SOPRA ALCUNE PARTICOLARITA' CONCERNENTI LA GRAVITA' TERRESTRE.

Di Gregorio Fontana

Ricevuta li 14. *Fruttidoro An. VI.* (31. *Agosto* 1798.)

1. MAlamente (a quel che parmi) si suol dimostrare dalla comune degli Scrittori il famoso Teorema di Fisica, che *la gravità terrestre non solo ne' diversi punti della superficie della Terra è reciprocamente proporzionale alle distanze dal centro, ovvero ai semidiametri dell' Ellissoide Terrestre; ma anco ne' punti interni similmente distanti dal centro, cioè situati in distanze dal centro proporzionali ai detti semidiametri.*

2. Il Chiarissimo Boscovich nella sua opera *De Litter. Exped. per Pontif. Ditionem p.* 443., è quegli, che più accuratamente di ogni altro rischiara la dimostrazione Sintetica de' Newtoniani su tal proposito; ma nulladimeno è viziosa anche la proposta da Boscovich, la quale dice così: „ Si concepiscano due Canali qualunque usciti dal centro, e terminati a quali punti si vogliono della superficie, i quali canali esser debbono in equilibrio. Si taglino in un numero eguale di parti proporzionali; e perchè le particelle o molecole contenute nelle rispettive parti de' due canali gravitano nel centro in ragione della loro distanza dal centro, e la ragione della distanza nelle parti omologhe è la medesima che quella di tutti i canali, saranno perciò le forze delle molecole contenute nelle parti di un canale alle forze delle molecole contenute nelle parti omologhe dell' altro, nella costante ragione di tutti i canali; e conseguentemente anche le somme saranno nella stessa ragione, cioè i pesi delle parti omologhe come i pesi di tutti i canali, vale a dire eguali. Essendo poi il peso della parte di un canale eguale al peso della parte omologa dell' altro, sarà la forza di cadauna molecola nella parte d' un canale alla forza di cadauna molecola nella parte omologa dell' altro, come reciprocamente il numero di quelle molecole, ovvero come reciprocamente quelle parti, ed in conseguenza come reca-

procamente tutti i canali. Perlocchè le forze di tutte le molecole, o sieno esse situate nella superficie esterna, o collocate dentro la sferoide in rette guidate dal centro alla superficie, ed in distanze dal centro proporzionali a tali rette, sono fra loro reciprocamente come le stesse distanze „. Così il Boscovich.

3. Questa dimostrazione pecca a mio avviso nell' assunto, che le forze gravitanti di due molecole o punti di materia ne' due canali, sieno tra loro semplicemente come le loro distanze dal centro; laddove sono in ragione composta di queste tre, 1.° delle forze gravitanti rispettive sulla superficie, 2.° delle distanze dal centro, 3.° delle lunghezze de' canali inversamente prese. Diffatti dividansi (Fig. 1.) due canali CA, CB in un numero infinito eguale di parti Pp, Tt infinitesime, proporzionali ai canali stessi, e presi dovunque due punti Q, S ne' canali; siccome *in un medesimo canale* la gravità discendendo verso il centro cresce in ragione delle distanze, sarà perciò la gravità in A, che nomineremo G, alla gravità in Q, come CA, a CQ, e però la gravità in Q sarà eguale a $G.\frac{CQ}{CA}$; e così nominata g la gravità in B, sarà la gravità in $S = g.\frac{CS}{CB}$. Dunque le gravità de' due punti Q, S sono in ragione composta &c. E poichè i punti P, T sono situati in distanze proporzionali alle lunghezze di tutti i canali, per essere le parti Pp, Tt proporzionali ai tutti, e tra loro omologhe, cioè prese ne' due canali dopo un egual numero di divisioni da C in P, e da C in T, sarà quindi la gravità in P alla gravità in $T :: G.\frac{CP}{CA} : g.\frac{CT}{CB} :: G : g$, giacchè $\frac{CP}{CA} = \frac{CT}{CB}$. Ma i pesi delle particelle simili Pp, e Tt sono come le gravità di ciascun punto, e come il numero de' punti in ciascheduna particella; dunque il peso di Pp sarà al peso di Tt :: G. Pp : g. Tt :: G. AC : g. BC; ed in questa ragione costante starà il peso di ciascuna particella del Canale CA al peso dell' omologa simile dell' altro CB; dunque *raccogliendo*, il peso del Canale CA starà al peso di CB, come il peso di

