NATURA DELLE RADICI DELLE EQUAZIONI LITTERALI DI QUINTO, E DI SESTO GRADO. E NUOVO METODO PER LE RADICI PROSSIME DELLE EQUAZIONI NUMERICHE DI QUALUNQUE GRADO.

Di Teodoro Bonati.

Ricevuta li 17. *Ghiacciajo An. VII.* (7. *Dicembre* 1798.)

Idea dell' Opera.

Sanno i Matematici, che date le radici delle equazioni inferiori si può avere la natura delle radici di una equazione data: Ma perchè finora non abbiamo un metodo generale, che ci dia le radici delle equazioni oltre il quarto grado, pareva, che non s' avesse da sapere al più, che la natura delle radici delle equazioni litterali di quinto grado: Io darò questa, ed anche quella delle radici delle equazioni litterali di sesto grado.

Siccome però anche nelle radici delle equazioni di terzo grado siamo, si può dire, in parte mancanti accagione del *caso irriducibile* (e di questa mancanza ne risentono anche le equazioni di quarto grado) premetterò un breve esame di queste: Accennerò d' onde avvenga, che nel caso irriducibile la formola Cardanica involva dei valori immaginarj, che talvolta la rendono incomoda, e presso che inutile; e supplirò a questo difetto con formole trascendenti bensì, però semplici e maneggiabili, tratte dai Coseni.

Ricorro in quest' indagine alle Curve dal Newton dette *Paraboliche*, delle quali ànno fatto uso nello stesso proposito Giacomo Bernoulli, de l' Hopital, Cramer, Stirling, e du Gua.

In appresso espongo un nuovo metodo per trovare dei valori prossimi di tutte le radici reali di qualunque equazione numerica. Vi ravviso dei vantaggi notabili sopra gli altri metodi finora praticati. Fo discendere questo nuovo metodo principalmente dalle tangenti tirate opportunamente alle suddette Curve Paraboliche. Trovate, ch' ebbi le mie formole m' accorsi, che combinano precisamente con quelle del Newton, del Taylor, e dell' Eulero: Siccome però questi Autori ànno battuto delle strade di gran lunga diverse dalla mia non ànno essi veduto tutto quel buon uso di esse formole, che fortunatamente è toccato a me di scoprire.

Avendo così accostumato il Lettore alle dette Curve, vengo col Capitolo quinto ed ultimo ad impiegar queste d' una maniera più complicata di prima, per dare di nuovo la natura delle radici delle equazioni litterali di quinto e di sesto grado, indipendentemente affatto dalle radici delle equazioni di terzo e di quarto grado, e dal caso irriducibile, cosicchè la cosa riesce più brigosa bensì, ma tutta puramente algebraica.

Accenno sul fine come potrei dare ancora la natura delle radici delle equazioni litterali di settimo e di ottavo grado, dal che mi astengo giudicando miglior consiglio per tali equazioni il ridurle prima a numeri nei casi particolari, ed applicandovi indi il nuovo metodo indicato per averne prossimamente quanto si vorrà le radici stesse.

Capitolo I.

Alcune cose generali.

1. Abbiasi l'equazione $o = M + Nx + Ox^2 + Px^3 + Qx^4 + Rx^5$, ec. (A), nella quale ognuna delle costanti M, N, O, ec. possa essere positiva, o eguale al zero, o negativa. E si consideri questa equazione come un caso particolare dell' altra equazione $y = M + Nx + Ox^2 + Px^3$ ec. (B) la quale quante volte $y = o$ diviene l'equazione A.

2. Della equazione B s' intenda descritta una Curva TREHLOQ (fig. 1.) che riesce *del genere parabolico*. L' asse di questa Curva sia la SP, sulla quale le ascisse partano dal punto A positivamente verso P. Egli è manifesto, che qualora si avrà l' ordinata $y = o$ (il che nella figura accade nei punti S, C, G, K, M, P, d' incontro dell' asse colla Curva) si avrà il caso dell' equazione qualsiasi data $o = M + Nx + Ox^2 + Px^3$ ec. e che le ascisse AC, AG, AK, AM, AP

saranno radici positive, e l' altra AS sarà radice negativa della equazione data.

3. Si vede, che in Curve simili di equazioni di più radici reali, ed ineguali si devono avere delle ordinate massime, come se ne ànno nel caso della figura, le quali terminano ai vertici R, E, H, L, O, dove si sa, che dev' essere $dy=0$: E si vede ancora, che se le radici sono più di due si devono avere dei flessi contrarj, come se ne ànno ai punti D, F, I, N, nei quali si sa, che dev' essere $ddy=0$.

4. Se pertanto si differenzierà l'equazione della Curva, e si farà $dy=0$, si troverà $0=N+2Ox+3Px^2+4Qx^3$ ec. inferiore della data di un grado, e le cui radici nel caso della figura sono le ascisse Ag, Ap, Au, Aq, AZ di altrettante ordinate massime, e di altrettanti vertici. E differenziando di nuovo (presa dx costante), e facendo $ddy=0$, si troverà l' altra equazione $0=2O+6Px+12Qx^2+20Px^3$ ec. di due gradi inferiore alla data; e le radici nel caso della figura sono le Ascisse AV, Aa, Ab, An di altrettanti flessi contrarj.

5. Sostituendo i valori delle Ag, Ap, Au, Aq, AZ, in luogo della x nella equazione B (1) della Curva si avranno le ordinate massime gE, pH, uL, fR, e sostituendo in luogo della x i valori AV, Aa, Ab, An si avranno le ordinate VD, aF, bI, nN, che terminano ai punti di flesso contrario.

6. Quando $x=0$, dalla equazione B (1) abbiamo l' ordinata $y=M$, la quale nel caso della figura è la AB negativa.

7. Se nella detta equazione B (1) la x sarà positiva, come At, ed infinita, l' ordinata $tQ=y$ si potrà dirla x^n (chiamando n l' esponente della equazione), giacchè gli altri termini Nx, Ox^2, ec. riescono in tal caso infinitamente minori del termine x^n, e sono trascurabili. Ma essendo la x positiva sarà pure positiva la quantità x^n. Dunque tQ, ch' è $=y=x^n$, sarà ordinata positiva; il che fa vedere, che la Curva alla destra, ossia dalla parte delle ascisse positive, termina in un ramo PQ infinito rivolto all' insù, ossia alla parte delle ordinate positive.

8. Se poi sarà la x negativa, come Ad, ed infinita, si avrà pure $y=x^n$. Se inoltre l' esponente n sarà numero

pari sarà $y = dT$ positiva, e perciò anche dalla parte sinistra la Curva terminerà in un ramo infinito rivolto all' insù: Ma se l'esponente n sarà numero dispari, essendo x negativa sarà y negativa; ed in tal caso la Curva alla sinistra finirà in un ramo infinito all' ingiù, ossia alla parte delle ordinate negative.

9. Poichè la quantità M = AB l' abbiamo detta negativa, e tutte le ordinate $y = M + Nx + Ox^2$, ec., se la M calerà per esempio per metà, ciò vorrà dire, che tutte le ordinate negative caleranno di quella metà, e che di altrettanto cresceranno tutte le ordinate positive, il che è poi lo stesso che dire, che tutto l' asse SAMP si abbasserà parallelamente a se stesso con una discesa di quella metà. Quindi se anzi il termine M di negativo divenga positivo, ed $= c$B, ciò importerà, che l'asse da SAP passi in ecm, cosicchè se sarà A$c = q$O l'asse toccherà la curva nel vertice O. Ed in questa discesa dell'asse la radice AM crescerà mentre l' altra AP calerà fino a coincidere ambe nella sola radice cO; e le radici AG, AK diverranno immaginarie, e le due AC positive, ed AS negativa, passeranno nelle ch, ce negative.

10. Se la M ora $= c$B crescerà ancora di più in modo, che l' asse abbassandosi non incontri più la Curva, tutte le radici della equazione riusciranno immaginarie.

Capitolo II.

Radici della equazione $x^3 - 3a^2x \mp 2a^2c = 0$.

11. Le esposte poche cose generali bastino per ora per far comprendere, che date le radici delle equazioni inferiori si può scoprire l' andamento di tutta la Curva spettante alla equazione data, e la natura delle radici. Ora vengo al particolare delle equazioni di terzo grado, o sieno cubiche, indagando le loro radici. Qualunque di queste potrà sempre esser ridotta a qualcuna delle quattro seguenti

$$x^3 - 3a^2x \mp 2a^2c = 0$$
$$x^3 + 3a^2x \mp 2a^2c = 0.$$

Comincierò dalle due prime, e parlerò in primo luogo della equazione $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$ (R). Si consideri questa come un caso particolare della equazione $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 2a^2y$ (D), equazione di una Curva, il cui asse sia HAD (fig. 2.) coll'origine delle x in A positive verso D. Facendo $x = o$ si ha $2a^2y = -2a^2c$, cioè $y = -c = AB$. Differenziando si ha $3x^2dx - 3a^2dx = 2a^2dy$; e facendo $dy = o$ si ha $x = \pm a$, cioè $x = a = AE$; ed $x = -a = AF$. Quando $x = a = AE$, sostituendo in D si ha $y = -a - c$. Presa pertanto l'ordinata $EC = -a - c$, sarà C un vertice. E quando $x = -a = AF$, sostituendo in D si ha $y = a - c$. Se $a > c$, sarà y positiva, e questa sia la $FG = a - c$; e sarà G un altro vertice. Facendo $ddy = o$ (presa dx costante) si à $6xdx^2 = o$, onde per essere $6dx^2$ quantità costante sarà $x = o$; il che mostra, che in B (punto della Curva corrispondente all' ascissa $x = o$) si ha un flesso contrario. Poste queste cose, e sapendosi che la curva dee terminare alla destra in un ramo ascendente, ed alla sinistra in un ramo discendente (7, 8) si comprende, che l' andamento della curva dev' essere a un dipresso come XGCF della fig. 2., e che l' asse si trova tra il vertice G, ed il flesso contrario B, come HAD, cosicchè dovrà necessariamente incontrare la curva in tre punti come H, I, D, nei quali si ha $y = o$, cosicchè si ànno tre casi della equazione data $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = o$, la quale ha perciò tre radici reali, una positiva AD, e due negative AI, AH, le quali prese insieme (per essere l' equazione mancante del secondo termine) devono essere eguali alla sola AD positiva.

12. Questo sta finchè $a > c$. Che se la c crescerà in maniera, che sia $a = c$, la FG, ch' era $= a - c$, sarà divenuta $= o$, e l'asse da HD sarà passato in GKL al contatto della curva nel vertice G, cosicchè le due radici AI, AH caderanno ora ambe in KG, dove si avranno perciò due radici negative eguali fra di loro, che insieme devono essere eguali alla positiva KL, e siccome $KG = AF = -a$ (11), sarà $KL = 2a$.

13. Che se diverrà $a < c$, in luogo della $FG = a - c$ positiva avremo una $MG = a - c$ negativa, e ciò importerà che l' asse siasi alzato come in MNP, nel qual caso non si avrà, che un solo incontro dell' asse colla curva come in P, e non si avrà, che una sola radice reale, come NP, che sarà positiva.

14. Se l'asse da HAD si fosse anzi abbassato come fino in *dah*, al punto *a* (dove $x=0$) corrisponderebbe un' ordinata *a*B positiva, ed apparterrebbe questo caso all'equazione $x^3 - 3a^2x + 2a^2c = 0$, e le sue radici sarebbero le due *ah*, *ai* positive, e la terza *ad* negativa. Ed abbassandosi ancora l'asse come fino in XV*c*, non si avrebbe più che una sola radice reale VX, che è negativa.

15. Per avere analiticamente le radici della prima equazione $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$ (A) il Cardano suppone in primo luogo la $x = t + z$, onde si ha $t^3 + 3zt^2 + 3z^2t + z^3 - 3a^2t - 3a^2z - 2a^2c = 0$ (C). Poi fa l'altra ipotesi di $3zt^2 + 3z^2t - 3a^2t - 3a^2z = 0$ (D), il che è poi lo stesso, che supporre $tz - a^2 = 0$, giacchè questo è appunto ciò, che risulta dividendo D per $3t + 3z$. Si ha perciò così $z = \frac{a^2}{t}$. Sottraendo poi D da C rimane $t^3 + z^3 - 2a^2c = 0$, cioè (sostituendo il valore della z per t) $t^6 - 2a^2ct^3 + a^6 = 0$, ed in conseguenza $t^3 = a^2c \pm a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}$, e $t = \sqrt[3]{\left(a^2c \pm a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)}$. E perchè x è ancora $z = \frac{a^2}{t}$ colla stessa regola si trova $z = \sqrt[3]{\left(a^2c \pm a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)}$.

