NUOVE CONSIDERAZIONI

INTORNO

ALLA PRESSIONE D' UN CORPO SOSTENUTO DA TRE E PIU' APPOGGI IN UN PIANO ORIZZONTALE.

Di Paolo Delanges.

Ricevuta li 6. Fiorile An. VI. (25. Aprile 1798.)

§. I. SE la ricerca delle pressioni, che esercita un corpo contro gli appoggi su cui giace in un piano orizzontale, fosse da confondersi e riguardarsi come l' inversa di quella, in cui, dato essendo un sistema di corpi o di forze parallele e verticali, domandasi il centro di gravità o sia la risultante delle forze medesime; sembra che il *Ch. Leonardo Euler (Novi Comm. Acad. Scient. Imperialis Petropolitanæ Tom. XVII. An. MDCCLXXIII.)* non sarebbe ricorso ad un' ipotesi singolare, onde tentar di sciogliere la questione generalmente; e d' Alembert (*Opus. Tom. VIII. pag.* 45.) e Bossut *(Tratt. Element. di Meccanica. Vol. primo. pag.* 212. *in Pavia. MDCCLXXXVIII.)* inutilmente avrebbero pronunciato e conchiuso, non poter determinarsi co' principj comuni della Meccanica, eccettuato il caso dei tre appoggi in triangolo, le pressioni, non solo se gli appoggi fossero più di tre, ma nemmeno se i tre sieno situati in diritto con la direzione del centro di gravità del corpo. Non sarà disutile perciò, e per dedurre nello stesso tempo delle considerazioni che servano di lume in tale tanto celeberrima quanto importante ricerca delle pressioni sugli appoggi, un analitico esame appunto dell' inversa sopraccennata, del centro cioè di gravità, o della risultante d' un sistema di forze parallele e verticali.

PROBLEMA I.

§. II. Dato il centro D (Fig. I.) di gravità e la somma G di tre corpi disposti nel sistema triangolare ABC, oppure, il che torna lo stesso, dato il peso G d' un corpo; trovare tre forze, che esercitando l' azione loro contro la direzione della gravità, lo sostengano in equilibrio, mediante tre fili raccomandati a tre punti in esso A,B,C situati in triangolo, e nel piano orizzontale che passa pel centro D di gravità del corpo medesimo.

Prima soluzione.

Congiunte le rette AD, BD, CD concorrano co' lati opposti ne' punti M, H, F. Si menino le AG, DN perpendicolari alla BC, la DO alla AG, e sia AO$=a$, OG$=b$ BG$=c$, GC$=d$, DO$=m$, sarà BN$=c-m$, e CN$=d+m$. Quindi si troverà agevolmente AD$=\sqrt{(a^2+m^2)}$, BD$=\sqrt{(b^2+(c-m)^2)}$ CD$=\sqrt{(b^2+(d+m)^2)}$, DM$=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2+m^2)}$, DH$=$ $\frac{a(d+m)+bm}{a(c-m)+b(c+d-m)}\sqrt{(b^2+(c-m)^2)}$, e DF$=\frac{a(c-m)-bm}{a(d+m)+b(c+d+m)}$ $\sqrt{(b^2+(d+m)^2)}$. Ora instituendosi, per la nota teoria del centro di gravità, come AM a DM, così la somma delle forze B, C raccolte in M, e della forza A, cioè il totale peso G del corpo, alla forza in A; si troverà la forza in A$=G\left(\frac{b}{a+b}\right)$: e instituendo similmente come BH a DH, così G a B; si avrà la forza in B$=G$ $\left(\frac{a(d+m)+bm}{(a+b)(c+d)}\right)$: e come CF a DF, così G a C; s' otterrà la forza al punto C$=G\left(\frac{a(c-m)-bm}{(a+b)(c+d)}\right)$: espressioni determinate, e che prese insieme danno l' intero peso G del corpo, condizione, dirò così, intrinseca del problema.

Seconda soluzione.

