RIFLESSIONI SOPRA L' INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI A DUE VARIABILI

Di Sebastiano Canterzani

Ricevuta li 3. Messidoro anno VI. (21. Giugno 1798.)

Il celebre Eulero nel §. 854. del secondo volume del suo Calcolo Integrale propone un metodo per integrare l'equazion lineare di second' ordine $ddy + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$, il qual consiste nel supporre $dy = tydx + udx$. Avendo voluto provare se colla medesima sostituzione si possa tentare l'integrazione delle equazioni lineari di qualunque ordine comprese sotto la forma generale

$$X = y + \frac{Pdy}{dx} + \frac{Qddy}{dx^2} + \frac{Rd^3y}{dx^3} + \frac{Sd^4y}{dx^4} \ldots + \frac{Td^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{Vd^ny}{dx^n},$$

dove P, Q, R, S .... T, V, X sono funzioni date di x, ho avuto occasione di fare alcune osservazioni che verrò quì brevemente esponendo.

Siccome t, u sono due nuove variabili, e dx vuolsi costante, così colla sostituzione dei valori di dy, ddy, $d^3y \ldots d^ny$ provenienti dall' accennata supposizione si otterrà un' equazione, che avrà due classi di termini, perchè gli uni saran moltiplicati per y, gli altri non conterranno in verun modo y. Poichè dunque delle nuove due variabili t, u una è arbitraria, potrà volersi che ella sia tale, che renda eguale a zero la somma di tutti que' termini, che sono moltiplicati per y. Così sparirà affatto y, e si avranno le due equazioni

$$\text{(I.)}\ 0 = 1 + Pt + Q\left(t^2 + \frac{dt}{dx}\right) + R\left(t^3 + \frac{3tdt}{dx} + \frac{ddt}{dx^2}\right)$$
$$+ S\left(t^4 + \frac{6t^2dt}{dx} + \frac{3dt^2}{dx^2} + \frac{4tddt}{dx^4} + \frac{d^3t}{dx^3}\right) + \&c.$$

$$\text{(II.)}\ X = Pu + Q\left(tu + \frac{du}{dx}\right) + R\left(t^2u + \frac{tdu}{dx} + \frac{2udt}{dx} + \frac{ddu}{dx^2}\right)$$
$$+ S\left(t^3u + \frac{t^2du}{dx} + \frac{tddu}{dx^2} + \frac{studt}{dx} + \frac{3dtdu}{dx^2} + \frac{3uddt}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \&c.$$

la prima delle quali non conosce altre variabili che x, t; onde trovata che siasi una funzione di x, la quale ne sia un integrale particolare, se la medesima funzione di x si sostituirà in luogo di t nella seconda equazione, indi si troverà un'altra funzione di x, che sia un integrale particolare di questa seconda equazione, si avrà un integral particolare dell' equazione proposta col porre in vece di t, e di u le corrispondenti due funzioni di x nella formola $y = e^{\int t dx} \int e^{-\int t dx} u dx$, che nasce dalla supposizione $dy = tydx + udx$.

E' chiaro, che le due equazioni (I.), (II.) sono dell' ordine $n-1$, perchè la proposta è dell' ordine n, e nel supposto valor di $dy = tydx + udx$ non s' incontra nè dt, nè du.

E' chiaro ancora, che facendo $t = \frac{dz}{zdx}$ l' equazione (I.) si muta in quest' altra

$$\text{(III.)}\ 0 = z + \frac{Pdz}{dx} + \frac{Qddz}{dx^2} + \frac{Rd^3z}{dx^3} + \frac{Sd^4z}{dx^4} \cdots\cdots + \frac{Td^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \frac{Vd^nz}{dx^n}$$

