

DEGLI ELEMENTI SPETTANTI ALLA TEORIA
DELLA ROTAZIONE SOLARE E LUNARE.

DI ANTONIO CAGNOLI.

Ricevuta li 14. Nebbiajo An. VII. (4. Novembre 1798.)

1. **N**on è maraviglia, se gli elementi spettanti alla teoria della rotazione solare e lunare, rimangono ancora soggetti a non lievi incertezze; da poi che per determinarli con precisione, richiedonsi osservazioni di tanta accuratezza, che oltrepassa per avventura la capacità de' sensi e degl' istrumenti. L' errore d' un quarto di minuto secondo di tempo, nell' osservare un transito, è imputazione di cui non potrebbe sdegnarsi l' astronomo il più esercitato: e perciò i due passaggi; del lembo solare o lunare, e d' una macchia nel disco; possono insieme patire un' ambiguità di mezzo secondo di tempo. Or questo fallo si tenue è bastate a storpiare, d' un mezzo grado per lo meno, l' ascensione retta solare della macchia. Inoltre fia doppio, triplo ec. il danno, quanto maggiormente la macchia si trovi più da presso al lembo, che al centro dell' astro.

2. Quel rimedio, che suol condurre a maravigliosa esattezza nell' altre parti dell' Astronomia; val a dir, di moltiplicare le osservazioni, e prendere il mezzo fra una gran quantità di risultamenti; in questa parte non è di riuscita egualmente sicura, a cagion che i maggiori errori possibili son troppo gravi, e gli errori tenui rarissimi. Che se a quelli d' osservazione s' aggiungano ancora quelli di calcolo, al qual forse non fu mai concessa tutta la diligenza cui merita; diverrà incerto eziandio l' altro rimedio, che vien praticato e prescritto, e consiste nel rigettare dal vero que' risultamenti, che maggiormente si scostan dai più; avendo io di che addurre non pochi esempi, dove le buone osservazioni furono guaste, e le non buone rendute passabili, dalla man del calcolatore, per sola cagion delle vic battute nel fare i computi. Il che in vero dovrebbe

vie meno essere avvenuto, quant'è maggiore la copia de' metodi, a gara inventati, per ritrovare e determinare gli elementi della rotazione: ma siamo lecito dir francamente, dacchè son io pure nel numero degli Autori de' metodi usciti a luce infino ad ora; che niun ve n'ha il qual non sia manchevole e insufficiente: o perchè si confidano egualmente di tutte le osservazioni: o perchè non chiamano a disamina l'immobilità della macchia solare: o perchè finalmente non inchiudono tra le condizioni del problema, che il moto di rotazione sia proporzionale al tempo; onde tutta la briga de' calcoli, fatti per gire in traccia degli altri elementi, si scorge poi vana, quando si cercano gli angoli al polo di rotazione, e si trovan discordi notabilmente dall' indicata proporzionalità.

3. Il solo metodo (a mia notizia) in cui si discute la bontà delle osservazioni, insieme con la immobilità della macchia, è quello di falsa posizione del *Lalande*. Egli pone a cimento le osservazioni tentando, se diano tutte un' egual distanza della macchia dal polo di rotazione. Lo poi m' accingo ad esporre mezzi efficaci e nuovi, non che diretti e brevi, onde pria d'arrischiar fatica nell' indagare elementi, fare ottima scelta d'osservazioni, scandagliandole a un tratto, così per rispetto all' egualità della latitudine eliografica o selenografica, come eziandio per rispetto alla proporzione tra il moto rotatorio ed il tempo.

4. Sia P (fig. 1.) il polo dell' equatore solare o lunare; M la macchia, che quivi prima, indi in A, poscia in C fu osservata: e sia E il punto variabile sul globo solare o lunare, per cui deve intendersi trapassata la linea, che dal centro degli astri andava al polo celeste dell' eclittica nel rispettivo momento delle tre osservazioni. Si hanno per condizioni del problema: 1°. $PM=PA=PC$; 2°. $MPA:APC::T:t$, chiamando T il tempo scorso fra le osservazioni M, A; e quello fra le A, C.