Pel punto D si conduca qualsivoglia retta RDT, che seghi la perpendicolare AG in S, i lati AB, AC ne' punti R, T, ed il lato BC prolungato quanto abbisogna nel punto Z. Si dica $SO=p$, ed essendo $AB=\sqrt{(c^2+(a+b)^2)}$, $AC=\sqrt{(d^2+(a+b)^2)}$; si scoprirà $DR=\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{(p^2+m^2)}$, $DT=\frac{\pi}{\omega}\sqrt{(p^2+m^2)}$, $BR=\frac{b\alpha-p\delta}{\alpha(a+b)}\sqrt{(c^2+(a+b)^2)}$, $AR=\frac{a\alpha+p\delta}{\alpha(a+b)}\sqrt{(c^2+(a+b)^2)}$, $CT=\frac{b\omega+p\pi}{\omega(a+b)}\sqrt{(d^2+(a+b)^2)}$, ed $AT=\frac{a\omega-p\pi}{\omega(a+b)}\sqrt{(d^2+(a+b)^2)}$: valori ne' quali è $\alpha=am+bm-cp$, $\delta=ac-am-bm$, $\pi=ad+am+bm$, ed $\omega=am+bm+dp$. Considerando pertanto RDT come un vette caricato nel punto D del peso G, le forze parallele e verticali da collocarsi nei punti R, T, che chiameremo pure R, T, per l'equilibrio, saranno per la sopraccennata teoria, $R=G\left(\frac{\alpha\pi}{\alpha\pi+\omega\delta}\right)$, e $T=G\left(\frac{\delta\omega}{\alpha\pi+\omega\delta}\right)$. E dividendo le forze R, T nei punti B, A e C, A in reciproca ragione delle distanze BR, RA, e CT, TA, sommando le due che devono agire nello stesso punto A; si otterrà $A=G\left(\frac{b(\alpha\pi+\omega\delta)}{(a+b)(\alpha\pi+\omega\delta)}\right)=G\left(\frac{b}{a+b}\right)$, $B=G\left(\frac{\pi(a\alpha+p\delta)}{(a+b)(\alpha\pi+\omega\delta)}\right)$, e $C=G\left(\frac{\delta(a\omega-p\pi)}{(a+b)(\alpha\pi+\omega\delta)}\right)$: queste tre forze insieme prese pareggiano il peso G e diventano identiche colle superiormente ritrovate, mediante le rette AM, BH, CF, condotte da' punti A, B, C, pel punto D, sostituendo in esse i valori di α, δ, π, e ω. Serve l' esposta soluzione pure a riconfermare essere determinato il proposto problema. Il che ec.

PROBLEMA II.

§. III. Poste le cose medesime, sieno i punti A, B, C, (Fig. II.) in linea retta col punto D, di modo che può riguardarsi AC come una verga rigida, gravata nel punto D del peso G del corpo: si cercano le tre forze verticali d' applicarsi ai punti A, B, C per l' equilibrio.

Preso fra li punti B,C qualsivoglia punto H, si otterranno le forze A, H per l' equilibrio del corpo, dividendo il suo peso G nella reciproca ragione delle distanze AD, DH; e dividendo la H in due forze che stieno in reciproca ragione de' segamenti BH, HC, si avranno le tre forze verticali A,B,C pel ricercato equilibrio. Siccome arbitrariamente però viene fissato il punto H fra i punti B, C, e che perciò infinite di numero e diverse fra se possono essere le tre forze A,B,C che sostengano in equilibrio lo stesso corpo, soddisfacendo nello stesso tempo alla condizione intrinseca del problema, che in ogni caso cioè la somma loro pareggi il suo peso G; così è manifesto che il presente problema è indeterminato. Il che ec.

PROBLEMA III.

§. IV. Trovare le quattro forze verticali d' applicarsi a' quattro punti B,K,P,C (Fig. I.), per l' equilibrio del dato corpo, situati nel piano orizzontale BKPC in cui cade il centro di gravità D del corpo medesimo.

Si meni per D comunque si voglia la retta RDT che incontri ne' punti R,T i lati opposti BK, CP del quadrilatero BKPC. Usando della suindicata teoria del centro di gravità, si scopriranno le forze verticali in R e in T, e quindi quelle da disporsi ne' punti B,K,P,C pel ricercato equilibrio. Ma perchè conducendosi per lo stesso punto D un' altra retta LDE, se anche nel caso che i lati opposti BK, CP fossero paralleli, e che però fosse RD a DT come LD a DE, le ragioni di BR a RK e di CT a TP non sono uguali alle ragioni di BL a LK e di CE ad EP: egli è evidente che le quattro forze verticali da collocarsi ne' punti B,K,P,C per l' equilibrio nel dato sistema possono variarsi all' infinito, mentre la somma delle quattro derivate dall' arbitraria posizione di qualsivoglia asse RDT che passi pel punto D pareggerà sempre il peso totale del corpo che sostengono in equilibrio. Dunque indeterminato è il proposto problema, ed è facile come s' è dimostrato dei tre nel problema antecedente, a dimostrarsi pure indeterminato se i quattro punti fossero situati in linea retta. Il che ec.

