SULLA MACCHINA A SPECCHI DI BUFFON, E SULLA LUCE, CHE DA UNO SPECCHIO PIANO CIRCOLARE VIENE RIPERCOSSA SOPRA UNO SPAZIO CIRCOLARE DATO.

Di Gregorio Fontana.

Ricevuta li 14. *Fruttidoro. An. VI.* (31. *Agosto* 1798.)

INgegnosa quanto mai dir si possa, e derivata dalle più sottili e giudiziose considerazioni sulla luce riflessa, è l' invenzione della macchina a specchi per ardere ed abbruciare i corpi a grandi distanze, ideata ed eseguita dal Buffon verso la metà del corrente secolo. Consiste questa, come può vedersi nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1747., in 168. specchi piani di vetro a foglia metallica, alti sei pollici, larghi otto, ognuno de' quali è mobile di per se indipendentemente dagli altri. Nel totale la macchina è larga sette piedi, ed alta otto.

Nel primo esperimento eseguito ai 23. Marzo 1747. quando la macchina non era ancora nel perfetto suo compimento, e non avea la più esatta situazione verso i raggi solari, Buffon accese con 40. specchi una tavola di faggio incatramata in distanza di *66.* piedi.

Ai 4. Aprile intorno alle ore 11. di mattina, ad un sole debole, egli produsse con 154. specchi alla distanza di 150. piedi un tal calore, che in meno di due minuti una tavola incatramata cominciò a dar fumo, ed avrebbe sicuramente preso fuoco, se il sole non si fosse improvvisamente nascosto.

Ai 10. Aprile, in un sole chiaro, con 128. specchi fu quasi instantaneamente fatta ardere una tavola incatramata di abete alla distanza di 150. piedi.

Alla distanza di 20. piedi un gran fiasco di stagno con 45. specchi, e dei piccoli pezzi d' argento con 117. specchi furono l' uno e gli altri liquefatti, ed una lamiera di latta divenne rovente.

I comuni specchi ustorj, cioè sferico-concavi, sono affatto insufficienti per bruciare a grandi distanze; la loro grandezza per produr quest' effetto, dovrebbe essere immensa, e sarebbe estremamente difficile, per non dire impossibile di dar loro esattamente la curvatura quasi insensibile, che dovrebbero avere. Ma havvi anche un' altra ragione, che li renderebbe totalmente inutili, quand' anco si potesse trovar il modo di lavorarli colla maggior esattezza e precisione possibile. Per calcolare la forza d'uno specchio concavo, è un grand' errore della comune degli Ottici quello di considerare soltanto que' raggi, che vengono da un solo punto del Sole, cioè dal suo centro, i quali poi come provenienti da uno stesso punto si riguardano giustamente come paralleli.

Il corpo solare occupa nel cielo uno spazio della larghezza di circa 32. minuti, ovvero il diametro del disco del sole si vede da noi sotto un angolo di 32. minuti. I raggi, che partono dalle due estremità del diametro e cadono sullo stesso punto dello specchio, non sono altrimenti tra loro paralleli, ma sono gli uni agli altri inclinati sotto l' angolo di poco più d' un mezzo grado; per conseguenza, dopo essere dallo specchio riflessi, invece di raccogliersi in un medesimo punto, vanno tra loro scostandosi, e divergendo d' un angolo eguale: e questa è la ragione, per cui il foco d' uno specchio concavo un poco grande non è un punto fisico, ma ha sempre una certa estensione sensibile. L' immagine del sole nel foco dello specchio occupar dee uno spazio, il cui diametro è la corda d' un angolo di 32. minuti, che ha il vertice nello specchio. Fin tanto che il foco dello specchio non è che ad una mediocre distanza, questa divergenza dei raggi è minore della convergenza che dà loro lo specchio, e però essendo il foco molto men largo di lui, i raggi vi sono bastantemente condensati e raccolti per poter ardere e bruciare (*a*). Ma se si accresce la distanza del foco, allora

---

(*a*) Da questa divergenza de' raggi riflessi da uno stesso punto dello specchio, e provenienti dalle due estremità del diametro solare si ricava la ragione, per cui l' immagine del sole ripercossa da uno specchio piano, la quale ad una piccola distanza è della stessa figura dello specchio, diventa, scostandosene, sempre vie meno simile allo specchio, e finisce con essere perfettamente rotonda, qua diventando più sensibile la divergenza de' raggi, viene a indebolirsi la forza del foco; per modo che se si supponesse questo collocato ad una tal distanza, che il diametro dello specchio fosse veduto da questo luogo sotto un angolo di 32. minuti, e la convergenza data ai raggi dallo specchio fosse quindi uguale alla divergenza cagionata dalla larghezza del diametro del sole, il foco in tal supposto non farebbe maggior effetto che se ricevesse i raggi da uno

---

lunque esser possa la figura dello specchio. „ Uno specchio piano quadrato (dice ingegnosamente nella citata Memoria il Buffon) d' un mezzo piede, esposto ai raggi del sole, formerà un' immagine quadrata di sei pollici, allorchè si riceverà questa immagine ad una piccola distanza dallo specchio, come di alcuni piedi. Allontanandosi poco a poco, vedesi l' immagine crescere, poi difformarsi, infine ritondarsi, e rimanere rotonda sempre ingrandendosi a misura, che ella dallo specchio si allontana. Questa immagine è composta di tanti dischi del sole, quanti vi sono punti fisici nella superficie riflettente: il punto del mezzo forma un' immagine del disco; i punti vicini ne formano altre simili e della stessa grandezza, le quali sopravanzano un poco il disco del mezzo. Lo stesso accade di tutti gli altri punti; e l' immagine è composta d' un' infinità di dischi, che sormontandosi regolarmente, e anticipando circolarmente gli uni sugli altri formano l' immagine riflessa, che ha il punto del mezzo dello specchio per centro. Se si riceve l' immagine composta di tutti questi dischi ad una piccola distanza, allora l' estensione, che essi occupano, non essendo che un poco più grande di quella dello specchio, questa immagine è della stessa figura e presso a poco della stessa estensione dello specchio. Se lo specchio è quadrato, l' immagine è quadrata; se lo specchio è triangolare, l' immagine è triangolare. Ma quando si riceve l' immagine ad una grande distanza dallo specchio, dove l' estensione, che occupano i dischi, è molto maggiore di quella dello specchio, l' immagine non conserva più la figura quadrata, o triangolare dello specchio, ma ella diventa necessariamente circolare. E per trovare il punto di distanza, dove l' immagine perde la sua figura quadrata, basta cercare a qual distanza lo specchio ci comparisce sotto un angolo uguale a quello, che forma il corpo del sole a' nostri occhi, cioè sotto un angolo d' un mezzo grado, o di 32. minuti: questa distanza sarà quella, dove l' immagine perderà la sua figura quadrata, e diverrà rotonda; perocchè i dischi avendo sempre per diametro una linea uguale alla corda dell' arco circolare, che misura un angolo di 32. minuti, si troverà con questa regola, che uno specchio quadrato di sei pollici perde la sua figura quadrata alla distanza di circa 60. piedi, e che uno specchio d' un piede in quadrato non la perde che a 120. piedi all' incirca, e così degli altri „.

specchio piano. Quanto dunque è maggiore la distanza focale, tanto pure è maggiore l' estensione del foco, ossia lo spazio *incendiario* o *focale*, che occupano dopo la riflessione dallo specchio concavo i raggi provenienti da tutti i punti del disco del sole. Il semidiametro d' un tal foco, ovvero dell' immagine del sole in esso formata trovasi immediatamente con moltiplicare la distanza focale per la tangente del semidiametro apparente del sole; così che posta la distanza focale $= \Delta$, si ha pel semidiametro del foco l' espressione Δ tang. $16'$, ovvero $\frac{1}{216} \Delta$ all' incirca.

Essendo per tanto i raggi, che procedono da tutto il disco del sole, riuniti e raccolti così dalle lenti che dagli specchi anche più perfetti non già in un punto, ma in un' estensione contenente l' immagine solare, cioè in uno spazio circolare avente per diametro $\frac{1}{108}$ della distanza focale, di qui ne deriva, che per ottener da uno specchio la stessa forza d' illuminare o di ardere in una grande distanza che si ha da un altro in una distanza minore, è necessario accrescere la superficie del primo sopra quella del secondo nella stessa proporzione, in cui l' ampiezza del suo foco o circolo incendiario cresce sopra l' ampiezza del foco di questo secondo. Per cagion d' esempio il grande specchio dell' Accademia di Parigi, che ha tre piedi di corda o diametro, e che ha la forza di fonder l' oro ha un foco o spazio incendiario grande in circa quattro linee. Se si volesse fare uno specchio, il quale a 240. piedi di distanza, dove il foco è un poco più grande di due piedi, producesse un effetto uguale, bisognerebbe dargli 216. piedi di corda, perchè la larghezza di 4. linee di foco nello specchio dell' Accademia sta alla larghezza di due piedi di foco in quest' altro, come appunto tre piedi di corda in quello a 216. piedi di corda in questo. Il Buffon con un cartone applicatovi restrinse la larghezza di quello specchio sino ai cinque pollici, cioè alla sola grandezza necessaria per accendere il legno secco. Ma uno specchio, che dovesse far quest' effetto alla distanza di 240. piedi, aver dovrebbe, dice Buffon, la larghezza di 30. piedi, o piuttosto (doveva egli dire) di 33. piedi; avvegnachè in distanza di 240. piedi il diametro del foco è $= \frac{240}{108}$ piedi, che sta al diametro di 4. linee, o di $\frac{4}{144}$ piedi come 80. sta all' unità; e però la larghezza o il diametro dello specchio sarà 80. volte cinque pollici, ossia 400. pollici, vale a dire $33 \frac{1}{3}$ piedi.