che è l' equazione stessa proposta, in cui sia $X = 0$, ed è una di quelle equazioni, alle quali è noto che se soddisfanno gl' integrali particolari $z = \varphi x$, $z = \varphi' x$, $z = \varphi'' x$, &c., soddisfa pur anche l' integrale $z = \alpha . \varphi x + \beta . \varphi' x + \gamma . \varphi'' x +$ &c., che consiste nella somma di quegl' integrali particolari moltiplicati ciascuno per una costante arbitraria. Finalmente è chiaro, che da che si sarà posto in vece di t un valore dato per x, che sia un integral particolare dell' equazione (I.), l' equazione (II.) prende la forma d' equazion lineare, poichè può essa scriversi così

$$X = (P + Qt + R(t^2 + \frac{2dt}{dx} + S(t^3 + \frac{stdt}{dx} + \frac{3ddt}{dx^2}) + \&c.)\, u + (Q + Rt + S(t^2 + \frac{3dt}{dx}) + \&c.) \frac{du}{dx} + (R + St + \&c.) \frac{ddu}{dx^2} + (S + \&c.) \frac{d^3u}{dx^3} + \&c.;$$

dove le quantità $u, \frac{du}{dx}, \frac{ddu}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}$, &c. sono moltiplicate per altrettante funzioni di x, di modo tale

le che dividendo tutta l' equazione pel coefficiente di u, risulta un' equazione della natura medesima della proposta, e dell' ordine prossimamente inferiore.

Supposto che si sieno trovati n valori di z, che sieno integrali particolari dell'equazione (III.), si avranno, mediante l' equazione $t = \frac{dz}{zdx}$, n valori di t, che sodisfaranno all' equazione (I.). Si rappresentino questi n valori di t per t', t'', t''', &c. Sostituendoli un dopo l' altro nell' equazione (II.), si avranno n equazioni dell' ordine $n-1$ tra u ed x. Si denoti per u' un valor di u, che soddisfaccia alla prima di tali equazioni. In qualunque maniera sia egli questo valore u' funzione di t', X,P,Q,R,S, &c., saravvi ancora un valore u'' espresso per una simil funzione di t'',X,P,Q,R,S, &c., che soddisfarà alla seconda equazione; ed un terzo valore u''' espresso per una simil funzione di t''', X,P,Q,R,S, &c., che soddisfarà alla terza equazione; e così via discorrendo.

Quì convien notare, che mettendo successivamente nella formola $y = e^{\int t dx} \int e^{-\int t dx} u dx$ i diversi valori di t, e i loro corrispondenti valori di u, gl' integrali particolari dell' equazion proposta, che di mano in mano così si ricavano, non differiscono tra di loro se non per la diversa costante arbitraria, che a volta per volta può aggiungersi all' integrale espresso per $\int e^{-\int t dx} u dx$. La verità di questa proposizione può facilmente rilevarsi per poco che si rifletta su la natura della cosa stessa. Pure giova dimostrarla: al qual effetto premetto che se t' indichi uno dei valori di t, che soddisfanno all' equazione (I.), e t'' un altro; e si denoti per u' il valor di u, che soddisfa all' equazione (II.), quando si è in essa posto t' in vece di t; ed u'' quello che le soddisfa, quando vi si è posto t'', sarà

$$\text{(IV.)} \quad \frac{du''}{dx} - \frac{du'}{dx} = t'u'' - t''u' + \frac{(u''-u')(dt'-dt'')}{(t'-t'')dx}.$$

Imperocchè differenziando, e sostituendo in luogo di $\frac{du''-du'}{dx}$ il suo valore, indi dividendo per dx, si avrà

$$\frac{ddu''}{dx^2} - \frac{ddu'}{dx^2} = \frac{u''dt'}{dx} - \frac{u'dt''}{dx} + \frac{t'du''}{dx} - \frac{t''du'}{dx} +$$

$$\frac{(t'u''-t''u')(dt'-dt'')}{(t'-t'')dx} + \frac{(u''-u')(ddt'-ddt'')}{(t'-t'')dx^2};$$ e tornando a differenziare, e a sostituir in luogo di $\frac{du''-du'}{dx}$ il suo valore, indi a divider tutto per dx, si avrà $\frac{d^3u''}{dx^3} - \frac{d^3u'}{dx^3} =$