una particella qualunque di CA al peso dell' omologa simile in CB; ovvero come G. AC : *g*. BC : ed essendo per l' equilibrio uguali i pesi de' due Canali, ne viene in conseguenza, che G. AC=*g*. BC; cioè G:*g* : : BC : AC; che vuol dire le gravità in superficie proporzionali reciprocamente alle distanze dal centro; che è il primo. L' uguaglianza poi dei pesi delle due particelle omologhe simili de' due Canali, derivata dall' uguaglianza de' pesi de' Canali stessi, importa, che le forze gravitanti de' punti delle particelle, saranno reciproche al numero di tali punti, cioè alle particelle, cioè alle loro distanze dal centro; che era il secondo.

SCOLIO.

4. Il supposto di Boscovich e di tutti gli altri, che le gravità di due punti di materia ne' due Canali siano nella sola ragione delle distanze di tali punti dal centro, si trae dietro l'assurdo, che i pesi di tutti i Canali, invece di essere uguali, sarebbero come i quadrati delle lunghezze de' Canali: imperocchè raccogliendo le ragioni costanti dei pesi delle omologhe particelle di due Canali, si ha la ragione de' pesi di tutti i Canali, e questa uguale alla ragione del peso d' una particella a quello dell' altra omologa, e questa seconda ragione è composta della ragione delle forze gravitanti di ciascun punto a ciascun punto nelle due particelle, cioè della ragione di tutto il Canale a tutto il Canale, e della ragione del numero de' punti di una a quello dell' altra particella, cioè nuovamente della ragione del Canale al Canale, le quali compongono la ragione de' quadrati delle lunghezze de' Canali.

5. La falsità del predetto principio delle gravità proporzionali soltanto alle distanze dal centro ne' punti di due differenti Canali, apparisce evidentemente dalla proposizione adottata e ricevuta dai predetti Autori; cioè che in due Canali le gravità ne' punti, i quali abbiano le distanze dal centro proporzionali ai Canali stessi, sono *reciprocamente* come tali distanze; laddove pel mentovato principio quelle gravità esser dovrebbono direttamente come le dette distanze.

6. Per dimostrare in un modo speditissimo il Teore-

ma Newtoniano, che le gravità ne' luoghi M, O (Fig. 2.) della superficie terrestre sono in ragione inversa delle distanze MC, OC dal centro della terra, si proceda così: chiamisi G la gravità in M, e g quella in O, e sia $CM=A$, $CO=a$, $CP=x$, $CN=y$, e siano Pp, Nn due elementi delle Colonne CP, CN, di cui si neglige la grossezza, che nulla influisce nel calcolo. Poichè adunque la gravità andando dalla superficie verso il centro è proporzionale alle distanze dal centro terrestre, nel supposto che *la Terra sia di densità uniforme*; sarà la gravità in $P=\frac{Gx}{A}$, ed il peso dell' elemento $Pp=\frac{Gxdx}{A}$, e per la stessa ragione il peso dell' elemento $Nn=\frac{gydy}{a}$. Integrando queste espressioni si ottiene il peso di $CP=\frac{Gx^2}{2A}$, e di $CN=\frac{gy^2}{2a}$, e quindi il peso di tutta la Colonna $CM=\frac{GA}{2}$, e di tutta la $CO=\frac{ga}{2}$.