La semplice esposizione di questa teoria basta per convincere, che le curve, di qualunque specie esser possano, sarebbero in vano impiegate, e si sperimenterebbero inefficaci, qualora si volesse col loro mezzo ardere, e bruciar di lontano. Il diametro del foco di tutti questi specchi curvi di qualchesiasi configurazione non può mai esser più piccolo della corda dell' arco di 32. minuti; dal che inferisce Buffon, che lo specchio concavo il più perfetto, d'un diametro uguale a questa corda, non farebbe mai il doppio dell' effetto d' uno specchio piano della stessa superficie; e se il diametro di questo specchio curvo fosse minore di questa corda, farebbe poco più che uno specchio piano di ugual superficie.

Tutto ciò indusse facilmente il Buffon a rinunziare all' idea di poter bruciar di lontano col mezzo degli specchi curvi di qualsisia forma; e quindi si rivolse agli specchi piani, dall' unione de' quali opportunamente insieme disposti e combinati egli immaginò di conseguire il suo intento. Ideò a tal uopo una macchina per far coincidere al medesimo punto le immagini del sole riflesse da un gran numero di specchi piani di cui era composta, ben convinto che questo mezzo era il solo per poter riuscire nel suo disegno.

Ma le considerazioni da lui fatte sull' ampiezza del foco di qualunque specchio in una gran lontananza, resero dubbioso il Buffon anche intorno alla possibilità della sua idea di bruciare in gran distanza col mezzo degli specchi piani combinati, a motivo appunto della enorme estensione, ch' egli avrebbe dovuto dare alla sua unione di specchi piani per poter produrre della fiamma in uno spazio sì largo co-

me

me è quello del *foco* d'uno specchio qualunque in una grande distanza. Egli fondava i suoi dubbj sul seguente discorso: „ Supponiamo, dic'egli, che la distanza, alla quale io voglio bruciare sia di 240. piedi; io veggo chiaramente, che il foco del mio specchio non può aver meno di due piedi di diametro in questa distanza: qual sarà dunque l'estensione, che io sarò obbligato di dare alla mia unione di specchi piani per eccitar della fiamma in uno spazio focale sì grande? tale estensione poteva essere tanto grande, che la cosa sarebbe stata impraticabile nell'esecuzione; imperocchè paragonando il diametro del foco al diametro dello specchio, ne' migliori specchi di riflessione che noi abbiamo, per esempio collo specchio dell'Accademia, io aveva osservato che il diametro di questo specchio, che è di tre piedi, era cento e otto volte più grande del diametro del suo foco, che ha sol quattro linee; ed io ne conchiudeva, che per bruciare con egual forza a 240. piedi, sarebbe stato necessario, che il mio sistema di specchi avesse avuto 216. piedi di diametro, giacchè il foco aveva due piedi; ora uno specchio di 216. piedi di diametro era sicuramente una cosa impossibile „.

Ma in mezzo a questi dubbj e incertezze riflettè poscia con singolar finezza e sagacità il Buffon, che uno spazio focale più largo dovea far maggior effetto che un altro più ristretto, posta un'uguale densità dei raggi solari; e ciò perchè il calore si comunica e diffonde da una parte all'altra contigua, e si disperde per così dire anche allor quando viene applicato continuamente sullo stesso punto. *Se per esempio* (soggiugne il lodato Autore) *si fa cadere il foco d'un vetro ardente sul centro d'uno scudo, e questo foco non abbia che una linea di diametro, il calore, che esso produce sul centro dello scudo, si disperde e si estende nel volume intero dello scudo, il quale si riscalda sino alla sua circonferenza; e in conseguenza tutto quel calore, che è dapprima impiegato contro il centro dello scudo, non vi si arresta, e non può produrre un effetto così grande come se vi si fermasse totalmente. Ma se invece d'un foco d'una linea, che cade sul mezzo dello scudo, si fa cadere sullo scudo intero un foco d'uguale intensità, tutte le parti dello scudo essendo allora ugualmente riscaldate, non solo non vi ha perdita di calore come per lo* *avanti, ma vi ha per l' opposto un guadagno ed aumento di calore, perchè il punto di mezzo profittando del calore degli altri punti che lo circondano, lo scudo verrà fuso in questo caso, laddove nel primo non sarà che leggermente riscaldato.*

L' esperienza venne all' appoggio di questo fino ed acuto pensamento di Buffon. Egli prese degli specchi di metallo di fochi differenti in ampiezza, e paragonando l' azione dei diversi fochi sopra le stesse materie combustibili, ritrovò, che ad eguale intensità di luce i fochi grandi fanno costantemente molto maggior effetto che i piccoli, e questo stesso egli potè verificare anche nei vetri di refrazione. Un vetro ardente di 32. pollici di diametro ha il suo foco di 8. linee di larghezza alla distanza di 6. piedi, e questo foco fonde il rame in meno d' un minuto. Preso un altro vetro di 32. linee di diametro, e di due terzi di linea di foco, questo alla distanza di 6. pollici non solo non arrivò a fondere in egual tempo il rame, ad onta della stessa intensità della luce nell' uno e nell' altro foco, ma non potè neppur comunicargli un calor mediocre.

Cosiffatte sperienze convinsero il Buffon, che la macchina a specchi, che egli si era proposto di congegnare, poteva esser men grande ed estesa di quel, che il calcolo sembrava permettere. Volle tentarne l' esecuzione; e vi riuscì felicemente.

Il Klugel nella sua bella traduzione alemanna della *Storia inglese dell' Ottica* del Dott. Priestley, arricchita da lui di dotte interessantissime aggiunte, parlando in una di queste aggiunte della scoperta di Buffon relativa alla macchina a specchi, fa opportunamente osservare, che avendo Buffon pe' suoi paragoni e calcoli numerici ben sovente bisogno di sapere la densità della luce nel foco di un dato specchio sferico, è obbligato di ricorrere ogni volta all' esperienza per mezzo de' suoi specchi combinati. Per evitare l' inconveniente di dover tutte le volte, per giugnere a tal cognizione, ripetere un esperimento, sempre molesto e difficile nell' esecuzione, il Klugel propone una regola teorica, che con estrema facilità e semplicità dà la densità della luce nel foco di qualunque specchio sferico concavo. La regola è questa: *Si prenda la cinquantesima quarta parte della distanza focale; se ne faccia il quadrato, e con esso si* *divida il quadrato della corda dello specchio; si moltiplichi il quoziente per quattro; e si avrà il numero, che esprime quante volte la luce raccolta nel foco dello specchio è più densa che la luce semplice del Sole, prescindendo dalla perdita fatta nella riflessione.* Così per cagion d' esempio nel summentovato specchio dell' Accademia di Parigi, che ha tre piedi di corda, e parimenti tre piedi di distanza focale, ossia 108. volte la larghezza del foco che è di quattro linee, trovasi la densità della luce nel suo foco essere 11664. volte maggiore di quella della semplice luce solare.

La giustezza di questa regola, di cui il Klugel non dà la dimostrazione, si pròva facilmente col seguente discorso: la semplice luce solare diffusa per tutta la superficie concava dello specchio incendiario viene condensata nella piccola immagine del Sole, che si raccoglie nel foco, e ne occupa l' estensione, vale a dire la luce rimandata dallo specchio si porta ad occupare uno spazio circolare, che ha per semidiametro $\frac{1}{216}\Delta$, come abbiam già veduto, posto Δ per la distanza focale del dato specchio. E poichè la densità della luce è in ragione inversa della superficie irradiata, sarà quindi la densità della luce solare semplice che cade sullo specchio, alla densità della luce raccolta nel foco, come il cerchio del diametro $\frac{1}{108}\Delta$ alla superficie dello specchio, la quale, in quanto riceve la luce solare, dee considerarsi come un piano circolare, che ha per diametro la corda D dello specchio (*b*).

(*b*) Si noti quì un errore di molti, i quali per ritrovare la quantità della luce solare rimandata da uno specchio sferico concavo, e diretta al suo foco, posta da banda quella, che si perde nella riflessione, prescrivono di moltiplicare tutto il disco del sole non già per l' area dell' apertura dello specchio; ma per la superficie riflettente concava del medesimo. Se lo specchio è un picciol segmento d' una sfera assai grande, allora la regola non discorda sensibilmente dalla vera, perchè la superficie concava dello specchio per poco non si confonde col cerchio della sua apertura: ma negli altri casi il divario può esser grandissimo; e se lo specchio è un intero emisfero, la regola dà un risultato due volte maggiore del giusto.

Perciò la ragione delle due densità è quella di $\left(\frac{1}{108}\Delta\right)^2 : D^2$, ovvero di $\left(\frac{1}{54}\Delta\right)^2 : 4D^2$; e quindi la luce nel foco dello specchio è più densa della luce semplice $\frac{4D^2}{\left(\frac{1}{54}\Delta\right)^2}$ volte; che era da dimostrarsi.