§. V. Allo stesso modo si dimostra egualmente indeterminato il problema se si ricercassero cinque sei ec. forze verticali, onde sospendere un dato corpo in equilibrio. Il problema dunque, dato il centro di gravità e la somma d' un sistema di corpi, o la posizione ed il valore d' una risultante d' un sistema di forze parallele e verticali, è determinato nel caso soltanto dei tre corpi o tre forze disposte in triangolo. Qualora convenisse pertanto ridurre a questa questione quella d' un corpo che giace sopra diversi appoggi, quanto s' è concluso per la prima, varrebbe eziandio per la seconda, cioè necessariamente sarebbe essa pure indeterminata, eccettuato il caso dei tre appoggi in triangolo. Ma così non è, come saggiamente conobbero i mentovati Geometri, altra e ben differente essendo di condizione la prima, in cui si tratta di trovare forze collegate insieme ed allo stesso corpo che devono sostenere in equilibrio, mentre nella seconda si cercano le pressioni sofferte da sostegni isolati su quali riposa il corpo, inerti ed invincibili o almeno di tal fermezza da sostenere ciascuno da se occorrendo l' intiero suo peso. Di maniera che non può concludersi che non essendo generalmente determinato il problema delle forze, generalmente pure non sia determinato quello degli appoggi. Alcuni casi particolari costringono sempre più a tale distinzione. Chiunque, a cagion d' esempio, converrà, che poggiato un corpo su quattro sostegni de' quali i vertici sieno in un piano orizzontale e disposti agli angoli d' un quadrato, nel di cui centro cada la verticale che passa pel centro di gravità del corpo, ogni sostegno soffra la pressione equivalente alla quarta parte del peso intiero del corpo: mentre se volesse sospendersi in equilibrio il corpo medesimo, mediante quattro forze verticali nelle stesse circostanze, bensì le opposte per diagonale saranno eguali tra se, ma possono diversificarsi all' infinito, come chiaramente apparisce dal problema superiore (§. IV.). In conclusione se la mente convincesi essere necessariamente di condizione indeterminata il problema delle forze, non può parimenti convincersi che indeterminato sia quello degli appoggi. Con tale avvertenza e non altrimenti io intrapresi le qualunque si sieno mie applicazioni su questo soggetto, e le esposi nel Tom. V. della nostra Società. Perciò io parto dalla considerazione in quella mia Memoria, che la pressione sofferta da ciascun appoggio dipender deva dalla posizione respettiva che ha verso gli altri e verso il centro di gravità del corpo sostenuto. E riflettendo inoltre che nel caso di due sostegni, col supporre a vicenda uno d' essi punto d' appoggio, si determinano le pressioni da essi sofferte, immaginandosi due minime rotazioni intorno a due assi perpendicolari alla retta che li congiunge, non già contro la direzione della gravità, come potrebbe supporsi dovendo il corpo esser sostenuto da due forze verticali, ma secondo la direzione medesima come se per un istante ceder dovessero, onde non limitare, dirò così, il grado della loro attività: così ne' casi dei tre, quattro ec., riducendo appunto il problema ad un vette di tre, quattro braccia ec., fo uso della stessa ipotesi, fondata finalmente sul principio delle velocità iniziali, con la precauzione però di non alterare la supposta condizione degli appoggi, cioè di essere inconcussi quanto può loro abbisognare. Egli è vero che nel problema I. della citata mia Memoria, ove parlo dei tre appoggi, equivocamente io mi esprimo dicendo „ considerando poscia le pressioni ch' essi soffrono, come tre potenze che agiscano dal basso all' alto perpendicolarmente al piano orizzontale „ avvegnachè potrebbe credersi ch' io pure ammetta la tramutazione del problema degli appoggi in quello delle forze, mi sia lecito però il dichiarare quì che per le tre potenze sostituite da me coll' immagine alle pressioni, devono intendersi le reazioni degli appoggi medesimi, con cui contrastano nell' atto appunto di sostenere il corpo in equilibrio di cedere o moversi minimamente. Il *Paoli*, *Tom. VI.* della nostra Società nella di lui Memoria *sopra alcuni problemi Meccanici*, ammettendo che convertir si possa il problema degli appoggi in quello delle forze verticali applicate a punti nello stesso corpo e conseguentemente insieme collegate, e facendo uso del principio delle velocità virtuali, conchiude che il problema pure degli appoggi sia „ indeterminato quando gli appoggi „ sono più di tre, o quando i tre appoggi sono in linea

„ retta, e che nel caso dei tre appoggi non in diritto le „ soluzioni de' *Signori Euler, Bossut, e la mia*, sono esat- „ te e son comprese tra le infinite soluzioni che si posso- „ no dare di questo problema differenti di aspetto, ma in „ sostanza conformi. „ Conclusione che come dimostrai superiormente appartiene pure al problema d' un sistema di corpi o di forze verticali. Introduce però egli come necessaria nelle soluzioni dei differenti casi, l' equazione che la somma delle pressioni o forze verticali, secondo la di lui ipotesi equivalenti, d' applicarsi a' dati punti, sia eguale al peso del corpo da sospendersi in equilibrio; ed in seguito dimostra non aver luogo, compreso l' enunciata, che tre equazioni, quanti si sieno i punti da' quali si voglia sospenderlo, instituendo la prima perchè sia impedito al corpo il moto progressivo verticale in direzione della gravità, e le altre due perchè sia allo stesso impedito ogni altro moto di rotazione. All' opposto io escludo nella soluzione del problema degli appoggi l' equazione della somma delle pressioni eguale al peso del corpo, poichè egli sia lo stesso supporre che in qualunque disposizione si trovino, debbano soffrir tutti qualche pressione. Un corpo che voglia sospendersi con tre forze in linea retta o con quattro verticali, passando una di esse pel suo centro di gravità, posto questa minore del peso del corpo, restano e possono determinarsi le altre due in linea retta, o le altre tre in triangolo pel suo equilibrio; ma nel caso degli appoggi, cadendo la direzione del centro di gravità sopra uno di essi, questo lo sostiene intieramente, perchè suppongonsi inconcussi, e inutili divengono i rimanenti. La suddetta condizione della somma io la riguardo nel problema in questione degli appoggi come condizione intrinseca, e che deve servire di prova di riscontro alla sua soluzione, come similmente avviene in alcune regole della volgare Aritmetica, o come, a cagion d' esempio, volendosi dividere una data quantità in tre, quattro ec. parti, in data ragione, trovate ad una ad una le parti ricercate, serve di prova dell' esatta condotta nella soluzione, eguagliare la somma loro la data quantità. Passerò ora, dopo tali considerazioni intorno alla distinzione ch' io reputo doversi fare del problema delle forze verticali da quello degli appoggi, ad un' analisi concreta e di fatto della soluzione ch' io diedi di questo nella summentovata mia Memoria..