5. Nel triangolo isoscele MPA la Trigonometria sferica porge; $\text{sen.} \frac{1}{2} MA = \text{sen.} AP \text{ sen.} \frac{1}{2} MPA$. E poichè similmente $\text{sen.} \frac{1}{2} AC = \text{sen.} AP \text{ sen.} \frac{1}{2} APC$; sarà dunque

$$\text{sen. } \frac{1}{2} \text{ MPA} : \text{sen. } \frac{1}{2} \text{ APC} :: \text{sen. } \frac{1}{2} \text{ MA} : \text{sen. } \frac{1}{2} \text{ AC}.$$

Nominando r il tempo della rotazione, e facendo $360^\circ = 2c$, sta $r : 2c :: T : \text{MPA} = \frac{2cT}{r}$. Per la stessa ragione $\text{APC} = \frac{2cf}{r}$. Dunque

$$(A) \quad \text{sen. } \frac{cT}{r} : \text{sen. } \frac{cf}{r} :: \text{sen. } \frac{1}{2} \text{ MA} : \text{sen. } \frac{1}{2} \text{ AC}.$$

6. In questa proporzione tant' ovvia (e per questo forse non mai avvertita), la qual rinchiude visibilmente ambe le condizioni (4) del problema, nulla v' ha che sia ignoto per riguardo alla Luna, e null' altro che r per rispetto al Sole. Imperocchè ne' triangoli MEA, AEC, si conoscono per osservazione gli angoli MEA, AEC, insieme coi lati che li comprendono, ME, AE, CE: sono dunque noti per computo facilmente anche i lati MA, AC.

Degli elementi della rotazione solare.

7. Or facendomi a parlar primamente del Sole, dirò: che chi volesse trarre dalla proporzione (A) il valore di r , correrebbe rischio talvolta di ricercarlo indarno, e sovente d'esser gittato assai lungi dal vero, quando massime T sia di poco diverso da r (che pur è quello che giova più a dar nel segno pegli altri elementi); mentre più d'una volta ho sperimentato, che piccoli errori d'osservazione bastano a far maggiore quell' angolo, il qual corrisponde nel polo di rotazione al tempo minore. Più sicuro e troppo essenziale servizio può rendere l'analogia (A), se ci contentiamo con essa esplorar la bontà delle osservazioni, a fine di non procedere al computo degli elementi, se non coll'opra di quelle, che sien fornite di malleveria sufficiente, e reggano, a così dire, a martello.

8. In sì fatt' uopo basta far uso d' un valor prossimo di r , qual già si conosce esser quello di giorni $25 \frac{1}{2}$: avendo il *Lalande*, in una Memoria elaboratissima, che sta tra quelle dell' Accademia Parigina per l'anno 1776, ricavato

da molte comparazioni di ritorni d'una stessa macchia, $r = 25$ giorni, 10 ore. Chiara cosa è, che il rapporto de' seni di $\frac{eT}{r}$, e di $\frac{e\tau}{r}$, non riceve alterazione sensibile, da un error di qualche ora nel valore ipotetico di r ; massime se T e τ non siano minori ciascuno di tre o quattro giorni, la qual condizione vedremo poi quanto importi. Adunque la conoscenza esatta del vero valore di r non è necessaria per cimentare le osservazioni mediante la formula (A). O quelle, che ad essa non soddisfano, son cattive; o la macchia non è immobile: quindi è tempo perduto adoprare nel computo degli elementi che suppongono l'immobilità.

8. Di 50 osservazioni di macchie solari, fatte da' più rinomati Astronomi, e sottomesse al criterio di quella formula, sole 12 hanno ottenuto la sua sanzione. Ne darò i risultamenti in questa Memoria. Intanto si osservi, che le osservazioni rigettate essendo più che il triplo delle ammesse, sarebbe stato pericoloso accettarle tutte senza disamina come buone, qualmente s'è fatto infino ad ora, e trar da tutte la quantità media degli elementi: poichè a stabilirla avrebbero avuto parte grandemente più le cattive delle buone.

9. Potrebbe alcuno obiettermi, che il soddisfare alla proporzione (A) non è prova irrefragabile, che le osservazioni siano esenti d'errori; mercecchè questi potrebbero compensarsi: nel qual caso la sanzione della formula non toglierebbe che gli elementi ne fossero guasti. A ciò si risponde, che in paragone agli errori possibili, il numero di quelli che sarebbero atti a nascondersi mediante la compensazione, sarà sempre menomo; laddove egli è indubitato, che le osservazioni o le ipotesi non son buone, se alla formula non soddisfino; e questa prova esclusiva è preziosa, quantunque l'inversa inclusiva possa essere per avventura, una volta in mille, fallace.

10. L'analogia (A), comechè semplicissima, può di leggieri diventar vie più semplice; qualora gli astronomi pigliino cura di fare le osservazioni a distanze uguali di tempo; il che non è punto malagevole in cotal sorta. Allora

essendo $T=2t$, le osservazioni debbono concordare unicamente con l' equazione.

$$\text{sen. } \frac{1}{2} MA = \text{sen. } \frac{x}{2} AC$$

Avverto bensì, che quando la differenza da $T=2t$ sia di qualche ora, non è d' arrischiarsi a ridurre le osservazioni ad eguali differenze di tempo, col mezzo di parti proporzionali; stante esser la relazione, tra il moto in ascensione retta veduto dalla Terra ed il moto in longitudine veduto dal centro del Sole, grandemente diversa, secondo che la macchia è vicina o lontana dal mezzo del disco. Non rincrezca pertanto, nell' indicata circostanza, al zelante calcolatore attenersi alla formula (A).