Questa regola vale anche per le lenti ustorie, se si prescinde dalle aberrazioni de' raggi diversamente colorati, e si piglia D pel diametro dell'apertura della lente. Anche la figura sferica così nelle lenti che negli specchi produce un piccolissimo errore chiamato errore della sfericità, per cui i raggi stessi paralleli, o provenienti da uno stesso punto del disco solare incontrano, rifranti o riflessi, in punti un tantino discosti l' asse della lente e dello specchio. Ma questa specie di aberrazione è troppo piccola per invalidare la regola proposta.

Da tal regola intanto si conosce tostamente, che l' effetto di ardere, o riscaldare, o illuminare è tanto maggiore, quanto sono maggiori le superficie, ossia i quadrati delle larghezze o aperture degli specchi e delle lenti, e quanto sono minori i quadrati delle loro distanze focali; talmente che sotto un' ugual curvatura ed ugual larghezza lo specchio opera quattro volte più gagliardamente della lente, perchè ha soltanto la metà della distanza focale di questa, posta da parte la perdita di luce nel riflettersi, e nel rifrangersi.

Si pretende fondar questa regola sul seguente discorso: *ogni punto della superficie concava dello specchio riceve i raggi da tutto il disco del Sole, e li riflette in un cono luminoso, che nella sua base rappresenta l' immagine del disco. Tanti son dunque i dischi riflessi dallo specchio, quanti sono i punti riflettenti della sua superficie; e però il prodotto di questa pel disco dà la copia di luce riverberata.*

Ma è cosa della maggior evidenza, che la superficie concava dello specchio non riceve nè più, nè meno di que' soli raggi, cui ammette l' apertura del medesimo, e tanti sono i coni luminosi, o i dischi riflessi quanti precisamente sono i punti del cerchio di questa apertura. Di che consegue, che non la superficie concava, ma il cerchio dell' apertura dello specchio convien moltiplicare pel disco del sole, per ottenere la quantità di luce che vien rimandata.

Alla bella invenzione dello specchio composto del Buffon, per essere vie maggiormente nobilitata e resa più interessante, mancava solo che un qualche illustre Geometra vi applicasse il calcolo, e con un' analisi rigorosa ne determinasse la precisa quantità degli effetti, ed i loro rapporti. Ciò appunto imprese ed eseguì il celebre Courtivron in un' eccellente Memoria inserita insieme con quella del Buffon nel volume dell' Accademia dell' anno stesso 1747., la quale egli poi riprodusse colle stesse parole in fondo al suo quanto breve tanto sublime *Trattato di Ottica* pubblicato senza nome in Parigi nel 1752. Questo profondo Geometra paragona quivi col mezzo d' un analisi la più fina e delicata l' effetto d' uno specchio incendiario composto di specchi piani coll' effetto d' uno specchio perfettamente sferico, ed a quest' oggetto egli determina la quantità di luce, che ognuno degli specchi piani rimanda sulla medesima estensione occupata dal foco dello specchio sferico portato alla stessa distanza. La sua Memoria è certamente una delle più belle applicazioni, che siano mai state fatte del Calcolo integrale ad un qualche punto di Fisica: ma è pur forza confessare, che per l' affettata brevità, per la strozzatura del raziocinio, e per l' omissione delle prove riguardanti le cose più essenziali e più bisognose di dimostrazione, e finalmente per tre errori commessi dall' Autore nel passare ai risultati, ed alle applicazioni del suo calcolo, la detta Memoria riesce d' un' intollerabile oscurità e difficoltà anche ai Geometri più esercitati.

Trattandosi d' un problema totalmente nuovo nell' Ottica, ed interessante per la sua finezza e singolarità, e per la sottigliezza delle indagini che conducono alla soluzione, ho creduto non inutil fatica quella di trattarlo di nuovo dopo il Courtivron, e di liberarlo da quelle spine e difficoltà, che s' incontrano ad ogni passo nella soluzione da esso recata nella citata Memoria. Calcando la stessa strada da lui tenuta, io mi studierò di render tutto lucido e facile, e di mettere la sua Memoria alla portata ed intelligenza di qualunque Geometra, che conosca soltanto gli elementi dell' Ottica, e del Calcolo Integrale. Dietro le traccie della soluzione del problema, data da quest' Autore, io ne rischiarerò i passi implicati ed oscuri, recando le prove delle cose da esso assunte e non dimostrate, ed aggiungerò in fine le mie riflessioni relative al soggetto in quistione.

Ecco per tanto il

PROBLEMA.

Dato uno specchio piano circolare qualunque (Fig. 1.) TAR, *esposto perpendicolarmente all' azione dei raggi del Sole, ed un piano circolare* FG, *parallelo allo specchio, e posto a qualsivoglia distanza da quello, e supposta tale la loro situazione, che siano paralleli al disco del sole* SNHN *immensamente lontano, e perpendicolari al raggio diretto solare* CBA, *che congiunge i tre rispettivi centri, del disco, del piano, e dello specchio; si domanda la quantità di luce riflessa, che riceve dallo specchio* TR *il piano* FG *d' un dato semidiametro* BF.

Immaginiamo, che sia tolto lo specchio circolare TR, e rimanga nel luogo da esso occupato il foro circolare TR circoscritto da un margine proprio. Egli è evidente, che se da tutti i punti del lembo SNHN del Sole partono dei raggi, i quali vengono a radere l' orlo dell' apertura circolare TR, si avrà un cono luminoso TLR, colla base nel foro, e coll' apice in L sul prolungamento dell' asse comune CA, che passa pei centri del disco solare, del piano da illuminarsi, e del foro. L' angolo TLR di questo cono sarà di 32. minuti, qual è l' angolo, sotto cui comparisce il diametro del Sole; ed il cono conterrà tutti i raggi, che il disco intero del Sole tramanda al foro TR, e comprenderà quello spazio che di là dal foro viene illuminato dall' intero disco solare. In qualunque luogo di questo cono sia l' occhio situato, esso vede sempre per l' apertura tutto il disco solare; ma per poco che l' occhio esca fuori del cono, il margine dell' apertura gli cuopre e nasconde una parte del disco. Se per esempio l' occhio è collocato in Q fuori del cono luminoso TLR, e si prende Q per vertice d' un cono TQR avente per base il foro TR, ed un tal cono vien prolungato sino al disco del Sole, onde abbiasi il cono XQV colla base XNVN situata nel piano stesso del disco solare SNHN; è cosa di per se evidente, che l'occhio in Q non può vedere se non se la parte XNHN del disco solare, la quale viene da esso tagliata per l'incontro della base XNVN del cono predetto; e l'altra parte SNXN del disco rimane all'occhio stesso affatto invisibile. E' altresì chiaro, che l'occhio allontanandosi sempre più dal cono, arriverà in fine a perdere totalmente di vista il disco del Sole.

Da ciò segue immediatamente, che se alla distanza del punto Q dall'asse AL del cono si concepisce una corona circolare, avente per semidiametro la detta distanza, e la larghezza infinitamente piccola, ciascun punto Q di questa corona viene illuminato dalla parte XNHN del disco solare. E così segando con un piano perpendicolare all'asse AL il cono TLR, e fuori della sezione circolare fatta nel cono immaginando nel piano stesso segante un'infinità di tali corone elementari formanti una corona di larghezza qualunque finita, ogni punto di una qualunque di tali corone elementari sarà irradiato da una parte del disco solare, la quale viene determinata come si è fatto pel punto Q. L'intensità della luce in ciascheduna di queste corone elementari sarà differente, come è differente la parte del disco solare, da cui viene illuminata; e nella sola sezione circolare fatta nel cono dal piano segante l'intensità della luce sarà dappertutto la stessa, perchè ogni punto di quella sezione riceve i raggi da tutto il disco del Sole.

Si torni a chiudere l'apertura circolare TR collo specchio piano della stessa figura e grandezza: e gli stessi fenomeni quì annoverati avranno luogo egualmente che prima; la sola differenza sarà, che il cono luminoso TLR, e la penombra, che lo accompagnava in quelle corone esteriori, si cangerà nel cono inverso TIR perfettamente uguale e simile, formato dai raggi riflessi dallo specchio, ed accompagnato dalla sua penombra esteriore. L'uguaglianza dei due coni deriva da quella degli angoli d'incidenza, e di riflessione; perocchè l'angolo d'incidenza fatto dal raggio ST, e dal prolungamento del semidiametro AT dello specchio, ovvero l'angolo opposto LTA dovendo essere uguale all'angolo di riflessione ITA, ne viene in conseguenza, che ne'due triangoli LAT, TAI rettangoli in A, ed aventi il lato comune AT sono uguali anche le ipotenuse LT, TI, cioè uguali i lati dei due coni retti TLR, TIR, e perciò uguali e simili i coni medesimi.