$$\frac{u''ddt'}{dx^2} - \frac{u'ddt''}{dx^2} + \frac{t'ddu''}{dx^2} - \frac{t''ddu'}{dx^2} + \frac{2du''dt'}{dx^2} - \frac{2du'dt''}{dx^2}$$

$$+ \frac{(t'du''-t''du')(dt'-dt'')}{(t'-t'')dx^2} + \frac{2(t'u''-t''u')(ddt'-ddt'')}{(t'-t'')dx^2}$$

$$+ \frac{(u''-u')(t'dt''-t''dt')(dt'-dt'')}{(t'-t'')^2dx^2} + \frac{(u''-u')(d^3t'-d^3t'')}{(t'-t'')dx^3};$$

e proseguendo così a cavare i valori di $\frac{d^4u''}{dx^4} - \frac{d^4u'}{dx^4}$, e di $\frac{d^5u''}{dx^5} - \frac{d^5u'}{dx^5}$ &c., se si sostuiscano questi valori di $\frac{du''}{dx} - \frac{du'}{dx}$, $\frac{ddu''}{dx^2} - \frac{ddu'}{dx^2}$ &c., nell' equazione

$$0 = P(u''-u') + Q(t''u''-t'u' + \frac{du''}{dx} - \frac{du'}{dx}) + R(t''^2u''$$

$$- t'^2u' + \frac{t''du''}{dx} - \frac{t'du'}{dx} + \frac{2u''dt''}{dx} - \frac{2u'dt'}{dx} + \frac{ddu''}{dx^2} - \frac{ddu'}{dx^2})$$

$$+ S(t''^3u'' - t'^3u' + \frac{t''^2du''}{dx} - \frac{t'^2du'}{dx} + \frac{t''ddu''}{dx^2} - \frac{t'ddu'}{dx^2}$$

$$+ \frac{5t''u''dt''}{dx} - \frac{5t'u'dt'}{dx} + \frac{3du''dt''}{dx^2} - \frac{3du'dt'}{dx^2} + \frac{3u''ddt''}{dx^2}$$

$$- \frac{3u'ddt'}{dx^2} + \frac{d^3u''}{dx^3} - \frac{d^3u'}{dx^3}) + \&c.,$$ la quale altro non è che l' equazione (II.), in cui si sono messi per t ed u i valori t', u' corrispondentisi, sottratta dalla stessa equazione,

sostituiti che sieno in essa per t ed u i valori pure corrispondentisi t'', u'', nasce un' equazione, che moltiplicata che sia per $\frac{t'-t''}{u''-u'}$ è $o = P(t'-t'') + Q(t'^2 - t''^2 + \frac{dt'}{dx} - \frac{dt''}{dx})$

$+ R(t'^3 - t''^3 + \frac{3t'dt'}{dx} - \frac{3t''dt''}{dx} + \frac{ddt'}{dx^2} - \frac{ddt''}{dx^2})$

$+ S(t'^4 - t''^4 + \frac{6t'dt'}{dx} - \frac{6t''dt''}{dx} + \frac{3dt'^2}{dx^2} - \frac{3dt''^2}{dx^2}$

$+ \frac{4t'ddt'}{dx^2} - \frac{4t''ddt''}{dx^2} + \frac{d^3t'}{dx^3} - \frac{d^3t''}{dx^3}) +$ &c.; la quale equazione è verissima consistendo essa nella differenza tra due equazioni verissime, quali sono le due, che risultano mettendo successivamente nell' equazione (I.) in luogo di t i suoi due valori t', t''.

Ciò premesso è evidente, che sussistendo l' equazione (IV.) sussisterà ancora

$$t'u'' - t''u'' = \frac{du'' - du'}{dx} + t''u' - t''u'' - \frac{(u''-u')(dt'-dt'')}{(t'-t'')dx};$$

e dividendo per $t'-t''$, indi moltiplicando per $e^{-\int t''dx}dx$, sussisterà pur anche $e^{-\int t''dx}u''dx = \frac{(du''-du')e^{-\int t''dx}}{t'-t''}$

$- \frac{(u''-u')e^{-\int t''dx}t''dx}{t'-t''} - \frac{(u''-u')(dt-dt'')e^{-\int t''dx}}{(t'-t'')^2}$; la qual equazione integrata dà $A + \int e^{-\int t''dx}u''dx = \frac{(u''-u')}{t'-t''}e^{-\int t''dx}$;

onde viene ad essere $e^{\int t''dx}(A + \int e^{-\int t''dx}u''dx) = \frac{u''-u'}{t'-t''}$.

