazioni, così ne nascono due composizioni, secondo che ambedue prese sono nella lor 1.ª, o 2.ª combinazione.

Composizion 1.ª . . . $\text{sen.}mA = 0$, $\cos.mA = 1 \ldots$ $\text{sen.}m''A = 0$, $\cos.m''A = 1$.

Conseguenze di questa composizione . . . $mA = N\pi$, $m''A = H\pi$.

Formola determinativa dell' arco A . . . $A = \frac{N}{m}\pi = \frac{H}{m''}\pi$

For-

Formola definitiva della possibilità, e delle condizioni della 1.ª composizione, o sia del simultaneo avveramento per essa . . . $Nm^{n-1} = H$.

Composizion 2.ª . . . $\text{sen}.mA = 0$, $\cos.mA = -1$ . . . . $\text{sen}.m^n A = 0$, $\cos.m^n A = -1$.

Conseguenza di questa 2.ª composizione . . . $mA = (2N+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $m^n A = (2H+1) \cdot \frac{\pi}{2}$.

Formola determinativa dell' arco A . . . $A = \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2H+1}{m^n} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Formola definitiva della possibilità, e delle condizioni della 2.ª composizione, o sia del simultaneo avveramento . . . $(2N+1)m^{n-1} = 2H+1$.

Teorema X. Per via della 1.ª composizione è sempre, ed assolutamente possibile il simultaneo avveramento delle due equazioni $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, ed $(1 + h\sqrt{-1})^{m^n} = (1 - h\sqrt{-1})^{m^n}$ nel caso di m, n positivi, ed interi, prendendo $h = \text{tang}.\frac{N}{m}\pi$; e l'avveramento sarà molteplice, ricevendo h varj valori, da $m = 3$ in su.

Teorema XI. Se stando m intero positivo, sia n intero negativo, cioè se in vece di n, abbiasi $-n$, il simultaneo avveramento delle due equazioni per via della composizion 1.ª non può aver luogo, che a condizione di prender N della forma Hm^{n+1}, e quindi $h = \text{tang}.Hm^n.\pi = 0$.

Teorema XII. Se n sia fratto $= \frac{1}{r}$, non è possibile per la 1.ª composizione il simultaneo avveramento delle due equazioni, se non che a due condizioni: 1.ª che m sia una po-

 ten-

tenza a^r; 2.ª di pigliar N della forma Ha^{r-1}, ed in conseguenza $h = \text{tang.}\frac{H}{a}\pi$.

Dunque affinchè simultaneamente si avverino le due equazioni $(1+h\sqrt{-1})^4 = (1-h\sqrt{-1})^4$, $(1+h\sqrt{-1})^2 = (1-h\sqrt{-1})^2$, essendo $m = 4 = 2^2$, $n = \frac{1}{2}$, si dovrà prender $h = \text{tang.}\frac{H}{2}\pi = 0$. Con che resta dimostrato incompossibile l'avveramento delle due equazioni $(1+\sqrt{-1})^4 = (1-\sqrt{-1})^4$, $(1+\sqrt{-1})^2 = (1-\sqrt{-1})^2$, ed illegittima del tutto l' illazione da quella a questa, che è ciò, che di dimostrar promisi nel teorema V.

Teorema XIII. Se m sia fratto $= \frac{1}{t}$, ed n intero positivo, non può il simultaneo avveramento delle due equazioni per la 1.ª composizione aver luogo, fuori che a condizione di prender N della forma Ht^{n-1}, il che produce $h = \text{tang.}Ht^n.\pi = 0$.

Teorema XIV. All' opposto N divien libero, ed il simultaneo avveramento assoluto, se in cambio di n intero positivo, si abbia $-n$ intero negativo; ma contuttociò a ragione di esser m rotto si ha $h = \text{tang.}\frac{N}{m}\pi = \text{tang.}Nt.\pi = 0$.

Teorema XV. Posti m, n ambedue rotti, il primo $= \frac{1}{t}$, il secondo $= \frac{1}{r}$, non è per mezzo della 1.ª composizione possibile il simultaneo avveramento delle due equazioni, che alla condizione, che t sia una potenza c^r, e ciò essendo, sarà $h = \text{tang.}Nc^r.\pi = 0$.