Si seghi il cono di riflessione TIR perpendicolarmente all' asse AI con un piano circolare indefinito FG concentrico alla sezione fatta EB*e*, e la corona esteriore FGE*e* si divida in un numero infinito di corone infinitesime elementari P*lp*. Queste saranno illuminate dalla penombra, cioè da una parte soltanto del disco del Sole, mentre la sezione circolare EB*e* sarà illuminata dai raggi di tutto il disco riflessi dallo specchio TR. Per determinare quella parte del disco, che illumina una qualunque P*lp* di dette corone elementari, si mena da uno qualchesiasi de' suoi punti P una perpendicolare PY al piano dello specchio TR, e si prolunga sino in Q, onde abbiasi QY = YP. Indi preso il punto Q per apice del cono TQR avente per base lo specchio, e prodotto questo cono sino all' incontro col disco solare SNHN, la parte XNHN recisa dal disco in questo incontro è quella, che illumina per raggi *diretti* il punto Q attraverso il foro TR, e per raggi *reflessi* il punto P mediante lo specchio TR, ed oltre il punto P tutti gli altri, che formano la corona elementare P*lp*. Tutto ciò è di evidenza palpabile.

Se vuolsi dunque conoscere la quantità di luce ricevuta sopra un piano qualunque FG per riflessione fatta nello specchio TR, si riguarderà questo piano come composto d' un' infinità di corone elementari P*lp*, ciascuna illuminata da un segmento ad essa corrispondente XNHN del disco del Sole. Si prenderà poscia la somma di tutte le quantità di luce sparsa su tutte le corone elementari. Una tal somma esprimerà tutta la luce sparsa sulla corona indefinita di larghezza EF. A questa somma si aggiungerà la luce uniforme sparsa sulla sezione circolare EB*e*. Con ciò si avrà la quantità di luce diffusa su tutto il piano FG. Ma siccome la luce uniforme ricevuta sulla sezione EB*e* o viene da tutto il disco del Sole, come abbiamo mostrato, se il piano FG si trova fra lo specchio TR e il punto I; o da un *cerchio intero* tagliato entro il disco (come faremo vedere), se il piano FG rispetto allo specchio è situato di là dal punto I: risultano perciò due casi essenzialmente disinti

del

del problema, che esamineremo partitamente l' un dopo l' altro.

CASO I.

Quando il piano da illuminarsi FG *si trova fra lo specchio ed il punto* I. Fig. 1.

Pongasi nel cono TLR, ovvero TIR il semidiametro della base AT$=r$, la sua altezza AI$=a$, e la distanza del piano FG dallo specchio TR, cioè la retta BA$=\frac{a}{m}$. Così pure si faccia il semidiametro del disco del Sole $=$R, la superficie intera del disco $=$D; e sia $\pi:1$ la ragione, che ha la circonferenza del cerchio al diametro. Ciò posto, e chiamato x il semidiametro BP della corona infinitesima circolare Plp, sarà evidentemente l' area di questa corona $=2\pi x dx$. Questa poi moltiplicata per lo spazio NXNH, dal quale viene uniformemente illuminata, darà la quantità di luce, che ne riceve. Ma per questo spazio, è d' uopo d' incominciare dal ritrovare il centro e il semidiametro del cerchio XNV. Un tal centro O si trova con prolungare QA sino al disco del Sole, e il semidiametro OX si determina nel modo seguente: Nel cono SLH noi abbiamo TA : AL : : CS : CL, ovvero $r:a::\mathrm{R}:\frac{a\mathrm{R}}{r}=$CL, e quindi AC$=YZ=CL-AL=\frac{a\mathrm{R}}{r}-a$, e QZ$=QY+$YZ $=\frac{a}{m}+\frac{a\mathrm{R}}{r}-a$. Nel cono poi QTXVR si ha QY : TA : : QZ : OX, cioè $\frac{a}{m}:r::\frac{a}{m}+\frac{a\mathrm{R}}{r}-a:r+m\mathrm{R}-mr=$OX; e perchè in confronto di mR svanisce la quantità $r-mr$, nasce perciò OX$=m$R. Inoltre l'analogia QY : YA : : QZ : ZO, ovvero $\frac{a}{m}:x::\frac{a}{m}+\frac{a\mathrm{R}}{r}-a:x+\frac{m\mathrm{R}x}{r}-mx$ dà ZO$=x-mx$ $+\frac{m\mathrm{R}x}{r}$, e per essere ZC$=$YA$=$BP$=x$, ne verrà CO$=$ ZO$-$ZC$=\frac{m\mathrm{R}x}{r}-mx=\frac{m\mathrm{R}x}{r}$ per l' estrema picciolezza di mx in confronto dell' altro termine.

Abbasso dal punto N, dove il cerchio XNVN taglia il disco del Sole, la perpendicolare NK sul diametro solare SH, e faccio NK$=z$; onde sarà CK$=\sqrt{(CS^2-NK^2)}=\sqrt{(R^2-z^2)}$, ed SK$=R+\sqrt{(R^2-z^2)}$, e quindi $dSK=\frac{zdz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}$. Con ciò l' elemento del segmento circolare NSNK, che è 2NK.dSK, risulta $=\frac{2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}$; ed integrando offresi il segmento stesso NSNK espresso dall' integrale $2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}$.

Così nel cerchio NXNV, che ha per raggio OX$=m$R, ed OK$=\sqrt{(OX^2-NK^2)}=\sqrt{(m^2R^2-z^2)}$, si avrà XK$=OX-OK=mR-\sqrt{(m^2R^2-z^2)}$, e l' elemento del segmento circolare NXNK sarà 2NK .$dXK=\frac{2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$; e perciò sarà NXNK $=2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$. Levando questo segmento dal precedente, resta lo spazio curvilineo N XNS$=2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}-2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$, e tolto questo spazio da tutto il disco solare NSNH$=$D resta NXNH$=D-2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}-2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$, che è quella parte del disco, la quale illumina la corona elementare Plp. Perlocchè moltiplicando Plp per NXNH, il prodotto $2\pi D\,xdx-4\pi xdx\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}+4\pi x\,dx\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$ esprimerà la quantità di luce ricevuta dalla corona; ed integrando questa espressione si otterrà la quantità di luce sparsa su tutta la corona, che ha per larghezza PE.

Ora il detto integrale si presenta sotto la forma seguente: *(A)* $\pi Dx^2-2\pi x^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}+2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}+2\pi x^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}-2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$, dove il primo, il secondo, e il quarto termine non abbisognano di ulteriore riduzione, essendo manifesto il loro rispettivo valore; ma il terzo, ed ultimo che comprendono sotto i segni d'integrazione le due variabili insieme x, z, esigono una riduzione indispensabile per poter determinare il loro valore. A tal effetto elimino x dai detti due termini, e vi sostituisco il suo valore dato per z, che si ricava dall'essere $CO = OK - CK$, cioè $\frac{mRx}{r} = \sqrt{(m^2R^2 - z^2)} - \sqrt{(R^2 - z^2)}$, e però $x = \frac{r}{mR}\left(\sqrt{(m^2R^2 - z^2)} - \sqrt{(R^2 - z^2)}\right)$; che dà, quadrando, $x^2 = \frac{r^2}{m^2R^2}\left(m^2R^2 + R^2 - 2z^2 - 2\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}\sqrt{(R^2 - z^2)}\right)$. Sostituito questo valore, risultano i predetti due termini

$$2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} - 2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} = \frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(m^2R^2 + R^2 - 2z^2 - 2\sqrt{(m^2R^2-z^2)}\sqrt{(R^2-z^2)}\right)\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} - \frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(m^2R^2 + R^2 - 2z^2 - 2\sqrt{(m^2R^2-z^2)}\sqrt{(R^2-z^2)}\right)\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}.$$

In questa equazione il primo termine del secondo membro $\left(\text{per essere } \sqrt{(m^2R^2-z^2)} = \frac{m^2R^2-z^2}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right)$ si riduce al seguente: $\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(\frac{(m^2+1)R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} - \frac{2z^4dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} + \frac{2z^4dz - 2m^2R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right)$; e il secondo termine dello stesso membro, a motivo di $\sqrt{(R^2-z^2)} = \frac{R^2-z^2}{\sqrt{(R^2-z^2)}}$, si converte in

$$-\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(\frac{(m^2+1)R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} - \frac{2z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} + \frac{2z^4dz - 2R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}\right),$$

e in conseguenza l'equazione si ridurrà a questa:

$$\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(\frac{(m^2+3)R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} - \frac{(3m^2+1)R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right) + \frac{8\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(\frac{z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} - \frac{z^4dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}\right) = 2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}$$

$-2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$ *(B)*. Ma integrando per parti si ha $\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}=\int z^3.\frac{zdz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}=-z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)}+$ $3\int z^2dz\sqrt{(m^2R^2-z^2)}=-z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)}+$ $3\int\frac{(m^2R^2-z^2)z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}=-z^3\sqrt{m^2R^2-z^2)}+3m^2R^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$ $-3\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$, e trasponendo quest' ultimo termine, e dividendo per 4, nasce $\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}=-\frac{1}{4}z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)}$ $+\frac{3}{4}m^2R^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$; e quindi per la stessa ragione $\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}=-\frac{1}{4}z^3\sqrt{(R^2-z^2)}+\frac{3}{4}R^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}$. Dunque $\frac{8\pi r^2}{m^2R^3}\int\left(\frac{z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}-\frac{z^4dz}{\sqrt{(R^2z^2)}}\right)=\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\Big(z^3\sqrt{(R^2-z^2)}$ $-z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)}\Big)+\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(\frac{3m^2R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2z^2)}}-\frac{3R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}\right)$; e sostituendo questo valore nell' equazione *(B)* essa si cangia in $2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}-2\pi\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}=$ $\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\Big(z^3\sqrt{(R^2-z^2)}-z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)}\Big)+$ $\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(\frac{m^2R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}-\frac{R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right)$. Il secondo membro di questa equazione posto pel suo equivalente nell' integrale *(A)* sopra trovato dà allo stesso integrale quest' altra forma: $\pi Dx^2-2\pi x^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}+2\pi x^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}+$ $\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\int\left(\frac{m^2R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}-\frac{R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right)+$