11. Che se un intervallo fosse doppio dell' altro: per esempio, $T=2t$; in simil caso $\text{sen. } \frac{eT}{r} = \text{sen. } \frac{2ct}{r} =$

$2 \text{sen. } \frac{ct}{r} \cos. \frac{ct}{r}$, e per conseguenza (5)

$$\cos. \frac{ct}{r} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} MA}{2 \text{sen. } \frac{x}{2} AC}$$

equazione, che dà immediatamente il valore di r ; ma che non servendo a cibrar la bontà delle osservazioni, lo darebbe deformato dai loro errori, quando prima non sieno per legittime conosciute mediante l' analogia (A).

12. Espongo l' equazione (11), perchè m' è venuta alle mani; per altro stimo nocevole tanta diversità ne' tempi scorsi tra le osservazioni successive. La somma difficoltà d' averle buone costringe a molte avvertenze, e tutte importanti; che ora anderò divisando.

13. Primieramente è opera gittata osservare una macchia solare avanti che sia lontana, in ascensione retta, dall' orlo onde spuntò, una quinta parte all' incirca del diametro. Quant' è maggiore l' obliquità della superficie del disco, nella region della macchia, rispettivamente al nostro raggio visuale, tanto ci appare più lento il moto rotatorio della macchia medesima; laonde ogni tenue errore d' osservazione li genera gravi e gravissimi nel computo del sito elio-

eliocentrico di essa. S' arroege il travisamento di figura, nella macchia guardata così di sghembo, tal che divien puro caso colpirne il centro.

Passano giorni $13 \frac{1}{2}$ circa tra l' apparizione e la disparizion d' una macchia. Sarà pertanto fatica vana osservarla prima del quarto giorno, o dopo il decimo. Molte osservazioni, non chiuse fra questi limiti, ho sottoposto al criterio severo e giusto della formula (A): di niuna ho potuto ottenere perdono, e parecchie han prodotto risultamenti strani.

14. Secondariamente, la distanza del tempo, tra le osservazioni consecutive, che vogliansi assumer ne' computi, non dev' esser minore di giorni 3: nè minore per conseguente di 6 dalla prima all' ultima. Senza questa avvertenza il moto eliocentrico non è grande a bastanza per sopportar senza grave sconciatura i piccoli errori d' osservazione.

15. In terzo luogo, non è di lieve momento aspettare i tempi maggiormente propizj onde fare osservazioni di tanta difficoltà. Son dessi in Giugno e in Dicembre: poichè allora il luogo eliocentrico della Terra concorrendo, poco più poco meno, con quello del nodo dell' equator solare, ne nasce che il camminar delle macchie si mostra più inclinato che mai all' eclittica, donde il cangiamento della declinazione riesce più rapido, e per conseguente l' osservazione più sicura.

16. Quarto, si debbono prender di mira le macchie, le quali sono di più regular figura, e ben terminate da orli taglienti.

17. Finalmente è mestieri ripetere ogni osservazione le otto e le dieci volte, a fin di pigliar dal composto di tutte una quantità mezzana, espressa coi decimi del minuto secondo. A ciò porge comodo la lentezza apparente del moto rotatorio del Sole, posto che ella è sì fatta, che per 10 e 12 minuti di tempo non è percettibile, nella distanza in cui siamo, il mutamento di luogo della macchia negli spazj celesti.

18. Non ometto inoltre di suggerire un' avvertenza, che gli Osservatori non sogliono usare mettendo a luce le loro

osservazioni di macchie, e che puote pur essere di momento; cioè di far pubblica insieme la grandezza del diametro solare, quale apparisce nel cannocchiale di cui si son vasi nel farle. Non sono punto da trascurarsi le differenze di questa misura da uno ad altro istrumento: e senza cotal notizia le osservazioni rimarranno infruttuose, tosto che i calcolatori s' avvedano d' impiegar male il tempo nel computarle.