Ma suissstendo l' equazione (IV.), sussisterà pure

$$t'u' - t''u' = \frac{du'' - du'}{dx} + t'u' - t'u'' - \frac{(u''-u')(dt'-dt'')}{(t'-t'')dx};$$

e dividendo per $t' - t''$, e insieme moltiplicando per $e^{-\int t dx} dx$ sussisterà eziandio $e^{-\int t dx} u' dx = \frac{(du'' - du')e^{-\int t dx}}{t' - t''}$

$$- \frac{(u'' - u')e^{-\int t dx}}{t' - t''} - \frac{(u'' - u')(dt' - dt'')e^{-\int t dx}}{(t' - t'')^2};$$ che integrata dà $B + \int e^{-\int t dx} u dx = \frac{(u'' - u')}{t' - t''} e^{-\int t dx}$, onde si avrà

$$e^{\int t dx} (B + \int e^{-\int t dx} u' dx) = \frac{u'' - u'}{t' - t''}.$$

Dunque i due integrali particolari ottenuti, l'uno col prendere per t ed u i valori corrispondentisi t', u', l' altro col prendere gli altri valori pure corrispondentisi t'', u'', non possono differire tra di loro che per la costante arbitraria aggiunta A, o B; di modo tale che se queste costanti si facciano $= o$, gl' integrali sono affatto identici, come quei che riescono ciascuno eguale alla stessa quantità $\frac{u'' - u'}{t - t''}$.

Non è però che non giovi conoscere gli n valori di t, che soddisfanno all' equazione (I.), e che denotiamo per t', t'', t''', &c.. Poichè sostituendoli un dopo l' altro nell' equazione (II.), indi sommando tutti i secondi membri delle equazioni che risultano, e mettendo questa somma eguale alla funzione X, che costituisce il primo membro dell' equazione proposta, onde abbiasi l' equazione

$$\text{(V.)}\ X = nPu + Q\left(u(t' + t'' + t''' + \&c.) + \frac{ndu}{dx}\right)$$
$$+ R\left(u(t'^2 + t''^2 + t'''^2 + \&c.) + (t' + t'' + t''' + \&c.)\frac{du}{dx}\right.$$
$$\left. + 2u\left(\frac{dt' + dt'' + dt''' + \&c.}{dx}\right) + \frac{nddu}{dx^2}\right) + S\left(u(t'^3 + t''^3 + t'''^3 + \&c.)\right.$$
$$- (t'^2 + t''^2 + t'''^2 + \&c.)\frac{du}{dx} + (t' + t'' + t''' + \&c.)\frac{ddu}{dx^2}$$
$$+ \frac{5u(t'dt' + t''dt'' + t'''dt''' + \&c.)}{dx} + \frac{3du(dt' + dt'' + dt''' + \&c.)}{dx^2}$$

$+\frac{3u(ddt'+ddt''+ddt'''+\&c.)}{dx^2}+\frac{nd^3u}{dx^2}\Big)+\&c.$; se il valor di u, che è integral particolare di quest' equazione, si sostituirà nella formola seguente $y=e^{\int t'dx}(A+\int e^{-\int t'dx}udx)+e^{\int t''dx}(B+\int e^{-\int t''dx}udx)+e^{\int t'''dx}(C+\int e^{-\int t'''dx}udx)+\&c.$, si avrà in questa formola l' integrale dell' equazione proposta, il quale sarà completo, perchè le costanti arbitrarie A,B,C,&c. saranno appunto tante, quant' è l' ordine dell' equazione.