$\frac{2\pi r^2}{m^2 R^2}\left(z^3\surd(R^2-z^2)-z^3\surd(m^2R^2-z^2)\right)$; e perchè abbiamo $2\int\frac{z^2 dz}{\surd(m^2R^2-z^2)}=NXNK$, $2\int\frac{z^2 dz}{\surd(R^2-z^2)}=NSNK$, e si è dianzi trovato $x=\frac{r}{mR}\left(\surd(m^2R^2-z^2)-\surd(R^2-z^2)\right)$, ovvero $\surd(R^2-z^2)-\surd(m^2R^2-z^2)=-\frac{mRx}{r}$, il predetto integrale si trasforma in $\pi Dx^2-\pi x^2(NSNK-NXNK)+\pi r^2 . NSNK-\frac{\pi r^2}{m^2}.NXNK-\frac{2\pi r x z^3}{mR}+$ Cost.; e questo esprime la quantità di luce diffusa sulla corona circolare della larghezza EP. Per determinare la Costante dell' integrazione osservo, che la quantità di luce ossia l' integrale svanisce in E, che è il principio della corona, ed allora $x=BE$, il punto Q cade sulla retta LS, i punti N, X cadono sul punto S, e conseguentemente svanisce NK, ossia z, e svaniscono insieme i segmenti circolari NXNK, NSNK. Avremo dunque Cost. $=-\pi D.BE^2$; e perciò la predetta quantità di luce sarà espressa dalla formola $(\pi r^2-\pi x^2).NSNK-\left(\frac{\pi r^2}{m^2}-\pi x^2\right).NXNK-\frac{2\pi r x}{m}.\frac{NK^3}{CS}+\pi Dx^2-\pi D.BE^2$, la quale, per essere $-\pi x^2.(NSNK-NXNK)+\pi Dx^2=\pi x^2.(NSNH-NSNK+NXNK)=\pi x^2.NXNH$, si converte in $\pi x^2.NXNH+\pi r^2.NSNK-\frac{\pi r^2}{m^2}.NXNK-\frac{2\pi r x}{m}.\frac{NK^3}{CS}-\pi D.BE^2$. Ma $D=NSNH=NSNK+NKNH=NSNK+NXNH-NXNK$; e perciò $-\frac{\pi r^2}{m^2}.NXNK=\frac{\pi r^2}{m^2}D-\frac{\pi r^2}{m^2}.NSNK-\frac{\pi r^2}{m^2}NXNH$; dunque sostituendo questo valore, la detta formola sarà (*C*) $\left(\pi x^2-\frac{\pi r^2}{m^2}\right).NXNH+\frac{\pi r^2}{m^2}(m^2-1).NSNK-\frac{2\pi r x}{m}.\frac{NK^3}{CS}+\frac{\pi r^2}{m^2}D-\pi D.$

BE^2, ed esprimerà la quantità di luce, che irradia la mentovata corona circolare.

Che se, come porta la figura, il piano illuminato FG si troverà situato fra lo specchio TR, ed il punto I, si otterrà l' illuminazione di tutto il piano PpB con aggiugnere alla formola (*C*) la quantità $\pi D . BE^2$, che rappresenta la luce, da cui viene irradiato il cerchio del semidiametro BE, ed in tal caso la copia di luce sparsa su tutto il piano PpB viene rappresentata dalla formola

$$(D)\ \left(\pi x^2 - \frac{\pi r^2}{m^2}\right) . NXNH + \frac{\pi r^2}{m^2}\left(m^2 - 1\right) . NSNK - \frac{2\pi r x}{m} . \frac{NK^3}{CS} + \frac{\pi r^2}{m^2} D .$$

Se si vuole presentemente paragonare l' effetto d' uno specchio piano con quello d' uno specchio sferico concavo della stessa grandezza, il cui foco sia situato nel centro del cerchio illuminato FG, è d' uopo riflettere, che l' estensione del foco di questo specchio deve essere un cerchio, il cui diametro guardato dall' estremità dell' asse dello specchio sottende un angolo di 32. minuti, cioè uguale all' angolo sotto cui si vede il diametro del Sole: siccome poi l' angolo AIT è di 16. minuti, cioè la metà dell' angolo mentovato, che ha il vertice in A, e la base nel piano FG, la similitudine de' due triangoli rettangoli, che ne risultano, mostra, che deve stare AI ad AB, come sta il semidiametro dell' apertura dello specchio al semidiametro del suo spazio focale, vale a dire $a : \frac{a}{m} :: r : \frac{r}{m}$. Essendo adunque il semidiametro di questo foco $= \frac{r}{m}$, si fa manifesto, che per avere la quantità di luce, che lo spazio occupato dal foco dello specchio concavo sul piano FG riceve dal riverbero dello specchio piano TR di ugual largezza del concavo, basta porre nella formola (*D*) il valore $\frac{r}{m}$ in luogo di x. In vigore di questa sostituzione la detta formola si cangia nell' altra più semplice (*E*) $\frac{\pi r^2}{m^2}\left((m^2 - 1). NSNK - \frac{2NK^3}{CS} + D\right)$, la quale esprime la quantità di luce rimandata dallo specchio piano TR sullo spazio, che occupa nel piano FG il foco dello specchio concavo. Ma la quantità di luce tramandata sullo stesso spazio dallo specchio concavo si ottiene evidentemente con moltiplicare il disco del sole per l' area dell' apertura dello specchio, ed è conseguentemente espressa da $\pi r^2 D$. Dunque la proporzione che vi ha tra l' effetto prodotto dallo specchio concavo, e l'effetto prodotto dallo specchio piano di ugual larghezza sarà rappresentata dalla frazione

$$\frac{\pi r^2 D}{\frac{\pi r^2}{m^2}\left((m^2-1) \cdot NSNK - \frac{2NK^3}{CS} + D\right)}$$

$$= \frac{D}{\frac{D}{m^2} + \frac{(m^2-1)}{m^2} \cdot NSNK - \frac{2NK^3}{m^2 CS}} \quad (F).$$

Si avverta per tanto, che essendosi supposto, che lo spazio illuminato sul piano FG sia quello stesso, che viene occupato dal foco dello specchio concavo, in tale ipotesi il centro del cerchio XNV deve cascare in H: avvegnachè se si assume a cagion d' esempio, che BP sia il semidiametro di quel foco, e quindi sia veduto da A sotto un angolo di 16. minuti, guidata la retta QA anche il suo uguale YQA sarà di 16. minuti, e conseguentemente uguale all' angolo ALR; e però la retta QA sarà parallela ad LR, e prolungata incontrerà il disco del sole nello stesso punto H, dove lo incontra la LR: dunque sarà H il centro di quel cerchio XNV, che forma la base del cono TQR prolungato sino al disco del Sole, da cui taglia la parte ad entrambi comune XNHN. Il semidiametro poi del detto cerchio XNV si è già dimostrato uguale al prodotto del numero m nel semidiametro R del disco del sole, cioè $= m$ R.

Col mezzo delle precedenti determinazioni potremo sempre al bisogno avere in numeri il rapporto cercato dell' effetto dello specchio concavo a quello dello specchio piano ugualmente largo.

Esempio primo.

Si supponga, che il foco dello specchio concavo sia nella punta I del cono TIR, e che ivi pure sia collocato il piano FG, che dee ricevere l' immagine del sole. In questo caso si avrà AB = AI, cioè $\frac{a}{m} = a$, e quindi $m = 1$; onde la formola *(F)* si trasmuta in $\frac{D}{D - \frac{2\overline{NK^3}}{R}} = \frac{RD}{RD - 2.\overline{NK^3}} = \frac{\pi R^3}{\pi R^3 - 2.\overline{NK^3}}$.

Il cerchio XNV diventa in questo supposto uguale al disco del sole, ed avendo il suo centro in H sulla circonferenza del disco, ne taglia visibilmente l' arco HN di 60. gradi. E' dunque NK = R sen. 60°, ed $NK^3 = R^3$ (sen. 60°$)^3$, e fattane la sostituzione nella predetta formola, essa diventa $\frac{\pi}{\pi - 2(\text{sen. } 60°)^3} = \frac{\pi}{\pi - 2 . \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}} = \frac{3,14}{3,14 - 1,30}$ $= \frac{3,14}{1,84} = \frac{314}{184}$. Dunque in questo caso l' effetto dello specchio concavo sarà sempre all' effetto dello specchio piano nella ragione di 314 a 184, ovvero di 5 a 3 con picciol divario.

Scolio.

Courtivron, che adduce l' Esempio precedente, dà allo specchio concavo la corda d' un piede, e quindi ne inferisce, che nelle accennate circostanze *l' effetto dello specchio piano sarà a quello dello specchio concavo come* 184 *a* 314 *nella distanza di circa* 50. *piedi*. Ma in realtà questa distanza anzichè di 50. deve essere di 108. piedi: avvegnachè, supponendosi nell' apice I del cono di riflessione HIT il foco dello specchio concavo, ed essendo l' angolo HIT di 32. minuti, egli è evidente, che la distanza AI sarà uguale a 108. volte la corda TH, e se questa è d' un piede, sarà quella di piedi 108.