19. Che se fa bisogno d' una grandissima anzi eminentissima accuratezza nell' osservatore, mal consigliato sarebbe poi quel calcolatore, il qual riputasse sempre impunita ogni negligenza o pigrizia da parte sua. Questo confesserò schiettamente: che avendo io calcolate in Parigi alcune osservazioni, fatte con l' ultima diligenza dal rinomato astronomo *Méchain*, onde offrirmi cortesemente di che mettere a prova il mio Metodo per trovare gli elementi della rotazione, pochi giorni prima prodotto all' Accademia delle Scienze, la qual nominò lui col *Bailly* per esminarlo (*Mémoires présentés*, Tom. X), non ho mai potuto accordarle insieme, tanto che giudicando quasi impossibile farne di migliori, egli si distolse dal continuarle. Allora per computare le longitudini e le latitudini eliocentriche della macchia m'era servito del metodo esposto dal *Lalande* nell'edizione seconda della sua *Astronomia* (3141 a 3144). Ma adesso battuta avendo la strada, indicatami dopo dal *Lambre*, e che è stata poi anche quasi del tutto adottata dal *Lalande* nella terza edizione (3248 a 3251), son rimasto compreso da piacevole meraviglia, in veggendo che quelle stesse osservazioni poste allora in non cale, come fossero disadatte all' uopo ed imperfette, erano anzi in realtà le più esatte e concordi che avessi calcolato giammai: e che tutta la loro sfortuna era dipenduta dal metodo ch' io aveva seguito nel computare le longitudini eliocentriche, nelle quali gli errori ascendevano fino a 2° 50', sebbene le osservazioni godessero di tutte le avvertenze che ho divisate (13 a 17). Or si noti, che questi errori sono de' minimi, in cui sono incappato nella comparazion dei due metodi: da poi che le più volte, con altre osservazioni, passarono i tre, ed an-

che i quattro gradi, ed una montarono ai $7\frac{3}{4}$. Che se parlassi di quelle, non racchiuse tra' limiti (13 a 17), avrei di che produr farfalloni persin di 14° .

20. Stiano pertanto in guardia gli astronomi a non concedere piena fiducia ai loro computi, quando non seguano la strada sicura ed esatta, che sono per indicare, ed alla quale ho dato la direzione più comoda che ho saputo, liberando il calcolatore da ogni ragionamento, e da ogni considerazione di figura; e lasciandogli solamente la cura d' osservare con esattezza le regole de' segni positivo e negativo.

21. Ecco pertanto il Tipo del calcolo preliminare da farsi, per trar da una osservazione la longitudine e la latitudine eliocentriche giuste d' una macchia solare. Non do la dimostrazione delle seguenti formole, perchè ogni astronomo la ravvisa a primo sguardo, o può di leggieri, volendo, raccapezzarla ne' luoghi del *Lalande* citati sopra. Siano

α = differenza de' passaggi, della macchia, e dell' orlo orientale o susseguente del Sole; ridotta in minuti e secondi dell' equatore.

β = differenza di declinazione tra la macchia e l' orlo boreale.

γ = semidiametro del Sole, misurato nel cannocchial dell' Osservatore.

δ = semidiametro del Sole nelle tavole, scemato di $3''$ per l' irradiazione.

π = angolo di posizione del Sole.

ω = obliquità dell' eclittica.

Sarà

$$\beta = \gamma - \alpha \cos. \text{decl. } \odot$$

Si muteranno i segni nel secondo membro, se fosse stato osservato l' orlo precedente del Sole.

$$c = \gamma - \beta$$

Si muteranno i segni nel secondo membro, se fosse stato osservato l' orlo australe del Sole.

$$\text{tang. } A = \frac{c}{b}; \quad B = \frac{c}{\text{sen. } A}; \quad \text{sen. } C = \frac{B}{\delta}$$

C c 2

Se B è negativo, si faccia anche C negativo e $< 90^\circ$.

$$\text{tang. } \pi = \cos. \text{ longit. } \Theta \times \text{tang. } \omega$$

Se $\cos. \text{ long. } \Theta$ è negativo, si faccia anche ω negativo e $< 90^\circ$

$$D = C - B; \quad E = A - \pi$$

$$\text{sen. } F = \text{scr. } D \text{ scr. } E$$

Se D o E sia quantità negativa, F sarà pur negativo e $< 90^\circ$.

$$\text{tang. } G = \text{tang. } D \cos. E$$

L'arco E negativo non cangia il segno di $\cos. E$.

Se D sia negativo, $\text{tang. } D$ è negativa.

Riscendo $\text{tang. } G$ negativa, si faccia anche G negativo e $< 90^\circ$.

$$L' = 180^\circ + \text{long. } \Theta + G = \text{longit. eliocentrica della macchia}$$

$$D' = 90^\circ - F = \text{distanza della macchia dal polo dell'eclittica.}$$

22. Calcolate in questo modo tre osservazioni (14) della macchia, si avranno i valori di $L', L'', L'''; D', D'', D'''$. Allora è tempo di sottopor la bontà delle osservazioni al criterio della formula (A). A tal effetto è d'uopo computare i valori di MA, AC (Fig. 1.). Ecco la via più spedita, col mezzo delle formule ordinarie: osservando sempre le regole de' segni; e bastando nel seguente conteggio, non trascurar le decime de' secondi.

$$\text{tang. I segmento} = \cos. (L'' - L') \text{ tang. } D''$$

$$\text{II segmento} = D' - \text{I segmento.}$$

$$\cos. MA = \frac{\cos. D'' \cos. \text{II segm.}}{\cos. \text{I segmento}}$$

L'arco negativo non cangia il segno del suo coseno.