Supposta ora la fluidità della sferoide Terrestre, e l' equilibrio delle Colonne CM, CO, ne risulta l' equazione $\frac{GA}{2}=\frac{ga}{2}$, e perciò $G:g::a:A$, cioè le gravità alla superficie inversamente proporzionali alle distanze dal centro. Il che era ec.

7. Nella precedente dimostrazione si suppone la terra immobile. Pongasi ora, che ella si aggiri intorno all' asse FQ, e le forze centrifughe in M, O nate da questa rivoluzione dicansi F, f; si menino per P, N le perpendicolari EPR, LNT all' asse CQ, e siano PR, NT le forze centrifughe de' punti P, N. Essendo le forze centrifughe de' punti M, P come le distanze di tali punti dall' asse, e queste distanze come CM, CP, ne viene, che $PR=\frac{Fx}{A}$, e per la stessa ragione $NT=\frac{fy}{a}$. Abbasso i perpendicoli RD, TV sopra CM, CO, con che le forze centrifughe PR, NT vengono a risolversi,

la prima nelle due PD, DR, la seconda nelle due NV, VT, e di queste quattro forze le due DR, VT niente alterano la forza di gravità de' punti P, N verso il centro C, e le due altre PD, NV direttamente si oppongono alla detta gravità. Ora chiamando C la distanza del punto M dall' asse, e c quella del punto O, i triangoli simili danno l' analogia A : C : : PR : PD : : $\frac{Fx}{A} : \frac{FCx}{A^2} = PD$, e così trovasi $NV = \frac{fcy}{a^2}$. Quindi $\frac{FCxdx}{A^2}$ sarà la forza centrifuga dell' elemento Pp relativamente al centro C, e $\frac{fcydy}{a^2}$ sarà quella dell' elemento Nn relativamente allo stesso centro. Laonde integrando sarà $\frac{FCx^2}{2A^2}$ la forza centrifuga della colonna indefinita CP; e $\frac{fcy^2}{2a^2}$ quella della colonna CN, sempre relativamente all' azione esercitata in direzione opposta alla gravità. Da ciò apparisce, che preso $x = A$, $y = a$, la forza centrifuga di tutta la colonna CM è $\frac{1}{2}$ FC, e della colonna CO è $\frac{1}{2} fc$. Se si computasse, come è facilissimo, la forza centrifuga *assoluta* della colonna MH perpendicolare all' asse, si troverebbe $\frac{1}{2}$ FC, come si è trovato per la forza centrifuga *relativa* della colonna obliqua MC; e questa uguaglianza di forze, assoluta e relativa nelle predette colonne, è molto rimarchevole.

8. Dalle cose dette si rende chiaro, che la gravità *rispettiva* della colonna CM, cioè la gravità sminuita della forza centrifuga è $= \frac{1}{2}$ GA $- \frac{1}{2}$ FC, e la gravità rispettiva di CO è $= \frac{1}{2} ga - \frac{1}{2} fc$. L' equilibrio poi delle colonne impor-

ta

ta, che si abbia $\frac{1}{2}GA - \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}ga - \frac{1}{2}fc$. Per dimostrare ora, che anche le gravità *rispettive*, cioè sminuite della corrispondente forza centrifuga, sono sulla superficie terrestre ne' punti M, O in ragione inversa delle distanze dal centro MC, OC, è necessario ridurre le forze centrifughe *assolute* F, f alle *relative* Φ, φ agenti nella direzione de' raggi CM, CO. Da questa riduzione si ottiene $F : \Phi :: A : C$, ed $f : \varphi :: a : c$, e quindi $F = \frac{\Phi A}{C}$, $f = \frac{\varphi a}{c}$. Sostituiti poscia questi valori di F, f nell' equazione $GA - FC = ga - fc$, essa si cangia in $GA - \Phi A = ga - \varphi a$, e conseguentemente si ha $G - \Phi : g - \varphi :: a : A$, vale a dire le gravità *rispettive* nei punti M, O sono reciprocamente proporzionali alle distanze dal centro, siccome si è dimostrato essere in questa stessa inversa proporzione anche le gravità *assolute* ne' detti punti della superficie terrestre.