PROBLEMA IV.

§. VI. Trovare le pressioni che soffrono tre sostegni o appoggi A, B, C (Fig. III.) su quali giace un corpo di cui G ne sia il peso.

Ridotto il problema a un vette da tre braccia GA, GB, GC caricato nel punto dell' unione loro del peso G del corpo, e conducendo gli assi DE, IL, HF perpendicolari alle stesse braccia, ed a questi le AD, CE, BI, BF, CE, CL; le pressioni sofferte dagli appoggi A,B,C, dedotte da equazioni instituite sulla teoria de' momenti, riguardando uno dopo l' altro gli stessi appoggi come centro di moto, saranno generalmente espresse dalle formule (M) (N) (O) (Mem. cit. prob. I.)

$$A = \frac{bln + cbm - alm}{fln + gbm} \ldots\ldots\ldots (M)$$

$$B = \frac{agm + cfn - bgn}{fln + gbm} \ldots\ldots\ldots (N)$$

$$C = \frac{afl + bgh - cfh}{fln + gbm} \ldots\ldots\ldots (O)$$

E passando al concreto, suppongansi ottusi gli angoli AGB, AGC, BGC, e facendo uso delle denominazioni (§. II.), si avrà $AG = a = \sqrt{(a^2 + m^2)}$, $BG = b = \sqrt{(b^2 + (c - m)^2)}$, $GC = c = \sqrt{(b^2 + (d + m)^2)}$, $AD = f = \frac{b(a+b) + c(c-m)}{\sqrt{(b^2 + (c-m)^2)}}$,

$BI = h = \frac{a(a+b) + cm}{\sqrt{(a^2 + m^2)}}$, $AH = g = \frac{b(a+b) + d(d+m)}{\sqrt{(b^2 + (d+m)^2)}}$

$CL = n = \frac{a(a+b) - dm}{\sqrt{(a^2 + m^2)}}$, $CE = m = \frac{(c+d)(c-m)}{\sqrt{(b^2 + (c-m)^2)}}$,

$BF = l = \frac{(c+d)(d+m)}{\sqrt{(b^2 + (d+m)^2)}}$. Surrogando poscia queste espressioni nelle surriferite formule generali, si scopriranno i valori delle ricercate pressioni, cioè $A=G\left(\frac{b}{a+b}\right)$, $B=G\left(\frac{a(d+m)+bm}{(a+b)(c+d)}\right)$, $C=G\left(\frac{a(c-m)-bm}{(a+b)(c+d)}\right)$. Il che ec.

§. VII. Che la somma delle ritrovate pressioni col mio metodo sugli appoggi A,B,C in triangolo pareggi il total peso G del corpo, è stato ciò dimostrato anche sinteticamente (Teo. I. Mem. cit.): debbo però al *Paoli* l' osservazione, che in questo caso, come accade appunto in quello di due soli appoggi, risultino i valori delle pressioni identici a quelli che si determinano per un sistema di due o tre forze verticali in triangolo, onde sostenere il dato corpo in equilibrio (§. II.): di maniera che in questi due casi che il problema delle forze è pure determinato, confondesi con quello degli appoggi. Ma egli è da osservarsi poi che adattando colle debite sostituzioni le espressioni concrete de' valori delle pressioni ritrovati nel problema superiore, al caso dei tre appoggi in linea retta, si trasformano in queste $A=G\left(\frac{0}{0}\right)$, $B=G\left(\frac{0}{0}\right)$, $C=G\left(\frac{0}{0}\right)$ di aspetto indeterminato, come avviene, e s' è dimostrato nel problema II. delle tre forze verticali in linea retta; mentre adattando direttamente le formule generali (M) (N) (O), dalle quali sonosi ricavati i valori accennati al caso medesimo dei tre appoggi in linea retta, si ottiene un risultamento determinato, ed è che il peso del corpo è portato da' due appoggi più vicini tra quali cade la direzione del suo centro di gravità, e la pressione sul terzo eguale a zero. Questo caso però è duopo, come or si vedrà, trattarsi a parte, a maggior dilucidazione anche del metodo generale.