$$\text{tang. I segmento} = \cos. (L''' - L'') \text{ tang. } D''$$

$$\text{II segmento} = D'' - \text{I segmento.}$$

$$\cos. AC = \frac{\cos. D'' \cos. \text{II segm.}}{\cos. \text{I segmento}}$$

23. Facendo ora il computo della formula (A); se la disuguaglianza tra le due ragioni non passa 0,005, le osservazioni possono tenersi per buone, e per consentienti alle ipotesi dell'immobilità della macchia e della rotazione uni-

forme. Imperocchè essendo $\frac{1}{2} MA, \frac{1}{2} AC$, di 28° circa, o di 21° per lo meno (14), l'errore anzidetto non può esser prodotto da error maggiore di $9'$ in MA , e di $9'$ in AC ; nè questi da maggior fallo, che di $12'$ nelle rispettive differenze di longitudine, stante che le macchie non sogliono mai capitare in distanze maggiori di 30° dall' equator solare. Ora un arco di $12'$ in longitudine corrisponde ordinariamente a $0''$, 2 di tempo nell' osservazion dei passaggi; e questo è il massimo errore che può condonarsi in sì fatte occasioni ad un astronomo esercitato, che osservi il prectto (17).

24. Riconosciuta col mezzo della formula (A) la bontà di tre osservazioni, le quali godano delle cautele prescritte (13 a 17), allora si può valersene a computare gli elementi, che sono l' ultimo scopo della presente investigazione. Per tal bisogna, mi sia poi lecito d' asserir francamente, niun altro metodo esser più breve di quello che ho divisato (Trigonom. 837): e nel quale si dee tener conto de' secondi ne' piccoli archi; bastando ne' rimanenti aver cura delle decine.

25. Trovati così il luogo del nodo e l' inclinazione, dell' equator solare con l' eclittica, ed inoltre la declinazione solare della macchia; resta solo da definir la durata della rotazione. Si chiami Δ la declinazione, Ω il luogo del nodo, testè mentovati; A', A'', A''' le ascensioni rette solari della macchia corrispondenti alle longitudini L', L'', L''' : si avrà

$$\cos. A' = \frac{\cos. (L' - \Omega) \text{sen. } \Delta'}{\cos. \Delta}$$

e così per le altre ascensioni rette, mutando uniformemente gli apici. Quindi

$$A''' - A' : 360^\circ :: T + r : r.$$

26. Sarà cauta cosa avverar tutto il calcolo precedente, osservando se regga, appresso poco, e dentro limiti analoghi all' errore trovato con la formula (A), la proporzione

$$A' - A' : A''' - A'' :: T : r.$$

27. Or mi fo ad esporre i risultamenti de' calcoli, da me fatti sotto la legge delle avvertenze e de' metodi che ho dichiarati sopra. Le osservazioni seguenti, dei valentissimi

astronomi *Messier* e *Méchain*, mi sono state da essi stessi comunicate, e di lor propria mano scritte, in Parigi. Il diametro solare, nel cannocchiale del primo, cresce di 7" da quello delle tavole del *Lalande*: nell' istromento poi del secondo, se la memoria non m' inganna, non credo vi fosse divario sensibile: nel mio finalmente l' aumentazione apparente del diametro è di 6", 6. Le infrascritte differenze de' passaggi, nelle osservazioni *Messier*, sono nel tempo del primo mobile, o delle fisse; nelle altre, in tempo medio. Per ultimo *p.* significa l' orlo precedente del Sole, *s.* il susseguente, *b.* il boreale, *a.* l' australe.

	Osservazioni <i>Messier</i> .	Difer. de' passag.	Diff. di declinaz.
31	Lug. 1780. $8^h 38'' s.v.$	$2' 3'' p.$	$14' 6'' b.$
3	Agosto $0 8 1$	$1 29 \frac{3}{4} p.$	$13 13 b.$
7	$0 11 32$	$0 36 \frac{4}{4} p.$	$10 10 b.$

	Osservazioni <i>Méchain</i> .		
4	Giug. 1782. $21^h 7'$	$0 17 \frac{6}{4} s.$	$16 25,9 b.$
7	$20 21$	$0 55,6 s.$	$18 53,1 b.$
11	$20 23$	$0 26,0 p.$	$21 33,8 b.$

Del medesimo d' altra macchia.

6	$21^h 7'$	$0 37,3 s.$	$9 56,6 b.$
9	$20 41$	$1 18 \frac{3}{4} s.$	$12 0,6 b.$
12	$22 20$	$0 19,0 p.$	$13 28,6 b.$

Osservazioni mic.