9. Quì è da avvertirsi, che non solo la gravità *assoluta* di ogni punto P della colonna CM, ma anco la forza centrifuga rispettiva $\left(\text{trovata pocanzi} = \frac{FCx}{A^2} \right)$ è proporzionale alla distanza PC dal centro; e quindi in questa stessa proporzione è pur anco la gravità del punto P sminuita della forza centrifuga, cioè la gravità *relativa*.

10. Si può giugnere all' equazione $GA - FC = ga - fc$ senza far uso del calcolo integrale, ma puramente col sommare una progressione aritmetica: imperciocchè essendo la gravità *relativa* in $P = \frac{Gx}{A} - \frac{FCx}{A^2}$, e però le gravità *relative* di tutti gli elementi uguali della colonna MC, incominciando da M sino a C, formando una progressione Aritmetica a motivo della differenza costante fra i termini consecutivi, si avrà la gravità *relativa* intera di detta colonna con sommare quella progressione, cioè con prendere la somma de' due termini estremi, oppur del solo primo termine, perchè l' ultimo è zero, e moltiplicarla per la metà

del numero de' termini, con che si ottiene $G - \frac{FC}{A}$ (cioè il primo termine) moltiplicato per $\frac{1}{2}A$, cioè per la metà del numero de' termini, e da ciò si ha $\frac{1}{2}GA - \frac{1}{2}FC$; e così per la gravità totale *relativa* della colonna CO, trovasi $\frac{1}{2}ga - \frac{1}{2}fc$; e di quì l' equazione $GA - FC = ga - fc$.

11. Finora abbiamo considerata la gravità come diretta al centro della terra, il che non è se non prossimamente vero in quanto che l' ellissoide terrestre di poco differisce dalla sfera. Sia per tanto PCE (Fig. 3.) il piano di un meridiano dell' ellissoide terrestre, il cui centro è C. Le colonne PC, AC sono in equilibrio, come si sa, e per egual ragione descritto un quadrante ellittico *pae*, simile a PAE, anche *p*C, *a*C debbono premere ugualmente nelle loro direzioni *p*C, *a*C. Dal che siegue, che P*p* è in equilibrio con A*a*; e chiamata P la pressione in P, ed A la pressione in A, e supposto il quadrante *pae* infinitamente vicino a PAE, avremo $Aa : Pp :: AC : PC :: P : A$, e quindi $A = \frac{P.PC}{AC}$. Si meni ora per A la verticale AG, la quale come perpendicolare alla superficie dell' ellissoide terrestre in A, rappresenta la vera e precisa direzione della gravità in A; e quindi abbassando il perpendicolo GD sopra AC, e risoluta la forza di gravità agente secondo AG in altre due forze, una secondo AC, l' altra normale ad AC (la quale non può nè aumentare, nè indebolire la forza secondo AC), starà la gravità diretta secondo AC alla gravità reale agente secondo AG come sta AD : AG, vale a dire chiamando G la gravità intera in A secondo AG avremo l' analogia $AD : AG :: A : G$, e conseguentemente $G = \frac{AG}{AD}.A = \frac{P.PC.AG}{AC.AD}$. Ma si sa dalle Sezioni coniche, che $AC.AD =$

PC^2, dunque sarà $G = \frac{P.\,AG}{PC}$ che è quanto dire *la gravità ne' diversi punti della superficie dell' ellissoide terrestre seguita la proporzione delle normali alla superficie in que' punti, prolungate sino al diametro dell' equatore*.

12. Le dette normali (per le Sezioni Coniche) sono in ragione reciproca delle perpendicolari guidate dal centro dell' ellisse sulle tangenti: conseguentemente la gravità ne' varj punti della superficie terrestre è in ragione inversa delle perpendicolari guidate dal centro alle tangenti di que' punti; e siccome nell' ellissoide poco differente dalla sfera queste perpendicolari per poco non si confondono coi semidiametri dell' ellissoide, quindi la gravità seguita presso a poco la ragione inversa di tali semidiametri, ossia delle distanze dal centro.