PROBLEMA V.

§. VIII. Riposi un corpo su tre appoggi A,C,B in linea retta (Fig. IV.) e cada fra gli A, C in G la direzione del suo centro di gravità: si ricercano le pressioni sofferte dagli appoggi medesimi.

Per mantenere le solite espressioni sia $AG=a$, $GB=b$, $GC=c$, sarà $CA=a+c$, $AB=a+b$, e $BC=b-c$. Secondo il mio metodo, si consideri pertanto l' appoggio A come centro del moto; e siccome non può supporsi una minima discesa del corpo col rotarsi sull' asse che passa pel punto A perpendicolare alla direzione AB, vale a dire, che il punto G descriva un archetto, senza che cedano amendue gli appoggi C, B descrivendo archetti proporzionali alle loro distanze dal punto A: così è manifesto per la teoria de' momenti o delle velocità virtuali, che nello stato supposto di equilibrio, i momenti delle pressioni su gli appoggi C, B devono eguagliare il momento del corpo dallo stesso appoggio A, risultandone perciò l' equazione (1)

$$(1) \ldots\ldots C(a+c)+B(a+b)=aG$$

Equazione che non può non riguardarsi derivata eziandio dal principio delle velocità virtuali, qualora in vece delle pressioni si considerino le reazioni degli stessi appoggi C, B come potenze che agiscano contro la direzione della gravità. Lo stesso ragionamento vale, prendendo l' appoggio B per centro del moto, onde instituire l' equazione (2)

$$(2) \ldots\ldots A(a+b)+C(b-c)=bG$$

Ma prendendo il punto C per centro del moto, ed immaginandosi la piccola rotazione di discesa intorno ad esso, come s' è detto per gli altri appoggi, si rileva che non è astretto a ceder che l' appoggio A, e che l' altro B rimane nella sua posizione, e sollevato per fino d' essere in contatto col corpo nel punto B: sicchè essendo in tale supposizione attivo per l' equilibrio del corpo l' appoggio A, e indifferente l' esistenza dell' altro B, avremo l' equazione (3)

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots A(a+c)=cG$$

Da questa equazione si ha subito la pressione dell' appoggio $A=G\left(\frac{c}{a+c}\right)$, surrogato questo valore nella (2), si otterrà la pressione di $C=G\left(\frac{a}{a+c}\right)$, e surrogato questo nella (1), si avrà la pressione in $B=G\left(\frac{0}{a+b}\right)=0$. Valori tutti di aspetto determinato, e che fanno conoscere che i soli due appoggi A, C fra quali passa la direzione del centro di gravità del corpo lo sostengono interamente, e che nessuna pressione soffre il terzo B. Il che ec.

PROBLEMA VI.

§. IX. Trovare le pressioni sofferte da quattro appoggi che sostengono un corpo, collocati in una linea retta intersecata dalla direzione del suo centro di gravità.

I. Caso. Dei quattro punti, due A, B (Fig. V.) sieno disposti da una parte, e i due C, M dall' altra riguardo al punto G in cui si suppone raccolto il peso G del corpo. Si chiami al solito $AG=a$, $BG=b$, $CG=c$, $GM=d$; sarà $AB=b-a$, $CM=d-c$, $BM=b+d$, $AM=a+d$, $BC=b+c$, ed $AC=a+c$. Supponendo successivamente ogn' uno degli appoggi A, B, C, M come centro di moto, si avranno per le considerazioni fatte nel problema antecedente le quattro seguenti equazioni.

$$(1) \ldots\ldots C(a+c)+M(a+d) \ldots\ldots =aG.$$
$$(2) \ldots\ldots C(b+c)+M(b+d)+A(b-a)=bG.$$
$$(3) \ldots\ldots A(a+c)+B(b+c) \ldots\ldots =cG.$$
$$(4) \ldots\ldots A(a+d)+B(b+d)+C(d-c)=dG.$$

Ricavato dalle tre equazioni (1) (2) (4) il valore di B dato per A, si paragoni con quello che si ricava dall' equazione (3), e si scoprirà la pressione in $A=G\left(\frac{c}{a+c}\right)$; sostituito poi questo valore nell' equazione (3), si avrà la pressione in $B=G\left(\frac{o}{b+c}\right)=o$; e surrogati nell' equazione (4) i valori di A e B, si troverà la pressione in $C=G\left(\frac{a}{a+c}\right)$; e per ultimo posto nell' equazione (1) il valore di C, o nell' equazione (2) quelli di C ed A, si avrà la pressione in $M=G\left(\frac{o}{a+d}\right)=o$, oppure $M=G\left(\frac{o}{(a+c)\,b+d)}\right)=o$.

