DELLE DIFFERENZE FINITE NELLA TRIGONOMETRIA

DI ANTONIO CAGNOLI.

Ricevuta li 24. *Nebbiajo An. VII.* (14. *Novembre* 1798.)

Il chiarissimo nostro fondatore ha pubblicato nel Tom. VII (pag. 346) una Memoria, ove intese di porgere mezzi nuovi, generali, ed utili, onde avere direttamente il valore esatto delle variazioni finite trigonometriche. Egli mi fece anche parte cortesemente del suo lavoro prima di darlo alla stampa: ed io non lasciai di fargli capire, che nella Memoria di lui non è fatto alcun passo, oltre ciò che sapeasi ab antico in Trigonometria. Ma la renitenza naturale a rinunciare alle nostre fatiche, e l' idea che ce ne dà l' amor proprio più vantaggiosa ordinariamente del vero, non permisero probabilmente ch' io fossi ascoltato. Per la qual cosa, trattandosi di materia, ove sembrami avere un diritto legittimo di paternità, mi lusingo non esser soggetto a censura, se piglio a metter la verità sotto gli occhi del pubblico. Forse ciò ecciterà altri ingegni felici a trovar veramente quello, che parmi sia stato indagato da Lorgna senza frutto, ed anzi con danno della scienza.

Comincia l' Autore nel §. III. ad esporre il suo metodo, applicandolo ai casi d' un triangolo con due parti costanti. Dicasi, per esempio, ABC un triangolo rettilineo, nel qual siano costanti il lato AB, e l' angolo A; e data la variazione del lato AC, si cerchi quella dell' angolo C; intendendosi conosciute le tre mentovate parti del triangolo, AB, AC, A. Esprimendo per Δ AC la variazione data, per δC la cercata; la formula, cui produce il Lorgna, è

$$\mp \delta C = \text{ang. tang.} \left(\frac{AB \text{ sen. } A}{AC \pm \Delta AC - AB \cos. A} \right) - \text{ang.} C.$$

Non è già che il secondo membro supponga note quattro parti del triangolo; ma la prima operazione debb' essere di trovare l' angolo C; al qual fine l' Autore premette la formula notissima tang. $C = \frac{AB \text{ sen. } A}{AC - AB \cos. A}$. Si rintraccia poi l' angolo variato ($C \mp \delta C$), mediante la formula analoga, tang. $(C \mp \delta C) = \frac{AB \text{ sen. } A}{AC \pm \Delta AC - AB \cos. A}$. Allora prendendo la differenza che passa tra l' angolo C, e l' angolo ($C \mp \delta C$), si viene in cognizione del valor, che si cerca, di δC.

In questo consiste il metodo Lorgna, siccome nel presente esempio, così in tutti gli altri che seguono, sien relativi alla piana o alla sferica Trigonometria: metodo, il qual presenta, sotto il lusinghevole aspetto d' una espressione sola, ma senza verun guadagno nè di teoria nè di pratica, due operazioni, che si farebbero naturalmente da ogni iniziato in Trigonometria, il qual non sapesse altre vie che le ordinarie inservienti alla soluzione de' triangoli: metodo in conseguenza che niente aggiugne ai primi elementi della scienza.

Passiamo a riscontrar queste mie conclusioni nel §. IV. del Lorgna, dov' ei tratta del caso in cui una sola parte del triangolo sia costante. Le cose, ch' egli suppone esser cognite, sono: la stessa parte costante, due delle variabili, e la variazion di ciascuna di queste due. Con tali dati ei produce separatamente il valor della variazione di ciascuna delle tre altri parti variate. Ma ciò in qual maniera? La costante e le due variabili, come sopra note, gli servono per trovare, con la formula ordinaria, il valor primitivo, o invariato, d'una delle tre parti, di cui si cerca la variazione. Quindi, presi per dati la stessa costante, e le due variabili modificate con la variazion rispettiva, investiga parimenti, cioè col mezzo della medesima formula ordinaria, la grandezza variata di quella parte, di cui trovò innanzi il valor primitivo. La differenza di questi due risultamenti costituisce appunto la variazion ricercata. E così l' Autor vuole che si operi a rinvenire ciascuna delle altre due variazioni ignote.

Sono, a cagion d' esempio, A la costante; AB, BC le variabili delle quali son date le variazioni Δ AB, Δ BC; B la variata di cui saper vuolsi la variazione δB. Si ha in prima sen. C, o vero $\text{sen.}(A+B)=\frac{AB\ \text{sen.}A}{BC}$. Quindi $\text{sen.}(A+B+\delta B)=\frac{(AB+\Delta AB)\ \text{sen.}A}{BC+\Delta BC}$. Da $(A+B+\delta B)$ togliendo $(A+B)$, il cui valore s' è rintracciato con la prima operazione, si perviene a conoscere la quantità, che si cerca, δB.