13. Allorchè si conosce la ragione del diametro dell' equatore all' asse, si può con facilità determinare l' angolo GAC fatto dalla verticale AG, e dal raggio CA della terra, che si chiama *l' angolo della verticale*. Infatti guidata la perpendicolare AN al semidiametro CE dell' equatore, e chiamando a il semidiametro CE, b il semiasse CB, λ la latitudine, ossia l' angolo AGE, abbiamo per le Sezioni Coniche $CN : GN :: a^2 : b^2$, e ne' triangoli rettangoli ACN, AGN, che hanno comune il cateto AN, è $CN : GN ::$ tang. AGE : tang. ACE : : tang. λ : tang. ACE : : $a^2 : b^2$. Chiamo φ l' angolo ricercato CAG, ed ho tang. ACE = tang. $(\lambda - \varphi)$; e quindi $a^2 : b^2 ::$ tang. λ : tang. $(\lambda - \varphi)$ ovvero $\frac{b^2}{a^2}$ tang. $\lambda = \frac{\text{tang.}\,\lambda - \text{tang.}\,\varphi}{1 + \text{tang.}\,\lambda \cdot \text{tang.}\,\varphi}$, e b^2tang. $\lambda + b^2$ tang. λ^2 tang. $\varphi = a^2$ tang. $\lambda - a^2$ tang. φ, e conseguentemente tang. $\varphi = \frac{(a^2 - b^2)\,\text{tang.}\,\lambda}{a^2 + b^2\,\text{tang.}\,\lambda^2}$; che è ciò, che si voleva.

14. Osservo, che siccome quest' *angolo della verticale* svanisce in P ed in E, cioè al polo ed all' equatore, esso dee diventar *massimo* in qualche luogo intermedio, e di qui nasce il problema di ritrovare la latitudine λ, dove l' angolo φ è il maggiore di tutti. Differenziando dunque

il valore di tang.φ, ed uguagliando a zero il differenziale, avremo $\dfrac{\dfrac{d\lambda}{\cos.\lambda^2}(a^2+b^2\,\text{tang.}\lambda^2)-\dfrac{2b^2d\lambda\,\text{tang.}\lambda^2}{\cos.\lambda^2}}{(a^2+b^2\,\text{tang.}\lambda^2)^2}=0$, da cui si ottiene immantinente tang. $\lambda=\dfrac{a}{b}$.

15. Quì è da notarsi, che preso il semiasse $b=1$, ed il semidiametro dell' equatore $a=1+\delta$, e trascurato per la sua picciolezza δ^2, il valore di tang. φ si riduce a questo $\dfrac{2\delta\,\text{tang.}\lambda}{1+\text{tang.}\lambda^2+2\delta}=\dfrac{2\delta\,\text{tang.}\lambda}{\sec.\lambda^2+2\delta}=\dfrac{2\delta\,\text{tang.}\lambda}{\sec.\lambda^2}$ $=2\delta\,\text{sen.}\lambda\cos.\lambda=\delta\,\text{sen.}2\lambda$, che è quello a cui giunge per una strada molto lunga il Sig. Trembley nel suo interessante *Essai de Trigonomètrie Sphérique contenant diverses applications de cette science à l' Astronomie*, *Chap. X.* p. 224., *Neuchatel* 1783.

16. Se per ottenere il massimo summentovato si differenzia questa espressione del Sig. Trembley, e se ne uguaglia a zero il differenziale, si trova $d.$ tang. $\varphi=2\delta d\lambda\cos.2\lambda=0$, e quindi $\cos.2\lambda=0$, $2\lambda=90°$, e $\lambda=45.°$ il qual valore è un poco minore del nostro, avvegnachè tang. $\lambda=\dfrac{a}{b}=1+\delta$ dà la latitudine λ un tal poco maggiore dell' angolo semiretto.