Infatti posta questa formola, e facendo per maggior comodo $A+\int e^{-\int t'dx}udx=K'$, $B+\int e^{-\int t''dx}udx=K''$, $C+\int e^{-\int t'''dx}udx=K'''$, e così via discorrendo, onde sia $e^{\int t'dx}dK'=e^{\int t''dx}dK''=e^{\int t'''dx}dK'''$, &c. $=udx$, si avrà

$$y=e^{\int t'dx}K'+e^{\int t''dx}K''+e^{\int t'''dx}K'''+\&c.$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\int t'dx}t'K'+e^{\int t''dx}t''K''+e^{\int t'''dx}t'''K'''+\&c.+nu.$$

$$\frac{ddy}{dx^2}=e^{\int t'dx}\left(t'^2+\frac{dt'}{dx}\right)K'+e^{\int t''dx}\left(t''^2+\frac{dt''}{dx}\right)K''+$$

$$e^{\int t'''dx}\left(t'''^2+\frac{dt'''}{dx}\right)K'''+\&c.+u(t'+t''+t'''\&c.)+\frac{ndu}{dx}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{\int t'dx}\left(t'^3+\frac{3t'dt'}{dx}+\frac{ddt'}{dx^2}\right)K'+e^{\int t''dx}\left(t''^3+\right.$$

$$\left.\frac{3t''dt''}{dx}+\frac{ddt''}{dx^2}\right)K''+e^{\int t'''dx}\left(t'''^3+\frac{3t'''dt'''}{dx}+\frac{ddt'''}{dx^2}\right)K'''$$

$$+\&c.+u\left(t'^2+t''^2+t'''^2+\&c.+\frac{2dt'}{dx}\right.$$

$$+\frac{2dt''}{dx}+\frac{2dt'''}{dx}\ \&c.)+(t'+t''+t'''\ \&c.)\frac{du}{dx}+\frac{nddu}{dx^2}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=e^{\int t'dx}(t'^4+\frac{6t'^2dt'}{dx}+\frac{3dt'^2}{dx^2}+\frac{4t'ddt'}{dx^2}+\frac{d^3t'}{dx^3})K'$$

$$+e^{\int t''dx}(t''^4+\frac{6t''^2dt''}{dx}+\frac{3dt''^2}{dx^2}+\frac{4t''ddt''}{dx^2}+\frac{d^3t''}{dx^3})K''$$

$$+e^{\int t'''dx}(t'''^4+\frac{6t'''^2dt'''}{dx}+\frac{3dt'''^2}{dx^2}+\frac{4t'''ddt'''}{dx^2}+\frac{d^3t'''}{dx^3})K'''$$

$$+\ \&c.+u(t'^3+t''^3+t'''^3+\&c.+\frac{5t'dt'}{dx}-$$

$$+\frac{5t''dt''}{dx}+\frac{5t'''dt'''}{dx}+\&c.+\frac{3ddt'}{dx^2}+\frac{3ddt''}{dx^2}+\frac{3ddt'''}{dx^2}+\&c.)$$

$$+(t'^2+t''^2+t'''^2+\&c.+\frac{3dt'}{dx}+\frac{3dt''}{dx}+\frac{3dt'''}{dx}+\&c.)\frac{du}{dx}$$

$$+(t'+t''+t'''+\&c.)\frac{ddu}{dx^2}+\frac{nd^3u}{dx^3};$$ e così di seguito.

Ora sostituendo questi valori di y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, &c. nell' equazione proposta, risulterà come alla pagina seguente.