21	Mag. 1788. $0^h 30'$	$0 13,7 s.$	$12 32,2 b.$
24	$0 30$	$0 49,4 s.$	$15 33,6 b.$
28	$0 30$	$0 29,4 p.$	$11 57,6 a.$

28. Gli errori di queste osservazioni, nella formula (A), sono: per le prime 0,002; per le seconde 0,0007; per le terze 0,003; per le quarte 0,0047. Gli elementi ricavati, sono poi come segue.

Osservatori.	Nodo.	Inclinazione.	Rotazione.	Declinaz. solare.
Messier	8° 21' 31"	6° 1' 30"	25 ^h 12 ^h 40'	18° 3' 30" B.
Méchain 1. ^a	8 11 19	7 50 45	25 14 20	12 43 0 A.
2. ^a	8 12 53	6 10 40	25 18 24	15 52 20 B.
Cagnoli	8 4 34	7 16 40	25 3 24	3 52 40 A.
Medio	8° 12' 34"	6° 50'	25 ^h 12 ^h 12'	

29. Sembrerà strano, che dopo le scrupolose avvertenze tenute, e dopo il rigoroso squittinio fatto di molte osservazioni, e la scelta di poche come le più perfette e soddisfacenti, emergano differenze cotanto notabili negli elementi dedotti. Che queste dipendano da variazioni fisiche nell'inclinazione, o nel nodo, o nell'uniformità della rotazione solare, non può nè men sospettarsi, poichè gl' intervalli di tempo tra le osservazioni di macchie diverse son troppo brevi, e poichè le osservazioni del Méchain di due macchie contemporanee, producono tuttavia, specialmente nell'inclinazione, l'enorme divario di 1° 40'. Bisogna creder piuttosto, che queste macchie abbian sofferto de' cambiamenti da cui non sia stata turbata l'ascensione retta solare; o pur che sia scorso per avventura qualche error grave nel registro delle differenze osservate di declinazione. Comunque sia, la discordia che regna in questi elementi, lungi dal far ingiuria alle cautele da noi suggerite, strigne vie maggiormente a seguirle: poichè in tal guisa non si potendo incolpare d'un minimo che le osservazioni, nè i calcoli, soggerà finalmente o la causa delle discrepanze, o la vera quantità degli elementi appoggiata a sufficiente numero di osservazioni concordi, ed esenti da ogni taccia. Utile stimerei del tutto, cogliere i casi di più macchie contemporanee, e notabilmente distanti in declinazione.

Degli elementi della rotazione lunare.

30. Passando ora a parlare degli elementi della rotazione della luna, molte sono le diversità, relativamente a quelli del Sole, le quali chiedono d'esser considerate e trattate particolarmente.

La prima parte della regola (13) sussiste. La (14) deve ampliarsi, non mai restringersi: mentre sarebbe bene, che l'intervallo tra due osservazioni consecutive fosse di 7 in 8 di. La congiuntura più propizia è poi quando la luna è appresso a poco ne' suoi nodi. Alle regole (16 e 17) non v'è che mutare. E tanto basta aver detto, per riguardo alle osservazioni.

31. Quanto ai computi poi fa mestieri di molte speciali regole. In primo luogo convien ridurre al parallelo vero la differenza de' passaggi della macchia e dell'orlo lunare. Ne ho dato le formole, non che i precetti per applicarle senza abbaglio (Trigonom. 823, 824, 825). Si avverta, nell'ultima di queste formole, che si deve adoprar la parallasse orizzontale in minuti, e sopprimere R' che per errore vi è posto: nella prima poi, che quando si osserva il primo orlo della luna, la macchia si deve considerare come una stella; e quando si osserva il secondo, questo allora fa le veci della stella, e la macchia quelle della luna.

32. In secondo luogo fa d'uopo computare la longitudine e la latitudine apparenti della luna per il momento dell'osservazione. La via più spedita, a mio credere, per calcolare le parallasse, è quella del nonagesimo; trattato però nel modo che segue, e che ho divisato in una Memoria, la quale ottenne il premio dall'Accademia di Copenaghen, ed è intitolata (*Méthode pour calculer les longitudes géographiques, etc. Verone 1789*). Stimo ben farne qui la ripetizione, onde porgere unito in una sola Memoria tutto ciò che bisogna ai calcolatori.

Siano ω = obliquità apparente dell'eclittica.

p = parallasse orizzontale della luna, per il luogo dell'osservazione.

λ = latitudine apparente della luna.

h = ascensione retta \odot + tempo vero in parti dell'equatore.

k = altezza del polo — angolo della verticale.