16. Per togliere l'ambiguità dei segni prefissi ai vincoli radicali si osservi, che essendo $tz = a^2$ dev' essere ancora $\sqrt[3]{\left(a^2c \ldots a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)} \times \sqrt[3]{\left(a^2c \ldots a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)} = a^2$, il che si ottiene allora solamente quando posto $t = \sqrt[3]{\left(a^2c + a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)}$ si metta $z = \sqrt[3]{\left(a^2c - a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)}$ o vice-versa. Dunque $x = t + z = \sqrt[3]{\left(a^2c + a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)} + \sqrt[3]{\left(a^2c - a^2\sqrt{(c^2 - a^2)}\right)}$ è radice cardanica della equazione A (15).

17. Si divida ora la data equazione A per $x - (t + z)$, e si arriverà al residuo $(t + z)^3 - 3a^2(t + z) - 2a^2c$, il quale, perchè $t + z = x$, non sarà che la data equazione, e perciò sarà $= 0$; onde il quoziente, il quale è $x^2 + (t + z)x + (t + z)^2 - 3a^2$, sarà intiero. Per trovare i due fattori lineari dello stesso quoziente si metta esso $= 0$, e si

e si troverà $x = -\frac{(t+z) \pm \surd(-3)\surd(t^2+2tz+z^2-4a^2)}{2}$.

Ma $-4a^2 = -4tz$. Dunque sarà $x = \frac{-(t+z) \pm}{2}$

$$\frac{\surd(-3)\surd(t^2-2tz+z^2)}{2} = -\frac{(t+z) \pm \surd(-3)\cdot(t-z)}{2};$$

d' onde a cagione dei due segni prefissi al termine radicale si ricaveranno le altre due radici, cioè

$$x'' = \frac{-1+\surd(-3)}{2}\cdot t + \frac{-1-\surd(-3)}{2}\cdot z = \frac{-t-z}{2}$$

$$+ \frac{t-z}{2}\surd(-3)$$

$$x''' = \frac{-1-\surd(-3)}{2}\cdot t + \frac{-1+\surd(-3)}{2}\cdot z = \frac{-t-z}{2}$$

$$- \frac{t-z}{2}\surd(-3).$$

Capitolo II.

Caso irriducibile.

18. Qualora $a > c$, ossia $a^2 > c^2$, i suddetti valori delle x', x'', x''' perchè comprendono la quantità $\surd(c^2-a^2)$ ànno l' aspetto d' immaginarj, dove che siamo certi che appunto nello stesso caso di $a > c$ l' equazione ha tre radici reali, giacchè abbiamo veduto al n. 11., che quando $a > c$ l' asse cade come in HAD tra il vertice G ed il punto B, cosicchè si ànno una radice reale positiva AD, e due reali negative AI, AH. Egli è questo il così detto *Caso irriducibile*, che *multorum torsit ingenia*. E d' onde deriva codesta irregolarità? Eccolo. Abbiamo veduto al n. 15. come il Cardano fa le due ipotesi, una della $x = t + z$, e l' altra di $tz - a^2 = 0$, ossia $tz = a^2$. Finchè $a < c$, questo non implica. Ma quando $a > c$, le due ipotesi sono realmente incompossibili, perchè allora posto $x = t + z$, non potrà essere $tz = a^2$, ma sarà sempre $tz < a^2$, il che io lo dimostro nella seguente maniera.

Si sa, che essendo $x = AD = t + z$, il prodotto tz è massimo quando sia t una metà della AD come Au, e z sia l'altra metà uD; ed allora tz sarà $Au.uD$. Si divida per metà anche la KL in b. Poichè abbiamo $KL=2a$ (12), sarà $Kb=a$, e $bL=a$, onde $a^2=Kb.bL$. Ma $AD<KL$; dunque anche le metà della AD saranno minori delle metà della KL, ed in conseguenza il prodotto delle prime, cioè $Au.uD$ sarà minore del prodotto delle seconde, cioè di $Kb.bL$, e perciò $tz<a^2$. E nei casi delle x negative, cioè della $x=AI$, e della $x=AH$, siccome $AI+AH=AD$ (11), tanto AI che AH è minore della AD; e volendosi anche in questi casi $x=t+z$, tanto più sarà negli stessi casi $tz<Kb.bL$, ossia $tz<a^2$. Dunque essendo $a>c$ non possono stare insieme le due ipotesi fatte al n. 15., di $x=t+z$, e di $tz=a^2$.

19. Partendo pertanto la formola Cardanica, nel Caso irriducibile o sia di $a>c$, da due ipotesi realmente incompossibili, non è meraviglia che tale formola esibisca delle radici sotto un aspetto impossibile ed immaginario, in tempo che tutte e tre le radici della equazione cubica sono reali.

20. Piacque codesta Formola, utile soltanto pel caso di $a<c$, ed affatto inutile nell'altro caso di $a>c$, quasi due secoli, cioè fino al 1738., quando Nicole (Memorie dell' Accademia di Parigi) mostrò la maniera di ridurla ad una serie libera da termini immaginarj. Ma di una tal serie non si è trovata la somma, onde il valore da essa risultante della radice cercata sarà un valore soltanto prossimo; e l'averlo di una prossimità conveniente costa la non lieve fatica di calcolare un buon numero di termini della serie, particolarmente quando ci accostiamo al caso di $a=c\sqrt{2}$, nel quale la serie perchè s'accosta ad esser parallela (si veda lo Scritto del Ch. Lorgna de Casu irreductibili) diviene presso che inutile per la molta fatica in calcolare un numero sempre maggiore di termini affine di ottenere una sufficiente approssimazione. Per la qual cosa sembra molto meglio allora il ricorrere ai Coseni, nella maniera che vengo ad esporre, con che si ànno delle formole bensì anch' esse d'approssimazione, ma che però sono assai semplici, e maneggiabili.

21. Alla corda AB (fig. 3.) di un arco circolare AFB sia normale il raggio CIF. Sieno eguali fra di loro le al-

tre tre corde AD, DE, EB. Sarà DE parallela alla AB. Sieno condotti altri due raggi CE, CB, e la EG sia normale alla AB. Sia il raggio $CF = 2a$; e la distanza CI della corda AB dal centro si dica $2c$; e si metta la $CH = x$. Sarà $IB = \sqrt{(CB^2 - CI^2)} = \sqrt{(4a^2 - 4c^2)} = 2\sqrt{(a^2 - c^2)} = 2m$; ed $HE = \sqrt{(CE^2 - CH^2)} = \sqrt{(4a^2 - x^2)} = IG$; onde sarà $GB = IB - IG = 2m - \sqrt{(4a^2 - x^2)}$, e sarà $HI = CH - CI = x - 2c = EG$; ed $EB = ED = 2HE = 2\sqrt{(4a^2 - x^2)}$. Ma $EB^2 = EG^2 + GB^2$. Dunque $16a^2 - 4x^2 = x^2 - 4cx + 4c^2 - 4m\sqrt{(4a^2 - x^2)} + 4a^2 - x^2$, cioè $m\sqrt{(4a^2 - x^2)} = x^2 - cx - 2a^2$. E quadrando, e riducendo, $x^4 - 2cx^3 - 3a^2x^2 + 4a^2cx + 4a^2c^2 = 0$; e dividendo per $x - 2c$ si ha $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$, della quale equazione si vede, che una radice è la $CH = x$ coseno dell'arco FE.

22. La stessa corda AB divide tutta la periferia in due archi, uno minore AFB, e l'altro maggiore BNZA (fig. 4.). A questo maggiore s'intendano applicate pure tre corde eguali BN, NM, MA, delle quali la NM sarà parallela alla AB, onde il diametro FICZ normale alla AB sarà normale ancora alla MN. Si cerchi ora la CP. Essendosi detta $CH = x$ (fig. 3.) sarà da dirsi la CP (fig. 4.) $= -x$, onde $IP = IC + CP = 2c - x = BQ$ condotta parallela al diametro FZ. Sarà poi $PN = \sqrt{(CN^2 - CP^2)} = \sqrt{(4a^2 - x^2)}$; onde $QN = PN - IB = \sqrt{(4a^2 - x^2)} - 2m$. E la $BN = MN = 2PN = 2\sqrt{(4a^2 - x^2)}$. Ma $BN^2 = \pm BQ^2 + QN^2$. Dunque $16a^2 - 4x^2 = (2c - x)^2 + \left(\sqrt{(4a^2 - x^2)} - 2m\right)^2$, d'onde ricavasi $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$ come sopra; della qual equazione si vede, che un'altra radice è la $CP = -x$ coseno dell'arco MZ.

23. Posta la corda AB come sopra, s'intendano ora le tre altre corde eguali fra di loro AR, RO, OB (fig. 5.) dei tre archi eguali ABR, RZO, OAB. Anche la OR sarà parallela alla AB, e normale al diametro FIZ, cui sia parallela la BT; e si cerchi la CV da dirsi pure $= -x$. Sarà $IV = IC + CV = 2c - x = BT$. La $VR = \sqrt{(CR^2 - CV^2)} = \sqrt{(4a^2 - x^2)} = OV$; onde $OB = OR = 2VR = 2\sqrt{(4a^2 - x^2)}$; ed $OT = OV + IB = \sqrt{(4a^2 - x^2)} + 2m$. Ma $OB^2 = BT^2 + OT^2$. Dunque sarà $16a^2 - 4x^2 = (2c - x)^2 +$

$(\sqrt{(4a^2 - x^2)} - 2m)^2$, d'onde ricavasi tuttora $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$; della qual equazione si vede, che la terza radice è la $CV = -x$ coseno dell'arco ZR.

24. Ora si dica φ l'arco FB (fig. 3.) dell'angolo FCB, che è noto per essere dato il raggio $2a$, e la distanza $CI = 2c$ della corda AB dal centro. Poichè $FE = \frac{1}{3}\varphi$, sarà $CH = x = \cos.\ \frac{1}{3}\varphi$. Poichè $FB = \varphi$, sarà l'arco AFB $= 2\varphi$; e l'arco BNMA (fig. 4.) $= 360^\circ - 2\varphi$. Ma ZN è la sesta parte di BNZA. Dunque $CP = -x = \cos.\frac{1}{6}(360^\circ - 2\varphi)$.

25. I tre archi eguali ABR, RZO, OFB (fig. 5.) sono tutta la periferia con l'arco AFB, cioè sono $360^\circ + 2\varphi$. Ma ZR è la metà di uno d'essi. Dunque è la sesta parte della loro somma. Dunque $CV = -x = \cos.\frac{1}{6}(360^\circ + 2\varphi)$.

26. Pertanto le tre radici della equazione $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$ sono

$$x = \cos.\ \frac{1}{3}\varphi$$

$$x = -\cos.\ \frac{1}{6}(360^\circ - 2\varphi)$$

$x = -\cos.\ \frac{1}{6}(360^\circ + 2\varphi)$, essendo φ un arco descritto col raggio $2a$, e che à per Coseno $2c$.

27. E quì si può notare, che poichè questi, che sono veri valori delle radici della equazione $x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$ sono valori trascendenti, ne viene che la formola Cardanica, se contiene i veri valori delle stesse radici, li deve contenere essa pure trascendentemente, e che perciò non sarà mai riducibile a termini reali finiti algebraici.

28. Poichè in questo ricorso ai coseni si è supposto $2a$ raggio, e $2c$ coseno, ed il raggio è sempre maggiore del coseno, ciò fa vedere che le radici quì sopra esposte suppongono $a > c$, cioè suppongono il *caso irriducibile*. Negli altri casi poi o di $a = c$, o di $a < c$, non v'ha il bisogno dei coseni, giacchè allora la quantità $\sqrt{(c^2 - a^2)}$ componente la formola Cardanica non è più immaginaria.

29. Col metodo dei n. 15, 16 si trova, che una radice dell'altra equazione $x^3-3a^2x+2a^2c=0$ è $\sqrt[3]{\left(-a^2c+a^2\sqrt{(c^2-a^2)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-a^2c-a^2\sqrt{(c^2-a^2)}\right)}$, la quale, se $a<c$, è reale unica e negativa (14). Se poi $a>c$, saremo pure al caso irriducibile, ed al caso di abbisognare del ripiego dei coseni (20). Per questo è da considerare, che se nella equazione esaminata quì sopra $x^3-3a^2x-2a^2c=0$ in luogo della x metteremo $-x$, risulterà l'altra equazione $x^3-3a^2x+2a^2c=0$, le cui radici perciò non saranno altro che le già trovate della equazione precedente, però da prendersi col segno contrario. Con che restano esaurite tutte le radici della equazione duplice $x^3-3a^2x\mp 2a^2c=0$ proposta da principio al n. 11.