Esem-

Esempio Secondo.

Sia ora il piano FG, e quindi anche il foco dello specchio concavo situato nel punto di mezzo di AI, cosicchè $AB = \frac{a}{m} = \frac{AI}{m}$ sia $= \frac{1}{2} AI$, e però $m=2$; in questo supposto il semidiametro del cerchio XNV trovasi $= mR = 2R$, cioè $HN = HS$. Di quì è manifesto, che sparisce così l' ordinata NK, come lo spazio circolare NSNK. Dunque la formola (F), che rappresenta il rapporto degli effetti de' due specchi di ugual larghezza concavo, e piano, si cangia in $\frac{m^2 D}{D} = m^2 = 4$; che dà a divedere, come l' effetto dello specchio concavo è in questo caso quattro volte tanto quanto quello del piano.

Ciò altronde si dimostra dall' essere il diametro del foco la metà del diametro dell' apertura dello specchio, come si è supposto essere la distanza focale AB la metà di AI; dal che viene, che la luce nello spazio focale è densa quattro volte tanto quanto la luce semplice del Sole, che va a cadere sullo specchio concavo. Ma anche la luce reflessa dallo specchio piano nello spazio occupato dal foco del concavo è in questo caso ugualmente densa che la semplice luce solare, perchè quello spazio focale in quest' esempio resta tutto compreso dentro il cono di riflessione TIR, e però ogni suo punto riceve la luce da tutto il disco del Sole; onde la misura di essa luce si ha con moltiplicare lo spazio focale illuminato per tutto il disco del Sole, come per appunto si ha la misura della luce *semplice* solare, che illumina uno spazio dato. Da ciò dunque si scorge, che l' effetto dello specchio concavo nel presente supposto esser dee quadruplo di quello dello specchio piano.

Esempio Terzo.

Facciamo il supposto generale, che la distanza AB del piano FG dallo specchio TR sia comunque minore della metà dell' asse AI del cono di riflessione, per modo che

m sia comunque maggiore di 2., allora il semidiametro $HN = mR$ del cerchio XNV verrà ad esser maggiore del diametro HS del disco del Sole. Conseguentemente anche in questo supposto svaniscono l' ordinata NK, e il segmento circolare NSNK; e la ragione degli effetti prodotti dai due specchi, concavo e piano, viene espressa da $m^2D : D$, ovvero da $m^2 : 1$, che è la ragione del quadrato dell' asse AI del cono di riflessione al quadrato della distanza focale AB dello specchio concavo, ovveramente la ragione del quadrato della corda dello specchio al quadrato del diametro del foco.

Si dimostra questo stesso indipendentemente da ogni trasformazione della formola (F) con un raziocinio affatto simile a quello dell' *Esempio* precedente, che perciò tralasciamo.

Scolio.

Courtivron dopo aver errato nel primo Esempio, seguita a sbagliare più gravemente nel secondo e nel terzo, ne' quali assume $m = \frac{1}{2}$, ed $m = \frac{1}{3}$, cioè AB=2AI, ed AB=3AI, supponendo così, che la distanza del piano illuminato FG dallo specchio sia maggiore dell' asse AI; e con tutto ciò si vale, anche per questa ipotesi, della formola (F), la quale non è giusta nè esatta, se non nell' ipotesi opposta che la detta distanza del piano FG sia minore di AI, ed ha bisogno di essere in parte cambiata e modificata per adattarsi all' altra ipotesi, come vedremo più appresso. Nessun conto adunque può farsi de' risultati del calcolo di quest' Autore.

Esempio Quarto.

Si faccia ora l' ipotesi, che il piano da illuminarsi FG sia distante dallo specchio TR per più della metà dell' asse AI, ma meno però di tutto l' asse AI, e in conseguenza sia m minore di 2, e maggiore di 1, cioè contenuto fra i limiti 2, ed 1. Prendo per tanto $m = \frac{3}{2}$, ed ho nel cerchio XNV il semidiametro $HN = mR = \frac{3}{2}R$, e quindi $HK = \frac{HN^2}{HS} = \frac{9}{4}\frac{R^2}{2R} = \frac{9}{8}R$; $CK = HK - HC = \frac{9}{8}R - R = \frac{1}{8}R$; $NK = \sqrt{\left(R^2 - \frac{1}{64}R^2\right)} = \frac{R}{8}\sqrt{63}$. Essendo dunque CK, coseno dell' arco NS, l' ottava parte del raggio, sarà l' arco NS di 82°. 11′ con pochissimo divario; e però l' arco stesso $NS = 1{,}43437\,R$ (a), ed il settore $CNSN = NS.CN = 1{,}43437\,R^2$. Si sottragga da questo settore il triangolo $NCN = CK.NK = \frac{1}{64}R^2\sqrt{63} = \frac{3}{64}R^2\sqrt{7} = \frac{3}{64}.2{,}64575\,R^2 = 0{,}15527R^2$; onde resterà il segmento $NSNK = 1{,}27910R^2$. Inoltre $NK^3 = \frac{63R^3\sqrt{63}}{8^3} = \frac{189R^3\sqrt{7}}{512}$, e $\frac{2NK^3}{CS} = \frac{189R^2\sqrt{7}}{256} = 1{,}95331\,R^2$. Con ciò la formola (*F*) diventa

$$\frac{m^2\pi}{\pi + 1{,}27910\,(m^2 - 1) - 1{,}95331} =$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3{,}14159}{3{,}14159 + \frac{5}{4}.1{,}17910 - 1{,}95331} = \frac{2827431}{1114862}$$; il che mostra, che la proporzione degli effetti dei due specchi concavo e piano è presso a poco quella di 2827 : 1115, e conseguentemente l' effetto dello specchio concavo vale un poco più di due volte e mezzo l' effetto del piano di ugual larghezza.

Scolio.

Poichè in questo Esempio si è supposto $AB = \frac{2}{3}AI$, sarà anche il diametro del foco dello specchio concavo due terzi della sua corda TR, e conseguentemente la densità della luce raccolta dallo specchio concavo nel suo foco

(a) Vedi le Tavole Trigonometriche del Schulz Tom. II. p. 267. 274. Berlin 1778.

equivalerà a due volte e un quarto la densità della luce semplice solare. Ma da ciò non viene punto, come a prima vista potrebbe sembrare, che lo specchio concavo faccia due volte e un quarto quanto lo specchio piano di ugual larghezza. L' illegittimità di questa conseguenza, che pure potrebbe imporre a molti, deriva dall' essere in questo caso lo spazio focale dello specchio più largo che non è la sezione corrispondente del cono di riflessione ITR; e quindi la corona di questo spazio, che sporge fuori del cono, riceve in ognuno de' suoi punti i raggi riflettuti dallo specchio piano, i quali provengono non già da tutto il disco del Sole, ma soltanto da uno de' suoi segmenti, spettando alla sola parte del foco, la quale coincide colla sezione del cono o è contenuta dentro il medesimo, la proprietà di ricevere dal riverbero dello specchio piano i raggi di tutto il disco solare.

CASO SECONDO.

Quando il piano da illuminarsi FG *è collocato rispetto allo specchio di là del punto* I. Fig. II.

Passiamo ora alla seconda parte del Problema, nella quale il piano illuminato FG non si suppone più collocato fra lo specchio TR, e l'apice I del cono di riflessione, come nella prima parte, ma al di là del punto I in distanza dallo specchio, maggiore dell' asse AI.

Si concepisca indefinitamente prolungato oltre il suo vertice I il cono di riflessione TIR, sicchè nasca il cono conjugato ed opposto *t*I*r*; così pure il cono TLR formato dai raggi diretti s' immagini indefinitamente estendersi al di là del suo apice L, e generare il cono conjugato ed inverso DL*d*. Se si prendono in questi due coni parallelamente al disco del Sole, cioè perpendicolarmente al loro asse comune, due sezioni uguali ed ugualmente distanti dai loro rispettivi vertici L, I, e sia D*d* la sezione fatta nel cono superiore; egli è manifesto, che la sezione D*d* riceverà dal Sole quella stessa quantità di luce *diretta* che riceve di luce *riflessa* dallo specchio piano TR la sezione corrispondente del cono *t*I*r*, posta in non cale la perdita indeterminabile fatta nella riflessione. Ora ciascun punto della sezione D d viene illuminato non già da tutto il disco del Sole, ma da una parte di lui, la quale è un cerchio, il cui semidiametro sta a quello del disco come l'asse AL del cono diretto alla distanza AM dello specchio dalla sezione. Per dimostrar questo, si prenda nella sezione un punto qualunque U, e sia esso la sommità di un cono, il quale abbia per base TR, e sia prolungato sino al Sole, dove taglia nel disco solare un cerchio, tutto rinchiuso nello stesso disco. Facciasi questo cerchio $= \varphi$; e preso in detta sezione il punto M, estremo dell' asse LM, per sommità d' un altro cono avente per base TR, e prolungato sino al Sole, anche questo cono taglia nel disco del Sole un cerchio interno, che supporremo $= \omega$. Questi due cerchi esser debbono uguali, cioè $\varphi = \omega$; avvegnachè il semidiametro AT sta al semidiametro del cerchio φ come UA alla retta UAg, che da U per A giunge sino al Sole in g (*a*), e nell' altro cono sta A T al semidiametro del cerchio ω, come MA ad MAC: ma i triangoli simili danno UA:UAg:: MA: MAC; dunque AT ha la stessa ragione ai semidiametri dei due cerchi φ, ω; dunque $\varphi = \omega$. Il semidiametro del cerchio ω, e il semidiametro CS del disco solare sottendono il primo in M, l' altro in L due piccioli angoli CMT, CLS; e conseguentemente i detti semidiametri sono tra loro presso a poco in ragion composta di MC : LC (che per l'immensa distanza del Sole è ragione di uguaglianza), e degli angoli stessi AMT : ALT, e questi avendo la stessa sottesa AT sono a un dipresso per la loro picciolezza in ragione inversa dei lati, cioè AMT:ALT:: AL: AM; ond' è il semidiametro del cerchio ω, oppure del cerchio φ al semidiametro del disco solare come è AL ad AM.