Teorema XVI. Ad ottener, che per la 1.ª composizione simultaneamente si avverino le due equazioni $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, $(1+h\sqrt{-1})^{m^n} = (1-h\sqrt{-1})^{m^n}$

fat-

fatto $n = 0$, per lo che la seconda equazione cade in $1 + h\sqrt{-1} = 1 - h\sqrt{-1}$, richiedesi ad indispensabile condizione il pigliar N della forma Hm, in conseguenza di che proviene $h = \text{tang.} H\pi = 0$.

Rendesi quinci manifesto l'illegittimo argomentare, che sarebbe, l'inferire dall'equazion vera $(1 + \sqrt{-1})^4 = (1 - \sqrt{-1})^4$ la falsa ed assurda $1 + \sqrt{-1} = 1 - \sqrt{-1}$, siccome ho promesso di far palese nel teorema V.

Teorema XVII. Per via della 2.ª composizione non è mai possibile il simultaneo avveramento delle due equazioni, se m sia numero intero pari, o fratto di denominatore pari.

Teorema XVIII. Posto m numero intero dispari $= 2d + 1$, ed n un numero intero positivo qualunque, il simultaneo avveramento delle due equazioni per via della 2.ª composizione è assolutamente possibile, e molteplice, risultando $h = \text{tang.} \frac{2N+1}{2d+1} \cdot \frac{\pi}{2}$

Teorema XIX. Se in luogo di n intero positivo si abbia $-n$ intero negativo, il simultaneo avveramento delle due equazioni divien soggetto alla condizione di prender $2N + 1$ della forma composta $(2H + 1)(2d + 1)^{n+1}$, che rende $h = \text{tang.} \frac{(2H+1)(2d+1)^{n+1}}{2d+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \text{tang.} (2H+1)(2d+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 0$.

Teorema XX. Rimanendo $m = 2d + 1$, se sia $n = \frac{1}{r}$, non è possibile il simultaneo avveramento per via della 2.ª composizione, se non nel caso, che il numero m, oltre ad essere dispari $= 2d + 1$, sia eziandio una potenza $(2e+1)^r$, ed a condizione di prender $2N+1$ della forma $(2H+1)(2e+1)^{r-1}$, donde proviene $h = \text{tang.} \frac{2H+1}{2e+1} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Teorema XXI. Se m sia fratto $= \frac{1}{2f+1}$, ed n intero positivo, il simultaneo avveramento delle due equazioni per mezzo della 2.ª composizione esige, che si prenda $2N+1$ della forma $(2H+1)(2f+1)^{n-1}$, la quale determina $h = \text{tang.}(2H+1)(2f+1)^n \cdot \frac{\pi}{2} = 0$.

Teorema XXII. Che se ritenuto $m = \frac{1}{2f+1}$, in vece di n intero positivo, suppongasi $-n$ intero negativo, il simultaneo avveramento delle due equazioni per via della 2.ª composizione non imporrà legge di forma rispetto al numero $2N+1$, ma sarà cionondimeno $h = \text{tang.}\frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} = \text{tang.}(2N+1)(2f+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 0$.

Teorema XXIII. E se finalmente sia $m = \frac{1}{2f+1}$, ed $n = \frac{1}{r}$, il simultaneo avveramento delle due equazioni non sarà per via della composizione 2.ª possibile, che nel caso di essere $2f+1$ una potenza $(2g+1)^r$, e ciò essendo, risulterà $h = \text{tang.}(2N+1)(2g+1)^r \cdot \frac{\pi}{2} = 0$.

Corollario dei 14. teoremi X. . . . XXIII. Nella 1.ª composizione in due soli casi: in quello cioè 1.° di m intero qualunque pari, o dispari ed n intero positivo; 2.° in quello di n fratto $= \frac{1}{r}$, e di m intero, ma insieme di podestà r, e generalmente per a^r esprimibile, h sussiste, o sia ritiene valor di vera quantità senza cadere a zero. E nella composizion 2.ª parimente ciò avviene in due casi soli: 1.° in quello di m intero dispari, ed n intero positivo qualunque; 2.° in quello di n fratto $= \frac{1}{r}$, ed m potenza r di numero dispari, quale $(2e+1)^r$. Quindi a questi soli quattro ca-