30. Resta da parlare adesso delle altre due equazioni $x^3+3a^2x\mp 2a^2c=0$, che colle altre due esaminate comprendono tutti i casi delle equazioni cubiche. Esaminiamo prima la $x^3+3a^2x-2a^2c=0$, e consideriamola come caso particolare dell'equazione $x^3+3a^2x-2a^2c=2a^2y$, equazione di una curva, il cui asse sia DE (fig. 6.) coll' origine delle x in D. Quando $x=0$, sarà $2a^2y=-2a^2c$, cioè $y=-c$. Presa pertanto l'ordinata DA $=-c$, sarà A un punto della curva. Facciasi $dy=0$, ed in questa ipotesi si troverà $x^2=-a^2$; ed $x=\pm(\sqrt{-a^2})$, quantità immaginaria. Dunque la curva non ha vertici. Facendo $ddy=0$, si troverà (presa dx costante) $6xdx^2=0$, cioè $x=0$. Dunque la curva ha un flesso contrario in A, punto corrispondente alla $x=0$. L'esponente della equazione è dispari, onde la curva alla destra ascenderà, ed alla sinistra si abbasserà (7,8). Quindi l'andamento della curva sarà come QAEH, il quale mostra che l'equazione data ha una sola radice reale DE, che è positiva.

31. Per trovare la DE analiticamente si metta $x=t+z$, ed operando come ai n. 15 e 16, si avrà DE $=x=\sqrt[3]{\left(a^2c+a^2\sqrt{(c^2+a^2)}\right)}+\sqrt[3]{\left(a^2c-a^2\sqrt{(c^2+a^2)}\right)}$. L'indagine dell'espressione delle altre due radici è inutile perchè sono immaginarie.

32. Col metodo spiegato si trova, che l'altra equazione $x^3+3a^2x+2a^2c=0$ appartiene alla stessa curva QAEH,

ma con l'asse come in GR, e che ha una sola radice reale $RG = \sqrt[3]{\left(-a^2c + a^2\sqrt{(c^2+a^2)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-a^2c - a^2\sqrt{(a^2c+a^2)}\right)}$ che è negativa.

Capitolo III.

Radici delle equazioni di quarto grado.

33. Per tutte le equazioni di quarto grado serva la $x^4 + 6ax^2 + 8cx + 3h = 0$, nella quale ciascuna delle a, c, h può essere negativa. Per averne le radici un metodo praticato è il seguente. Si scriva $x^4 + 6ax^2 = -8cx - 3h$. S'aggiunga ad ambe le parti la quantità $4u^2x^2 + (2u^2 + 3a)^2$, e si avrà $x^4 + 6ax^2 + 4u^2x^2 + (2u^2 + 3a)^2 = 4u^2x^2 - 8cx + (2u^2 + 3a)^2 - 3h$. Si divida poscia per $4u^2$, e si estragga la radice quadrata; si avrà per risultato $\frac{x^2 + 2u^2 + 3a}{2u}$ $= \pm\sqrt{\left(x^2 - \frac{2cx}{u^2} + \frac{(2u^2+3a)^2 - 3h}{4u^2}\right)}$.

34. La quantità sotto il vincolo radicale sarà un quadrato, se il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine sia eguale all' ultimo termine, cioè se sarà $\frac{c^2}{u^4} = \frac{(2u^2+3a)^2 - 3h}{4u^2}$ (A). Sostituendo nella equazione ultima del numero precedente, si avrà allora $\frac{x^2 + au^2 + 3a}{2u} = \pm\sqrt{\left(x^2 - \frac{2cx}{u^2} + \frac{c^2}{u^4}\right)} = \pm\left(x - \frac{c}{u^2}\right)$ cioè $x^2 \mp 2ux = -3a \mp \frac{2c}{u} - 2u^2$; d'onde si ricavano i quattro seguenti valori della x, cioè

$$x = u \pm \sqrt{\left(-3a - \frac{2c}{u} - u^2\right)}$$

$$x = -u \pm \sqrt{\left(-3a + \frac{2c}{u} - u^2\right)}.$$

35. Resta da trovare il valore della u dalla equazione A precedente, la quale ridotta opportunamente diviene $u^6 + 3au^4 + \frac{9a^2u^2 - 3hu^2 - 4c^2}{4} = 0$. Per togliere il secondo termine si faccia $u^2 = z - a$. Sostituendo si ricaverà $z^3 - \frac{3a^2z + 3hz}{4} - \frac{a^3 - 3ah - 4c^2}{4} = 0$ (B).

36. Si metta $\frac{a^2 + h}{4} = m^2$, e $\frac{-a^3 + 3ah - 4c^2}{4} = -2m^2n$, e l' equazione diverrà $z^3 - 3m^2z - 2m^2n = 0$, equazione che apparterrà al caso irriducibile, quando sia $m > n$ (18,26). Col capitolo precedente potremo sempre trovare il valore o i valori della z, per avere quello di $u^2 = z - a$, ed ancora della u, che sostituiti nelle formole del n. 34 ci daranno finalmente i valori della x, in a e c.

Capitolo IV.

Natura delle radici delle equazioni litterali di quinto e di sesto grado.

Articolo I.

Natura delle radici delle equazioni litterali di quinto grado.

37. In questi due articoli farò uso di equazioni mancanti del termine penultimo, giacchè questo si può sempre togliere. Basta togliere prima il secondo termine, e poi mettere l' incognita eguale all' ultimo termine diviso per una nuova incognita. Sia pertanto proposta l' equazione $x^5 - 5ax^4 + 5cx^3 - 5hx^2 + i = X = 0$. Sia $X = y$ equazione di una curva dell' asse AQ (fig. 7.) coll' origine delle x in A. Fatta $x = 0$ sarà $y = i$. Presa perciò un' ordinata $AB = i$, sarà B un punto della curva. Fatta $dy = 0$, si avrà $x^4 - 4ax^3 + 3cx^2 - 2hx = 0$, cioè $x = 0$, ed $x^3 - 4ax^2 + 3cx - 2h = T = 0$. Dunque al punto B sta un vertice della curva. L' equazione $T = 0$ può avere una sola radice, e può averne tre. Si suppongano tre, e tutte positive, e siano le AM, AO, AQ, che saranno ascisse di altrettanti ver-

tici. Poichè codeste tre ascisse, o radici, si sanno trovare, le intenderò sostituite ognuna di esse successivamente in $X = y$ in luogo della x, e così si avranno le corrispondenti ordinate, le quali siano per esempio MD, OF, QH. Quindi l' andamento della curva sarà come KBDFHI: Nel caso della figura si ha una sola radice reale AK, ch' è negativa. Se i calando divenisse $=$ BE, si dovrà concepire l'asse in CER, e si avranno una radice negativa EC, e due EN, ER positive. E se i calando vieppiù divenisse come BT, si avranno cinque radici reali, una negativa TS, e quattro positive TV, TZ, Ta, Tc. E se i divenisse come Be, si avranno una radice reale negativa ed, e due positive ef, em.

38. Che se l' equazione cubica $T = 0$ non avrà che una radice reale positiva, ciò vorrà dire, che oltre il vertice B non ve ne sarà che un altro, come D, e la curva della fig. 7 si trasformerà nella curva della fig. 8; nel qual caso se l' asse sarà in KM si avrà una sola radice negativa AK; e se l' asse sarà in CEN si avranno tre radici reali, due positive EG, EN, ed una negativa EC.

39. Troppo lungo sarebbe tener qui dietro a tutte le combinazioni possibili dei segni, e dei rapporti delle costanti fra di loro, cosa non difficile da eseguirsi da ognuno nei casi particolari.

Articolo II.

Natura delle radici delle equazioni litterali di sesto grado.

40. L' equazione data sia $x^6 + 6ax^5 + 6cx^4 + 6fx^3 + 6gx^2 + h = D = 0$ mancante del termine penultimo (37), nella quale ognuna delle a, c, f, g, h può essere positiva, o negativa. Si dica $D = y$ equazione di una curva dell' asse SP (fig. 1.) coll' origine delle x in Z. Fatta $x = 0$ si ha $y = h$. Sia questa negativa, e ad essa si prenda eguale la ZR. Fatta $dy = 0$ sarà $x^5 + 5ax^4 + 4cx^3 + 3fx^2 + 2gx = 0$, cioè $x = 0$, ed $x^4 + 5ax^3 + 4cx^2 + 3fx + 2g = E = 0$. Dunque in R si ha un vertice. Se le radici della equazione $E = 0$ sono tutte reali e positive, queste siano come le Zg, Zp, Zu, Zq, e saranno ascisse di altrettanti vertici. Da-

Date le radici delle equazioni cubiche (26) si ànno anche le radici della equazione biquadratica $E = o$. Si sostuisca pertanto ognuna di esse successivamente in $D = y$ in luogo della x, e così si avranno le corrispondenti ordinate, le quali siano per esempio gE, pH, nL, qO. Quindi l'andamento della curva sarà come SREHLOQ. Così crescendo o calando la ZR, si potrà sapere se l'asse si alzi sopra L o sopra E, oppure se si abbassi sotto il vertice H, sotto il vertice O, sotto il vertice R; con che si saprà sempre quante siano le radici reali positive, e negative. Se l'equazione biquadratica $E = o$ non avesse che due radici reali, la curva oltre il vertice R ne avrebbe altri due soli, come E, H; e l'equazione data non potrebbe avere più di quattro radici reali. E se l'equazione $E = o$ avesse tutte le radici immaginarie, la curva avrebbe il solo vertice R, e l'equazione data non potrebbe avere che due radici reali; e potrebbe averle essa pure tutte immaginarie nel caso di h positiva.

41. Chi avesse la curiosità di avere la natura delle radici delle equazioni litterali di quinto, e di sesto grado indipendentemente dal caso irriducibile, e senza il bisogno di ricorrere ai coseni, passi al n. 107, e segg.

Capitolo V.

Nuovo metodo per le radici prossime delle equazioni numeriche di qualunque grado.

42. Per una più facile esposizione ed intelligenza del metodo, comincierò dalle equazioni di secondo grado. Pertanto sia $x^2 - 7x + 10 = Z = o$. Si consideri al solito questa come caso particolare della equazione $Z = y$ di una curva, il cui asse sia AQ (fig. 9) coll' origine delle ascisse x in A. Fatta $x = o$ si ha $y = 10$. Dunque al punto A, dove $x = o$, si alzi un' ordinata $AB = 10$, e sarà B un punto della curva. Differenziando sarà $2xdx - 7dx = dy$; e quando $dy = o$, sarà $x = \frac{7}{2} = 3{,}5$. (giova quì di molto l'uso dei decimali). Presa pertanto $Aq = 3{,}5$ sarà questa l'ascissa di un vertice. E perchè quando $x = 3{,}5$ si trova

$y = -2,25$, presa $qO = -2,25$, si avrà il punto O del vertice. Presa dx costante e fatta $ddy = 0$, si trova $2dx^2 = 0$, il che per la ipotesi di dx costante è impossibile. Dunque la curva non ha flesso contrario (3). L' esponente dell' equazione è il 2, ch' è numero pari. Dunque la curva termina in due rami infiniti, destro e sinistro, ambi rivolti in su (7, 8). Quindi la curva ha un andamento come BOPZ: E perchè l' asse incontra la curva in due punti, come M,P, si hanno due radici reali positive, AM, AP.

43. Poichè l' equazione è di secondo grado, si trovano i due valori precisi della x, che sono $\frac{7 \pm 3}{2}$, onde riesce $AP = \frac{10}{2} = 5$, ed $AM = \frac{4}{2} = 2$. Ma questo fingiamo di non saperlo, ed indaghiamo prima la AP per approssimazione. A questo fine poichè abbiamo l' ascissa del vertice O, ch' è $Aq = 3,5$, si elegga per un primo *limite A* della radice AG un' ascissa, che sia maggiore della Aq; e sia per esempio $u = 6$. Si sostituisca il 6 nell' equazione $x^2 - 7x + 10 = y$, e si avrà $y = 4$, valore positivo; il che mostra, che $x = 6$ è come AQ maggiore della AP, corrispondendovi l' ordinata $y = QC$ positiva.

44. S' intenda adesso condotta da C la tangente CD, ed avremo la sottangente $QD = \frac{ydx}{dy}$, com' è notorio; e perciò avremo ancora $AD = AQ - QD = x - \frac{ydx}{dy}$. Ma differenziando si ha $dy = 2xdx - 7dx$. Quindi sostituendo si ha $x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 10}{2x - 7} = \frac{26}{5} = 5,2 = B$, *secondo limite*.

45. Si alzi l' ordinata DE, e si tiri la tangente EF. Anche qui posta $x = AD$, abbiamo la $y = DE$, e la sottangente $DF = \frac{ydx}{dy}$, cosicchè $AF = AD - DF = x - \frac{ydx}{dy}$ $= \frac{x^2 - 10}{2x - 7}$ (posto $x = 5,2$) $= 5,01176 + = C$ *terzo limite* più vicino alla radice AP.