Di qui si scorge, che ciascun punto della sezione Dd, e conseguentemente anche della sezione corrispondente ed uguale Ee (Fig. II.) del cono inferiore r I r viene illuminato da una parte del disco solare espressa dal cerchio

(*a*) Questa retta UAg, come neppure il punto g nel disco del sole, nè la lettera g non si vedono segnate nella Figura, per non imbarazzarla; ma è facile supplirvi col pensiero.

φ, il quale, ritenute le precedenti denominazioni, ha per semidiametro mR, e per capacità $\pi m^2 R^2 = m^2 D$. Si faccia ora passare per la sezione Ee il piano circolare da illuminarsi FG concentrico alla sezione. La corona di questo piano, la quale sporge fuori della sezione, ed ha una larghezza indeterminata $EP = x$, si concepisca divisa in tante corone elementari Plp; ed avremo $Plp = 2\pi x dx$. Per determinare la quantità di luce, che riceve la corona elementare Plp, prendo in essa un punto qualunque P, e da questo meno al piano, che passa per lo specchio RT, la perpendicolare PY, cui prolungo fino in Q raddoppiando la sua lunghezza. Considero Q come la sommità di un cono, che ha per base lo specchio TR, e prolungato sino al disco del Sole SNHN segna sul piano del disco la base circolare XNVN, e taglia dallo stesso disco la parte XNHN. Questa parte XNHN è visibilmente quella, che illumina con raggi *diretti* il punto Q per l' apertura fatta in TR; e per necessaria conseguenza essa illumina con raggi *riflessi* il punto P mediante lo specchio TR; e così questo stesso spazio XNHN illuminando qualunque altro punto della corona elementare Plp, si otterrà l' illuminazione di lei, o la copia della luce sparsa sulla medesima con moltiplicare lo spazio illuminante XNHN per la corona illuminata Plp.

Conduco nel disco solare le stesse linee in questa seconda Figura, come si è fatto nella prima. Osservo, che la parte XNHN dello stesso disco è uguale al cerchio XNVN, meno il segmento KNVN di esso cerchio, più il segmento KNHN del disco. Dunque la quantità di luce rimandata dallo specchio piano TR sulla corona elementare Plp avrà per misura il prodotto $Plp.\mathrm{XNHN} = 2\pi x dx .(\mathrm{XNVN} - \mathrm{KNVN} + \mathrm{KNHN})$. Ora per ciò che si è dimostrato precedentemente, il semidiametro ON del cerchio XNVN è $= mR$, e quindi il cerchio stesso $\mathrm{XNVN} = \pi m^2 R^2 = m^2 D$; inoltre il segmento $\mathrm{KNVN} = 2\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}}$, ed il segmento $\mathrm{KNHN} = 2\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}}$. Perlocchè la quantità di luce della corona elementare Plp risulta =

$2m^2\pi D x dx + 4\pi x dx \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}} - 4\pi x dx \int \frac{z dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}}$ (G). L' integrale di questa formola (G) preso fra i limiti E, P dà la quantità di luce diffusa su tutta la corona della larghezza EP. Questo integrale viene manifestamente espresso dalla formola $m^2\pi D x^2 + 2\pi x^2 \left(\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}} \right)$ $+ 2\pi \int \frac{x^2 z^2 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}} - 2\pi \int \frac{x^2 z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}}$ (H). Si trova come sopra, $x^2 = \frac{r^2}{m^2R^2}\left(m^2R^2 + R^2 - 2z^2 - 2\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}\sqrt{(R^2 - z^2)} \right)$. Sostituisco questo valore di x^2 nei due ultimi termini della formola (H), ed ho $2\pi \left(\int \frac{x^2 z^2 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}} - \int \frac{x^2 z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}} \right) =$

$$\frac{2\pi r^2}{m^2R^2} \int \left(m^2R^2 + R^2 - 2z^2 - 2\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}\sqrt{(R^2 - z^2)} \right) \frac{z^2 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}}$$

$$- \frac{2\pi r^2}{m^2R^2} \int \left(m^2R^2 + R^2 - 2z^2 - 2\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}\sqrt{(R^2 - z^2)} \right) \frac{z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}}$$

$$= \frac{2\pi r^2}{m^2R^2} \int \frac{(m^2R^2 + R^2) z^2 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}} - \frac{4\pi r^2}{m^2R^2} \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}} -$$

$$\frac{4\pi r^2}{m^2R^2} \int z^2 dz \sqrt{(R^2 - z^2)} - \frac{2\pi r^2}{m^2R^2} \int \frac{(m^2R^2 + R^2) z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}} +$$

$\frac{4\pi r^2}{m^2R^2} \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}} + \frac{4\pi r^2}{m^2R^2} \int z^2 dz \sqrt{(m^2R^2 - z^2)}$; e sostituendo nel termine integrale moltiplicato per $\sqrt{(R^2 - z^2)}$ il valore di questo fattore cioè $\frac{R^2 - z^2}{\sqrt{(R^2 - z^2)}}$, e parimente nell' altro termine integrale moltiplicato per $\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}$ il valore $\frac{m^2R^2 - z^2}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}}$, e facendo la riduzione, ci si presenta

$$2\pi \left(\int \frac{x^2 z^2 dz}{\sqrt{(m^2R^2 - z^2)}} - \int \frac{x^2 z^2 dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)}} \right) =$$

$\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\left(\int\frac{(3m^2R^2+R^2)z^3dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} - \int\frac{(m^2R^2+3R^2)z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}\right) +$
$\frac{8\pi r^2}{m^2R^2}\left(\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} - \int\frac{z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right)$. Ma abbiamo già trovato precedentemente $\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} = -\frac{1}{4}z^3\sqrt{(R^2-z^2)} + \frac{3}{4}R^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}$, e così pure $\int\frac{z^4dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} = -\frac{1}{4}z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)} + \frac{3}{4}m^2R^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}$; dunque sostituendo avremo $2\pi\left(\int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} - \int\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}}\right) =$
$\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\left(\int\frac{(3m^2R^2+R^2)z^2d^2z}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} - \int\frac{(m^2R^2+3R^2)z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} + \int\frac{3R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} - \int\frac{3m^2R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right) + \frac{2^2r^2}{m^2R^2}\left(z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)} - z^3\sqrt{(R^2-z^2)}\right) = \frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\left(\int\frac{R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} - \int\frac{m^2R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} + z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)} - z^3\sqrt{(R^2-z^2)}\right)$. Fatta la sostituzione di questo valore nella formola (*H*), essa si cangia in quest' altra $m^2\pi Dx^2 + 2\pi x^2\left(\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} - \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}}\right) +$
$\frac{2\pi r^2}{m^2R^2}\left(\int\frac{R^2z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} - \int\frac{m^2R^2z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} + z^3\sqrt{(m^2R^2-z^2)} - z^3\sqrt{(R^2-z^2)}\right)$ (*I*), la quale coll' aggiunta della opportuna Costante rappresenta la quantità di luce, che riceve dallo specchio TR la corona indefinita della larghezza EP.