In tutto ciò non so veder cosa alcuna, la qual non venisse in mente ad ogni principiante non rozzo, che sappia valersi delle formule più elementari della Trigonometria. E pur tal è il metodo Lorgna in tutto il corso di questa Memoria, per conseguente anche nel §. V ove tratta l' ultimo caso, cioè quello in cui niuna parte del triangolo sia costante: talchè non posso maravigliarmi a bastanza, come ad un uomo di tanto sapere sieno fuggite di mano sì fatte bazzecole sotto la creduta importanza di soluzioni nuove, generali, ed utili.

Di fatti or mi accingo a mostrare, che il suo metodo (se tal può chiamarsi) è inoltre molto lontano dall' essere generale. E che sia vero, ei non si val d' altri dati giammai, se non delle parti costanti, e delle variabili di cui è nota la variazione. Ma nelle Analogie differenziali usano gli Autori, chi più chi meno, permutare i dati, affinchè se in vece delle une, altre parti del triangolo sieno le cognite, il problema si possa risolvere parimente. Io mi sono ingegnato di generalizzare tal sorta di soluzioni in tutta l' estensione possibile. Basterà un esempio a far vedere quanto in ciò sia manchevole il metodo Lorgna.

Prendiamo il primo caso esemplificato sopra. Date le costanti AB, A, la variabile AC, e la sua variazione Δ AC, il mentovato Autore indirizza per la via comune a trovare la variazione δC dell' angolo C. Ma se in vece di AB fosse noto l' angolo C; dovrem noi fare un' operazione per determinare la grandezza di AB, e poi farne altre due, per giunger, battendo col Lorgna la strada comune, a conoscere δC? Quand' anzi possiamo ottenere l' intento immediatamente, e con una sola operazione, prevalendoci, a piacimento, o dell' una o dell' altra delle seguenti formule

cot.

$$\cot.\delta C = \cot.C + \frac{AC}{\Delta AC\ \text{sen.}C\,(\text{sen.}C\cot.A + \cos.C)}$$

$$\cot.(C - \delta C) = \frac{(AC + \Delta AC)\cot.C + \Delta AC\cot.A}{AC}$$

le quali si cavano dalle mie (Trigonom. 546, 725) appartenenti ai triangoli sferici, riducendole ai rettilinei mediante le regole che ho stabilite (425). E se in vece di AB, AC, A fossero dati C, BC e ΔBC, perchè lascia il Lorgna in non cale la soluzione più semplice d' ogn' altra, val a dir la seguente, ch' è la prima della mia tavola (279)?

$$\text{sen.}\delta C = \frac{\Delta AC\ \text{sen.}C}{BC + \Delta BC}$$

Nel caso pertanto, che sia nota la variazione ΔAC, e che si cerchi quella δC, il Lorgna produce una soluzione sola, quando ve ne son tre. E come questo difetto regna, più o meno, in ognuno degli altri casi, co' quali egli ha inteso esaurire questo argomento, sì nella piana che nella sferica Trigonometria; chiaro apparisce esser egli grandemente lontano dall' aver dato un metodo generale.

La sua Memoria può dunque esser nociva, in quanto facesse credere a qualcheduno, che la Trigonometria fosse priva di tant' altre risorse, finezze, abbreviazioni, e ripieghi, di cui è capace. Se alcun vorrà metter l' occhio sul mio articolo 725, vedrà che ho usato anch' io d' un' idea, analoga a quella venuta dopo al Lorgna; ma solamente ne' casi, in cui di due formule se ne possa far una, che sia veramente una, e non contenga implicite le operazioni intere d' entrambe; e dove esse formule amalgamate somministrino eliminazioni giovevoli a minorar la fatica ne' computi.

L' utilità delle analogie differenziali, finite od infinitesimali, dipende del tutto ed unicamente da due condizioni. O che possa ottenersi il valor d' una variazione, quantunque non si conoscano tante parti del triangolo, quante sarebbon richieste seguendo le regole ordinarie della Trigonometria. O che il mentovato valor si rinvenga con minor tempo e fatica, di quel che per la via delle dette regole.

L' una e l' altra di queste condizioni mancano affatto nel metodo Lorgna: siccome quello che ad altro non serve giammai, se non se a risolvere i triangoli, col mezzo delle antichissime formule analitiche, le quali non sono nemmeno le più spedite nel calcolo numerico. Date tre parti d' un triangolo, trovarne un' altra, adoprando le formule analitiche conosciute: a ciò si riduce con verità tutta quella Memoria.