46. Per avere un *quarto limite D* con un conteggio

meno laborioso, in vece di valermi della precisa ascissa AF trovata $= 5{,}01176 +$, mi valerò di un altr' ascissa alquanto più discosta dalla radice, ma espressa con meno cifre, com' è la $Af = 5{,}02$. Alzata l' ordinata fG, e tirata la tangente Gn, ho la sottangente fn, la quale, posta $x = Af$, è $\frac{ydx}{dy}$; onde perchè $An = Af - fn$, avremo anche quì $x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 10}{2x - 7} =$ (per essere $x = 5{,}02$) $5{,}0001 + = An$ $= D$ *quarto limite* assai prossimo al valore preciso della radice AP $= 5$; al quale si vede, che ci potremo accostare sempre più quanto si volesse con un *quinto limite* E, con un *sesto limite* F, ec.

47. Se invece di eleggere l' ascissa $x = 6$ per primo limite A, avessi eletto un altr' ascissa $x = 4$ pure maggiore della Aq, poichè questa mi dà $y = -2$, mi sarei accorto con questo solo, che $x = 4$ è un ascissa come la AK, che è minore della AP, ed alla quale appunto compete un' ordinata negativa, come la KL. Dandosi questo caso s' intenda condotta la tangente del punto L, e questa sia la LV, cosicchè avremo la sottangente $KV = -\frac{ydx}{dy}$ (col segno negativo perchè quì al crescere dell' ascissa l' ordinata cala). Quindi allorchè $x = AK$, avremo $AV = AK + KV$ $= x - \frac{ydx}{dy}$, cioè avremo anche quì il secondo limite AV della stessa formola $\frac{x^2 - 10}{2x - 7}$ trovata di sopra, la quale, perchè quì $x = 4$, dà il secondo limite $B = 6$, che per accidente è $= AQ(13)$; colla quale ascissa abbiamo trovato l' altra $AD = 5{,}2$, e poi l' altra $AF = 5{,}011 +$, e poi l' altra $An = 5{,}0001 +$.

48. S' indaghi ora l' altra radice AM. Si elegga a questo fine per *primo limite* A un' ascissa, che sia minore della Aq, e questa sia per esempio $x = 3$. Con questa trovasi $y = -2$, valore negativo, indizio che la $x = 3$ è ascissa come la AR maggiore della AM, ed alla quale appunto compete un' ordinata negativa, come RT. Condotta ora dal punto T la tangente TH, avremo la sottotangente RH

(posto $x = AR$) $= \frac{ydx}{dy}$, onde $AH = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 10}{2x - 7} =$ (giacchè $x = 3$) $1 = B$ *secondo limite*.

49. Condotta la tangente IN, e posta $x = AH$, avremo la sottangente $HN = -\frac{ydx}{dy}$ (negativa a cagione della ordinata decrescente). Sarà adunque $AN = AH + HN$ $= x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 10}{2x - 7} =$ (poichè $x = 1$) $= 1, 8 = C$ *terzo limite*.

50. Alzata l'ordinata NS, e condotta la tangente SX, quando $x = AN$, sarà $NX = -\frac{ydx}{dy}$, ed $AX = x - \frac{ydx}{dy}$ $= \frac{x^2 - 10}{2x - 7} =$ (poichè $x = 1, 8$) $1{,}98 + = D$ *quarto limite*.

51. Invece del preciso limite $D = AX = 1{,}98 +$, si prenda qui per limite D la $Ai = 1{,}98$, e si conducano l'ordinata ib, e la tangente bc. Quando $x = Ai$ sarà $Ac = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 10}{2x - 7} = 1{,}9998 + = E$ *quarto limite* assai prossimo alla radice $AM = 2$, alla quale ci potremmo accostare per questa via anche più quanto si volesse; non potendosi però arrivarvi mai, come si vede.

52. Un indizio, che un limite sia assai prossimo alla radice ricercata, egli è quando codesto limite differisca d'assai poco dal suo precedente, del che se ne conosce facilmente la ragione. E quando si dasse, che la differenza fosse nulla (come sarebbe avvenuto qui sopra se invece d'assumere l'ascissa $x = Ai = 1{,}98$ avessi assunto (tentando) l'ascissa $x = 2$) sarà questo un indizio certo, che l'ascissa assunta è la radice precisa.

53. Se l'equazione data fosse $x^2 + 6x + 5 = Z = 0$, si cerchi l'andamento della curva della equazione $Z = y$. L'asse sia AN (fig. 10.) coll'origine delle x in A. Fatta $x = 0$, sarà $y = 5 = AB$. Con $dy = 0$ si trova $x = -3 = AD$, cui corrisponde $y = -4 = DF$, onde in F avvi un vertice. La curva deve avere i due rami all'insù (7, 8). Dunque questa curva dev'essere come GFB, e si avranno due radici reali AC, AE, che sono negative.

54. In fatti algebraicamente si trova $x = -3 \pm 2$, cioè $x = -1 = AC$, ed $x = -5 = AE$. Ma fingiamo di non saper questo, e si cerchi la radice AE col metodo nuovo. Per questo si elegga per *primo limite A* una qualche ascissa del ramo FEG, che sia perciò maggiore della AD trovata $= -3$, e la eletta sia $x = -4$. Poichè con questa si trova $y = -3$, si viene a sapere che $x = -4$ è un ascissa come AP, perchè vi corrisponde un' ordinata negativa come la PQ. Tirata la tangente QN, avremo la sottangente $PN = -\frac{ydx}{dy}$ (negativa perchè PQ decresce), onde $AN = AP + PN = x - \frac{ydx}{dy} =$ (sostituendo opportunamente) $\frac{x^2 - 5}{2x + 6} = -5{,}5 = B$ *secondo limite*.

55. Si conducano l'ordinata NG, e la tangente GI. Quando $x = AN$, sarà $NI = \frac{ydx}{dy}$, ed $AI = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 5}{2x + 6} =$ (giacchè $x = -5{,}5$) $-5{,}05 = C$ *terzo limite*. Poi si tirino l'ordinata IK, e la tangente KL, e colla stessa regola avremo $AL = -5{,}0006 = D$ *quarto limite*.

56. Per l'altra radice AC si elegga per *primo limite A* un' ascissa del ramo FCB, cioè che sia minore della AD trovata $= -3$; e codesta sia l'ascissa $x = -2$, colla quale si trova $y = -3$, onde la $x = -2$ è come la AR, giacchè vi compete un' ordinata negativa come la RS. Tirata la tangente ST, avremo RT (posta $x = AR$) $= \frac{ydx}{dy}$, onde $AT = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 5}{2x + 6} =$ (giacchè $x = -2$) $-0{,}5 = B$ *secondo limite*. Indi tirata l'ordinata TV, e la tangente VZ, quando $x = AT$ avremo $TZ = -\frac{ydx}{dy}$ (col segno $-$ per la decrescenza della TV), onde $AZ = AT + TZ = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{x^2 - 5}{2x + 6} =$ (poichè $x = -0{,}5$) $= 0{,}95 = C$ *terzo limite*.

57. Passo a qualche equazione cubica. Sia $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = Z = 0$. Fingiamo di non sapere, che le radici

sono $3, 6, -3$, e si metta $Z = y$ equazione di una curva, il di cui asse sia HAD (fig. 11.) coll' origine delle ascisse in A. Fatta $x = 0$, si ha $y = 54 = AB$. Differenziando abbiamo $dy = (3x^2 - 12x - 9) . dx$, onde $x - \frac{ydx}{dy} = - \frac{2x^3 - 6x^2 - 54}{3x^2 - 12x - 9}$ (H). Quando $dy = 0$, egli è $x = 2 \pm \sqrt{7}$. Presa perciò $AE = 2 + \sqrt{7}$, ed $AK = 2 - \sqrt{7}$, saranno queste le ascisse di due vertici. Mettendo AE in $Z = y$, si avrà $y = 20 - 14\sqrt{7}$, quantità negativa come EF. E mettendo AK in $Z = y$, si ha $y = 20 + 14\sqrt{7}$. Dunque sono F, ed I i due vertici. L' esponente dell' equazione è dispari. Dunque la curva con un ramo alla destra ascenderà, mentre con un altro ramo alla sinistra discenderà (7, 8). Tutto questo richiede un andamento della curva come HIFG; onde si avranno due radici positive AD, AR, ed una negativa AH. Facendo $ddy = 0$ si trova $x = 2 = AM$; e questo valore introdotto in $Z = y$ dà $y = 20 = ML$, essendo perciò L un flesso contrario.

58. Per avere per approssimazione la radice AD, si elegga per un *primo limite* A un' ascissa maggiore della AE, cioè maggiore di $2 + \sqrt{7}$, e questa sia $x = 5$. Con questa abbiamo $y = -16$. Dunque la $x = 5$ è come la AP, cui corrisponde l' ordinata PQ negativa. Condotta la tangente QN, quando $x = AP$, sarà $PN = -\frac{ydx}{dy}$, onde $AN = x - \frac{ydx}{dy} = H (57) =$ (giacchè $x = 5$) $7,666 +$, *secondo limite* B. Si prenda $AV = 7,7$; e condotta l' ordinata VG e la tangente GO, quando $x = AV$, sarà $VO = \frac{ydx}{dy}$, ed $AO = x - \frac{ydx}{dy} = H =$ (per essere $x = 7,7$) $= 6,58 +$, *terzo limite* C. Si prenda $Au = 6,6$, e si tirino l' ordinata um, e la tangente mn. Quando $x = Au$, avremo $un = \frac{ydx}{dy}$, ed $An = x - \frac{ydx}{dy} = H =$ (poichè $x = 6,6$) $6,112$ *quarto limite* D. E dicendo $D = 6,1$ si ha un quinto limite $E = 6,004$, ec.

59. Il *primo limite* A per la radice AH sia un ascissa del ramo IH, cioè maggiore della AK trovata $= 2 - \sqrt{7} = -0{,}64 +$. L' ascissa eletta sia $x = -2$. Con questa si trova $y = 40$. Dunque la $x = -2$ è come la Aa, cui compete appunto un' ordinata positiva ab. Condotta la tangente bh se $x =$ Aa, sarà $ah = -\frac{ydx}{dy}$, onde A$h = x - \frac{ydx}{dy} =$ H $=$ (giacchè $x = -2$) $= -3{,}48 + = B$ *secondo limite*. In luogo di B si prenda A$c = -3{,}5$ e condotta l'ordinata cp, e la tangente pi, quando $x =$ Ai, sarà $ci = \frac{y'x}{dy}$, onde A$i = x - \frac{y'x}{dy} =$ H $=$ (perchè $x = -3{,}5$) $= -3{,}05$, *terzo limite* C della radice AH.

60. Si voglia in fine la radice *intermedia* AR. Il primo limite A per questa sia AM ascissa del flesso contrario trovata $= 2$. Perciò da L sia condotta la tangente LQ. Quando $x =$ AM, sarà M$q = -\frac{y'x}{dy}$, ed A$q = x - \frac{ydx}{dy} =$ H $=$ (giacchè $x = 2$) $= 2{,}95$ *secondo limite* B. E fatto $B' = 2{,}94$ si troverà un *terzo limite* $C = 2{,}999 +$ assai prossimo alla precisa radice $= 3$.

Si vede, che la stessa formola H $= \frac{2x^3 - 6x^2 - 54}{3x^2 - 12x - 9}$ dedotta (57) dall' altra $x - \frac{ydx}{dy}$, e dall' equazione data, serve per trovare tutti i limiti B, C, D, E, ec. di ognuna delle tre radici, dipendendo soltanto dalla scielta del primo limite A, che tutti gli altri da esso derivanti convergano a quella delle tre radici, che si cerca. Quindi è, che codesta formola H io la chiamo *formola dei limiti* delle radici di questa equazione $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0$; come chiamo *formola dei limiti* anche le altre due, cioè la $\frac{x^2 - 10}{2x - 7}$ trovata al n. 45, e la $\frac{x^2 - 5}{2x + 6}$ trovata al n. 54, derivanti l' una e l' altra parimente dalla formola $x - \frac{ydx}{dy}$, e dalla equazione rispettiva data, le quali due formole ànno appunto servito pei limiti delle radici di quelle equazioni date, giusta il metodo spiegato fin qui, e ch' io continuerò a spiegare vieppiù.

61. Prenderò in esame ancora l' equazione cubica $x^3 - 3x + \frac{5}{4} = Z = 0$. Non ho bisogno di liberare l'equazione dalle frazioni. Sia EAD (fig. 12) l' asse della curva della equazione $Z = y$ coll' origine delle x in A. Quando $x = 0$ abbiamo $y = \frac{5}{4} = AB$. Differenziando avremo $dy = 3x^2dx - 3dx$; e $ddy =$ (presa dx costante) $6xdx^2$. Quando $dy = 0$ abbiamo $x = \pm 1$, cioè $x = 1 = AI$, ed $x = -1 = AM$, ascisse di due vertici. Fatta $x = AI = 1$ abbiamo $y = -\frac{3}{4} = IG$; e facendo $x = AM = -1$, abbiamo $y = 3{,}25 = MF$. L' esponente dell' equazione è dispari. Dunque (2, 8) l' andamento della curva sarà come EFGH, onde si scorge, che si ànno tre radici reali AD, AC, AE.