Si ha $\text{tang. } m = \text{cot. } k \text{ sen. } h$

$$n = m + \omega$$

$$\cos. q = \text{sen. } k \times \frac{\cos. n}{\cos. m}$$

$$\text{sen. } s = \text{tang. } u \text{ cot. } q.$$

Si piglierà s ne' segni ascendenti, o vero ne' discendenti secondo che b sarà ne' primi, o negli ultimi.

$$u = \text{long. } \zeta - s$$

$$x = p \times \frac{\text{sen. } q \text{ sen. } (u+x)}{\text{cos. lat. v. } \zeta}$$

$$y = p \left(\text{cos. } q \text{ cos. } \lambda - \text{sen. } q \text{ cos. } \left(u + \frac{1}{2} x \right) \text{sen. } \lambda \right)$$

Se λ sia latitudine australe, sen. λ sarà negativo.

Nelle due equazioni, le quali contengono l'incognita anche nel secondo membro, convien fare un'ipotesi o due del valore di essa.

$$\text{Longit. appar. } \zeta = \text{long. vera} + x$$

$$\text{Latit. appar. } \zeta = \lambda = \text{lat. v. } \pm y$$

Il segno + vale quando la latitudine vera è australe, il - quand'è boreale. Tutt'all'opposto, se y sia negativo.

33. Or sia

Λ = longit. appar. della Luna

α = differenza de' passaggi, della macchia, e dell'orlo orientale o susseguente della Luna; in minuti e secondi dell'equatore.

β = differenza di declinaz. tra la macchia e l'orlo boreale.

$$\gamma = \text{semidiametro appar.} = \text{semidiam. vero} \times \frac{\text{sen. } (u+x) \text{ cos. } \lambda}{\text{sen. } u \text{ cos. lat. v.}}$$

π = angolo di posizione della Luna.

D' = distanza della macchia dal polo dell'eclittica.

L' = longitudine selenocentrica della macchia.

ϵ = intervallo in minuti fra li due transiti della Luna pel meridiano, l' antecedente ed il susseguente all' osservazione.

$$\text{Sarà } \delta = \frac{\gamma \epsilon}{1440 \text{ cos. declin. } \zeta}$$

$$b = (\delta - \alpha) \text{ cos. declin.}$$

Si mutino i segni di $(\delta - \alpha)$, quando sia stato osservato l'orlo precedente della Luna.

$$c = \gamma - \beta$$

Si mutino i segni nel secondo membro, quando sia stato osservato l'orlo australe della Luna.

Tomo VIII.

D d

$$\text{tang. } A = \frac{c}{b}$$

$$B = \frac{c}{\text{sen. } A}$$

$$\text{sen. } C = \frac{B}{\gamma}$$

Se B è negativo, si faccia pur C negativo e $< 90^\circ$.

$$\text{tang. I. segmento} = \text{sen. } A \text{ tang. } \omega$$

$$\text{II. segmento} = 90^\circ \pm \lambda - \text{I segmento}$$

Il segno superiore per la latitudine boreale, l'inferiore per l'australe.

$$\text{tang. } \pi = \text{cot. } A \times \frac{\text{sen. I segmento}}{\text{sen. II segmento}}$$

Se il II segmento fosse negativo, si farà negativo il suo seno.
Se tang. π è negativa, si faccia pur π negativo e $< 90^\circ$.

$$D = C - B; \quad E = A - \pi$$

$$\text{tang. I segmento} = \text{sen. } E \text{ tang. } D$$

$$\text{II segmento} = 90^\circ \pm \lambda - \text{I segmento}$$

Il segno superiore per la latitudine boreale, l'inferiore per l'australe; perciocchè la Luna in latitudine australe vede la Terra in latitudine boreale; e viceversa.

$$\text{tang. } G = \text{cot. } E \times \frac{\text{sen. I segmento}}{\text{sen. II segmento}}$$

Se il II segmento è negativo, il suo seno sarà negativo.
Se tang. G è negativa, si faccia pur G negativo e $< 90^\circ$.

$$\text{cos. } D' = \text{cos. } D \times \frac{\text{cos. II segmento}}{\text{cos. I segmento}}$$

$$L' = A + 180^\circ - G.$$

34. Per computare gli elementi della rotazione della Luna bastano veramente (il che forse non fu per anco avvertito) due sole osservazioni. Imperocchè il tempo della rotazione essendo notissimo, siccome uguale perfettamente a quello della rivoluzione, cioè $27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 43' 5''$, ne viene che la grandezza dell'angolo MPA (fig. 1) è conosciuta esattamente; e come la base MA si ricava (6, 22) dal trian-

golo MEA; così nel triangolo isoscele MPA avendosi

$$\text{sen. MP} = \frac{\text{sen. } \frac{x}{2} \text{ MA}}{\text{sen. } \frac{x}{2} \text{ MPA}}, \text{ riesce tosto trovata la declina-}$$

zione selenografica della macchia. Nel triangolo stesso MPA si cerchi un degli angoli alla base; la medesima cosa si faccia nel triangolo MEA: la differenza degli angoli trovati sarà EMP, o vero EAP. Allora quest' angolo e i lati che lo comprendono; serviranno a risolvere il triangolo EMP, od EAP, in cui EP è l'inclinazione che cercasi; e l'angolo in E, con l'aggiunta o detrazione, secondo i casi, della longitudine della macchia in M o in A, porgerà la longitudine del polo P, e per conseguenza quella del nodo, che ne differisce di 90°.