Abbiamo già veduto essere $m^2\pi Dx^2 = \pi x^2 \cdot$ XNVN; $2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R^2-z^2)}} =$ KNHN; $2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(m^2R^2-z^2)}} =$ KNVN; $z =$

NK;

NK; $CO = \frac{mRx}{r} = CK - OK = \sqrt{(CN^2 - NK^2)} - \sqrt{(ON^2 - NK^2)} = \sqrt{(R^2 - z^2)} - \sqrt{(m^2R^2 - z^2)}$. Fatte per tanto queste sostituzioni nella precedente formola (I); essa diventa $\pi x^2 . (XNVN + KNHN - KNVN) + \frac{\pi r^2}{m^2} . (KNVN - m^2 . KNHN) - \frac{2\pi rx}{m} . \frac{NK^3}{CS} + Cost.$, la quale, per essere $XNVN + KNHN - KNVN = NXNH$, e $KNVN = NVNH + NHNK$, si riduce a quest' altra $\pi x^2 . NXNH + \frac{\pi r^2}{m^2} NVNH + \frac{\pi r^2}{m^2} (1 - m^2) NHNK - \frac{2\pi rx}{m} . \frac{NK^3}{CS} + Cost.$; e questa poi, a motivo di $NVNH = XNVN - NXNH = \pi m^2 R^2 - NXNH = m^2 D - NVNH$, si converte nella seguente:

$$\left(\pi x^2 - \frac{\pi r^2}{m^2}\right) . NXNH + \frac{\pi r^2}{m^2}\left(m^2 D + (1 - m^2) . NHNK\right) - \frac{2\pi rx}{m} . \frac{NK^3}{CS} + Cost. \quad (L).$$

Se in questa formola si assume $X = BE$, essa deve annullarsi, perchè la corona illuminata comincia da E, ed ivi la sua illuminazione è nulla. In tale assunto il punto Q viene a cadere evidentemente sul lato DL del cono D L d; e quindi il punto V cade sul punto H estremo del diametro del Sole, svanisce il segmento NHNK, e l' ordinata NK; e lo spazio NXNH si cangia nel cerchio $= m^2 D$. Da ciò immediatamente si raccoglie nella formola (L) il valore della $Cost. = - \pi m^2 D . BE^2$. Ma questa stessa quantità ora tolta deve poi essere aggiunta alla formola (L) per ottenere la misura dell' illuminazione di tutto il piano circolare P B p, perchè il cerchio interiore concentrico EBe riceve per appunto tanta luce, quanta è rappresentata dal prodotto del cerchio stesso $\pi . BE^2$ nell' altro $m^2 D$. Dunque la quantità di luce, che riflette lo specchio piano TR sul piano circolare indefinito P B p viene espressa dalla formola

$$\left(\pi x^2 - \frac{\pi r^2}{m^2}\right) . NXNH + \frac{\pi r^2}{m^2}\left(m^2 D + (1 - m^2) . NHNK\right) - \frac{2\pi rx}{m} . \frac{NK^3}{CS} \quad (M).$$

Che se ora, per instituire il confronto dell' effetto dello specchio piano con quello dello specchio concavo, faremo il supposto, che l' indeterminata x sia $= \frac{r}{m}$, cioè uguale (come abbiamo sopra mostrato) al semidiametro del foco dello specchio sferico concavo collocato nel luogo occupato dallo specchio piano ugualmente largo T L; vedremo, fatto $x = \frac{r}{m}$, passare l' espressione (M) alla forma più semplice $\frac{\pi r^2}{m^2}\left(m^2 D + (1-m^2).NHNK - \frac{2NK^3}{CS}\right)$ (N). Questa nuova espressione (N) è dunque la misura della luce, che dallo specchio piano T R riflettuta va ad occupare nel piano F G un cerchio avente per semidiametro $\frac{r}{m}$. Ma la luce riflettuta dallo specchio concavo nel suo foco, cioè nel predetto cerchio è espressa, come abbiamo dianzi veduto, da $\pi r^2 D$: dunque sta questa luce a quella come $\pi r^2 D : \frac{\pi r^2}{m^2}\left(m^2 D + (1-m^2).NHNK - \frac{2.NK^3}{CS}\right)$ ovvero come $m^2 D : m^2 D + (1-m^2).NHNK - \frac{2.NK^3}{CS}$, e la frazione

$$\frac{m^2 D}{m^2 D + (1-m^2).NHNK - \frac{2.NK^3}{CS}} \quad (O)$$

rappresenta in qual proporzione sta l' effetto prodotto dallo specchio concavo all' effetto dello specchio piano di ugual larghezza, come si domandava.

Esempio.

Suppongo, che il piano da illuminarsi FG sia collocato ad una distanza AB dallo specchio TR, la quale sia doppia di AI, e che però m sia $= \frac{1}{2}$, e l' immagine del Sole nel foco dello specchio concavo sia doppia dell' apertura dello specchio. In tal supposto la frazione (O) si trasforma in $\dfrac{D}{D+3\,.\,NHNK-8\,.\,\dfrac{NK^3}{CS}}$ (P); e per assegnare il suo valore numerico, rifletto essersi già dimostrato, che quando lo spazio da illuminarsi nel piano FG è uguale al foco dello specchio concavo, sul qual dato è fondata la formola (O); allora il centro O del cerchio XNVN casca sull' estremo H del diametro del disco solare, ed il suo raggio HN si fa $= mR = \frac{1}{2}R$. Di quì abbiamo $HK = \dfrac{HN^2}{SH} = \dfrac{\frac{1}{4}R^2}{2R} = \frac{1}{8}R$; $NK = \sqrt{(HN^2 - HK^2)}$ $= R\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64}\right)} = R\sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{1}{8}R\sqrt{15} = \frac{1}{8}\,.\,3{,}8729833\,R$ $= 0{,}4841229\,R$, ed essendo questo il seno dell' arco HN, trovasi essere il detto arco di 28°. 57'. 18"., che espresso in parti del raggio dà $HN = 0{,}505359\,R$. Quindi il settore $NCNH = CN\,.\,NH = 0{,}505359\,R^2$; ed il triangolo NCN $= CK\,.\,NK = \frac{7}{64}\,.\,3{,}8729833\,R^2 = 0{,}4236075\,R^2$; e però $NHNK = NCNH - NCN = 0{,}081752\,R^2$; onde $3\,.\,NHNK$ $= 0{,}245256\,R^2$. Inoltre si ha $8\,.\,\dfrac{NK^3}{CS} = \dfrac{15}{64}\,.\,3{,}8729833\,R^2$ $= 0{,}907730\,R^2$, e $D = 3{,}141593\,R^2$; conseguentemente il valor numerico della formola $\dfrac{D}{D+3\,.\,NHNK-8\,.\,\dfrac{NK^3}{CS}}$ vedesi essere $\dfrac{3{,}141593}{3{,}141593+0{,}245256-0{,}907730} = \dfrac{3141593}{2479119} = \dfrac{314}{248}$ a un dipresso, il qual rapporto trovasi con picciol divario da Courtivron espresso $314 : 247\frac{1}{2}$. Laonde sta l' effetto dello specchio concavo a quello dello specchio piano di ugual larghezza come $314 : 248$.

Scolio.

Nell' ipotesi di questa seconda parte del Problema, che il piano da illuminarsi FG sia collocato oltre il punto I, cioè ad una distanza AB dallo specchio TR, maggiore dell' asse AI del cono di riflessione, e che tal distanza AB sia la *focale* dello specchio concavo situato nel luogo stesso dello specchio piano TR; ne viene in conseguenza, che il foco dello specchio concavo occupa sul piano TG uno spazio maggiore del cerchio EBe, ossia della sezione fatta dal piano FG nel cono inverso rIt. Ciò si raccoglie dall' essere il semidiametro del predetto foco $= \frac{r}{m}$, ed il semidiametro BE del cerchio EBe $= \frac{(1-m)r}{m}$ per l' analogia IA : AT :: IB : BE; ond' è $\frac{r}{m} : \frac{(1-m)r}{m} :: 1 : 1-m$, e la ragione di $1 : 1-m$ è una ragione di *maggiore ineguaglianza*, perchè in quest' ipotesi m è sempre una *vera* frazione.

Trovasi qui il singolar riscontro d' una perfetta uguaglianza degli effetti dei due specchi in ordine all' illuminazione da entrambi prodotta nel cerchio EBe. In fatti si è veduto, che la quantità di luce riflettuta dallo specchio concavo nel suo foco è $=\pi r^2 D$, e questa sta a quella, che dal detto specchio è riflettuta nel cerchio EBe, in ragione duplicata de' semidiametri, cioè come $\frac{r^2}{m^2} : \left(\frac{1-m}{m}\right)^2 r^2$, o come $1 : (1-m)^2$; onde la luce rimandata dallo specchio concavo sul cerchio EBe ha per misura $\pi(1-m)^2 r^2 D$; e questa è pur anco la misura della quantità di luce dallo specchio piano riverberata sullo stesso cerchio EBe, la quale si è trovata $=\pi m^2 D . BE^2 = \pi(1-m)^2 r^2 D$.

Il Priestley nella sua *Storia* inglese *dell' Ottica Parte I. Periodo III. Sezione* IV. fa menzione, come l' importanza della cosa esigeva, di questa profonda ed interessante Memoria di Courtivron, ma si contenta di dirne queste sole parole: *Courtivron si diede il pensiero di calcolare l' effetto della macchina Buffoniana in confronto con uno specchio incendiario sferico, e trovò, che la quantità di luce, la quale vie-*

ne rimandata da quest' ultimo, sta alla quantità di luce, che un' egual superficie di detta macchina riflette sul medesimo luogo, come sta 314 *a* $247\frac{1}{2}$, *ovvero che l' effetto dello specchio piano è di circa* $\frac{2}{9}$ *più piccolo che non è l' effetto dello sferico*. Questo grave abbaglio dell' Autor Inglese, uomo ingegnosissimo e originale per altri titoli, di attribuire al Francese quel risultato di calcolo come generale per tutti i casi ideabili, mentre egli non lo dà se non per un caso unico e particolarissimo, deriva dallo scarso corredo di cognizioni matematiche, con cui il celebre Dott. Priestley si è affrettato a scriver la storia dell' Ottica. Questa dovette per necessità riuscire, quanto pregevole per la copia e vastità dell' erudizione, altrettanto superficiale, e leggiera pel fondo delle cose e la solidità.