62. Come nei casi precedenti, così in questo (ed in tutti gli altri consimili) conducendo delle tangenti colla regola data si arriverà alla formola $x - \frac{ydx}{dy}$, colla quale, e colla equazione data si ottiene la formola dei limiti, la quale quì riesce $H = \dfrac{2x^3 - \frac{5}{4}}{3x^2 - 3} = \dfrac{2x^3 - 1{,}25}{3x^2 - 3}$. Ciò posto si voglia la radice AD. Poichè $AI = 1$, si elegga per *primo limite* A un' ascissa maggiore della AI, e questa sia la $x = 2$. Sostituendo in H si avrà $B = 1{,}638 +$. Invece di B prendo $B' = x = 1{,}64$, e sostituendo pure in H si avrà $C = 1{,}49$. Invece di C si prenda $C' = x = 1{,}5$; e si avrà $D = 1{,}466 +$, ec.

63. Indi si voglia la AE. Poiche $AM = -1$, si prenda per primo limite A l'ascissa $x = -2$. Sostituendo in H (62) si ha $B = -1{,}916 +$. Invece di B si prenda $B' = -1{,}92 = x$, e sostituendo in H si ha $C = -1{,}911 +$, ec.

64. Volendo in fine la radice intermedia AC, si ricorra pel primo limite A anche quì come al n. 59, all' ascissa del fles-

flesso contrario che deve trovarsi tra i due vertici G, ed F. Basta mettere $ddy = 0$, con che si ha $6xdx^2 = 0$ (61), cioè $x = 0$. Dunque il flesso contrario qui cade in B, la cui ascissa è $x = 0$; e perciò nella formola H dei limiti per avere B si metterà $x = 0$, e così si ha $B = 0,416$; e fatta $B' = x = 0,4$, e sostituendo in H si ha il terzo limite $C = 0,445$; e D (operando a dovere) $= 0,446$, valore prossimo della AC.

65. Si è perciò trovato prossimamente AD $= 1,466 +$, AC $= 0,446 +$, ed AE $= - 1,911 +$; il che combina colla regola, che quando l' equazione data è mancante del secondo termine, la somma delle radici positive eguaglia la somma delle negative.

66. Sia ora l' equazione di quarto grado $x^4 - 6x^2 + 5x - 1 = Z = 0$, e sia PAE (fig. 13.) l' asse della curva dell' equazione $Z = y$, coll' origine delle x in A. Fatta $x = 0$, si ha $y = -1 =$ AH. Differenziando abbiamo $dy = (4x^3 - 12x + 5) \cdot dx$, onde $x - \frac{ydx}{dy} = \frac{3x^4 - 6x^2 + 1}{4x^3 - 12x + 5}$ (H) formola dei limiti. Quando $dy = 0$, si ha l'equazione $x^3 - 3x + \frac{5}{4} = 0$, le cui radici si sono trovate al n. 65 tutte reali. Dunque la curva ha tre vertici corrispondenti uno all'ascissa AV $= 1,466$ (65), un altro all' ascissa AK $= 0,446$, ed un altro all' ascissa AL $= - 1,911$. Sostituiti questi valori in $Z = y$, si trova $y =$ VT $= - 1,946$, ed $y =$ KS $= 0,076$, ed $y =$ LR $= - 19,130$. Aggiungendo la considerazione, che l' esponente dell' equazione è un numero pari (7,8), si conoscerà, che la curva deve avere un andamento come QRSTG, e che si ànno quattro radici reali come AE, AC, AB, AO.

67. Poichè il *primo limite* A della radice AE dev' essere maggiore della AV trovata $= 1,466$ (66), sia questo l' ascissa $x = 2$. Sostituendo nella formola H (66) si trova $B = 1,923$; e mettendo $B' = 1,93$ si ha $C = 1,913$ poco diverso dal precedente: Dunque prossimo alla radice.

68. Per l' altra radice estrema AO convien eleggere per *primo limite* A un' ascissa maggiore della AL trovata $= - 1,911$ (66). Dunque si elegga $x = - 3$. Sostituendo

in H si trova $B = -2,835$; e supponendo $B' = -2,84$ si ha $C = -2,812$; e supponendo $C' = -2,82$ si ha $D = -2,811$.

69. Restano le due radici intermedie AC,AB. Per queste per *primo limite A* si può prendere l'ascissa dei rispettivi flessi contrarj. Per trovar questi si faccia $ddy = 0$, e si troverà (differenziando la proposta equazione due volte) $2x^2 - 12 = 0$, onde $x = \pm 1$; e prendendo AD $= x = 1$ ed AM $= x = -1$, saranno AD,AM ascisse di due flessi contrarj, alle quali corrispondono le ordinate DI $= -1$, ed MN $= -11$. Pertanto volendo la radice AC, si metta per *primo limite A* la $x = 1 =$ AD ascissa del punto I, dal quale va spiccata la prima delle tangenti da condursi giusta il metodo; e dalla sostituzione della stessa $x = 1$ nella formola H dei limiti si avrà $B = 0,66$; e supponendo $B' = 0,7$ colla stessa formola H si trova $C = 0,601$, e supponendo $C' = 0,6$ si ha $D = 0,57$; e supponendo $D' = 0,58$ si avrà $E = 0,575$ poco diverso dal limite precedente 0,577, e perciò prossimo alla radice.

70. Per avere la radice AB, per le cose dette si potrebbe assumere per primo limite l'ascissa AM $= -11$ del flesso contrario. Siccome però quì abbiamo l'altro punto H della curva noto, e più vicino al punto B, sarà più vantaggioso l'intendere spiccata la prima tangente dal punto H (44,47), del quale l'ascissa è $x = 0$, nel qual caso la formola H dei limiti diviene $\frac{1}{5} = 0,2 = B$ *secondo limite*, col quale si trova $C = 0,29$; e poi $D = 0,319+$; e supponendo $D = 0,32$, si ha $E = 0,323$.

71. Abbiamo adunque le tre radici positive AE $= 1,913$, AC $= 0,575$, ed AB $= 0,323$, delle quali la somma 2,811 si trova uguale alla radice negativa AO trovata $-2,811$; il che (trattandosi di un' equazione mancante del secondo termine) è una conferma della prossimità dei trovati valori ai giusti valori delle radici.

72. Intanto si noti. Nel caso del n. 45, e seguenti si vede, che a un limite AK (fig. 9.) minore della radice AP deve succedere un limite AV maggiore del suo precedente AK; e che a un limite AQ maggiore della radice AP deve succedere un limite AD minore del suo precedente AQ.

E lo stesso si dica dei limiti della radice AM; giacchè al limite AH < AM succede il limite AN maggiore del suo precedente; ed al limite AR maggiore della radice succede un limite AH minore del suo precedente AR. Quindi si va a comprendere la proposizione inversa: cioè che se in ognuno dei detti due casi vedrò che a un limite N ne succeda un maggiore, potrò argomentare che N è minore della radice; e viceversa se ad un limite M ne succeda un minore, potrò dire che M è maggiore della radice. E questo stesso si troverà verificarsi tanto nei casi delle fig. 11,12,13,14, che in tutti gli altri casi analoghi.

73. Si venga adesso all' equazione di quinto grado $x^5 - 10x^3 + 12\frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5} = T = 0$. Sia NAH (fig. 14) l' asse della curva dell' equazione $D = y$. Quando $x = 0$, sarà $x = \frac{3}{5} = AB = 0,6$. Differenziando abbiamo $dy \; (= 5x^4 - 30x^2 + 25x - 5)\; dx$, onde qui $x - \frac{ydx}{dy} =$

$$\frac{4x^5 - 20x^3 + 12\frac{1}{2}x^2 - 0,6}{5x^4 - 3\ x^2 + 25x - 5}$$

(H) formola dei limiti di questa equazione. Quando $dy = 0$ si ha l' equazione $x^4 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$, le cui radici già trovate, e che si vedono al n. 71, sono le ascisse dei vertici di questa curva. Perciò se si prenderà $AM = 1,913$, $AZ = 0,575$, e $AG = 0,323$, ed $AD = -2,811$, e si sostuiscano questi valori tolti dal n. 71. nella equazione $T = y$, si troverà prima $y = -7,608 = MS$; poi $y = 0,019 = ZQ$; poi $y = 0,044 = GI$; e poi $y = 38,71 = DX$, onde si avranno i punti S,Q,I,X di quattro vertici. S' aggiunga la considerazione che l' equazione è di grado dispari (7,8); e si vedrà, che l' andamento della curva dev' essere come NXIOSH, e che si devono avere cinque radici reali, quattro positive AH,AE,AC,AK, ed una negativa AN.

74. Si cerchi in primo luogo la radice estrema AH. Poichè il primo limite A dev' essere un' ascissa x maggiore della AM trovata $= 1,916$, cioè quasi 2, mettiamo codesta

$x = 3$. Sostituendo in H avremo $B = 2{,}65$. In luogo di B si metta $B' = 2{,}6$, e si trova $C = 2{,}42 +$. In luogo di C si metta $C' = 2{,}4$, e si avrà $D = 2{,}358$. In luogo di D si metta $D' = 2{,}35$, e si avrà $E = 2{,}355$. Poichè $E > D'$ si vede (72) che D' è minore della radice AH, e che è come Ae, cosicchè dovendo essere E come Ag ne viene, che la radice AH sta fra il 2,35, ed il 2,355.

75. Se si cercherà l' altra radice estrema AN, si dovrà prendere per *primo limite* A un' ascissa x maggiore della AD trovata $= - 2{,}811$, che è poco meno del $- 3$. Assumo perciò $A = x = - 4$, con che trovo $B = - 3{,}76$. In luogo di B si metta $B' = - 3{,}7$, e si avrà $C - 3{,}707$. E poichè $C < B$, sarà B minore della radice (72) come la Ab, cosicchè dovendo essere C come Ad, ne viene che la radice AN sta fra il $- 3{,}7$, ed il $- 3{,}707$.

76. Per le radici intermedie sono da trovarsi le ascisse dei flessi contrarj. Si faccia perciò $ddy = 0$, e si avrà $x^3 - 3x + \frac{5}{4} = 0$, della qual equazione abbiamo trovato, che le radici prossime sono (65) 1,466; 0,446; $-1{,}911$. Pertanto se si prenderanno AF $= 1{,}466$, AP $= 0{,}446$, ed AL $= - 1{,}911$, a codeste ascisse corrisponderanno dei flessi contrarj, come in R, in O, in V.

77. Quindi per avere in primo luogo la radice AE, si potrà prendere per *primo limite* A l' ascissa $x =$ AF $= 1{,}466$. Ma per risparmio di calcolo si dica $A = 1{,}4 = x$, e sostituendo in H (73), si avrà $B = 1{,}09 +$. In luogo di B si metta $B' = 1$, e si avrà $C = 0{,}82$. In luogo di C metto $C' = 0{,}8$, ed ho $B = 0{,}71$. In luogo di D si metta $D' = 0{,}7$, e si ottiene $E = 0{,}66$. E finalmente in luogo di E metto $E' = 0{,}65$, ed ho $F = 0{,}652$. Poichè così $F > E$, ne viene pel n. 72 che 0,65 è minore della radice; e col discorso dei n. 74, 75 si trova che la radice AE sta fra il 0,650, ed il 0,652.

78. Volendo la radice AC, si prenda per *primo limite* A l' ascissa $x =$ AP $= 0{,}446$, o piuttosto si metta $A = 0{,}45$, e sostituendo in H (73), si avrà $B = 0{,}479$. In luogo di B si metta $B' = 0{,}48$, e si avrà $C = 0{,}481$. Questo piccolo aumento di C sovra B' mostra, che C è prossimo alla radice.

79. Per fine si cerchi la radice AK. Se l' origine delle ascisse fosse come in T, per le cose dette per *primo limite* A si dovrebbe prendere l' ascissa TL del flesso contrario V. Ma perchè abbiamo il comodo del punto A noto più vicino al punto K, che il punto L, potremo mettere con vantaggio per primo limite A l' ascissa del punto A; cioè per avere il secondo limite B potremo mettere nella formola H dei limiti l' ascissa x del punto A, cioè $x = 0$, con che avremo $B = -\frac{0,6}{-5} = 0,112$. E mettendo nella stessa formola H la $x = 0,12$ avremo $C = 0,187$. Tentiamo mettendo $C = 0,2$ in luogo di C, e avremo $D = 0,217$, valore prossimo della radice AK.