$$X = e^{\int t' dx} K' \left(1 + Pt' + Q\left(t'^2 + \frac{dt'}{dx}\right) + R\left(t'^3 + \frac{3t'dt'}{dx} + \frac{ddt'}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left. + S\left(t'^4 + \frac{6t'^2dt'}{dx} + \frac{3dt'^2}{dx^2} + \frac{4t'ddt'}{dx^2} + \frac{d^3t'}{dx^3}\right) + \&c.\right)$$
$$+ e^{\int t'' dx} K''\left(1 + Pt'' + Q\left(t''^2 + \frac{dt''}{dx}\right) + R\left(t''^3 + \frac{3t''dt''}{dx} + \frac{ddt''}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left. + S\left(t''^4 + \frac{6t''^2dt''}{dx} + \frac{3dt''^2}{dx^2} + \frac{4t''ddt''}{dx^2} + \frac{d^3t''}{dx^3}\right) + \&c.\right)$$
$$+ e^{\int t''' dx} K'''\left(1 + Pt''' + Q\left(t'''^2 + \frac{dt'''}{dx}\right) + R\left(t'''^3 + \frac{3t'''dt'''}{dx} + \frac{ddt'''}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left. + S\left(t'''^4 + \frac{6t'''^2dt'''}{dx} + \frac{3dt'''^2}{dx^2} + \frac{4t'''ddt'''}{dx^2} + \frac{d^3t'''}{dx^3}\right) + \&c.\right)$$
$$\&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ nPu + Q\left(u(t' + t'' + t''' + \&c.) + \frac{ndu}{dx}\right) + R\left(u(t'^2 + t''^2 + t'''^2\right.$$
$$\left. + \&c. + \frac{2dt'}{dx} + \frac{2dt''}{dx} + \frac{2dt'''}{dx} + \&c.) + (t' + t'' + t''' \&c.)\frac{du}{dx} + \frac{nddu}{dx^2}\right)$$
$$+ S\left(u(t'^3 + t''^3 + t'''^3 + \&c. + \frac{5t'dt'}{dx} + \frac{5t''dt''}{dx} + \frac{5t'''dt'''}{dx} + \&c.\right.$$
$$+ \frac{3ddt'}{dx^2} + \frac{3ddt''}{dx^2} + \frac{3ddt'''}{dx^2} + \&c.) + (t'^2 + t''^2 + t'''^2 + \&c.$$
$$+ \frac{3dt'}{dx} + \frac{3dt''}{dx} + \frac{3dt'''}{dx} + \&c.)\frac{du}{dx} + (t' + t'' + t''' + \&c.)$$
$$\left.\frac{ddu}{dx^2} + \frac{nd^3u}{dx^3}\right) + \&c.$$

dove le quantità, che moltiplicano $e^{\int t' dx} K'$, $e^{\int t'' dx} K''$, $e^{\int t''' dx} K'''$, &c., sono per supposizione ognuna eguale a zero, altro non essendo che il secondo membro dell' equazione (I.); onde tolte queste quantità resta appunto l' equazione (V.), alla quale per supposizione soddisfa il valore, che si vuol sostituito ad u nell' integrale assegnato.

Del resto senza dipartirsi dalla supposizione $dy = tydx + udx$ si potrà tentare l' integrazione dell' equazion lineare da principio proposta anche mediante una serie di successive integrazioni. Imperocchè trovata per t una funzione X' di x,

che soddisfaccia all' equazione (I.), e ne sia un integrale particolare, se si porrà X' in luogo di t nell' equazione (II.), questa, come si è notato di sopra, veste la forma di equazion lineare dell' ordine $n-1$ similissima alla proposta, e può per conseguenza trattarsi come la proposta supponendo $du = pudx + qdx$; il che facendosi di mano in mano per le nuove equazioni, alle quali successivamente si giunge, finalmente s' arriverà ad un' equazione finita del genere di quelle, che sono rappresentate dall' equazione (I.), ed insieme ad un' altra pure finita del genere di quelle, che sono rappresentate dall' equazione (II.); la prima delle quali sarà $o = 1 + \frac{Vm}{T+V(X'+X''+X'''+\&c.)}$, e l' altra sarà $X = Vr$ posto che l' ultima supposizione sia stata $dK = mKdx + rdx$, e che X', X'', X''', &c. sieno funzioni di x, che rispettivamente abbian soddisfatto alle successive equazioni (I.), alle quali si giunse di mano in mano nella serie delle integrazioni, di modo che l' ultima di queste quantità X', X'', X''', &c., che si può indicare per X^{s}, sia $= m = -\frac{T}{V} - X' - X'' - X''' \ldots\ldots\ldots - X^{s-1}$.