35. Ma con questo metodo non si discute la bontà delle osservazioni, e si giugnerebbe spesso a risultamenti lontani dal vero ed anche strani, attesa la picciolezza degli angoli di posizione, i quali esser possono gravemente deformati dagli errori d'osservazione, e richiedono inoltre scrupolosissime cure nel computo, laonde non si guadagna in brevità. All'incontro se si abbiano più osservazioni, e pigliate a due a due diano tutte la stessa declinazione selenografica della macchia mediante l'equazione (34), allora si può adoperarle con fiducia per investigare gli elementi da qual metodo meglio piaccia; a me sempre parendo il più brevè quel che ho indicato (24).

36. Avvertasi che il nodo dell'equator lunare con l'ellittica ha un moto retrogrado, affatto eguale a quello del nodo della Luna. E però qualunque strada si tenga ne' calcoli (34, 35), è d'uopo aggiungere ad ogni longitudine della macchia, salvo la prima L', il moto del nodo lunare nel tempo scorso dopo essa prima osservazione; senza di che gli elementi riuscirebbero erronei. Il luogo poi del nodo equatorial della Luna, il qual si rinviene per simil guisa, è quel che compete al tempo in cui fu fatta la prima osservazione.

37. La perfetta eguaglianza della declinazione selenografica, risultante da più osservazioni (35), è quasi impossi-

bile a conseguirsi, poichè dipende da un'esattezza matematica, superiore alla finezza degl'istrumenti e dei sensi. Adunque convien perdonare qualche divario, proporzional, per esempio, ad un errore di 12' al più in ogni longitudine.

38. Ho sottoposto ai metodi, sopra dichiarati, tre osservazioni di Manilio, fatte dal *Lalande* ne' 15, 20, 24 d' Ottobre 1763, e che sono riferite unitamente a molt' altre in una delle Memorie contenute nel Tomo dell' Accademia delle Scienze per l'anno 1764 (pag. 555). Ho dovuto abbandonare quella del dì 25, tralasciata con le due prime dal mentovato astronomo, il qual ne' suoi computi impiegò (pag. 565) inavvertitamente l'angolo di posizione maggior del giusto quasi d'un grado; per averla io riconosciuta troppo discorde dalle altre. Ho trovato

15 Ottobre	6 ^h 15'	L' = 4 ^s 17 ^o 2' 25"	D' = 76 ^o 54' 34"
20	6 30	L' = 6 22 25 29,	D' = 75 22 5
24	9 0	L'' = 8 16 57 57,	D'' = 74 30 39

Aumentando la seconda e la terza longitudine col moto del nodo, corrispondente a' rispettivi intervalli di tempo dopo la prima osservazione, emergono

$$L'' = 6^s 22^o 41'$$

$$L''' = 8 17 27$$

Quindi (fig. 1) MA = 63^o 32', AC = 52^o 44'.

Ora MPA = 360^o $\times \frac{55010416}{27,3216} = 66^o 1'$; e nella stessa guisa APC = 54^o 5'. Tosto il triangolo MPA mi ha dato AP = 75^o 6', ed il triangolo APC m' ha dato AP = 77^o 40'. Il divario è notevole: e pur non sorpassa i limiti degli errori quasi che inevitabili (37). Imperocchè diminuendo di 11' così la prima come la terza longitudine, ed aumentando la seconda di altrettanto, ho ottenuto per valori di AP dai due triangoli, 76^o 11' 33', 76^o 11' 11'.

39. Non sono per altro d'avviso, che si cerchino gli elementi con le longitudini corrette degli 11': perciocchè nè si può supporre infallibili le differenze di declinazione osservate, nè salve le latitudini dal soffrire alcun poco de-

gli errori in ascensione retta . Basti aver conosciuto , che la discordanza di $2^{\circ} 34'$ nel valor di AP non eccede i confini di quegli errori d' osservazione cotanto tenui , che niun osservator può pretendere andarne esente .

40. Pertanto con le longitudini e le latitudini (38), date dall' osservazione , e corrette soltanto col moto del nodo , ho rintracciato gli elementi battendo la strada (Trigonom. 837), ed ho trovato il nodo dell' equator lunare con l' eclittica a $11^{\circ} 29' 52''$, cioè $13^{\circ} 46'$ meno avanzato del luogo medio del nodo dell' orbita lunare ; l' inclinazione $1^{\circ} 26'$; e la declinazion selenografica di Manilio $14^{\circ} 5'$.