80. Abbiamo adunque prossimamente AH $= 2,353$; AE $= 0,651$, AC $= 0,481$, AK $= 0,217$, ed AN $= -3,703$.

81. Cerchiamo ancora le radici di un' equazione di sesto grado, e questa sia $x^6 - 15x^4 + 25x^3 - 15x^2 + \frac{18}{5}x - \frac{20}{79} = Z = 0$. Si consideri questa al solito come caso particolare della equazione $Z = y$ di una curva dell' asse SAP (fig. 1.) coll' origine delle ascisse in A. Quando $x = 0$, sarà $y = \text{AB} = -\frac{20}{79}$. Differenziando si ha $dy = (6x^5 - 60x^3 + 75x^2 - 30x + \frac{18}{5})\,dx$; e $ddy = (30x^4 - 180x^2 - 150x - 30) \cdot dx^2$ (presa dx costante). Sostituiti nella formola $x - \frac{ydx}{dy}$ i valori delle y, dy, si ha la

$$\text{formola dei limiti (H)} = \frac{5x^6 - 45x^4 + 50x^3 - 15x^2 + \frac{20}{79}}{6x^5 - 60x^3 + 75x^2 - 30x + \frac{18}{5}}.$$

82. Quando $dy = 0$ si ha l' equazione $x^5 - 10x^3 + 12,5x^2 - 5x + 0,6 = 0$, le cui radici già trovate (80) sono le ascisse di tanti vertici della curva. Prese pertanto A$q = 2,353$ (80), A$n = 0,651$, A$p = 0,481$, A$g = 0,217$, ed AZ $= -3,703$, e sostituiti questi valori in $Z = y$, avremo le ordinate $y = -39,24 = q$O; $y = 0,697 = n$L; $y = -0,001 = p$H; $y = 0,045 = g$E; ed $y = -1530 = $ ZR, che terminano ai vertici O, L, H, E, R.

S' aggiunga, che l' esponente dell' equazione è pari, onde la curva va a terminare in due rami estremi infiniti all' insù (7,8), e si vedrà, che l' andamento della curva dev' essere come TREHLOQ; e che si devono avere cinque radici reali positive, come AP,AM,AK,AG,AC, ed una reale negativa, come AS.

83. E quando $ddy = 0$, avremo $x^4 - 6x^2 - 5x - 1 = 0$, le cui radici già trovate (71) saranno ascisse di tanti flessi contrarj della curva. Si prendano pertanto An = 1,913 (71), Ab = 0,575, Aa = 0,323, ed AV = — 2,811. Con questi valori sostituiti nella equazione $Z = y$ potrei avere le corrispondenti ordinate 2N, bI, aF, VD, che terminano ai flessi contrarj nei punti N,I,F,D.

84. Fatti questi preparativi, se si vorrà la radice estrema AP, poichè dobbiamo prendere per primo limite A un' ascissa x maggiore della Aq, il valore della quale risulta dal n. 80, potremo mettere codesta $x = 3$. Così volendo calcolare l' altra radice estrema AS, poichè abbiamo AZ = — 3,703, potremo assumere per primo limite A l' ascissa $x = -5$.

85. Per primo limite A della radice intermedia AM si prenda l' ascissa $x = 1,9$ minore di poco dell' ascissa An del flesso contrario N. E così per primo limite A della radice AK si può prendere la $x = 0,57$ di poco minore dell' ascissa del flesso contrario I. Ed $x = 0,32$ sia la x da prendersi per primo limite per la radice AG, giacchè Aa = 0,323. E per trovare la radice AC, si metta il primo limite $A = x = 0$ (70).

86. Con tai primi limiti, e colla formola H dei limiti successivi B,C,D, ec., e col metodo abbastanza spiegato si calcoleranno i valori prossimi di tutte e sei le radici della data equazione, ed a queste ci potremo accostare quanto si vorrà.

Di un Asse molto vicino a un vertice.

87. A un vertice di una delle curve contemplate, come al vertice D (fig. 15) cada molto vicino l' asse, nè sappiasi bene, se questo cada sopra D, come ME, oppure sotto, come AB; e siasi trovato il valore prossimo dell' ascissa ME, o AB del vertice, e questo valore prossimo

si dica Q. Se al valore Q corrisponderà un' ordinata positiva, sarà questo il caso dell' asse in AC, e della Q come l' ascissa AR dell' ordinata RG positiva, e così saremo certi dell' esistenza delle due radici reali AI, AC.

88. Ma se al valore Q corrisponderà un' ordinata negativa, ci troveremo nell' incertezza se questo caso sia quello dell' asse in ME, e dell' ascissa Q come MF dell' ordinata negativa FG, oppure se sia il caso dell' asse in ABC, e della Q come la AH ascissa dell' ordinata HK parimente negativa.

89. Per toglierci da questa perplessità, si prenda Q per primo limite, e con questo, e colla formola dei limiti s' indaghi un secondo limite B; indi con questo si trovi un terzo limite C, e poi un quarto ec. Se saremo nel caso delle coordinate MF, FG dico, che si arriverà a un limite minore del suo precedente. Imperocchè esposto questo caso più in grande nella fig. *16*, nella quale le lettere M, F, G, esprimono i medesimi punti che nella fig. 15, se s' intendano condotte giusta il metodo la tangente GL, l' ordinata LN, la tangente NO, l' ordinata OP, la tangente PQ, ec.; si vede, che col limite MF trovo il limite maggiore ML, e che con questo può essere, che ne trovi un altro anche maggiore MO; ma si vede ancora, che devo poi trovarne uno MQ minore del suo precedente; indizio certo, che l' asse è come in MO sopra il vertice, e che all' equazione mancano due radici reali. Lo stesso verrebbe indicato quando si rilevasse, che una sottangente LO fosse maggiore della sua precedente FL, o che un' ordinata OP fosse maggiore della sua precedente LN.

90. Un' altra maniera per iscoprire in tal caso il vero è la seguente, che è affatto diretta, e potrà servire ancora per altre viste. Ritorno all' equazione $x^4 - 6x^2 + 5x - 1 = Z = o$ del n. *66*, dove, posto $Z = y$, equazione di una curva dell' asse OAE coll' origine delle x in A, si è trovato, che l' andamento della curva è come QRSTG (fig. 13, 17), essendo AH $= - 1$. Si consideri ora la AH variabile, e si denomini z. Crescendo la AH, o sia la z, l' asse si alzerà, e calando la z l' asse si abbasserà. Si cerchi quanto debba crescere la HA perchè l' asse passi in DS al contatto della curva al vertice S, e quanto debba calare perchè

l' asse passi o in FT al contatto in T, o in IR al contatto in R. Egli è manifesto, che in ognuno di questi tre casi si dovrà avere al vertice toccato $y = 0$, ed a un tempo stesso sarà $dy = 0$. Ora in luogo di $Z = y$ avremo $x^4 - 6x^2 + 5x + z = y$, onde la prima ipotesi di $y = 0$ darà $x^4 - 6x^2 + 5x + z = 0$ (A), e l' altra ipotesi di $dy = 0$ darà $4x^3 - 12x + 5 = 0$ (B).

91. Dalle due equazioni A, B, si elimini la x; il che si può ottenere nella seguente maniera. Dalla equazione B abbiamo $x^3 = \frac{12x - 5}{4}$ (C); e moltiplicando in x abbiamo ancora $x^4 = \frac{12x^2 - 5x}{4}$. Ma dalla equazione A abbiamo $x^4 = 6x^2 - 5x - z$. Dunque $\frac{12x^2 - 5x}{4} = 6x^2 - 5x - z$; d'onde si ricava $x^2 = \frac{15x + 4z}{12}$ (D); onde si ha ancora $x^3 = \frac{15x^2 + 4zx}{12} = C = \frac{12x - 5}{4}$; d' onde si trova $x^2 = \frac{36x - 4zx - 15}{15} = D = \frac{15x + 4z}{12}$; con che si trova $x = \frac{60 + 20z}{69 - 16z}$ (E); onde sarà ancora $x^2 = \frac{60x + 20zx}{69 - 16z} = D = \frac{15x + 4z}{12}$; e così si trova un altro valore della $x = \frac{64z^2 - 276z}{315 - 480z}$. Abbiamo adunque $\frac{64z^2 - 276z}{315 - 480z} = \frac{60 + 20z}{69 - 16z}$; d' onde finalmente ricavasi $256z^3 - 4608z^2 - 864z + 4725 = 0$, ossia $z^3 - 18z^2 - \frac{27}{8}z + 18\frac{117}{256} = H = 0$.

92. Se restituendo ora in luogo della z il valore -1 ultimo termine dell' equazione data, risultasse $H = 0$ saremmo certi di un contatto; e facendo la stessa sostituzione in uno dei due trovati valori della x per z, si avrebbe l'ascissa x di quel contatto, che nel caso nostro s' avrebbe potuto sospettare nel vertice S, cui infatti l' asse è assai vicino avendosi trovato $KS = 0{,}076$ (*66*). Ma perchè fatta la so-

sostituzione in H non torna il zero, ma bensì $2\frac{213}{256}$, siamo anzi certi, che non si ha contatto alcuno dell' asse con un vertice.

93. Resta perciò da esaminare, indipendentemente dal metodo di approssimazione esposto ai n. 87, 88, 89, se l' asse cada sopra, o sotto S. A questo fine sia condotta una qualche indefinita DI, che tagli la MAE in qualche punto M normalmente, e sia pure condotta dal punto H della curva corrispondente alla $x=0$ la HN parallela alla AM, e si metta $H=u$ (91) equazione di una curva dell' asse DMI coll' origine delle z in N positive verso I, e negative verso D, e colle ordinate positive alla destra dell' asse. Sarà $NM=HA=-1$ la z del caso della equazione data; ed $ND=Hc$ sarà la z del caso dell' asse in DcS al contatto in S. E similmente sarà $NF=Hb$ la z del contatto dell' asse in T, ed $NI=Hd$ la z del contatto dell' asse R; nei quali tre casi si deve avere $H=0$, ossia $u=0$; il che vuol dire, che l' equazione $H=u$ deve incontrare l' asse DMI nei punti D, F, I. E perchè l' esponente dell' equazione della stessa curva è dispari, l'andamento di questa sarà (7,8) come *myaq*, con un ramo I*m* dalla parte delle ordinate positive, ed un altro D*q* dalla parte delle ordinate negative. E perchè nella equazione $H=u$, posta $z=-1$ $=HA=NM$, si trova $u=2\frac{213}{256}$ valore positivo, sarà questo come l' ordinata M*v*; il che mostra precisamente che l' asse MAE cade sotto D, e perciò sotto il vertice S; perchè se cadesse sopra D, il valore della u si sarebbe trovato negativo come quello di un' ordinata *gq*.

94. Non è adunque possibile, che le due radici AB, AC quantunque vicinissime al vertice, mi abbiano a sfuggire.

95. Vede ognuno, che i principj esposti sono applicabili a tutte le equazioni numeriche di qualunque grado, e che in conseguenza come ho trovato con essi prossimamente tutte quante le radici delle equazioni portate fin qui in esempio dal terzo al sesto grado, così si deve poter trovare coi medesimi principj le radici prossime di equazioni nu-

meriche di qualunque grado, senza il pericolo che me ne sfugga copia alcuna.

Capitolo VI.

Confronto di questo metodo con quello di altri Autori.

96. In addietro, data in x un'equazione numerica $Z=0$ libera da frazioni, per avere dei limiti vicini alle sue radici ricorrevasi al temperamento di mettere $Z=y$, e di sostituire in luogo dell' incognita x successivamente i numeri della serie naturale 0, 1, 2, 3 ec., notando i valori così risultanti della y. Dove tai valori si cangiavano di positivi in negativi, o al contrario, s' inferiva, com' è noto, che una radice irrazionale positiva stava fra quei due numeri (come fra due limiti) dai quali erano risultati i due valori della y di segno contrario. Lo stesso si praticò per le radici negative, fatta la sostituzione dei numeri $0, -1, -2, -3$ ec. Che se l'equazione data avea dei coefficienti frazionarj, prima di tutto la trasformavano in un' altra libera dalle frazioni, trattando indi questa nella maniera indicata.

97. Il ritrovare tai limiti fu creduto allora indispensabile per potere con essi passare con altri metodi ad un' ulteriore approssimazione ad ogni radice. Ma si conobbe, che nelle equazioni di alto grado, e con coefficienti di più cifre, tutte quelle sostituzioni divenivano assai laboriose ed incomode. Per questo il Lagny (Memorie di Parigi per l'anno 1722) si distinse, perchè accorciò di molto il lavoro con un metodo, il quale per altro non lascia tuttavia d'essere talvolta assai brigoso. Per vedere questo si prenda la mia equazione (81) $x^6 - 15x^4 + 25x^3 - 15x^2 + \frac{18}{5}x - \frac{20}{79} = 0$. Richiede anche il Lagny, che si liberi l' equazione dalle frazioni. A questo fine convien mettere $x = \frac{t}{5 \cdot 79} = \frac{t}{395}$, con che l' equazione cangiasi nella seguente $t^6 - 15 \cdot (395)^2 t^4 + 25 \cdot (395)^3 t^3 - 15 \cdot (395)^4 t^2 + 18 \cdot 79 \cdot (395)^4 t - (395)^5 \cdot 100 = 0$. L' ultimo termine riesce di 16. cifre. Perchè l' esponente dell' equazione è il 6, conviene in secondo luogo so-

stituire alla x sette numeri successivamente presi uno dopo l' altro nella serie dei numeri naturali, come sarebbero i numeri $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Dei sette numeri così risultanti convien prendere le differenze prime, seconde, terze, quarte, quinte, e seste. Queste ultime saranno costanti. Allora convien estendere la serie delle differenze quinte da una parte, e dall' altra. Indi successivamente sono da estendersi le altre serie delle differenze quarte, terze, e seconde, per potere così estendere in fine anche la serie dei numeri trovati da principio, fin dove si vedrà che i termini vanno a cambiarsi di positivi in negativi, o al contrario, giacchè appunto dove si ànno dei cambiamenti di segno si ànno i cercati limiti vicini alle radici. Con questo solo ogni Analista va a stancarsi assai più, che col mio metodo.