II. Caso. Ma tre appoggi B, M, A (Fig. VI.) sieno da una parte, ed il quarto C dall' altra, e sia $AG=a$, $BG=b$, $CG=c$, $GM=d$; sarà $AB=b-a$, $CM=c+d$, $BM=b-d$, $AM=d-a$, $BC=b+c$, ed $AC=a+c$. Riguardando come nel caso antecedente ciascun appoggio A, B, C, M come centro di moto, le quattro equazioni da instituirsi saranno le sottoposte.

$$(1) \ldots\ldots C(a+c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = aG$$
$$(2) \ldots\ldots C(b+c) + A(b-a) + M(b-d) = bG$$
$$(3) \ldots\ldots A(a+c) + B(b+c) + M(c+d) = cG$$
$$(4) \ldots\ldots A(d-a) + C(c+d) \ldots\ldots = dG$$

Dall' equazione (1) risulta la pressione in $C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$, sostituendo questo valore nella (4), si ha la pressione in $A = G\left(\frac{c}{a+c}\right)$, posti nell' equazione (2) i trovati valori di A e C, si ricava la pressione in $M = G\left(\frac{0}{(a+c)\,(b-d)}\right) = 0$, e finalmente posti nella (3) i valori di A ed M, s' avrà la pressione in $B = G\left(\frac{0}{b+c}\right) = 0$. Valori sì in questo come nel 1°. caso di forma determinata, e che dimostrano sostenersi il peso da que' due soli appoggi tra quali passa la direzione del centro di gravità del corpo, ed esser nulle le pressioni sugli altri due, come se non esistessero. Il che ec.

§. X. E' facile a conoscersi che il risultato concluso dalle soluzioni dei due problemi V. e VI. vale eziandio se cinque, sei ec. fossero gli appoggi disposti in linea retta. Due avvertenze però mi reputo quì in dovere d' aggiungere e di palesare che sfuggite mi sono nel primo mio studio su questa materia. E primieramente che non possono desumersi, come supposi nel caso dei tre appoggi (Corol. IV. prob. I. Mem. cit.), dalle formule generali esprimenti le pressioni sugli appoggi in poligono, le pressioni che soffrono se collocati sieno in linea retta: mentre nel caso suddetto (§. VIII.), l' equazione (3). $A\,(a+c) = cG$, la quale appartiene all' appoggio C preso per centro del moto, non corrisponde all' equazione $A\,(a+c) + B\,(b+c) = cG$, che dee instituirsi, qualora i medesimi tre appoggi situati sieno in triangolo. E in secondo luogo, che nell' instituire le equazioni per gli appoggi in linea retta non possono nè devonsi introdurre neppur negativamente i momenti di quegli appoggi, come feci pel caso dei quattro (Corol. IV. prob. II. Mem. cit.), che situati sono al di là di que' su quali immaginasi l' istantanea rotazione del corpo in discesa, non convenendo (§. V.) sostituire a sostegni inerti e indipendenti dal corpo forze congiunte ad esso, e che agiscano contro o in direzione della gravità. E vaglia il vero, applicando con le indicate avvertenze, e non altrimenti, il metodo proposto, alla soluzione del problema degli appoggi in linea retta, si ottengono, come s' è veduto nei due problemi V. e VI., valori soddisfacenti e di forma determinata.

§. XI. Riducendo poscia il problema, essendo quattro, cinque ec. gli appoggi disposti in poligono, ad un vette di quattro, cinque ec. rami, aggravato nel punto loro comune d' un dato peso; col mio metodo, prendendo cioè di mano in mano ciascun di essi per centro di moto, instituisco sempre tante equazioni quanti sono gli appoggi o le pressioni che si ricercano; dovendosi però anche in tale posizione di appoggi aver presente la seconda avvertenza indicata nell' antecedente §. X., si dovranno non già introdurre negativamente come aveva suggerito nello Scol. II. (Mem. cit.), ma trascurare in ogni equazione i momenti delle pressioni su quegli appoggi che restassero segregati dalla parte opposta del punto d' unione de' rami respettivamente agli assi condotti ad angoli retti alle estremità loro. Ho esposto nella mia più volte mentovata Memoria le formule generali per i quattro appoggi in poligono che si veggono nel prob. II. contrassegnate colle lettere (P) (Q) (R) (S). Dedotte pertanto queste come le (M) (N) (O) (§. VI.) pur generali per i tre appoggi in triangolo, da equazioni instituite sullo stesso principio de' momenti, escludendo sempre quella della somma delle pressioni eguale al peso del corpo, per le considerazioni fatte (§. V.); parrebbe non doversi rivocar in dubbio, che dalle prime risultar debbano, come risultano dalle seconde, per le ricercate pressioni valori utili e determinati. I corollarj 1., 2. e 3. in seguito all' accennato prob. II. confermano ciò, mentre applicate le suddette formule generali per i quattro appoggi, colle opportune sostituzioni a' casi ivi descritti, somministrano valori determinati, restando insieme adempiuta l' intrinseca condizione del problema, cioè che la somma delle determinate pressioni sugli appoggi eguaglia il peso del corpo sostenuto. E dimostrato avendo inoltre nel Teo. II. (Mem. cit.) che