casì restrignesi il simultaneo avveramento delle due equazioni $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$, ed $(1+h\sqrt{-1})^{m^n}=(1-h\sqrt{-1})^{m^n}$, se intendasi, che h debba non essere zero, ma aver qualche grandezza. E perchè per l' osservazion fatta nell' Art. I. ques. 5.° Comp. 1. *n*. 3. i casi quì segnati per secondi rispetto all' una, ed all' altra Composizione non sono, che reciproci dei primi, null' altro facendo, che convertire l' inferimento dalla prima alla seconda equazione nel reciproco da questa a quella. Perciò il simultaneo avveramento restrignesi ancora più, e si riduce al caso di m intero, o positivo, o negativo, ed n intero positivo, con la distinzione, che se m sia numero dispari, l' avveramento ha due modi, l' uno per la 1.ª combinazione l' altro per la 2.ª, e non ne ha, che un solo, per la 2.ª cioè combinazione, se m sia numero pari.

Eccovi, o celebratissimo Signore, il mio studio sulla vostra equazione $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$ ad oggetto di sgombrarla da qualunque nebbia di mistero, o paradosso, e ridurla alla bella matematica lucidissima evidenza. Aggraditelo qual segno dell' altissima mia stima.

APPENDICE.

§. I. Nella prodotta lettera non parlai, che dei casi risguardanti m razionale, perchè i misteri dal D' Alembert medesimo proposti su la sua equazione $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$, e le assurdità infinite accumulatevi sopra dall' Ab. Nicolai non eccedono la sfera di m razionale. Ma la natura dell' equazione limita ella entro di tale sfera l' esponente m?

Teorema I. Nell' equazione $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$ l' esponente m, ugualmente, che razionale, può essere irrazionale, e trascendente ancora.

L' ipotesi fondamentale sen. $mA=0$, cos. $mA=\pm 1$ il con-

consente, poichè la 1.^{a} sua combinazione sen. $mA = 0$, cos. $mA = 1$ altra condizion non importa, se non $mA = N\pi$; e la combinazion 2.^{a} sen. $mA = 0$, cos. $mA = -1$ non altra condizione, che $mA = (2N+1)\frac{\pi}{2}$: ed ambedue codeste condizioni permettono, che m sia irrazionale, o trascendente ugualmente, che razionale; e la sola differenza, che ne nasce si è, che, essendo m irrazionale, o trascendente, tale sarà pure la grandezza dell' arco A, il che produce i teoremi seguenti.

Teorema II. Essendo nell' equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ l' esponente m irrazionale, o trascendente, la quantità h sarà infinitamente molteplice, e ciò doppiamente, perchè sì per la 1.^{a}, e sì per la 2.^{a} combinazione. Ed il simile in conseguenza sarà dei due binomj, e dell' equazione medesima. La ragione si è, perchè nelle due espressioni di h, cioè $h = \text{tang.}\ \frac{N}{m}\pi$, $h = \text{tang.}\ \frac{2N+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$, essendo m irrazionale, o trascendente, con sostituire ordinatamente ad N i termini della serie 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6 .... non risulterà mai nella prima $\frac{m}{m}\pi = \pi$, nè giammai nella seconda $\frac{2m+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi + \frac{1}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$; onde, proseguendo, anche all' infinito, non terminerà mai la serie degli archi di tangente diversa, non potendo mai provenire archi uguali ai già dianzi provenuti con l' aggiunta dell' intera circonferenza π, siccome accade, quando m è razionale. Art. I. Ques. 1. E' inoltre da osservare, che del numero infinito de' valori di h per la 1.^{a} combinazione non ve ne sarà, che uno $= 0$, il qual sarà quello di tang. $\frac{0}{m}\pi$, facendo $N = 0$; e niuno ve ne sarà del numero infinito de' valori per la combinazione 2.^{a} Nè per l' una poi, nè per l' altra combinazione riceverà h valore alcuno infinito.

Teo-

Teorema III. Essendo m irrazionale, o trascendente, se eccettuato il fare $N = 0$, che, rendendo $h = \text{tang.}\,\frac{0}{m}\pi = 0$, tramuta i binomj in monomj, si svolga $\left(1 \pm \text{tang.}\,\frac{N}{m}\pi\right)^m$ in serie, e si chiami P la parte reale, che se ne svilupperà, e $\pm Q\sqrt{-1}$ la parte immaginaria: saranno P, e Q due serie infinite; ma non ostante l' infinito numero de' termini, sarà

L' infinita serie $P = 1$, e l' infinita serie $Q = 0$

Similmente, e senza eccezione, svolgendo $\left(1 + \text{tang.}\,\frac{2N+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^m$, e chiamando P^1 la parte reale, e $\pm Q^1\sqrt{-1}$ la parte immaginaria, sarà l' infinita serie $P^1 = -1$, e l' infinita serie $Q^1 = 0$