98. Ma vi è anche di più, e non poco. Siccome questo metodo soggiace al pericolo, che qualche copia di radici non si manifesti e sfugga, il de la Grange prescrisse un rimedio molto ingegnoso negli anni 1770, 1771, come dagli Atti di Berlino. Lo indicherò con un esempio dei più semplici. L' equazione data sia $x^3 - 7x - 7 = 0$. Questa dev' essere trasformata in un' altra, mettendo $x + u$ in luogo della x, onde si abbia $3x^2 + 3ux + u^2 - 7 = 0$. Poi da queste due equazioni convien eliminare la x, con che si otterrà $u^6 - 42u^4 + 441u^2 - 49 = 0$, equazione, che deve pure essere trasformata con mettere $u^2 = \frac{1}{y}$, e così si ha $y^3 - 9y^2 + \frac{42y}{49} - \frac{1}{49} = 0$. Si deve poi in luogo della y sostituire successivamente 1, 2, 3, ec. Si trova, che la radice positiva maggiore di questa equazione sta fra l' 8, ed il 9. La radice quadrata di codesto numero 9 è 3; per la qual cosa si dovrà mettere $x = \frac{z}{3}$, con che si ha $z^3 - 63z - 189 = 0$. Questa era la preparazione da farsi anche nella mia equazione del n. 81 dopo di averla liberata dalle frazioni, e prima di trovare le indicate serie, per poter esser certi di trovare dei limiti di tutte le radici positive. Altrettanto poi rimane da farsi per le radici negative avendo messo $-x$ in luogo della x.

99. Solamente dopo una tanta fatica si ha creduto finora vi potesse esser luogo di passare ad altri metodi, che portino ad una ulteriore approssimazione alle radici, giacchè tutti questi metodi, che indicherò, supponevano trovati i limiti suddetti. Tra questi metodi giusta lo stesso de la Grange il più seguitato era quello del Newton. L' esporrò con un esempio. Sia l' equazione $x^3 - 3x - 20 = 0$. Sieno già trovati i limiti delle sue radici; ed uno di essi si dica p. Mette egli $x = p + z$, e fa la sostituzione, trascurando tutti i termini che contengono la z elevata a qualche podestà, giacchè posta p valore prossimo alla radice, la z riesce una quantità piccola. Così trova $z = \frac{-p^3 + 3p + 20}{3p^2 - 3}$, quantità da aggiungersi alla p, per avere $p + z = \frac{2p^3 + 20}{3p^2 - 3}$ valore vicino alla radice x più della sola p. Questo nuovo valore si metta in luogo della p, ed operando come sopra si arriverà ad un altro valore anche più vicino alla radice, e così di seguito.

100. Venne in appresso il Taylor, col suo metodo, che poi si risolve in quello del Newton. Si cerchi la x dell' anzidetta equazione $x^3 - 3x - 20 = 0$ (A). A questo fine mette $x = p + z$. Sarà perciò $x > p$, e sostituendo la p in A in luogo della x, non si potrà avere zero, ma sarà $p^3 - 3p - 20 = y$. Posta indi dp costante, trova $dy = 3p^2 dp - 3dp$, cioè $3p^2 - 3 = \frac{dy}{dp}$, $ddy = 6pdp^2$, onde $3p^2 = \frac{ddy}{2dp^2}$, $d^3y = 6dp^3$, onde $1 = \frac{d^3y}{6dp^3}$.

101. Ora in A in luogo della x si metta $p + z$, e si avrà $(p + z)^3 - 3 \cdot (p + z) - 20 = 0$, ossia $p^3 + 3p^2 z + 3pz^2 + z^3 - 3p - 3z - 20 = 0$, oppure $p^3 - 3p - 20 + z \cdot (3p^2 - 3) + z^2 \cdot 3p + z^3 \cdot 1 = 0$, e per ultimo $y + \frac{zdy}{dp} + \frac{z^2 ddy}{2dp^2} + \frac{z^3 \cdot d^3y}{6dp^2} = 0$.

102. Quì il Taylor suppone esso pure trovato con qualche metodo un limite, o valore p vicino alla radice x, cosicchè per essere $x = p + z$ sia z una quantità piccola,

per la qual cosa conclude, che si possano trascurare i due ultimi termini perchè moltiplicati in z^2, ed in z^3, e che perciò si possa dire prossimamente $y + \frac{zdy}{dp} = 0$, d' onde ricavasi $z = -\frac{ydp}{dy}$, valore da aggiungersi al limite p per avere $p - \frac{ydp}{dy}$, quantità vicina alla radice x più della sola p. Mettendo indi $p - \frac{ydp}{dy}$ in luogo della p, ed operando come sopra, si troverà un altro valore anche più vicino alla radice x.

103. La formola stessa $p - \frac{ydp}{dy}$ col discorso stesso si ricaverà da ogni altra equazione. Dunque la formola è generale. Alla stessa formola arriva anche l' Eulero nelle sue Instituzioni del Calcolo Differenziale. Sia y una funzione della x, e sia f una radice della equazione $y = 0$. Ciò posto, l' Eulero prima del Cap. IX. trattando delle funzioni stabilisce (A) $0 = y + \frac{(f-x).dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 \cdot d^2y}{dx^2} + \frac{(f-x)^3 \cdot d^3y}{dx^3}$ ec. dove dx è costante. Poi al Cap. IX. passa a considerare la f non più come precisa radice, ma come una quantità assai prossima ad una radice, nel qual caso $f - x$ riesce di un valore molto piccolo. Per questo la formola A diviene secondo l' Eulero una serie così convergente, che tutti i termini dopo il secondo sono trascurabili. Così ricava $0 = y + \frac{(f-x).dy}{dx}$, ossia $f = x - \frac{ydx}{dy}$ formola simile alla $p - \frac{ydp}{dy}$ del Taylor.

104. Dissi che il metodo del Taylor si risolve in quello del Newton. Infatti la trovata formola generale $p - \frac{ydp}{dy}$, sostituiti i valori della y, e della dy dedotti dall' equazione $p^3 - 3p - 20 = y$, si converte nell' altra particolare $\frac{2p^3 + 20}{3p^2 - 3}$ trovata al n. 99 col metodo del Newton; cosa forse non avvertita da altri.

105. Trovato, ch' ebbi le mie formole col metodo delle tangenti delle curve Paraboliche, m' accorsi che desse formole combinano precisamente con quelle del Newton, del Taylor, e dell' Eulero. Infatti la mia formola generale $x - \frac{ydx}{dy}$ è simile alla $p - \frac{ydp}{dy}$. E considerata al solito l' equazione data $x^3 - 3x - 20 = 0$ un caso particolare dell' altra $x^3 - 3x - 20 = y$, si trova che la mia formola si converte in questo caso nella seguente $\frac{2x^3 + 20}{3x^2 - 3}$ affatto simile alla $\frac{2p^3 + 20}{3p^2 - 3}$ trovata quì sopra.

106. Ognuno vede però, che i suddetti Autori sono arrivati alle loro conseguenze con principj di gran lunga diversi dai miei, onde non dee recar meraviglia, che essi non sieno giunti a scoprire di esse tutto quel buon uso, ch' è riuscito a me di trovare attesi i principj da me fortunatamente coltivati. Mettevano essi per base fondamentale dei loro discorsi, che fossero prima trovati dei limiti assai vicini ad ogni radice, e per questo motivo erano necessarie per essi le tante operazioni da me accennate ai n. 97, 98, e delle quali pel mio metodo vedo di non averne mai il bisogno. Spessissimo io posso assumere per primo limite un' ascissa molto maggiore della radice. Il bisogno di liberare l' equazione data dalle frazioni io non l' ho. Non abbisogno di trasformazioni, nè di eliminazioni (89). Per avere il primo limite di ogni radice a me basta trovare i valori prossimi delle ascisse dei vertici estremi, e delle ascisse dei flessi contrari della curva corrispondente, cosicchè per avere le due radici estreme AP, AS (fig. 1) dell' equazione $x^6 - 15x^4$, ec. del n. 81 mi basta sapere prossimamente le due ascisse Ag, Af dei vertici estremi O, R, giacchè ogni ascissa maggiore della Aq mi serve per primo limite della radice AP; come ogni ascissa maggiore della Af mi può essere primo limite della radice AS. E per le radici intermedie AM, AK, AG io prendo per primo limite le ascisse prossime dei flessi contrarj N, i, F. Non dissimulerò già, che anche il trovare tai valori prossimi col mio metodo costa una fatica non tenue. Dessa però è quella, che vi

vuole per le operazioni da me prescritte dal n. 61 al n. 86, che sono tutte ovvie, ed eseguibili da ogni Analista fornito di qualche pazienza, e fatti bene i conti si troveranno sensibilmente al di sotto di quelle, che importano i precetti del Lagny, e del de la Grange.

Non devo tacere, che l' Eulero nel sito citato passa a considerare la x come funzione della y, e presa dy costante esibisce l' altra formola $f = x - \frac{ydx}{dy} + \frac{y^2\, ddx}{2dy^2} - \frac{y^3\, d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4\, d^4y}{24dy^4}$ ec. (B) da esso valutata preferibile alla prima A, sempreche alla x si sostuisca un valore prossimo alla radice cercata. Ma a me non riesce tale. Sia l' equazione dello stesso Eulero $x^3 + 2x - 2 = 0$. Facendo $x^3 - 2x - 2 = y$ si trova $x - \frac{ydx}{dy} = \frac{2x^3 + 2}{3x^2 + 2}$. Assumo per primo limite A l' ascissa $x = 1$, e trovo il secondo limite $B = 0{,}77$; ed indi trovo il terzo limite $C = 0{,}77091$; e poi tosto il quarto limite $D = 0{,}770916997$, ch' è il valore stesso trovato dall' Eulero con un travaglio senza dubbio maggiore.

Dirò quì come dall' equazione $x^3 - 3x + \frac{5}{4} = 0$ portata in esempio al n. 65 io abbia dedotto le altre di grado di mano in mano superiori portate pure in esempio ai n. 66, 73, 81, tali che differenziate e ridotte al zero restituiscono la sua precedente. Ecco. Moltiplicando in dx, ho $x^3dx - 3x^2dx + \frac{5}{4}\, dx$; integro, ed ho $\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{5}{4}\, x$. Moltiplico in 4, ed ho $x^4 - 6x^2 + 5x$, ed aggiunto ad arbitrio -1, fo $x^4 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ equazione del n. 66.

Di nuovo moltiplico in dx, ed ho $x^4\, dx - 6x^2\, dx + 5xdx - dx$; ed integrando e moltiplicando in 5, ed aggiungendo ad arbitrio, $\frac{3}{5}$ fo $x^5 - 10x^3 + 12\frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5} = 0$, equazione del n. 71. Moltiplico pure in dx, ed ottengo $x^5dx - 10x^3dx + 12\frac{1}{2}\, x^2dx - 5xdx + \frac{3}{5}\, dx$; ed integrando, e moltiplicando in 6, ed aggiungendo ad arbitrio $-\frac{20}{79}$, fo $x^6-15x^4+25x^3-15x^2+\frac{18}{5}x-\frac{20}{79}=0$ equazione del n. 81.

Volendo passare all'esempio di una equazione di settimo grado avrei moltiplicato in dx, con che avrei avuto $x^6dx-15x^4dx$ ec., ed integrando, e moltiplicando in 7, ed aggiungendo m, avrei ottenuto $x^7-21x^5+43\frac{3}{4}x^4-35x^3+12\frac{3}{5}x^2-\frac{140x}{79}+m=0$; e così di seguito.

Capitolo VII.

Articolo I.

Natura delle radici delle equazioni litterali di quinto grado indipendentemente dal caso irriducibile.

107. Soddisfo ora alla promessa fatta al n. 41. Si abbia l'equazione $x^5-5ax^4+5cx^3-5hx^2+i=X=0$ mancante del termine penultimo (37). Si metta $X=y$ equazione di una curva dell'asse AQ (fig. 18.) coll' origine delle x in A. Fatto $x=0$ sarà $y=i=AB$; e sarà B un punto della curva. E perchè facendo $dy=0$ si ha $x^4-4ax^3+3cx^2-2hx=0$, ossia $x=0$, ed $x^3-4ax^2+3cx-2h=B=0$, ne viene, che un vertice corrisponde all' ascissa $x=0$, cioè che avvi un vertice in B; e che altri tre vertici corrispondono a tre ascisse, come AM, AO, AQ prese eguali alle tre radici della equazione $B=0$, ch' io suppongo tutte reali. Le ordinate corrispondenti siano le MD, OF, QH, nel qual caso l' andamento della curva (avendo anche riflesso ai n. 7, 8) sarà come KBDFHI.