se

se il punto G è centro di gravità dei quattro punti A,B,C,M (Fig. VII.), i quattro appoggi sono egualmente caricati, portando ciascuno la quarta parte del peso del corpo, si vede nello Scol. I. dello stesso Teorema, corrispondere esattamente a questa rimarchevole proprietà le formule generali, fatta in esse quella sostituzione, che nella supposta circostanza è il noto Teorema del *Guldini*. Ma importando moltissimo che per ogni via sia comprovata la realità delle menzionate formule generali per i quattro appoggi, darò quì un' applicazione numerica di esse, supposto che sieno collocati in un trapezio irregolare; al che concorse il *Sig. Angelo Casarotti* Ingegnere Vicentino. Si vedrà pertanto nel sottoposto problema l'esposizione in compendio del laborioso calcolo che intraprese il nominato soggetto con una diligenza conforme a' suoi non ordinarj talenti; e si avrà dirò così in tal lavoro una pruova esperimentale della verità del metodo da me proposto, onde risolvere generalmente una questione che può chiamarsi senza esitamento l' ultimo scoglio della Statica de' solidi.

PROBLEMA VII.

§. XII. Sia (Fig. VII.) il ramo $AG=a=20$, $BG=b=27$, $CG=c=31$, ed il ramo $GM=d=23$; l'angolo $AGB=110°$, $BGC=78°$, $CGM=46°$, e per conseguenza $AGM=126°$; quantità tutte che determinano la posizione dei punti d'appoggio A, B, C, M relativamente al punto G, in cui cade la verticale condotta dal centro di gravità del corpo: ritrovare le pressioni sofferte dagli appoggi suddetti.

Per determinare il valor delle perpendicolari tirate dai punti d' appoggio ai quattro assi perpendicolari alle estremità de' rami, si tirino dal punto G rette parallele agli assi medesimi, e si troverà

$MR=p=33,5191$. $AD=f=33,8404$. $BF=l=25,3864$.
$AQ=\delta=34,7557$. $CL=n=50,6983$. $CE=m=20,5547$.
$AH=g=50,8054$. $BZ=\lambda=38,0982$. $BI=h=29,2346$.
$MN=q=39,8614$. $MP=\omega=15,0229$. $CS=\varkappa=1,4656$.

Sostituiti questi valori nelle formule (P) (Q) (R) (S) che rappresentano le pressioni sugli appoggi A, B, C, M

(Prob. II. Mem. cit.), risulteranno i valori di esse, come qui sotto si osserva.

$$(P)\ldots G\left(\frac{(db\omega + cp\lambda - a\omega\lambda - lpd)(m+q) - b\omega(n\lambda - b\mu) + blp\mu}{(b\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)(m+q) + f\omega(n\lambda - b\mu) + flp\mu}\right)$$

$$= G.\ \frac{1927752,7836}{4057547,1036} = G\,(0,47510).$$

$$(Q)\ldots G\left(\frac{(a\omega\delta + dgp - ct\delta)(m+q) + n\omega(df + b\delta) + f\mu(cp - a\mu) - bgp\mu}{(\text{lo stesso denominatore})}\right)$$

$$= G.\ \frac{662721,0897}{4057547,1036} = G\,(0,16333).$$

$$(R)\ldots G\left(\frac{(b\delta - df)(b\omega - lp) + p\lambda(bg - cf) + af\lambda\omega}{(\text{lo stesso denominatore})}\right)$$

$$= G.\ \frac{733543,5409}{4057547,1036} = G\,(0,18078).$$

$$(S).\,G\left(\frac{(ag\lambda + cb\delta - al\delta - dgb)(m+q) + f\mu(al - cb) + bg(b\omega - n\lambda) + fn(c\lambda - dl) + bln\delta}{(\text{lo stesso denominatore})}\right)$$

$$= G.\ \frac{733554,0758}{4057547,1036} = G\,(0,18079).$$

Le pressioni concrete adunque su i quattro appoggi A,B,C,M rappresentate dalle equazioni generali (P) (Q) (R) (S), saranno nelle proposte circostanze A=G (0, 47510), B=G(0, 16333), C=G (0, 18078) ed M=G (0, 18079): sicchè qualunque sia il peso G del corpo, reali e determinate sono le ritrovate pressioni su i quattro appoggi, e la somma loro pareggia l' intiero peso. Il che ec.