17. Il punto A dell' ellissoide terrestre (Fig. 4.), nel quale l' *angolo* GAC *della verticale* è il maggiore di tutti gli altri analogi, ha alcune singolari proprietà, che lo rendono assai rimarchevole e degno dell' attenzione d' un Geometra.

18. E primieramente menando da A l' ordinata AN al semidiametro equatoriale CE, la ragione fra questa ordinata, e l' ascissa corrispondente CN dal centro, è quella stessa, che vi ha fra il semiasse CP, e il semidiametro dell' equatore CE. Imperciocchè fatta $AN=y$, $CN=x$, abbiamo trovato tang. $AGN=\text{tang.}\lambda=\dfrac{CE}{PC}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{AN}{GN}$: ma per le

Sezioni coniche la sottonormale GN è $= \frac{b^2 x}{a^2}$; sarà dunque $\frac{a}{b} = y : \frac{b^2}{a^2} x$, ovvero $\frac{b}{a} x = y$, e conseguentemente risulta l'analogia $y : x :: b : a$.

19. Secondariamente il quadrato dell'ordinata AN è uguale alla metà del quadrato del semiasse CP, come il quadrato dell'ascissa corrispondente CN uguaglia la metà del quadrato del semidiametro equatoriale CE. Avvegnachè essendo $x = \frac{a}{b} y$, e per la proprietà dell'ellisse $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$, se si sostituisce in questa equazione il valore di $x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2$, essa si cangia in $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2)$ da cui si trae subito $y^2 = \frac{1}{2} b^2$, e quindi $x^2 = \frac{1}{2} a^2$.

20. In terzo luogo descrivendo col raggio uguale al semiasse CP il quadrante circolare PMO, e menando dal punto A la perpendicolare AF al semiasse, questa taglia il quadrante PMO del cerchio per metà nel punto M, e fa l'arco PM=MO di 45.° Ciò si dimostra per la nota proprietà dell'ellisse circoscritta al cerchio dove si ha l'analogia CE : CO : : FA : FM. Ma si è già dimostrato CE : CO : : CN : NA : : FA : FC. Dunque FA : FM : : FA : FC, e quindi FM=FC; e di quì apparisce, che essendo il seno FM, e il coseno FC dello stesso arco PM fra di se uguali, l'arco PM è appunto di 45.°

21. In quarto luogo, se si conduce al punto A il semidiametro dell'ellisse CA, questo divide in due parti uguali l'area del quadrante ellittico PCEA. Per dimostrar questo, si tiri al punto M il raggio del cerchio CM. Per la proprietà dell'ellisse sta l'area del quadrante ellittico EAPC all'area del quadrante circolare inscritto OMPC, come sta EC ad OC, e nella stessa ragione sta pur anco lo spazio ellittico EAFC allo spazio circolare corrispondente OMFC, come pure il triangolo CAF al triangolo CMF, giacchè quello sta a questo come AF ad MF, cioè come

EC ad OC. Dunque EAFC : OMFC : : CAF : CMF : : EC : OC. Dunque EAFC—CAF : OMFC—CMF : : EC : OC, vale a dire il settore ellittico EAC sta al settor circolare corrispondente OMC come EC ad OC, ovvero come il quadrante ellittico EAPC al quadrante circolare OMPC. Ma il settore circolare OMC è la metà del quadrante circolare OMPC, perchè l' arco OM è la metà dell' arco quadrantale OMP: dunque anche il settor ellittico EAC sarà la metà del quadrante ellittico EAPC, che è quanto dire il semidiametro CA divide in due parti eguali l' area del quadrante ellittico EAPC.

22. Per egual modo si può dimostrare, che circoscrivendo al quadrante ellittico EAPC un quadrante circolare, il quale cioè abbia C per centro, e CE per raggio, l' ordinata NA dell' ellisse al predetto punto A, prolungata che sia, andrà a tagliare l' arco circolare in due parti uguali, cioè di 45.° ciascuna.