Facilmente si vede, che per tal modo si riuscirà ad avere $y = e^{\int X'dx} \int e^{\int (X''-X')dx} dx \int e^{\int (X'''-X'')dx} dx \int \ldots\ldots \int e^{\int (X^{s}-X^{s-1})dx} dx \int e^{\int -X^{s}dx} \frac{X}{V} dx$, dove incontrandosi n integrali indicati col segno $\int$, vi sarà luogo all' addizione di n costanti arbitrarie, e così s' avrà l' integrale completo.

E' chiaro che questa condotta di calcolo non porterebbe, che si dovesse mai cercare l' integrale di veruna delle successive equazioni rappresentate dall' equazione (II.); e basterebbe soltanto cercar d' avere un integrale particolare di ciascuna delle successive equazioni rappresentate dall' equazione (I.), cioè X' per la prima, X'' per la seconda, &c.

Ma

Ma lo stesso vantaggio si può avere anche usando del primo metodo, potendosi far a meno d' investigare la funzione di x valore di u, che sia integrale particolare dell' equazione (V.). Poichè sieno indicate per z', z'', z''', &c. le n funzioni di x, che sono gl' integrali particolari dell' equazione (III.), le quali, com' è manifesto, sono pure gl' integrali particolari dell' equazione proposta, ove sia $X = 0$; e come si accennò da principio avrassi $z - Az' + Bz'' + Cz''' +$ &c., essendo A, B, C, &c. altrettante costanti arbitrarie. Siccome si fece generalmente $t = \frac{dz}{zdx}$, onde $e^{\int tdx} = z$, così sarà $e^{\int t'dx} = z'$, $e^{\int t''dx} = z''$, $e^{\int t'''dx} = z'''$, &c.; e però l' integral generale $y = e^{\int t'dx}\left(A + \int^{-\int t'dx} udx\right) + e^{\int t''dx}\left(B + \int^{-\int t''dx} udx\right) + e^{\int t'''dx}\left(C + \int^{-\int t'''dx} udx\right) +$ &c. che ottiensi con quel primo metodo, può mettersi anche sotto quest' altra forma $y = z'\left(A + \int\frac{udx}{z'}\right) + z''\left(B + \int\frac{udx}{z''}\right) + z'''\left(C + \int\frac{udx}{z'''}\right) +$ &c., o sia $y = Az' + Bz'' + Cz''' +$ &c. $+ z'\int\frac{udx}{z'} + z''\int\frac{udx}{z''} + z'''\int\frac{udx}{z'''} +$ &c. Ora indicando il differenziale col segno d, e la divisione co' due punti, alla somma $z'\int\frac{udx}{z'} + z''\int\frac{udx}{z''} + z'''\int\frac{udx}{z'''} +$ &c. si può sostituir la formola

$$z'\int d\frac{z''}{z'}\int d\left(d\frac{z'''}{z'} : d\frac{z''}{z'}\right)\int d\left(d\left(d\frac{z''''}{z'} : d\frac{z''}{z'}\right) : d\left(d\frac{z'''}{z'} : d\frac{z''}{z'}\right)\right)\int \cdots \int \frac{Xdx^n}{V.z'.d\frac{z''}{z'}.d\left(d\frac{z'''}{z'} : d\frac{z''}{z'}\right).d\left(d\left(d\frac{z''''}{z'} : d\frac{z''}{z'}\right) : d\left(d\frac{z'''}{z'} : d\frac{z''}{z'}\right)\right).\ \&c.}$$

dove più non comparisce la variabile u; e l' integrale completo dell' equazione proposta sarà $y = Az' + Bz'' + Cz''' +$ &c.