§. XIII. Quando tre sono gli appoggi e in triangolo, possono prendersi per assi di rotazione i tre lati dello stesso triangolo e determinare colla massima semplicità le pressioni ricercate, avvegnachè s' è dimostrato che in tal caso il problema degli appoggi combinasi e non differisce da quello d' un sistema di tre forze verticali, ed è appunto la ragione delle perpendicolari AG, DN (Fig. I.) eguale alla ragione di AM a DM. Non può procedersi del pari però se gli appoggi sono più di tre, cioè parlando per esempio dei quattro, non vagliono per la soluzione del problema le equazioni derivate dall' assumere (Fig. VIII.) i lati AM, MC, CB, BA del quadrilatero ABCM, in cui si trovano collocati, per assi di rotazione, poichè la posizione respettiva del centro di gravità G del corpo sostenuto verso gli appoggi A,B,C,M, o viceversa, da cui unicamente dipender deve la diversa pressione da essi sofferta, è fissata soltanto dalla lunghezza de' rami AG, BG, CG, GM, e dalla scambievole loro inclinazione. Questa è appunto la principal vista ch' io reputai doversi tenere (Introd. Mem. cit.) nell' accignermi allo scioglimento di così ardua questione, in cui niente meno che in ogni altro soggetto fisico o fisico matematico, del calcolo non dee valersene che per semplice istrumento, che guidato esser deve dalla ragione.

§. XIV. Il sempre mai benemerito fondatore, il *Chiarissimo Lorgna*, di questa nostra Società, nel Tom. VII., segue nella sua Memoria *Dell' azione di un corpo retto ec.* gli studj fatti sull' argomento dal *Paoli*, in quanto come egli ripete con esso, contro il mio metodo ed i risultamenti che somministra „ i movimenti di rotazione non possono „ riferirsi al più che a tre assi, onde ottenere equazioni „ tra di se indipendenti, e che però un' equazione nel caso di quattro appoggi, due equazioni nel caso di cinque „ appoggi, e così successivamente, sono necessariamente „ comprese nelle tre fondamentali e tra di se indipendenti; „ onde resta sempre indeterminato il problema, allorchè „ sono più di tre gli appoggi non posti per diritto. „ Convenendo però meco che tal problema non sia per costituzione propria indeterminato anche in tutti gli altri casi, espone, come può vedersi nella mentovata sua Memoria, una soluzione generale di esso, escludendo ogni e qualunque movimento di rotazione. Conchiudesi pertanto, passando al concreto, da questo nuovo metodo, che per esempio condotte le diagonali AC, BM (Fig. VIII.) del trapezio ABCM ai di cui angoli stanno disposti quattro appoggi A,B,C,M, e supposto cadere il centro di gravità G del corpo dentro i due triangoli ABM, ACM, l' appoggio B soffra la metà della pressione che soffrirebbe se sostenuto fosse il corpo dai tre soli appoggi A,B,M; l'appoggio C la metà di quella, se sostenuto dai tre soli A,C,M; la pressione sull' appoggio A la metà della somma delle due pressioni che porterebbe ne' suddetti accennati due casi; e così dell' appoggio M. Ma oltre che in tale soluzione non si osserva la condizione che ho ricordato nel paragrafo antecedente, mentre le

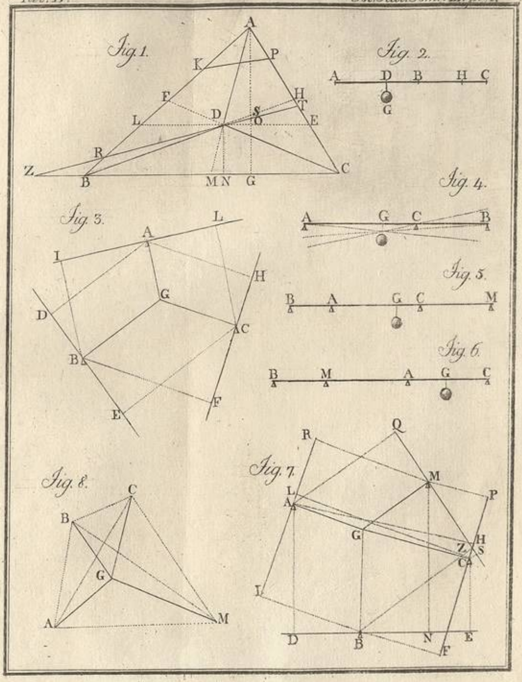
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

pressioni sugli appoggi B,C sarebbero indipendenti dalla respettiva loro posizione; per non giudicare arbitraria l' enunciata distribuzione del peso del corpo su i quattro appoggi, bisogna dimostrare il Teorema, o che l' ipotesi assunta e da cui immediatamente risulta convenga al problema da risolversi. Comunque sia però io mi lusingo di aver dimostrato ad evidenza doversi distinguere il problema de' sostegni o degli appoggi, da quello d' un sistema di forze verticali congiunte al corpo da sospendersi in equilibrio (§. V.), e di aver comprovato che il mio metodo che ammette tante rotazioni, e conseguentemente tante equazioni quanti sono gli appoggi, e che finalmente consiste in un convenevole uso e riguardo alle condizioni del problema dei fondamentali principj della Statica de' solidi, somministra risultamenti determinati e conformi alla ragione.