§. II. Rispetto al simultaneo avveramento delle due equazioni $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, $(1 + h\sqrt{-1})^{m''} = (1 - h\sqrt{-1})^{m''}$ non ho nella stessa lettera al Sig. D' Alembert esaminate, che due composizioni delle due fondamentali ipotesi, prendendo l' una, e l' altra nella 1.ª o nella 2.ª combinazione. Ma eccomi ad esaminarne brevemente due altre formate con prender la 1.ª fondamentale ipotesi nella sua combinazion 1.ª, e la 2.ª nella sua combinazione 2.ª; e con prendere a vicenda la 1.ª ipotesi fondamentale nella 2.ª sua combinazione, e la 2.ª fondamentale ipotesi nella sua combinazion 1.ª

La 1.ª fondamentale ipotesi nella sua 1.ª combinazione $\text{sen.}\,mA = 0$, $\cos.\,mA = 1$ esige $mA = N\pi$; e la 2.ª ipotesi fondamentale nella 2.ª sua combinazione $\text{sen.}\,m''A = 0$, $\cos.\,m''A = -1$ esige $m''A = (2H + 1)\cdot\frac{\pi}{2}$: onde la composizione esige $A = \frac{N}{m}\cdot\pi = \frac{2H+1}{m''}\cdot\frac{\pi}{2}$; e quinci la *formola defi-*

ni-

nitiva di tal composizione, che direm 3.^{a}, viene ad essere $2Nm^{n-1} = 2H+1$.

L' ipotesi fondamentale 1.^{a} nella 2.^{a} sua combinazione sen. $mA = 0$, cos. $mA = -1$ esige $mA = (2N+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, e la ipotesi fondamentale 2.^{a} nella sua 1.^{a} combinazione sen. $m^n A = 0$, cos. $m^n A = 1$ esige $m^n A = H\pi$. Dunque la composizion, che direm 4.^{a}, esige $A = \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{H}{m^n} \cdot \pi$, donde si ha per *formola definitiva* di essa, $(2N+1)\, m^{n-1} = 2H$.

Teorema. I. La composizion 3.^{a}, essendo m razionale, è possibile in due casi. 1.° Se m sia un numero intero pari $2k$, ed n sia negativo, cioè in vece di n si abbia $-n$, poichè in tal caso la formola $2Nm^{n-1} = 2H+1$ si cangia in $2N = (2k)^{n+1}(2H+1)$; 2.° se m sia un fratto $= \frac{1}{2l}$, ed n sia positivo, cangiandosi la formola definitiva in $2N = (2l)^{n-1}(2H+1)$.

Teorema II. La composizion 4.^{a} è possibile, essendo m razionale, in due casi. 1.° Se sia m numero pari $2p$, ed n positivo; 2.° se m sia fratto $= \frac{1}{2q}$, ed n negativo: poichè la formola definitiva $(2N+1)\, m^{n-1} = 2H$ prende nel 1.° caso la modificazione $(2N+1)(2p)^{n-1} = 2H$, e nel secondo la modificazione $(2N+1)(2q)^{n+1} = 2H$.

Teorema III. Le quattro formole delle quattro composizioni 1.^{a} $Nm^{n-1} = H$ . . . 2.^{a} $(2N+1)\, m^{n-1} = 2H+1$ . . 3.^{a} $2Nm^{n-1} = 2H+1$ . . . . 4.^{a} $(2N+1)\, m^{n-1} = 2H$ non possono assolutamente aver luogo, se m sia trascendente. E se m sia irrazionale non possono ricever adempimento, se non che essendo m un radicale semplice di grado $n-1$, che generalmente si rappresenti per $\sqrt[n-1]{B}$; e dovrà inoltre esser B un numero intero dispari, o fratto di de-

no-

nominator dispari a poter soddisfare alla formola 2.ª; un fratto di denominator pari a poter rendere effettuata la 3.ª; ed un intero pari per convenire alla 4.ª Perciò le due equazioni $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, $(1+h\sqrt{-1})^{m''} = (1-h\sqrt{-1})^{m''}$ non possono conseguire simultaneo avveramento, essendo m irrazionale, se non alle condizioni in genere, ed in particolare qui assegnate.