$$+z'\int d\frac{z''}{z'}\int d\left(d\frac{z'''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right)\int d\left(d\left(d\frac{z''''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right):d\left(d\frac{z'''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right)\right)$$

$$\int\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int\frac{Xdx^n}{V.z'.d\frac{z''}{z'}.d\left(d\frac{z'''}{z}:d\frac{z''}{z'}\right).d\left(d\left(d\frac{z''''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right):d\left(d\frac{z'''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right)\right)}.\ \&c.$$

di che ognuno può facilmente convincersi separando prima A, indi differenziando; poi B, indi differenziando; poscia C, e tornando a differenziare; e così successivamente: poichè all' ultimo arriverà ad incontrare un' equazione, nella quale ravviserà l' equazion proposta, se non che in vece di P, Q, R, &c. vi troverà i loro valori quali risultano separando P, Q, R, &c. nelle n equazioni

$$o=z'+\frac{Pdz'}{dx}+\frac{Qddz'}{dx^2}+\frac{Rd^3z'}{dx^3}\cdots\cdots+\frac{Vd^nz'}{dx^n}$$

$$o=z''+\frac{Pdz''}{dx}+\frac{Qddz''}{dx^2}+\frac{Rd^3z''}{dx^3}\cdots\cdots+\frac{Vd^nz''}{dx^n}$$

$$o=z'''+\frac{Pdz'''}{dx}+\frac{Qddz'''}{dx^2}+\frac{Rd^3z'''}{dx^3}\cdots\cdots+\frac{Vd^nz'''}{dx^n}.$$

&c.

Era già noto, che l' integrale dell' equazione proposta viene ad esser dato, subito che dati sieno gli n integrali particolari della medesima nel supposto di $X=o$. Quì si vede come egli da questi dipende; e in esso si potrà col noto metodo risolvere in ciascun caso la formola integrale composta in n formole integrali semplici. Sebben queste si possono anche assegnar generalmente. Imperocchè il prodotto

$$z'.d\frac{z''}{z'}.d\left(d\frac{z'''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right).d\left(d\left(d\frac{z''''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right):d\left(d\frac{z'''}{z'}:d\frac{z''}{z'}\right)\right)\ \&c.$$

dei coefficienti delle successive sommatorie, il quale è pur un fattore del denominatore della quantità posta sotto la sommatoria ultima, è una frazione, di cui se il numeratore si indicherà per Ψ, e il denominatore per Π, si avrà

$z^{\nu}\int\frac{\Pi X dx^{n}}{V\Psi}$ per l' ultima delle formole integrali semplici, dove z^{ν} denota l' ultimo nella serie degl' integrali particolari z', z'', z''', z'''', &c.; che se si indicherà per $z^{\nu-1}$ il penultimo de' medesimi integrali particolari, e per Π^{ν} si indicherà la quantità Π dopo di aver in essa cambiato $z^{\nu-1}$ in z^{ν}, si avrà per la penultima delle formole integrali semplici $z^{\nu-1}\int\frac{\Pi^{\nu}X dx^{n}}{V\Psi}$; e similmente se per $z^{\nu-2}$ s' indicherà l' antepenultimo nella serie dei suddetti integrali particolari, e per $\Pi^{\nu-1}$ ciò che diviene Π^{ν} dopo d' aver in questo cambiato $z^{\nu-2}$ in $z^{\nu-1}$, si avrà $z^{\nu-2}\int\frac{\Pi^{\nu-1}X dx^{n}}{V\Psi}$ per l' antepenultima delle formole integrali semplici; e con lo stesso metodo si avranno per ordine tutte l' altre formole integrali semplici fino alla prima, che sarà $z'\int\frac{\Pi'X dx^{n}}{V\Psi}$, dove Π' denota ciò che è divenuto Π'' dopo d' aver posto in esso z'' in luogo di z': queste formole integrali semplici poi nell' integrale dell' equazione proposta disponendole secondo l' ordine dei loro coefficienti z', z'', z''', ec. riusciranno affette alternativamente del segno $+$, e del segno $-$, in modo che la prima, cioè quella che è moltiplicata per z', avrà il segno $-$ se l' ordine n dell' equazion proposta sia pari, ed il segno $+$, se l' ordine n sia dispari.

Fine della Parte prima del Tomo ottavo.