108. In luogo della $i=AB$ mettiamo la variabile z. Allora invece di $X=y$ avremo $x^5-5ax^4+5cx^3-5hx^2+z=y$. Indi cerchiamo cosa dovrebb' essere la z perchè l' asse, che si alza ed abbassa al variare della z, arrivi a toccare un qualche vertice. Poichè al vertice toccato si ha a un tempo stesso $y=0$, e $dy=0$, avremo in codesto caso $x^5-5ax^4+5cx^3-5hx^2+z=0$ (A), ed insieme $B=0$.

Da

Da queste due equazioni col metodo del n. 91, o con qualche altro, si elimini la x. Così si arriverà prima ad un valore (come al n. 91) della x espresso da una funzione della z e le costanti, cioè si arriverà ad $x = f.z$; e poi si arriverà all' equazione fra la z e le costanti libera dalle x, e quest' equazione sarà di terzo grado come $z^3 - Mz^2 + Nz + P = T = 0$.

109. Se restituendo la i in luogo della z riuscirà $T = 0$, si avrà l'asse a uno dei tre vertici H,D,F. E messa la stessa i in luogo della z nella equazione $x = f.z$, si avrà l' ascissa x del vertice toccato.

110. Ma se restituita la i in luogo della z non si otterrà $T = 0$, ed in conseguenza il contatto non si verificherà, allora è da cercarsi se l' asse stia sotto H, o fra H e D, o fra D ed F, o fra F e B. Non sopra B, per essere positivo l' ultimo termine i della equazione data.

111. Per questo si faccia T (108) $= u$, e dal punto B della curva, che corrisponde all' ascissa $x = 0$, si meni parallela all' asse la BE ad incontrare in E una qualche CE normale all' asse: E sia questa CE un altro asse di una seconda curva *defa* della equazione $T = u$ coll' origine delle ascisse z dal punto E positive verso C, e colle ordinate u positive alla destra della CE. Alla stessa CE dai tre vertici H,D,F sieno condotte le normali HY,DZ,FV, e sarà EY la z stando il primo asse in YH al contatto del vertice H: E la EZ sarà la z essendo il primo asse in ZD al contatto in D. E per fine sarà EV la z mentre sia il primo asse in VF al contatto del vertice F. Dunque devono essere le EY, EZ, EV le radici della equazione $T = 0$ (108), e la curva dell' equazione $T = u$ passerà pei punti V,Z,Y. E perchè l' equazione è di terzo grado, la curva (7,8) deve avere un ramo Ya infinito dalla parte delle ordinate positive; ed un altro Vd infinito dalla parte opposta. Tutto questo fa, che l' andamento della curva sia come *defa*.

112. Si faccia $du = 0$, e si avrà $z = \dfrac{M \pm \sqrt{(M^2 - 3N)}}{3}$ (108,109). Si supponga $M^2 > 3N$. I due valori della z saranno reali, e sarà $z = \dfrac{M + \sqrt{(M^2 - 3N)}}{3} =$ Eh ascissa del

vertice f; e $z = \frac{M - \sqrt{(M^2 - 3N)}}{3} = Eg$, ascissa del vertice e.

113. Ora se la i data sarà maggiore della Eh, e se inoltre sostituendo i in luogo della z sarà u positiva, questo mostrerà, che quest' ordinata termina al ramo Ya; e che in conseguenza appartiene ad un' ascissa $z > EY$, e che perciò nel caso della figura l' asse cade sotto H. E se essendo $i > Eh$ sarà u negativa, questa terminerà all' arco fY, e l' asse starà fra H, e D. E se essendo i tra Eh, ed Eg sarà u negativa, ciò vorra dire, che l' ordinata u termina all' arco Zf, e che anche in questo caso l' asse cade fra H, e D. E se essendo i tra Eh, ed Eg sarà u positiva, l' ordinata u terminerà all' arco Ze, e l' asse cadrà tra D, ed F. E se essendo i minore della Eg la u sia positiva, questa terminerà all' arco EV, ed anche in questo caso l' asse cade fra D, ed F. Ed essendo i minore della Eg se sarà u negativa, l' asse cadrà fra F, e B.

114. Ognuno vede facilmente, che se l' asse è sopra F le radici reali sono due positive, ed una negativa; e se l' asse è fra F, e D sono quattro positive, ed una negativa; se è fra D, ed H sono due positive, ed una negativa; e se in fine l' asse è sotto H non v' ha, che una radice reale, ch' è negativa.

Articolo II.

Natura delle radici delle equazioni litterali di sesto grado indipendentemente dal caso irriducibile.

115. Si abbia l' equazione $x^6 - 6ax^5 + 6cx^4 - 6fx^3 + 6hx^2 - i = Z = 0$ mancante del termine penultimo (37). Sarà questo un caso particolare della equazione $Z = y$ di una curva, il cui asse sia ALP (fig. 19) coll' origine delle x in A. Facendo $dy = 0$, abbiamo $x^5 - 5ax^4 + 4cx^3 - 3fx^2 + 2hx = 0$, cioè $x = 0$, ed $x^4 - 5ax^3 + 4cx^2 - 3fx + 2h = T = 0$; il che vuol dire, che un caso della $dy = 0$ cade dove $x = 0$, e che perciò fatta $x = 0$, la corrispondente ascissa $AB = -i$ termina a un vertice in B; e che

se l' equazione $T = o$ ha tutte e quattro le sue radici reali, come AL,AM,AN,AO, a ognuna di queste corrisponderà un vertice; i quali se le ordinate saranno come le LR,MS,NT,OV, si troveranno ai punti R,S,T,V, e così avremo (7,8) l' andamento della curva QBRSTVP.

116. In luogo della costante $-i$ mettiamo la variabile z, e cerchiamo cosa dovrà essere la z perchè l'asse tocchi uno dei quattro vertici. Al punto del contatto si avrà a un tempo stesso $y = o$, e $dy = o$. Dalle due equazioni così risultanti si elimini la x (91), e si arriverà ad un' equazione di quarto grado $z^4 + Mz^3 + Nz^2 + Oz + Q = H = o$.

117. Se sostituendo la i in luogo della z, riuscirà $H = o$, si avrà l' asse ad uno dei quattro vertici, nel qual caso l' equazione sarà deprimibile di due gradi, com' è noto. Che se non si otterrà $Z = o$, il contatto non vi sarà, ed in tal caso è da cercarsi se l' asse nel caso della figura stia sopra R, o fra R, e T, o fra T, ed V; o fra V ed S; o fra S, e B; o sotto B.

118. A questo fine si metta H (116) $= t$; e per un qualche punto C dell' asse AP passi normalmente una indefinita ECn, e dal punto B della curva corrispondente all' ascissa $x = o$ si conduca parallela all' asse la BE; e si metta ECn secondo asse di un' altra curva *dhgfe* della equazione $H = t$ coll' origine delle ascisse z in E positive verso F, e negative verso n; e colle ordinate positive alla destra dell' asse. Dai vertici R,T,V,S s' intendano condotte le Ra,To,Vc,Sb parallele alla AP. Sarà Ea la z del primo asse in aR al contatto del vertice R; e la Eo sarà la z del contatto in T; e la Ec la z del contatto in V, e la Eb la z del contatto in S; nei quali casi si deve avere $t = o$. Dunque devono essere le Ea,Eo,Ec,Eb le radici dell' equazione $H = o$, e la curva della equazione $H = t$ deve passare pei punti a,o,c,b, nei quali dev' essere $t = o$. E perchè l' equazione $H = t$ è di quarto grado, cioè di un esponente pari (7,8), la curva deve avere a ogni estremo un ramo infinito, come *bd*, *ae*, ambi alla destra dell' asse, ossia dalla parte delle ordinate positive. Tutto questo fa, che l' andamento della curva riuscir debba come *efghd*, con un flesso contrario nell' arco *fg*, come in i, ed un altro nell' arco *gh*, come in t.

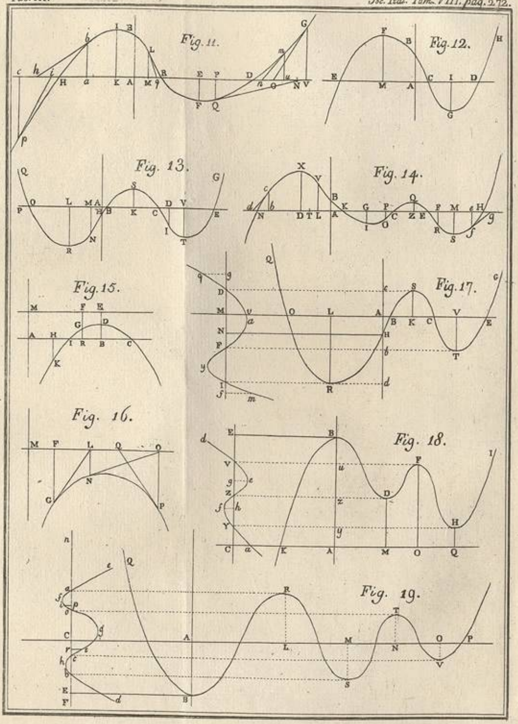


Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

Fig. 1.

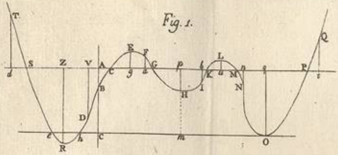


Fig. 3.

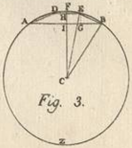


Fig. 2.

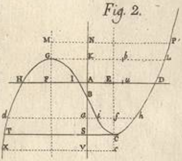


Fig. 4.

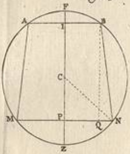


Fig. 5.

Fig. 6.

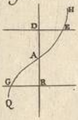


Fig. 7.

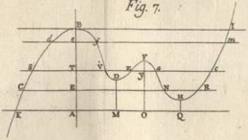


Fig. 8.

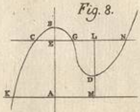


Fig. 9.

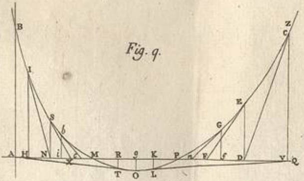
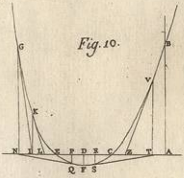


Fig. 10.



119. Per trovare le ascisse di essi flessi contrarj, basta mettere $ddt = 0$, perchè così (per essere $H = t$ equazione di quarto grado) si avrà un' equazione in z di secondo grado, la quale somministrerà le due ascisse Ep, Er. Se al valore dell' ascissa maggiore Ep corrisponderà un' ordinata t negativa, ed al valore dell' ascissa minore Er corrisponderà una t positiva, queste t saranno come le pi, rt.

120. Pertanto se (stando quì al caso della fig. 19) la $-i$ della equazione data sarà minore della trovata Er, e la t sarà positiva, ed insieme decrescente, cioè se sarà $-i <$ Er, e t positiva, dt negativa, l' asse starà sotto b, ossia sotto S. E se essendo $-i <$ Er, ed insieme t positiva, e dt positiva, l' asse starà fra c, ed r. E se essendo $-i$ fra Er, ed Ep, ed inoltre t positiva, l' asse si troverà fra r, ed o. E se essendo $-i$ fra Er, ed Ep sia inoltre t negativa, l' asse starà fra o, e p. E se $-i >$ Ep, e t negativa, l' asse starà fra p ed a. E se $-i >$ Ep, ed insieme t positiva, l' asse starà sopra a.

121. Perciò stando al caso della figura noi potremo dire se l' asse della curva principale QBRSTVP si trovi sotto b, cioè sotto S; oppure fra b, e c, cioè fra S, ed V; oppure fra c ed o, cioè fra V, e T; oppure fra o, ed a, cioè fra T ed R; oppure sopra a, cioè sopra R. Le radici reali del primo caso sono una positiva, ed una negativa; pel secondo caso tre positive, ed una negativa; del terzo caso cinque positive ed una negativa; del quarto caso tre positive ed una negativa; e del quinto caso una positiva, ed una negativa.

122. Con questo metodo, e contando ancora sulle radici delle equazioni cubiche e biquadratiche (26), potrei dare anche la natura delle radici delle equazioni litterali di settimo, e di ottavo grado; ma me ne sono astenuto essendo di parere, che trattandosi di problemi ad equazioni alte, torni meglio il ridurre l' equazione a numeri nei casi particolari, ed attenersi al metodo esposto fino al n. 95.